

Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова

На правах рукопису

СЛОБОДЕНЮК АРТУР ОЛЕКСІЙОВИЧ

УДК 537.633.9, 537.9

ГРАФЕН ТА НЕРЕЛЯТИВІСТСЬКИЙ ДВОВИМІРНИЙ
ЕЛЕКТРОННИЙ ГАЗ У НЕОДНОРІДНОМУ МАГНІТНОМУ
ПОЛІ

01.04.02 — теоретична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Локтев Вадим Михайлович
академік НАН України
доктор фіз.-мат. наук, професор

Київ – 2011

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	10
РОЗДІЛ 2 ДВОВИМІРНІ ФЕРМІОНИ В ПОТЕНЦІАЛІ	
ААРОНОВА-БОМА	17
2.1 Хвильові функції рівняння Шрьодінгера та інтегральне представлення для густини станів	17
2.2 Повна та локальна густини станів	25
2.3 Хвильові функції рівняння Дірака та інтегральне представлення для густини станів	34
2.4 Повна та локальна густини станів	46
2.5 Функція Гріна графена в потенціалі Ааронова-Бома	52
2.6 Висновок	58
РОЗДІЛ 3 ДВОВИМІРНІ ФЕРМІОНИ В СУПЕРПОЗИЦІЇ	
ПОТЕНЦІАЛІВ ОДНОРІДНОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ ТА	
ААРОНОВА-БОМА. НЕРЕЛЯТИВІСТСЬКИЙ ВИПАДОК	59
3.1 Хвильові функції та спектр рівняння Шрьодінгера	59
3.2 Інтегральне представлення для густини станів	63
3.3 Повна густина станів	69
3.4 Локальна густина станів	71
3.5 Висновок	80
РОЗДІЛ 4 ДВОВИМІРНІ ФЕРМІОНИ В СУПЕРПОЗИЦІЇ	
ПОТЕНЦІАЛІВ ОДНОРІДНОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ ТА	
ААРОНОВА-БОМА. РЕЛЯТИВІСТСЬКИЙ ВИПАДОК	81

	3
4.1 Хвильові функції та спектр рівняння Дірака	81
4.2 Інтегральне представлення для густини станів	92
4.3 Повна густина станів	96
4.4 Локальна густина станів	99
4.5 Висновок	104
ВИСНОВКИ	105
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	107

Перелік умовних позначень

- ГС – густина станів
- ЛГС – локальна густина станів
- ФГ – функція Гріна
- ПАБ – потенціал Ааронова-Бома
- АБ – Ааронова-Бома
- СТМ – скануюча тунельна мікроскопія
- 2DEГ – двовимірний електронний газ
- 2D – двовимірний

ВСТУП

Актуальність теми

У 2004 році Андрій Гейм і Костянтин Новосьолов зробили вирішальний внесок в отримання, ідентифікацію і з'ясування основних фізичних властивостей графену — моношарового вуглецевого кристалу з гексагональною будовою ґратки.

Майже одразу було встановлено, що цей матеріал має цілу низку виняткових властивостей, які роблять його надзвичайно цікавим як для подальших фундаментальних досліджень, так і для майбутніх широких застосувань. Зокрема, графен є найміцнішим серед відомих кристалічних речовин і має надзвичайно високу теплопровідність, хімічну і термічну стабільність. Величина рухливості електронів у ньому за кімнатної температури найбільша серед відомих напівпровідників [1]. Своїми унікальними електронними і оптичними властивостями графен зобов'язаний специфічній зонній структурі, де залежність енергії носіїв заряду від квазіімпульсу має форму конусів, вершини яких торкаються один одного у так званих діраківських точках. Лінійний закон дисперсії поблизу цих точок, дозволяє описати динаміку електронних збуджень в термінах рівняння Дірака. Таке представлення виявилось надзвичайно зручним, оскільки, у цьому випадку, електронні властивості графену мають глибокі аналогії з фізикою елементарних частинок і квантовою теорією поля.

Так, рух електронів в полі космічних струн — об'єктів, які могли виникнути на початкових етапах еволюції всесвіту, має багато спільного з динамікою квазі-частинкових збуджень графену за наявності дефектів ґратки (дисклінацій). Вони мають вигляд п'ятикутників, семикутників чи їх комбінацій (наприклад дисклінація Стоуна-Уолеса) в гексагональній структурі кристалу. Дефекти індукують далекосяжні деформації, які змінюючи траєкторії електронів, призводять до їх

розсіяння. Вплив дисклінацій можна описати, вводячи додаткове калібрувальне поле в рівняння Дірака для графену. Зокрема ефективне поле, що відповідає одиничному п'ятикутному дефекту, близьке до аарон-бомівського (поверхня графену у цьому випадку, приймає конічну форму). Розв'язки модифікованого рівняння Дірака дозволили описати також спектр збуджень фулеренів різних розмірів та інших наноб'єктів, що містять п'ятикутні комірки [2, 3, 4].

Згодом, виявилось, що електронна структура деформованого графену також може бути описана в термінах того ж рівняння Дірака з додатковим калібрувальним полем. Проте, якщо ефективне поле дисклінацій виникає за рахунок геометричних особливостей поверхні графену, то у цьому випадку воно є наслідком змін відстаней між атомами вуглецю в кристалі та взаємного розташування їх електронних орбіталей.

Описані системи мають схожу структуру — характерний розподіл індукованого неоднорідного “псевдомагнітного” поля (яке відповідає ефективним калібрувальним потенціалам в графені) співпадає з областями деформації двовимірного кристалу. Вони активно вивчаються як теоретично, так і експериментально [5]. Водночас, близьке питання щодо визначення електронних властивостей графену в присутності неоднорідно розподіленого магнітного поля залишається відкритим.

Найбільш простим та нетривіальним прикладом такого поля є поле нескінченно-тонкого соленоїда, векторний потенціал якого відомий як потенціал Ааронова-Бома (ПАБ). На практиці, схожа польова конфігурація в графеновому листі може бути отримана розміщенням над ним надпровідника II-роду. Зважаючи на сучасний стан технології отримання графенових зразків, створення об'єктів такого роду не повинно містити суттєвих труднощів. Зокрема, аналогічні системи, що містять двовимірний електронний газ (2DEG), з вирощеною на на-

півпровідниковій гетероструктурі (GaAs/AlGaAs) надпровідною плівкою, були створені близько 20 років тому [6, 7] і вивчались у контексті магнетотранспорту [8, 9]. Проте відсутність аналітичних розрахунків для цих систем (наприклад, для локальної густини електронних станів), свідчить про не зовсім достатній рівень розуміння поведінки 2DEG у присутності магнітного вихора.

Наявність невирішених питань стосовно електронних властивостей графену та нерелятивіського 2DEG (таких, як координатно-енергетична залежність локальної і повної густин (ЛГС і ГС, відповідно) електронних станів) в польових конфігураціях, що містять ПАБ, визначає актуальність задач, розглянутих у даній роботі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертаційна робота виконана в інституті теоретичної фізики ім.М. М. Боголюбова у відділі нелінійної фізики конденсованого стану, в рамках теми “Нелінійні механізми передачі енергії, заряду та інформації в наноструктурах та біомолекулах” 2007-2011 рр., шифр 1.4.7.2, номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ РК 0106U007886).

Метою досліджень є встановлення електронних властивостей ферміонних систем: графену і двовимірного електронного газу в напівпровідникових гетероструктурах.

Зокрема, розв'язувались наступні задачі:

- знаходження спектру і власних хвильових функцій електронних збуджень двовимірних систем у польових конфігураціях за наявності потенціалу Ааронова-Бома та отримання на їх основі інтегрального представлення функції Гріна;
- обчислення координатно-залежної електронної функції Гріна графена у потенціалі Ааронова-Бома;

- отримання виразів для ГС і ЛГС електронних збуджень двовимірних систем в польових конфігураціях за наявності потенціала Ааронова-Бома;
- з'ясування можливості експериментально відрізнити безмасові і масивні носії, виходячи з координатно-енергетичних особливостей їх густин станів.

Об'єктами дослідження є квазічастинкові електронні збудження в графені та напівпровідникових гетероструктурах.

Предмет дослідження — локальна і повна густини станів, функція Гріна двовимірних електронних систем у зовнішньому магнітному полі.

У роботі були застосовані наступні теоретичні *методи дослідження*: метод функцій Гріна, для обчислення густини станів двовимірних систем, методи теорії функцій комплексної змінної, а також методи математичної фізики та спеціальних функцій.

Наукова новизна одержаних результатів

Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

1. Аналітичний вираз для повної і локальної густини станів двовимірних ферміонів в польових конфігураціях за наявності потенціала Ааронова-Бома;
2. Точний вигляд координатно-залежної функції Гріна графену в потенціалі Ааронова-Бома;
3. Величина і координатна залежність локальної густини станів поблизу магнітного вихора, яка залежить від спектру квазічастинок;
4. Явний вигляд аарон-бомівських осциляцій локальних густин станів двовимірних електронних газів;
5. Характер додаткових “вихрових” піків густини станів, які виявлені при наявності суперпозиції потенціала Ааронова-Бома і постійного магнітного

поля.

Практичне значення одержаних результатів

Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теоретичний опис графену та напівпровідникових структур, що містять двовимірний електронний газ. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані при дослідженні електронних властивостей графену чи 2DEG в магнітних полях абрикосівської ґратки і магнітних домішок.

Особистий внесок здобувача

Результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору. Це стосується, зокрема, формулювання задач та виконання аналітичних та чисельних розрахунків.

У роботі [10] дисертантом отримано аналітичний вираз для локальних і повних густин станів електронних збуджень двовимірних систем у полі одиничного вихору Ааронова-Бома. У роботі [11] здобувачем отримано і проаналізовано вираз для координатно-залежної функції Гріна графена у потенціалі Ааронова-Бома. В роботі [12] дисертантом розв'язана спектральна задача для гамільтоніану Дірака, який описує електрони графену у суперпозиції постійного магнітного поля і поля Ааронова-Бома. У роботах [13, 14] дисертантом було досліджено властивості двовимірних електронних систем, що знаходяться в постійному магнітному полі і полі Ааронова-Бома.

Апробація результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи доповідались таких конференціях: “10-та Всеукраїнська школа семінар і Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та конденсованої речовини” (Львів, Україна, 3 – 4 червня 2010 р.); Конференція молодих вчених “Сучасні проблеми теоретичної фізики” (Київ, Україна, 23 – 27

грудня 2010 р.); “11-та Всеукраїнська школа семінар і Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та конденсованої речовини” (Львів, Україна, 1 – 3 червня 2011 р.); 2-nd International Conference for Young Scientists “Low Temperature Physics-2011” (Kharkov, Ukraine, 6 – 10 June 2011). Основні результати дослідження також обговорювалися на “Давидівських читаннях” (Київ, Україна, 28 – 29 грудня 2010 р.), школі з теоретичної фізики “Quantum theory from small to large scales” (Les-Houches, France, 2 – 27 August 2010) та на семінарах відділу нелінійної фізики конденсованого стану.

Публікації

Основні результати роботи опубліковано у 5 статтях [10, 11, 12, 13, 14] та додатково висвітлено у матеріалах конференцій [15, 16, 17, 18]. Публікації, що виносяться на захист, включають 3 статті у провідних фахових виданнях України [11, 12, 14].

Структура дисертаційної роботи

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 109 найменувань. Робота написана на 121 сторінках машинописного тексту, містить 9 рисунків.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Квантова задача про рух електронів в магнітному полі займає важливе місце в розумінні багатьох явищ природи. Незважаючи на відносну простоту, вона є зручною відправною точкою для розгляду різноманітних систем, як у фізиці твердого тіла, так і за її межами.

Історію дослідження поведінки ферміонів в магнітному полі умовно можна поділити на дві частини. До першої відносяться експерименти (та їх теоретичні пояснення) в однорідному магнітному полі, які значною мірою, пов'язані з визначенням електронних характеристик металів. Друга виникла в результаті вивчення квантової динаміки ферміонів на фоні топологічно нетривіальних польових конфігурацій калібрувальних полів. Згодом був виявлений тісний зв'язок між передбаченнями цих моделей квантової теорії поля і низкою незвичайних ефектів, які були експериментально отримані в низькорозмірній фізиці конденсованих середовищ.

Хоча результати, які відносяться до першої частини, на сьогоднішній момент є класичними, їх розуміння важливе при аналізі більш складних відкритих питань другої частини.

Перші експерименти з вивчення властивостей твердих тіл в однорідному магнітному полі були зроблені Л. В. Шубніковим, В. Й. де Газом і П. ван Альфеном у 30-их роках. Вони спостерігали осциляції провідності та намагніченості зразків вісмуту, зі зміною величини напруженості магнітного поля [19, 20]. На той час, важко було передбачити, що ці досить дивні явища, виявляться важливим інструментом при дослідженні електронної структури металів. Л. Д. Ландау передбачив осциляції намагніченості (ефект де Газа - ван Альфена) для випадку теорії вільних електронів у своїй відомій роботі про діамagnetизм металів

[21]. Виявилось, що така, незрозуміла на перший погляд, дивна поведінка фізичних характеристик електронного газу є наслідком квантування радіусу орбіт електрона в площині, перпендикулярній до напрямку магнітного поля, тобто є суто квантовим явищем. Пізніше Р. Е. Пайерлс розробив кількісну теорію осциляцій, в якій розглядався ізотропний газ електронів, а їх ефективна маса і енергія Фермі грали роль параметрів системи [22, 23]. Теорія базувалася на введеному Л. Д. Ландау понятті про рівні енергії вільних електронів в магнітному полі, результатами якої було формулювання прозорого якісного пояснення: осциляції виникають тоді, коли “рівні Ландау” перетинають рівень Фермі і виявляються незаселеними. Результати Л. Д. Ландау і Р. Е. Пайерлса були узагальнені Ю. Б. Румером на всю область температур і величин магнітного поля [24, 25]. Правила квантування руху електронів з довільним законом дисперсії були сформульовані І. М. Ліфшицем у 1950 році і незалежно Л. Онзагером, і мають назву правил Ліфшиця-Онзагера [26]. Остаточна теорія цього ефекту була побудована І. М. Ліфшицем і А. М. Косевичем [27, 28], на основі якої була розв’язана обернена задача про відновлення поверхні Фермі за результатами експериментальних вимірювань ефекту де Гааза - ван Альфена [29]. Багаточисельні вимірювання цього ефекту дозволили скласти атлас поверхонь Фермі.

Ефект де Гааза - ван Альфена виявився одним з багатьох прикладів явищ квантових осциляцій — періодичної залежності термодинамічних і кінетичних характеристик металів та вироджених напівпровідників у постійному магнітному полі. Серед них слід відзначити аномальний скін ефект [30], ефект Шубнікова - де Гааза [31, 32], магнітоакустичний ефект [33], циклотронний резонанс Азбеля -Канера [34], ефект Гантмахера [35] та багато інших.

Дослідження квантових осциляцій — найбільш універсальним метод визначення характеристик електронного спектру металів та вироджених напівпровід-

ників. Його ефективність обумовлена, в першу чергу, тим, що квантові осциляції можна спостерігати на неідеальних зразках (що, в свою чергу, означає можливість дослідження впливу домішок на поверхню Фермі і розсіяння на них), інтерметалічних речовинах, окислах перехідних металів (кристали яких менш ідеальні, ніж кристали чистих металів).

Мінітюаризація експериментальних зразків призвела до відкриття квантових розмірних ефектів в магнітному полі — зміни властивостей кристалу, коли один з його розмірів стає співрозмірним з довжиною хвилі де Бройля електронів і які зумовлені квантуванням їх руху вздовж напрямку, де розмір кристала співрозмірний з довжиною хвилі електрона. Зокрема розмірні магнітоакустичні явища в тонких плівках виявилися більш інформативними, ніж їх аналоги в масивних зразках: розмірний циклотронний резонанс, геометричні осциляції [36, 37], гігантські квантові осциляції [38, 39, 40] тощо.

Сукупність явищ, пов'язана з поведінкою електронів у постійному магнітному полі, згодом поповнилася цілочисельним і дробовим квантовими ефектами Хола (КЕХ) у напівпровідникових гетероструктурах [41, 42]. Обидва ефекти проявляються як плато в холівському опорі $R_{xy} = h/\nu e^2$, де фактор заповнення ν є цілим числом $1, 2, \dots$, або раціональним дробом конкретного виду: $1/3, 2/3, 2/5, 3/5, \dots$ (при цьому компонента магнетопору R_{xx} обертається в нуль). Цілочисельний ефект Хола може бути пояснений на основі одночастинкової моделі електронів, що взаємодіють із зовнішнім магнітним полем та домішками. Дробове квантування холівської провідності є наслідком багаточастинкових ефектів — кулонівської взаємодії електронів. Деяко нестандартний ефект Холла був спостережений і у графені — двовимірному вуглецевому кристалі, структура якого має гексагональну ґратку [43]. Особливості ефекту Хола у графені (існування нульового рівня енергії, подвоєний непарний фактор за-

повнення) прямо пов'язані з його електронною будовою. Передбачена теоретично [44, 45] поведінка холлівського опору була спостережена експериментально, [46, 47] підтвердивши, тим самим, діраківськоподібний характер квазічастинок у цьому матеріалі. Крім того, виявилось, що спостереження КЕХ у графені можливе навіть за кімнатних температур, хоча зазвичай наявність цього ефекту можлива лише за гелієвих температур. Дробовий квантовий ефект Хола також був відкритий у графені [48, 49]. Дробовий КЕХ спостерігався при температурах до 20 К, що в 100 разів вище, ніж в напівпровідникових структурах. Його спостереження свідчать про сильні електронні кореляції, а оскільки електронна будова графену не така, як у звичайних напівпровідниках, то від нього, мабуть, слід очікувати якихось нових холлівських ефектів.

Незважаючи на активну діяльність, як з боку теоретиків, так і експериментаторів, в дослідженнях графену у однорідному магнітному полі ще залишаються відкриті питання [50, 51].

В цілому, етап дослідження властивостей матеріалів в однорідному магнітному полі цікавий тим, що майже усі ефекти можна описати в термінах одночастинкового наближення (виняток становить дробовий КЕХ, але навіть у цьому випадку, вигляд варіаційної функції Лафліна фактично визначається з одночастинкових хвильових функцій зарядженої частинки в магнітному полі).

При теоретичному розгляді вищезгаданих систем суттєво використовується однорідність магнітного поля. Послідовний аналіз усіх описаних електронних ефектів вимагає вивчення ролі неоднорідності поля на динаміку ферміонів. Цей клас задач відноситься до другого типу досліджень.

Довільну конфігурацію магнітного поля можна представити у вигляді суми двох частин. Перша частина — однорідне поле (яке можна отримати усередненням по об'єму системи). Друга частина — збурення на його фоні (які

визначають міру неоднорідності), локалізовані в деякій частині об'єму системи. Якщо значення напруженості поля і розміри цих неоднорідностей значно менші в порівнянні з аналогічними характеристиками фонового поля, слід очікувати, що якісно вищезгадані ефекти для ферміонів не повинні змінитися. Якщо ж розміри локалізації такої неоднорідності зменшувати, зберігаючи при цьому величину потоку, який вона містить, то в границі ми отримаємо точкове збурення, що несе скінченний потік магнітного поля. Потенціал такого збурення, який можна також представити, як поле нескінченно-тонкого і нескінченно-довгого соленоїда має назву потенціалу Ааронова-Бома (ПАБ). Поведінка електронів за наявності ПАБ суттєво змінюється (якісно вона може бути пояснена нелокальним характером взаємодії їх струмів з вектор-потенціалом магнітного вихора). Тому слід очікувати, що деякі характеристики електронних систем в присутності ПАБ можуть змінитись.

Теоретично, проблема руху ферміонів в ПАБ (або подібному до нього полі) з'явилася в роботах Г. Ф. де С'юзи, Р. Джеквіва і Ф. Вільчека [52, 53], зокрема в контексті космічних струн [54, 55, 56]. Історично цій задачі передували її одно-, три- і чотиривимірні аналоги (квантовані спінові поля на фоні кінкових [57], монопольних [58] та інстантонних [59] розв'язків відповідно). Виявилось, що при цьому динаміка ферміонів радикально змінюється, а основні характеристики таких систем можуть бути отримані з використанням геометричних методів (детермінант еліптичного оператора, степінь відображення [60]). Результати цих досліджень виявились корисними для опису квазіодновимірних провідних середовищ (пайєрлсовські діелектрики, поліацетилен) [61, 62]. Топологічні методи були застосовані і для електронних систем з ПАБ [63, 64]. В порівнянні з вищезгаданими аналогами двовимірність задачі накладає сильне обмеження на рух частинок. Це призводить до ряду особливостей їх поведінки

в ПАБ. Так, у 1982 році А. Вільчек, досліджуючи поведінку електронів в полі нескінченно-тонкого соленоїда, вказав на можливість трактування пари частинка+потік магнітного поля як нову композитну частинку — еніон [65]. При цьому квантовий ансамбль тотожних еніонів підпорядковувався аномальній статистиці, в загальному випадку проміжній між статистиками бозе і фермі частинок. Використання еніонів мало успіх у поясненні дробового КЕХ.

Дослідження рівняння Дірака в полі магнітного вихора виявилось цікавою задачею з суто математичної точки зору. Аналіз руху електрона в ПАБ вказує на проблему неоднозначності хвильових функцій, що є наслідком сингулярності потенціалу нескінченно-тонкого соленоїда поблизу місця його розташування [66]. Послідовний математичний розв'язок задачі можливий з використанням так званої процедури самоспряженого розширення [67, 68]. У випадку, коли разом з ПАБ присутнє, ще й однорідне магнітне поле, також необхідно розглядати самоспряжене розширення гамільтоніанів. При цьому, задача має ряд специфічних особливостей, внаслідок дискретності спектру енергії [69, 70]. Слід також відмітити, що рух зарядженої частинки в полях за наявності ПАБ, залежить від її спіну. Це пов'язане з тим, що діраківський ферміон має магнітний момент який взаємодіє з магнітним полем (яке для випадку ПАБ має вигляд двовимірної дельта-функції від координат), в той час, як гамільтоніан Шре-дінгера, залежить лише від вектор-потенціалу. Взаємодія магнітного моменту зарядженої частинки з магнітним полем ПАБ, суттєвим чином змінює поведінку хвильової функції поблизу магнітного вихору. Ця взаємодія в літературі часто іменується контактною, точковою, або Дірак-дельта взаємодією.

В контексті теорії конденсованої речовини діраківські ферміони в полі соленоїда виникають в дослідженнях квазічастинок Дірака-Боголюбова-де Жена у вихровому стані d -хвильового надпровідника [71, 72]. В роботах М.А.Возмедіано,

В.Г.Креспі, Ю.О.Ситенка та В.А.Осіпова інтенсивно вивчали задачу опису топологічних дефектів в графені, яка базувалася на рівнянні Дірака, з точковим псевдомагнітним вихором [73, 74, 75]. ПАБ використовувався при вивченні впливу магнітних домішок в металах [76, 77].

Також досліджувалися властивості нерелятивіського 2DEG в полі вихорів Абрикосова. Відповідні системи були отримані розміщенням надпровідника II-роду поблизу напівпровідникової (галій-арсенідної) гетероструктури [78, 79, 80, 81]. Виявилось, що магнітне поле магнітних вихорів (потенціал яких близький до ПАБ) змінює картину магнітоопору 2DEG [82, 83].

Створення аналогічних систем, на основі графену, ще чекає експериментального вирішення. При цьому використання скануючого тунельного мікроскопа в них, дозволяє отримати, безпосередньо, інформацію про електронні збудження в графені в присутності ПАБ, або в суперпозиції ПАБ в постійного магнітного поля. Більш того, навіть для випадку постійного магнітного поля, використання скануючого тунельного мікроскопа може бути корисним, щодо визначення природи дробовозаряджених квазічастинок в ДКЕХ у графені (в напівпровідникових гетероструктурах такого зробити не можна, оскільки там 2DEG знаходиться в середині зразка).

Можливість створення таких систем в найближчому майбутньому не викликає сумнівів, оскільки близькі за тематикою досліджень системи вже реалізовані. Зокрема це стосується графенових кілець, в яких вивчаються ааронбомівські осциляції магнетоопору [84, 85, 86], а також графенових наносіток — моно- або двошарових листів графену з високою густиною дірок, що утворюють періодичну ґратку (однорідне магнітне поле в них може імітувати, схожу на ґратку вихорів Абрикосова, конфігурацію магнітного поля)[87].

РОЗДІЛ 2

ДВОВИМІРНІ ФЕРМІОНИ В ПОТЕНЦІАЛІ ААРОНОВА-БОМА

В цьому розділі проводиться порівняльне дослідження властивостей двовимірного електронного газу (2DEG) в магнітному полі нескінченно-тонкого соленоїда (або магнітного вихора) для випадків релятивістського (графен) і квадратичного закону дисперсії (напівпровідникові гетероструктури). Проблема неоднозначності власних функцій гамільтоніанів Дірака та Шрьодінгера, у випадку нульового орбітального моменту, вирішується розглядом трубки потоку (характерна область простору, що містить магнітне поле) скінченного радіусу. Після відбору розв'язків, радіус трубки спрямовується до нуля. На основі отриманих в такий спосіб аналітичних розв'язків для потенціалу Ааронова-Бома розраховується локальна (ЛГС) і повна густина станів (ГС) системи. Відтворюються результати [76, 78] для рівняння Шрьодінгера. Вони важливі не тільки для порівняння з релятивістським випадком, а й тому, що отримана конструкція для ЛГС 2DEG з'являється і у випадку графена. Розділ написаний на основі робіт [10, 11].

2.1 Хвильові функції рівняння Шрьодінгера та інтегральне представлення для густини станів

Квазічастинкові збудження нерелятивістського 2DEG (які характеризуються ефективною масою M і зарядом $-e < 0$) в магнітному полі з вектор-потенціалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ можуть бути описані за допомогою шрьодінгерівського гамільтоніану

$$\hat{H}_S(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2M}(D_1^2 + D_2^2). \quad (2.1.1)$$

Подовжена похідна в декартовому представленні $\mathbf{r} = (x_1, x_2)$ має вигляд

$$D_j = \nabla_j + i \frac{e}{\hbar c} A_j, \quad j = 1, 2, \quad (2.1.2)$$

де A_j — компоненти вектор-потенціалу, \hbar — постійна Планка, c — швидкість світла.

Розглянемо рух квазічастинок графену в ПАБ. Векторний потенціал нескінченно-тонкого соленоїда, розташованого (в тривимірному просторі) вздовж напрямку осі \mathbf{e}_z , представляється наступним чином

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{2\pi r^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_z), \quad (2.1.3)$$

де $\Phi = \eta \Phi_0$ — потік магнітного поля соленоїда, записаний в одиницях кванту магнітного потоку $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/e$. В загальному випадку величина η може приймати довільні дійсні значення, однак ефекти ПАБ, що розглядаються, залежать лише від її дробової частини, тому надалі вважатимемо що $\eta \in [0, 1)$ (такий розгляд також включає в себе ситуацію з протилежним розташуванням магнітного вихору, і відповідає від'ємним значенням η). Магнітне поле ПАБ може бути представлене у наступному вигляді

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_z \Phi_0 \eta \delta^2(\mathbf{r}), \quad (2.1.4)$$

де $\delta^2(\mathbf{r})$ — двовимірна дельта функція.

Наявність дельта-функції у виразі для магнітного поля вихору вказує на можливе джерело ускладнень [88, 89] квантовомеханічної задачі в полі (2.1.3). Дійсно, дослідження розв'язків в потенціалі нескінченно-тонкого соленоїда містить ряд труднощів математичної природи, пов'язаних із сингулярністю ПАБ в точці розташування соленоїда [67]. Як було показано в [89], регулярні потенціали, подібні до ПАБ не містять вищезгаданих труднощів (зокрема, розв'язки рівняння Шрьодінгера та Дірака в таких потенціалах визначаються однозначно).

Тому, для того, щоб уникнути необхідності аналізувати розв'язки нефізичного характеру, будемо розглядати рівняння Шрьодінгера в регулярному потенціалі. Такий потенціал залежатиме від розмірного парамету R — характерного радіуса соленоїдної трубки. В границі $R \rightarrow 0$ цей потенціал переходить в ПАБ. Під розв'язками рівняння Шрьодінгера, які тепер будуть залежати від R , розумітимемо розв'язки регулярної задачі в цій же границі.

Величини магнітного поля і вектор-потенціалу вихору зі скінченим радіусом трубки [55, 78, 89], як функції полярних координат, $\mathbf{r} = (r, \varphi)$, можуть бути записані у формі:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{2\pi} h(R, r) \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{a(R, r)}{r} \mathbf{e}_\varphi, \quad (2.1.5)$$

де $h(R, r)$ і $a(R, r)$ — профільні функції регуляризованих магнітного поля та вектор-потенціалу. Оскільки вихор характеризується потоком магнітного поля Φ , профільні функції повинні задовольняти умовам

$$\int_0^\infty h(R, r) r dr = 1, \quad h(R, r) = \frac{1}{r} \frac{da(R, r)}{dr}. \quad (2.1.6)$$

Як показано в [89], остаточний вигляд для розв'язків квантовомеханічних рівнянь не залежить від вигляду $h(R, r)$ в границі $R \rightarrow 0$, якщо профільна функція має властивість

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^r h(R, r') r' dr' = 0, \quad (2.1.7)$$

і тому можна вибрати функцію $h(R, r)$ в найбільш зручному для розрахунків вигляді. Відмітимо, що усі регулярні потенціали автоматично задовольняють цій умові.

Найпростіша функція $h(R, r)$, що регуляризує задачу і дозволяє знайти аналітичні розв'язки, відповідає розподілу магнітного поля, сконцентровано-му вздовж поверхні циліндра радіуса R . У цьому випадку профільні функції

набувають вигляду

$$h(R, r) = \delta(r - R)/R, \quad a(R, r) = \theta(r - R), \quad (2.1.8)$$

і визначають регуляризований потенціал

$$\mathbf{A}^{reg}(\mathbf{r}) = A_\varphi(r)\mathbf{e}_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\theta(r - R)}{r} \mathbf{e}_\varphi. \quad (2.1.9)$$

Неважко пересвідчитися, що в границі $R \rightarrow 0$ ПАБ (2.1.3) відновлюється.

Шукатимемо розв'язки часово-залежного рівняння Шрьодінгера у потенціалі (2.1.9)

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \hat{H}_S(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.1.10)$$

використовуючи підстановку $\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(\mathbf{r})$, де E — енергія квазічастинки. Враховуючи аксіальну симетрію задачі, запишемо гамільтоніан в полярних координатах

$$\hat{H}_S(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2ie}{\hbar cr} A_\varphi(r) \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 A_\varphi^2(r) \right], \quad (2.1.11)$$

де $A_\varphi(r)$ — азимутальна компонента (2.1.9). Тоді задача пошуку хвильових функцій, зводиться до розв'язку диференційного рівняння

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2ie}{\hbar cr} A_\varphi(r) \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 A_\varphi^2(r) + \frac{2ME}{\hbar^2} \right] \psi(r, \varphi) = 0. \quad (2.1.12)$$

Виходячи з симетрійних характеристик системи, можлива неоднозначність розташування вихору в площині руху квазічастинок не повинна впливати на фізичні властивості самої системи. Тому, без втрати загальності, зафіксуємо напрям магнітного поля вихору взовж осі \mathbf{e}_z , що еквівалентно заданню $\eta > 0$.

Регуляризований потенціал $\mathbf{A}^{reg}(\mathbf{r})$ є розривним, і ділить область руху частинки на дві частини: $[0, R]$ і $[R, \infty)$. Тому розв'язки рівняння Шрьодінгера слід шукати в кожній області окремо, зшиваючи їх з використанням властивостей неперервності хвильової функції та її похідної в точці $r = R$. Неперервність

хвильової функції впливає з основних положень квантової механіки, а саме з її однозначності. Неперервність похідної хвильової функції, є наслідком рівняння Шрьодінгера.

Отримаємо властивість неперервності похідної хвильової функції для даної задачі, виходячи з вигляду рівняння з довільним регулярним аксіально-симетричним потенціалом $\mathcal{A}_\varphi(r)$, аналізуючи рівняння

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2ie}{\hbar cr} \mathcal{A}_\varphi(r) \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 \mathcal{A}_\varphi^2(r) + \frac{2ME}{\hbar^2} \right] \psi(r, \varphi) = 0 \quad (2.1.13)$$

Для знаходження спектру і власних функцій задачі шукатимемо розв'язок у формі $\psi(r, \varphi) = e^{im\varphi} \psi(r)$. Тоді рівняння на функцію $\psi(r)$ має вигляд:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} - \frac{2me}{\hbar cr} \mathcal{A}_\varphi(r) - \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 \mathcal{A}_\varphi^2(r) + \frac{2ME}{\hbar^2} \right] \psi(r) = 0 \quad (2.1.14)$$

Домножимо рівняння на r і проінтегруємо його по області $r \in [R - \varepsilon, R + \varepsilon]$.

Отримаємо:

$$(R + \varepsilon)\psi'(R + \varepsilon) - (R - \varepsilon)\psi'(R - \varepsilon) + 2\varepsilon f = 0, \quad (2.1.15)$$

де штрих означає похідну по r , а f — середнє значення функції

$$f(r) = \left[-\frac{m^2}{r^2} - \frac{2me}{\hbar cr} \mathcal{A}_\varphi(r) - \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 \mathcal{A}_\varphi^2(r) + \frac{2ME}{\hbar^2} \right] r\psi(r), \quad (2.1.16)$$

на інтервалі $r \in [R - \varepsilon, R + \varepsilon]$. Оскільки величина $f < +\infty$ (що впливає з обмеженості потенціалу $\mathcal{A}_\varphi(r)$ в області інтегрування), тому при $\varepsilon \rightarrow 0$ та фіксованому значенні R отримуємо:

$$\psi'(R + 0) - \psi'(R - 0) = 0. \quad (2.1.17)$$

Отримана рівність визначає неперервність похідної радіальної компоненти хвильової функції, для обмежених потенціалів магнітного поля, в будь-якій точці

R . Зокрема ця умова виконується і для кусочно-гладких функцій, а отже і для (2.1.9). Умова неперервності хвильової функції визначається так:

$$\psi(R+0) - \psi(R-0) = 0. \quad (2.1.18)$$

Умова неперервності хвильової функції та її похідної дозволяють однозначно отримати власні функції нерелятивістського гамільтоніану в потенціалі (2.1.9). Для цього знайдемо розв'язки рівняння Шрьодінгера в кожній з областей окремо, а потім використаємо умови зшивки.

Область $r < R$: Гамільтоніан в полярних координатах має вигляд

$$\hat{H}_S(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (2.1.19)$$

Шукаємо розв'язок у формі: $\psi(r, \varphi, t) = e^{-iEt/\hbar} e^{im\varphi} \psi(r)$. Рівняння на власні значення радіальної компоненти хвильової функції зводяться до

$$\left[r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - m^2 + k^2 r^2 \right] \psi(r) = 0, \quad (2.1.20)$$

де $k = \sqrt{2ME}/\hbar$. Розв'язком рівняння (з врахуванням умови квадратичної інтегрованості поблизу початку координат) є функція Бесселя:

$$\psi(r) = C_m J_{|m|}(kr) \quad (2.1.21)$$

Область $r > R$: Гамільтоніан в полярних координатах має вигляд:

$$\hat{H}_S(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2i\eta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left(\frac{\eta}{r} \right)^2 \right]. \quad (2.1.22)$$

Шукаємо розв'язок у формі: $\psi(r, \varphi) = e^{-iEt/\hbar} e^{im\varphi} \psi(r)$. Рівняння на власні значення радіальної частини хвильової функції зводяться до

$$\left[r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - (m + \eta)^2 + k^2 r^2 \right] \psi(r) = 0, \quad (2.1.23)$$

де $k = \sqrt{2ME}/\hbar$. Загальним розв'язком рівняння є лінійна комбінація функцій Бесселя:

$$\psi(r) = A_m J_{|m+\eta|}(kr) + B_m J_{-|m+\eta|}(kr) \quad (2.1.24)$$

Знайдемо вигляд функції $\psi(r)$, в наближенні коли $R \rightarrow 0$. Введемо нові коефіцієнти:

$$C'_m = C_m \frac{(kR)^{|m|}}{2^{|m|}\Gamma(1 + |m|)} \quad (2.1.25)$$

$$A'_m = A_m \frac{(kR)^{|m+\eta|}}{2^{|m+\eta|}\Gamma(1 + |m + \eta|)} \quad (2.1.26)$$

$$B'_m = B_m \frac{(kR)^{-|m+\eta|}}{2^{-|m+\eta|}\Gamma(1 - |m + \eta|)} \quad (2.1.27)$$

В позначеннях C'_m, A'_m, B'_m умова неперервності хвильової функції та її похідної мають вигляд:

$$C'_m = A'_m + B'_m, \quad |m|C'_m = |m + \eta|(A'_m - B'_m). \quad (2.1.28)$$

Розв'язуючи рівняння відносно A'_m і B'_m , отримуємо

$$A'_m = C'_m \frac{1}{2} \left[1 + \frac{|m|}{|m + \eta|} \right], \quad B'_m = C'_m \frac{1}{2} \left[1 - \frac{|m|}{|m + \eta|} \right]. \quad (2.1.29)$$

Функціональна залежність від R коефіцієнтів A_m і B_m приймає форму

$$A_m = C'_m 2^{|m+\eta|}\Gamma(1 + |m + \eta|) \frac{1}{2} \left[1 + \frac{|m|}{|m + \eta|} \right] (kR)^{-|m+\eta|} \quad (2.1.30)$$

$$B_m = C'_m 2^{-|m+\eta|}\Gamma(1 - |m + \eta|) \frac{1}{2} \left[1 - \frac{|m|}{|m + \eta|} \right] (kR)^{|m+\eta|} \quad (2.1.31)$$

В границі $R \rightarrow 0$ коефіцієнт A_m зростає швидше ніж B_m (внесок в загальний розв'язок регулярної функції Бесселя буде більшим), тому власною функцією нерелятивістського гамільтоніану за наявності магнітного вихору з нульовим радіусом соленоїдної трубки буде

$$\psi(r) = A_m J_{|m+\eta|}(kr). \quad (2.1.32)$$

Умова нормування власних функцій неперервного спектру однозначно визначає їх вигляд:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty r dr \psi_m^*(\mathbf{r}; k) \psi_{m'}(\mathbf{r}; k') = \delta(k - k') \delta_{m,m'}. \quad (2.1.33)$$

В границі $R \rightarrow 0$ розв'язки рівняння Шрьодінгера є регулярними в початку координат. В полярних змінних $\mathbf{r} = (r, \varphi)$ хвильові функції мають форму

$$\psi_m(\mathbf{r}; k) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} e^{im\varphi} J_{|m+\eta|}(kr), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.1.34)$$

Коефіцієнт нормування може бути знайдений з використанням тотожності

$$\int_0^\infty r dr J_\nu(kr) J_\nu(k'r) = \frac{1}{k} \delta(k - k'), \quad \nu > -1. \quad (2.1.35)$$

Енергія квазічастинки $E(k)$ залежить від квазіімпульсу k квадратичним чином $E(k) = \hbar^2 k^2 / 2M$.

Використовуючи власні функції і спектр гамільтоніану Шрьодінгера, побудуємо функцію Гріна (ФГ) квазічастинок в 2ДЕГ

$$G_\eta^S(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E + i0) = \int_0^\infty dk \sum_{m=-\infty}^\infty \frac{\psi_m(\mathbf{r}; k) \psi_m^*(\mathbf{r}'; k)}{E - E(k) + i0}, \quad (2.1.36)$$

яка після заміни хвильової функції (2.1.34) зводиться до

$$G_\eta^S(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E + i0) = \frac{M}{\pi \hbar^2} \int_0^\infty \frac{k dk}{q^2 - k^2 + i0} \sum_{m=-\infty}^\infty e^{im(\varphi - \varphi')} J_{|m+\eta|}(kr) J_{|m+\eta|}(kr'), \quad (2.1.37)$$

де $q^2 = 2ME/\hbar^2$. Аналітичне продовження ФГ (2.1.37) на уявну вісь в комплексній площині імпульсів $q \rightarrow z = i\mathcal{Q}$ не містить сингулярностей, що робить її зручною для роботи. Відповідне продовження запишемо у формі

$$G_\eta^S(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathcal{Q}) \equiv \frac{M}{\pi \hbar^2} g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q}), \quad (2.1.38)$$

де

$$g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q}) = - \int_0^\infty \frac{k dk}{\mathcal{Q}^2 + k^2} \sum_{m=-\infty}^\infty J_{|m+\eta|}^2(kr). \quad (2.1.39)$$

Розглянемо значення ФГ (2.1.38) у співпадаючих точках простору, $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, оскільки в цьому розділі ми цікавимося лише густиною станів. Після обрахунку

ФГ (2.1.39), величина ЛГС (нормована на одиницю спінової степені вільності) може бути отримана переходом назад до дійсної осі імпульсів

$$N_{\eta}^S(\mathbf{r}, E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G_{\eta}^S(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathcal{Q} \rightarrow -iq + 0), \quad E = \frac{\hbar^2 q^2}{2M}. \quad (2.1.40)$$

Функція Гріна $G_{\eta}^S(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathcal{Q})$ була розрахована в [90] з використанням техніки контурного інтегрування. Слабкі місця цих розрахунків були обговорені в [78], де аналогічний метод був застосований для отримання η -залежного вкладу у ФГ, $\Delta G_{\eta}^S(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathcal{Q}) = G_{\eta}^S(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathcal{Q}) - G_0^S(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathcal{Q})$ для співпадаючих аргументів функції, де застосування [90] є законним. Тому почнемо з відповідного виразу для $\Delta g_{\eta}(\mathbf{r}, \mathcal{Q}) = g_{\eta}(\mathbf{r}, \mathcal{Q}) - g_0(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$ отриманого в [90]

$$\Delta g_{\eta}(\mathbf{r}, \mathcal{Q}) = \frac{\sin \pi \eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{\eta(v-\omega)}}{1 + e^{(v-\omega)}} e^{-\mathcal{Q}r(\cosh \omega + \cosh v)}. \quad (2.1.41)$$

Заміною змінних $x = (v - \omega)/2$, $y = (v + \omega)/2$ отримуємо формулу

$$\Delta g_{\eta}(\mathbf{r}, \mathcal{Q}) = \frac{2 \sin \pi \eta}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} dx \frac{\cosh[(2\eta - 1)x]}{\cosh x} e^{-2\mathcal{Q}r \cosh x \cosh y} \quad (2.1.42)$$

яка і буде використовуватися в подальших розрахунках.

2.2 Повна та локальна густини станів

Повна ГС на одиницю спінової степені свободи, за означенням, отримується з ЛГС (2.1.40) інтегруванням по площині

$$N_{\eta}^S(E) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r dr N_{\eta}^S(\mathbf{r}, E). \quad (2.2.43)$$

Однак для розрахунку ГС зручніше виходити з інтегрального представлення (2.1.42) для $\Delta g_{\eta}(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$, де прямим інтегруванням можна отримати різницю $\Delta N_{\eta}^S(E) = N_{\eta}^S(E) - V_{2D} N_0^S$ індуковану ПАБ. Величина $N_0^S = M/(2\pi\hbar^2)$ — ГС для вільного 2DEГ газу на одиницю площі, а V_{2D} — 2D об'єм (площа) системи.

Після інтегрування $\Delta g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$ по просторовим координатам, отримуємо [78]

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty r dr \Delta g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q}) = \frac{\sin \pi\eta}{\mathcal{Q}^2} \int_0^\infty \frac{dy}{\cosh^2 y} \int_0^\infty dx \frac{\cosh(2\eta - 1)x}{\cosh^3 x}. \quad (2.2.44)$$

Потім інтегруючи по змінним x та y маємо

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty r dr \Delta g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q}) = \frac{\pi\eta(1 - \eta)}{\mathcal{Q}^2}. \quad (2.2.45)$$

Повертаючись до дійсної осі хвильових чисел q , запишемо різницю ГС індуковану ПАБ [76, 78]:

$$\Delta N_\eta^S(E) = -\frac{1}{2}|\eta|(1 - |\eta|)\delta(E). \quad (2.2.46)$$

Записаний вираз (2.2.46) також включає в себе випадок магнітного вихора з протилежним напрямком (по відношенню до \mathbf{e}_z) магнітного поля.

Отримаємо вираз для ЛГС використовуючи (2.1.40). Для цього, як і в випадку повної ГС, шукатимемо різницю відповідних локальних густин станів збуреної та незбуреної задач: $\Delta N_\eta^S(\mathbf{r}, E) = N_\eta^S(\mathbf{r}, E) - N_0^S$. Значення $\Delta N_\eta^S(\mathbf{r}, E)$ може бути отримане обрахунком функції $\Delta g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$ заданою рівністю (2.1.42) з наступним застосуванням (2.1.38). Аналітичне продовження $\mathcal{Q} \rightarrow -iq$ виразу (2.1.40) проводиться на останньому крокові розрахунків.

Отримаємо представлення для функції $\Delta g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$. Спочатку, перепишемо її у формі

$$\Delta g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q}) = - \int_{\mathcal{Q}}^\infty dw \frac{d\Delta g_\eta(\mathbf{r}, w)}{dw}, \quad (2.2.47)$$

де була використана властивість $\Delta g_\eta(\mathbf{r}, \infty) = 0$ (яка впливає з інтегрального представлення відповідної функції). Диференціюючи (2.1.42) отримуємо наступний вираз

$$\frac{d\Delta g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q})}{d\mathcal{Q}} = -\frac{4 \sin \pi\eta}{\pi} r \int_0^\infty dy \cosh[(2\eta - 1)x] \int_0^\infty dx \cosh y e^{-2\mathcal{Q}r \cosh x \cosh y}. \quad (2.2.48)$$

Використовуючи інтегральне представлення для модифікованої функції Бесселя $K_\nu(x)$ [91]

$$K_\nu(x) = \int_0^\infty dt e^{-x \cosh t} \cosh \nu t \quad (2.2.49)$$

і формулу (2.16.13.2) з [92]

$$\int_0^\infty dx \cosh bx K_\nu(c \cosh x) = \frac{1}{2} K_{(\nu+b)/2} \left(\frac{c}{2} \right) K_{(\nu-b)/2} \left(\frac{c}{2} \right), \quad (2.2.50)$$

запишемо вираз (2.2.48) у наступній формі

$$\frac{d\Delta g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q})}{d\mathcal{Q}} = -\frac{2 \sin \pi \eta}{\pi} r K_\eta(\mathcal{Q}r) K_{1-\eta}(\mathcal{Q}r). \quad (2.2.51)$$

Використаємо представлення функції $K_\nu(z)$ через модифіковані функції Бесселя $I_\nu(z)$ [91]:

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin \pi \eta} [I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)], \quad (2.2.52)$$

і запишемо (2.2.48) в термінах безрозмірної величини $z = \mathcal{Q}r$. Отримуємо наступну рівність

$$\frac{d\Delta g_\eta(z)}{dz} = -\frac{\pi}{2 \sin \pi \eta} [I_{-\eta}(z)I_{\eta-1}(z) - I_\eta(z)I_{\eta-1}(z) + I_\eta(z)I_{1-\eta}(z) - I_{-\eta}(z)I_{1-\eta}(z)]. \quad (2.2.53)$$

Функцію $\Delta g_\eta(z)$ можна представити у вигляді суми інтегралів від добутку модифікованих функцій Бесселя $I_\nu(z)$ на заданому інтервалі інтегрування. Кожний з інтегралів є функцією z нижньої межі інтегрування, в той час як верхня межа визначає лише їх збіжність. Уявну частину цих інтегралів (у виразі для густини станів) можна записати в загальному вигляді:

$$Im \left[\int_z^\infty dt a(t) \Big|_{z=-iqr} \right] = Im[A(\infty) - A(-iqr)] = -ImA(-iqr), \quad (2.2.54)$$

де $A(z)$ — первісна функція для $a(z)$. Оскільки $a(z)$ — дійсна функція, то $Im[A(\infty)] = 0$. Отже, для розрахунку уявної частини інтегралів, із заданим правилом аналітичного продовження, важливо знати лише вигляд первісної від

підінтегральної функції в точці $z = -igr$. Використаємо дане спостереження для розрахунку локальної густини станів. Розглянемо кожний з доданків, що містить добутки функцій Бесселя (2.2.53) окремо.

Доданок $I(-\eta, \eta - 1)$:

$$I(-\eta, \eta - 1) = \text{Im} \left[\int_z^\infty dt I_{-\eta}(t) I_{\eta-1}(t) \Big|_{z=-igr} \right] \quad (2.2.55)$$

Використаємо розклад модифікованої функції Бесселя [91]:

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+\nu} \frac{1}{n! \Gamma(n + \nu + 1)}, \quad (2.2.56)$$

тоді добуток функцій Бесселя можна проінтегрувати

$$\int dt I_{-\eta}(t) I_{\eta-1}(t) = \int dt \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2n+2k-1}}{n! k! \Gamma(n - \eta + 1) \Gamma(k + \eta)} \quad (2.2.57)$$

$$\int dt I_{-\eta}(t) I_{\eta-1}(t) = \frac{2}{\Gamma(1 - \eta) \Gamma(\eta)} \ln t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{2n}, \quad (2.2.58)$$

де a_n — деякі дійсні коефіцієнти. Зробивши аналітичне продовження, отримуємо:

$$I(-\eta, \eta - 1) = \sin \pi \eta, \quad (2.2.59)$$

оскільки парні степені уявного числа $t = -igr$ є дійсними числами.

Доданок $I(\eta, 1 - \eta)$:

$$I(\eta, 1 - \eta) = \text{Im} \left[\int_z^\infty dt I_\eta(t) I_{1-\eta}(t) \Big|_{z=-igr} \right] \quad (2.2.60)$$

$$\int dt I_\eta(t) I_{1-\eta}(t) = \int dt \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2n+2k+1}}{n! k! \Gamma(n + \eta + 1) \Gamma(k + 2 - \eta)} \quad (2.2.61)$$

$$\int dt I_{-\eta}(t) I_{\eta-1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^{2n}, \quad (2.2.62)$$

де b_n — деякі дійсні коефіцієнти. Зробивши аналітичне продовження, отримуємо

$$I(\eta, 1 - \eta) = 0. \quad (2.2.63)$$

Доданок $I(\eta, \eta - 1)$:

$$I(\eta, \eta - 1) = \text{Im} \left[\int_z^\infty dt I_\eta(t) I_{\eta-1}(t) \Big|_{z=-iqr} \right] \quad (2.2.64)$$

Інтеграл має вигляд:

$$\begin{aligned} \int dt I_\eta(t) I_{\eta-1}(t) &= \int dt \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2n+2k+2\eta-1}}{n!k!\Gamma(n+\eta+1)\Gamma(k+\eta)} = \\ &= \left(\frac{t}{2}\right)^{2\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2n}}{n+\eta} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!k!\Gamma(n-k+\eta+1)\Gamma(k+\eta)} \end{aligned} \quad (2.2.65)$$

Оскільки

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!k!\Gamma(n-k+\eta+1)\Gamma(k+\eta)} = \frac{2^{2n+2\eta-1} \pi^{-1/2} \Gamma(n+\eta+1/2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\eta+1)\Gamma(n+2\eta)},$$

отримуємо

$$\int dt I_\eta(t) I_{\eta-1}(t) = \frac{(t/2)^{2\eta}}{\Gamma^2(1+\eta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} \frac{2^{2\eta-1} \Gamma(n+\eta+1/2) \Gamma^2(1+\eta) \Gamma(n+\eta)}{\sqrt{\pi} \Gamma^2(n+\eta+1) \Gamma(n+2\eta)}.$$

Використавши формулу подвійного аргументу для гамма-функції

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma(z+1/2), \quad (2.2.66)$$

і визначення гіпергеометричної функції типу (2,3)

$${}_2F_3(a, b; c, d, h; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(h)}{\Gamma(c+n)\Gamma(d+n)\Gamma(h+n)}, \quad (2.2.67)$$

знайдемо

$$\int dt I_\eta(t) I_{\eta-1}(t) = \frac{(t/2)^{2\eta}}{\Gamma^2(1+\eta)} {}_2F_3\left(\eta, \frac{1}{2} + \eta; 2\eta, 1 + \eta, 1 + \eta; t^2\right). \quad (2.2.68)$$

Зробивши аналітичне продовження, маємо наступний вираз:

$$I(\eta, \eta - 1) = \frac{\sin \pi \eta (qr)^{2\eta}}{4\eta \Gamma^2(1 + \eta)} {}_2F_3\left(\eta, \frac{1}{2} + \eta; 2\eta, 1 + \eta, 1 + \eta; -(qr)^2\right). \quad (2.2.69)$$

Асимптотична поведінка ${}_2F_3(\eta, \frac{1}{2} + \eta; 2\eta, 1 + \eta, 1 + \eta; -z^2)$ при $z \rightarrow \infty$:

$${}_2F_3\left(\eta, \frac{1}{2} + \eta; 2\eta, 1 + \eta, 1 + \eta; -z^2\right) \sim \frac{2^{2\eta-1}}{\pi z^{2\eta+1}} \Gamma^2(1 + \eta) [1 - 2\eta + \pi z + \sin(2z - \pi\eta)]$$

Доданок $I(-\eta, 1 - \eta)$:

$$I(-\eta, 1 - \eta) = \text{Im} \left[\int_z^\infty dt I_{-\eta}(t) I_{1-\eta}(t) \Big|_{z=-iqr} \right] \quad (2.2.70)$$

Неважко переконатись, що значення $I(-\eta, 1 - \eta)$ може бути отримане з $I(\eta, \eta - 1)$, заміною $\eta \rightarrow 1 - \eta$. Тому, використавши вираз для $I(\eta, \eta - 1)$, маємо:

$$I(-\eta, 1 - \eta) = \frac{\sin \pi \eta (qr)^{2-2\eta}}{4^{1-\eta} \Gamma^2(2 - \eta)} {}_2F_3\left(1 - \eta, \frac{3}{2} - \eta; 2 - 2\eta, 2 - \eta, 2 - \eta; -(qr)^2\right) \quad (2.2.71)$$

Асимптотична поведінка ${}_2F_3(1 - \eta, \frac{3}{2} - \eta; 2 - 2\eta, 2 - \eta, 2 - \eta; -z^2)$ при $z \rightarrow \infty$:

$${}_2F_3\left(1 - \eta, \frac{3}{2} - \eta; 2 - 2\eta, 2 - \eta, 2 - \eta; -z^2\right) \sim \frac{2^{1-2\eta}}{\pi z^{3-2\eta}} \Gamma^2(2 - \eta) [2\eta - 1 + \pi z - \sin(2z + \pi\eta)]$$

Сумуючи усі доданки, отримуємо вираз для збурення ЛГС.

Відмітимо, що вираз для густини станів можна отримати іншим способом, а саме використавши безпосереднє інтегрування величини (2.2.51) за допомогою програмного пакету Mathematica

$$\begin{aligned} \Delta g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q}) &= \frac{\mathcal{Q}^2 r^2}{4\eta(\eta - 1)} {}_3F_4\left(1, 1, \frac{3}{2}; 2, 2, 2 - \eta, 1 + \eta; \mathcal{Q}^2 r^2\right) + \frac{1}{2}\psi(1 - \eta) + \frac{1}{2}\psi(\eta) \\ &+ \frac{\sin \pi \eta}{8\pi} \left[4^\eta (\mathcal{Q}r)^{2-2\eta} \Gamma^2(\eta - 1) {}_2F_3\left(1 - \eta, \frac{3}{2} - \eta; 2 - 2\eta, 2 - \eta, 2 - \eta; \mathcal{Q}^2 r^2\right) \right. \\ &\left. + 4^{1-\eta} (\mathcal{Q}r)^{2\eta} \Gamma^2(-\eta) {}_2F_3\left(\eta, \frac{1}{2} + \eta; 2\eta, 1 + \eta, 1 + \eta; \mathcal{Q}^2 r^2\right) \right] - \ln \frac{\mathcal{Q}r}{2}, \end{aligned}$$

де ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$ є узагальненою гіпергеометричною функцією, а $\psi(z)$ — логарифмічною похідною гамма-функції $\Gamma(z)$. Після аналітичного продовження $Q \rightarrow -iq$ лише два члени в квадратних дужках і логарифмічний доданок дають вклад в $\text{Im}\Delta g_\eta(\mathbf{r}, -iq)$ (інші функції після аналітичного продовження є дійсними), таким чином

$$\Delta N_\eta^S(\mathbf{r}, E) = N_0^S \{ \sin^2 \pi \eta [F(\eta, qr) + F(1 - \eta, qr)] - 1 \} \quad (2.2.72)$$

де

$$F(\eta, qr) = \frac{(qr)^{2-2\eta} \Gamma^2(\eta - 1)}{4^{1-\eta} \pi^2} {}_2F_3 \left(1 - \eta, \frac{3}{2} - \eta; 2 - 2\eta, 2 - \eta, 2 - \eta; -(qr)^2 \right). \quad (2.2.73)$$

Відмітимо, що останній доданок $-N_0$ в (2.2.72) виникає з логарифмічної функції у виразі (2.2.72). У важливих граничних випадках вигляд функції для різниці ЛГС значно спрощується. Наприклад, в наближенні $qr \gg 1$ отримуємо (перший доданок асимптотичного розкладу по степеням $1/qr$)

$$\Delta N_\eta^S(\mathbf{r}, E) \approx -N_0^S \frac{\sin \pi \eta \cos 2qr}{\pi qr}. \quad (2.2.74)$$

Також у фізично важливому випадку $\eta = 1/2$ (величиною потоку $\eta = 1/2$ характеризується абрикосівський вихор) ЛГС виражається через інтегральний синус, $Si(x) = \int_0^x dt \sin t/t$ наступним чином

$$\Delta N_{1/2}^S(\mathbf{r}, E) = N_0^S \left[\frac{2}{\pi} Si(2qr) - 1 \right]. \quad (2.2.75)$$

Використовуючи асимптотику інтегрального синусу [91] $Si(x) = \pi/2 - \cos x/x - \sin x/x^2 + O(1/x^3)$ для $x \gg 1$ неважко побачити, що з (2.2.75) відтворюється попередній вираз (2.2.74) для випадку $\eta = 1/2$ і $qr \gg 1$. З іншого боку використовуючи $Si(x) \approx x$ при $x \ll 1$, отримуємо, що різниця ЛГС при малих значеннях qr має наступну поведінку $\Delta N_{1/2}^S(\mathbf{r}, E) \approx N_0^S [4qr/\pi - 1]$.

На малюнку 2.1 показана залежність (2.2.75) індукованої різниці ЛГС $\Delta N_{1/2}^S(\mathbf{r}, E)$ на відстані r від центру вихору (при заданому значенні квазіімпульсу q , або, що еквівалентно, енергії квазічастинки E). Бачимо, що у випадку

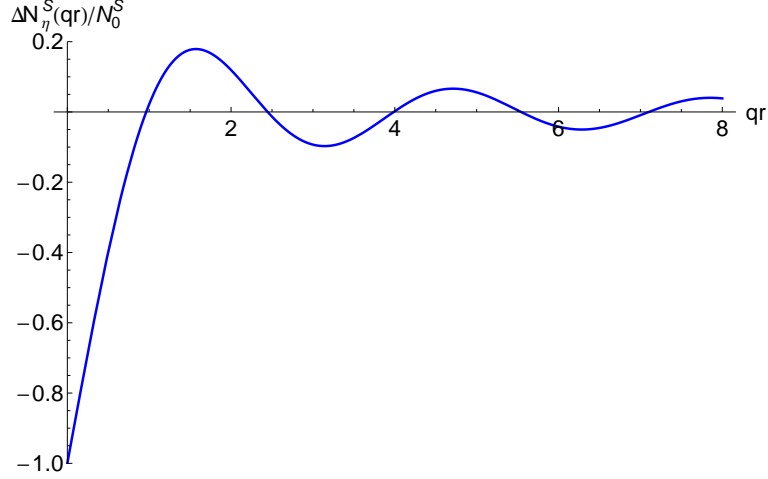


Рис. 2.1 Нормована різниця ЛГС $\Delta N_{\eta}^S(qr)/N_0^S$ як функція безрозмірного параметру qr для $\eta = 1/2$.

нерелятивістського 2DEG наявність вихору індукує зменшення величини ЛГС при малих значеннях $qr \ll 1$. Функція $\Delta N_{1/2}^S(qr)$ приймає нульове значення при $qr \approx 1$, а поблизу $qr \approx 1.5$ вона має максимум $\sim 0.2N_0^S$.

На малюнку 2.2 моделюється ситуація коли голка СТМ мікроскопа розташована на деякій відстані від центра вихору і зміна напруги на ній дозволяє дослідити енергетичну залежність ЛГС. Наявність скінченної густини носіїв в 2DEG відповідає скінченному значенню енергії Фермі μ . Оскільки вимірювання густини станів проводяться поблизу рівня Фермі, введемо параметр енергії \mathcal{E} таким чином, щоб величині ЛГС при нульовій енергії $\mathcal{E} = 0$ відповідало її значення на рівні Фермі, тобто $q = \sqrt{2ME}/\hbar \rightarrow q = \sqrt{2M(\mathcal{E} + \mu)}/\hbar$. Для вибору природніх позначень введемо масштаб довжини r_0 порядку постійної ґратки. Відповідна йому енергетична шкала $E_0 = \hbar^2/2Mr_0^2$ пропорційна ширині зони. Безрозмірний параметр qr перепишемо наступним чином $qr = \sqrt{\mathcal{E}/E_0 + \mu/E_0}r/r_0$.

Залежність $\Delta N_\eta^S(\mathcal{E})$ як функції енергії \mathcal{E} показана на малюнку 2.2 для трьох

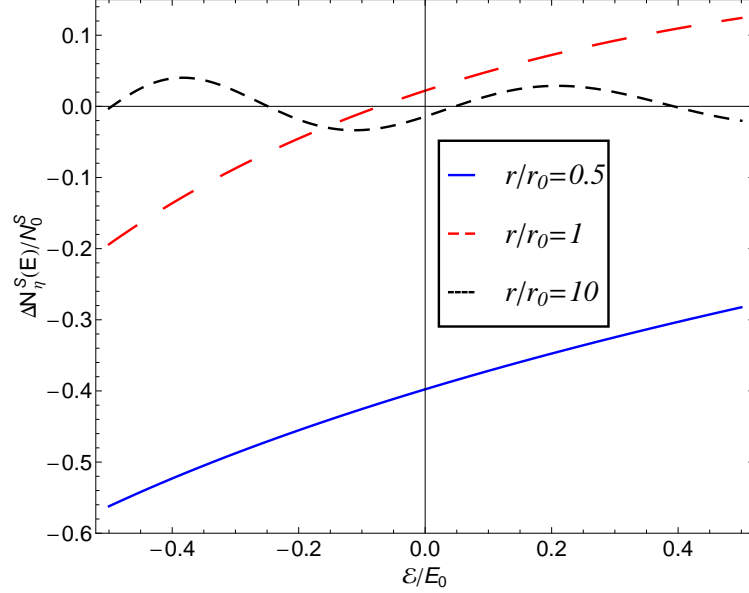


Рис. 2.2 Нормована різниця ЛГС $\Delta N_\eta^S(E = \mathcal{E} + \mu)/N_0^S$ як функція енергії \mathcal{E} для трьох значень $r/r_0 = 0.5, 1, 10$ і $\mu = E_0$.

значень r/r_0 : $r/r_0 = 0.5$ — суцільна лінія, $r/r_0 = 1$ — довго-штрихована лінія, $r/r_0 = 10$ — коротко-штрихована лінія. Для хімічного потенціалу узято $\mu = E_0$. Неважко бачити, що лише для малих значень $r/r_0 = 0.5$ величина ЛГС суттєво знижується по відношенню до вільної ЛГС N_0^S . Як було вже показано, суттєве зниження ЛГС виникає при $qr \leq 0.5$. Оскільки наявність рівня Фермі, зазвичай, відповідає великим значенням q , тому область малих значень qr може досягатись лише при $r \ll r_0$. Однак, бачимо, що навіть для малих значень $r/r_0 = 0.5$ величина ЛГС зменшується лише на половину від величини ЛГС N_0^S вільного електронного газу. Реальні значення розміру абрикосівської вихрової трубки значно більші від r_0 , а отже область суттєвого зниження ЛГС є недосяжною експериментально. З іншого боку, повільне спадання величини $\Delta N_\eta^S(\mathbf{r}, E) \sim 1/r$ (навіть при значенні $r/r_0 = 10$ амплітуда $\Delta N_\eta^S(\mathbf{r}, E)$ є порядку $0.05N_0^S$) вказує на можливість експериментального спостереження осциляцій

ЛГС.

2.3 Хвильові функції рівняння Дірака та інтегральне представлення для густини станів

Динаміка квазічастинок в графені визначається парою гамільтоніанів Дірака

$$\hat{H}_D(\mathbf{r}, \zeta) = -i\hbar v_F \gamma_\zeta^0 (\gamma_\zeta^1 D_1 + \gamma_\zeta^2 D_2) + \gamma_\zeta^0 \Delta, \quad (2.3.76)$$

де об'єкти γ_ζ^0 і $\gamma_\zeta^0 \gamma_\zeta^j$ в термінах матриць Паулі мають вигляд

$$\gamma_\zeta^0 = \sigma_3, \quad \gamma_\zeta^0 \gamma_\zeta^j = (\sigma_1, \zeta \sigma_2), \quad (2.3.77)$$

а індекс $\zeta = \pm 1$ позначає два нееквівалентні представлення 2×2 гамма-матриць. Кожному із значень ζ відповідає рівняння Дірака, що описує електронні збудження поблизу однієї з \mathbf{K}_\pm точок розширеної зони Брілюена (це означає, що закон дисперсії електронів графену в околі імпульсів \mathbf{K}_+ та \mathbf{K}_- має лінійний характер). Відповідні квазічастинки описуються парою спінорів $\Psi(\mathbf{r}, t, \zeta)$, де індекс $\zeta = \pm 1$ вказує поблизу якої з \mathbf{K}_\pm точок розглядається динаміка електронів. Двокомпонентність спінорів є наслідком кристалічної будови графену. За кристалографічною термінологією, гексагональна гратка — складна (оскільки її елементарна комірка містить два атоми). Вона може бути представлена у вигляді двох вкладених одна в одну простих трикутних ґраток, які зазвичай позначають буквами A та B . Гамільтоніан графену отримується в наближенні сильного зв'язку, яке базується на понятті електронного стану, локалізованого на одному з атомів кристалу. Зважаючи на це, можна визначити два типи електронних збуджень в графені, якщо їх електрони належать A чи B підґраткам відповідно. В довгохвильовому наближенні діраківської квазічастинки (при кожному значенні ζ і вказанному вище представленні гамма-матриць) також будуть характеризуватися підґратковою степінню вільності — перша (дру-

га) компонента спінора визначатиме амплітуду ймовірності знаходження відповідної квазічастинки на A (B) підгратці. Представлення гамма-матриць (2.3.77) є одним з багатьох можливих, які можуть бути використані в описі графена. Перехід від одного до іншого представлення здійснюється за допомогою деякого унітарного перетворення. В гамільтоніані (2.3.76) $v_F \approx 10^6 \text{ м/с}$ — швидкість Фермі, а Δ — діраківська маса (щілина), введена для загальності. Відмітимо, що розглядається найпростіший випадок, коли щілина має однаковий знак для кожного з представлень $\zeta = \pm 1$ [93]. Хоча обчислення в наближенні найближчих сусідів показує, що електронні збудження в графені мають лінійний закон дисперсії при малих енергіях квазічастинок [94] і описуються безмасовим рівнянням Дірака з $\Delta = 0$ [63], нещодавні СТМ вимірювання виявили наявність масової щілини поблизу діраківської точки в зразках моношарового графену на графітовому субстраті [95]. Оскільки ця щілина та її виникнення інтенсивно вивчаються як теоретично, так і експериментально протягом останніх декількох років, розглядатимемо загальний випадок зі скінченним значенням величини Δ .

Принципову різницю між шрьодінгерівською і діраківською системами найпростіше побачити, розглядаючи відповідні задачі на власні значення

$$\hat{H}_S(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad \hat{H}_D(\mathbf{r}, \zeta)\Psi(\mathbf{r}, \zeta) = E\Psi(\mathbf{r}, \zeta). \quad (2.3.78)$$

Квадруючи друге рівняння, отримуємо:

$$-\hbar^2 v_F^2 (D_1^2 + D_2^2 + i\zeta\sigma_3[D_1, D_2]) \Psi(\mathbf{r}, \zeta) = (E^2 - \Delta^2)\Psi(\mathbf{r}, \zeta), \quad (2.3.79)$$

де комутатор

$$i[D_1, D_2] = -\frac{e}{\hbar c} B_z(\mathbf{r}) \quad (2.3.80)$$

визначає псевдо-зеєманівський доданок. Він відповідає підгратковим, а не спіновим степеням вільності, оскільки у випадку графена компоненти спінора

$\Psi(\mathbf{r}, \zeta)$ асоційовані з підграткою. Оскільки квадратне рівняння Дірака відрізняється від аналогічного йому рівняння Шрödінгера на доданок пропорційний магнітному полю, то розв'язки відповідних рівнянь також повинні відрізнятися. Відмітимо, що у випадку ПАБ додатковий член пропорційний двовимірній дельта-функції.

Послідовний математичний аналіз задачі з сингулярним при $r = 0$ ПАБ (2.1.3) вимагає процедури самоспряженого розширення оператора Дірака [54, 88, 96]. Для того, щоб уникнути зайвих ускладнень (аналогічно нерелятивістському випадку) для пошуку розв'язків рівняння Дірака введемо регуляризований потенціал (2.1.9) [55, 89]. При цьому квадратне рівняння Дірака (2.3.79) буде еквівалентне парі рівнянь Шрödінгера на кожному з компонент спінора

$$\Psi(\mathbf{r}, \zeta) = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{r}, \zeta) \\ i\psi_2(\mathbf{r}, \zeta) \end{bmatrix}, \quad (2.3.81)$$

з додатковим виразом, що містить комутатор (2.3.80), який є сингулярним при $r = R$:

$$i[D_1, D_2] = -\frac{\eta}{R}\delta(r - R). \quad (2.3.82)$$

Наявність цього доданку змінює умову зшивки хвильових функцій в точці $r = R$. Компоненти спінора $\Psi(\mathbf{r}, \zeta)$ залишаються неперервними в точці зшивки і в полярних змінних $\mathbf{r} = (r, \varphi)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \psi_1(R + 0, \varphi, \zeta) &= \psi_1(R - 0, \varphi, \zeta), \\ \psi_2(R + 0, \varphi, \zeta) &= \psi_2(R - 0, \varphi, \zeta), \end{aligned} \quad (2.3.83)$$

а сингулярний комутатор (2.3.82) визначає наступні співвідношення на похідні відповідних компонент

$$\begin{aligned} \psi'_1(R + 0, \varphi, \zeta) - \psi'_1(R - 0, \varphi, \zeta) &= \frac{\zeta\eta}{R}\psi_1(R, \varphi, \zeta), \\ \psi'_2(R + 0, \varphi, \zeta) - \psi'_2(R - 0, \varphi, \zeta) &= -\frac{\zeta\eta}{R}\psi_2(R, \varphi, \zeta), \end{aligned} \quad (2.3.84)$$

де штрих означає диференціювання по r . Підкреслимо, що на протигагу діраківському випадку, розв'язки нерелятивістського рівняння (3.1.22) (які були отримані зі схожої регуляризаційної процедури) та їх похідні є неперервними в точці зшивки $r = R$.

Розв'язки часово-залежного рівняння Дірака шукатимемо методом розділення змінних $\Psi(\mathbf{r}, t, \zeta) = e^{-iEt/\hbar}\Psi(\mathbf{r}, \zeta)$. Тоді компоненти спінора $\Psi(\mathbf{r}, \zeta)$ (2.3.81) задовольнятимуть наступній системі рівнянь:

$$\begin{aligned} (E - \Delta)\psi_1(\mathbf{r}, \zeta) - \hbar v_F(D_1 - i\zeta D_2)\psi_2(\mathbf{r}, \zeta) &= 0, \\ \hbar v_F(D_1 + i\zeta D_2)\psi_1(\mathbf{r}, \zeta) + (E + \Delta)\psi_2(\mathbf{r}, \zeta) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.85)$$

Оскільки розглядається аксіально симетрична конфігурація поля з вектор-потенціалом $\mathbf{A} = \mathbf{e}_\varphi A_\varphi(r)$, перепишемо систему (2.3.85) в полярних координатах $\mathbf{r} = (r, \varphi)$:

$$\begin{aligned} (E - \Delta)\psi_1(\mathbf{r}, \zeta) - \hbar v_F e^{-i\zeta\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i\zeta}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e\zeta A_\varphi}{\hbar c} \right) \psi_2(\mathbf{r}, \zeta) &= 0, \\ \hbar v_F e^{i\zeta\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i\zeta}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{e\zeta A_\varphi}{\hbar c} \right) \psi_1(\mathbf{r}, \zeta) + (E + \Delta)\psi_2(\mathbf{r}, \zeta) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.86)$$

Регуляризований вектор-потенціал визначає дві області руху: для $r < R$ квазі-частинки задовольняють рівнянню Дірака за відсутності поля; при $r > R$ їхня динаміка відповідає рухові в ПАБ.

Надалі розглянемо випадок $\zeta = 1$ (інший розв'язується аналогічно). Компоненти спінора у системі рівнянь (2.3.86) шукатимемо у формі:

$$\psi_1(\mathbf{r}, 1) = e^{i(m-1)\varphi}\psi_1(r), \quad \psi_2(\mathbf{r}, 1) = e^{im\varphi}\psi_2(r). \quad (2.3.87)$$

Для $r < R$ отримаємо систему радіальних рівнянь для вільної діраківської частинки

$$(E - \Delta)\psi_1(r) - \hbar v_F \left[\frac{d}{dr} + \frac{m}{r} \right] \psi_2(r) = 0, \quad (2.3.88a)$$

$$\hbar v_F \left[\frac{d}{dr} - \frac{m-1}{r} \right] \psi_1(r) + (E + \Delta)\psi_2(r) = 0. \quad (2.3.88b)$$

Для $r > R$ система рівнянь приймає вигляд

$$(E - \Delta)\psi_1(r) - \hbar v_F \left[\frac{d}{dr} + \frac{m + \eta}{r} \right] \psi_2(r) = 0, \quad (2.3.89a)$$

$$\hbar v_F \left[\frac{d}{dr} - \frac{m + \eta - 1}{r} \right] \psi_1(r) + (E + \Delta)\psi_2(r) = 0. \quad (2.3.89b)$$

З систем (2.3.88) і (2.3.89) отримуємо, що компоненти спінорів задовольняють наступній парі диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\frac{d^2}{dr^2}\psi_1(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\psi_1(r) - \left[\frac{(m - 1)^2}{r^2} - \frac{E^2 - \Delta^2}{(\hbar v_F)^2} \right] \psi_1(r) = 0, \quad (2.3.90a)$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\psi_2(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\psi_2(r) - \left[\frac{m^2}{r^2} - \frac{E^2 - \Delta^2}{(\hbar v_F)^2} \right] \psi_2(r) = 0, \quad (2.3.90b)$$

для $r < R$, і

$$\frac{d^2}{dr^2}\psi_1(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\psi_1(r) - \left[\frac{(m + \eta - 1)^2}{r^2} - \frac{E^2 - \Delta^2}{(\hbar v_F)^2} \right] \psi_1(r) = 0, \quad (2.3.91a)$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\psi_2(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\psi_2(r) - \left[\frac{(m + \eta)^2}{r^2} - \frac{E^2 - \Delta^2}{(\hbar v_F)^2} \right] \psi_2(r) = 0 \quad (2.3.91b)$$

для $r > R$. Розв'язки рівнянь (2.3.90) і (2.3.91) виражаються в термінах функцій Бесселя.

Знайдемо координатну залежність функцій $\psi_1(r)$ і $\psi_2(r)$ в ПАБ.

Компонента $\psi_1(r)$:

Розв'язками рівнянь (2.3.90a) і (2.3.91a) в кожній з областей руху є

$$\psi_1(r) = C_m J_{|m-1|}(kr), \quad r < R, \quad (2.3.92a)$$

$$\psi_1(r) = A_m J_{|m+\eta-1|}(kr) + B_m J_{-|m+\eta-1|}(kr), \quad r > R, \quad (2.3.92b)$$

де A_m , B_m , C_m — числові константи. Розв'язок (2.3.92a) отримується з умови квадратичної інтегрованості хвильової функції поблизу $r = 0$. Коефіцієнти A_m , B_m , C_m можуть бути знайдені з граничних умов (2.3.83) і (2.3.84). Позначимо:

$$C'_m = C_m \frac{(kR)^{|m-1|}}{2^{|m-1|} \Gamma(|m-1| + 1)} \quad (2.3.93)$$

$$A'_m = A_m \frac{(kR)^{|m+\eta-1|}}{2^{|m+\eta-1|} \Gamma(|m+\eta-1|+1)} \quad (2.3.94)$$

$$B'_m = B_m \frac{(kR)^{-|m+\eta-1|}}{2^{-|m+\eta-1|} \Gamma(-|m+\eta-1|+1)} \quad (2.3.95)$$

Розв'язок шукатимемо, розкладаючи функції Бесселя по степеням kR , до другого порядку включно. Умови зшивки приймають вигляд:

$$C'_m \left[1 - \frac{(kR)^2}{4(1+|m-1|)} \right] = \quad (2.3.96)$$

$$A'_m \left[1 - \frac{(kR)^2}{4(1+|m+\eta-1|)} \right] + B'_m \left[1 - \frac{(kR)^2}{4(1-|m+\eta-1|)} \right]$$

$$C'_m \left[|m-1| + \eta - \frac{(2+|m-1|)(kR)^2}{4(1+|m-1|)} \right] =$$

$$= A'_m \left[|m+\eta-1| - \frac{(2+|m+\eta-1|)(kR)^2}{4(1+|m+\eta-1|)} \right] - \quad (2.3.97)$$

$$- B'_m \left[|m+\eta-1| + \frac{(2-|m+\eta-1|)(kR)^2}{4(1-|m+\eta-1|)} \right].$$

Значення коефіцієнтів запишемо з тією ж степінню точності, з якою записана система рівнянь.

$$A'_m = C'_m \frac{1}{2} \left[1 + \frac{|m-1| + \eta}{|m+\eta-1|} \right] + C'_m \frac{\eta(3-2m+|m-1|-\eta)(kR)^2}{8(1+|m-1|)(|m+\eta-1|-1)|m+\eta-1|},$$

$$B'_m = C'_m \frac{1}{2} \left[1 - \frac{|m-1| + \eta}{|m+\eta-1|} \right] + C'_m \frac{\eta(3-2m+|m-1|-\eta)(kR)^2}{8(1+|m-1|)(|m+\eta-1|+1)|m+\eta-1|}.$$

Розв'язок рівняння Дірака при $R \rightarrow 0$ визначатиметься найбільш сингулярним доданком. Знайдемо поведінку A_m, B_m при різних значеннях m .

$m < 1$:

$$A'_m \sim 1 \rightarrow A_m \sim (kR)^{-|m+\eta-1|}, \quad B'_m \sim 1 \rightarrow B_m \sim (kR)^{|m+\eta-1|} \quad (2.3.98)$$

$m \geq 1$:

$$A'_m \sim 1 \rightarrow A_m \sim (kR)^{-|m+\eta-1|}, \quad B'_m \sim (kR)^2 \rightarrow B_m \sim (kR)^{2+|m+\eta-1|} \quad (2.3.99)$$

Отже, в границі $R \rightarrow 0$, розв'язок рівняння Дірака визначатиметься регулярною в нулі функцією Бесселя.

Компонента $\psi_2(r)$:

Загальний розв'язок рівнянь (2.3.90b) і (2.3.91b) матиме вигляд

$$\psi_2(r) = C_m J_{|m|}(kr), \quad r < R, \quad (2.3.100a)$$

$$\psi_2(r) = A_m J_{|m+\eta|}(kr) + B_m J_{-|m+\eta|}(kr), \quad r > R, \quad (2.3.100b)$$

Аналогічно попередньому розгляду, введемо позначення

$$C'_m = C_m \frac{(kR)^{|m|}}{2^{|m|} \Gamma(|m| + 1)} \quad (2.3.101)$$

$$A'_m = A_m \frac{(kR)^{|m+\eta|}}{2^{|m+\eta|} \Gamma(|m + \eta| + 1)} \quad (2.3.102)$$

$$B'_m = B_m \frac{(kR)^{-|m+\eta|}}{2^{-|m+\eta|} \Gamma(-|m + \eta| + 1)} \quad (2.3.103)$$

Розв'язок знайдемо, розкладаючи функції Бесселя по степеням kR , до другого доданку включно. Умови зшивки визначають наступну систему рівнянь на коефіцієнти:

$$\begin{aligned} C'_m \left[1 - \frac{(kR)^2}{4(1 + |m|)} \right] &= A'_m \left[1 - \frac{(kR)^2}{4(1 + |m + \eta|)} \right] + B'_m \left[1 - \frac{(kR)^2}{4(1 - |m + \eta|)} \right] \\ C'_m \left[|m| - \eta - \frac{(2 + |m|)(kR)^2}{4(1 + |m|)} \right] &= \\ &= A'_m \left[|m + \eta| - \frac{(2 + |m + \eta|)(kR)^2}{4(1 + |m + \eta|)} \right] - B'_m \left[|m + \eta| + \frac{(2 - |m + \eta|)(kR)^2}{4(1 - |m + \eta|)} \right] \end{aligned}$$

Коефіцієнти A'_m та B'_m запишемо з тією ж степінню точності з якою записана система рівнянь.

$$A'_m = C'_m \frac{1}{2} \left[1 + \frac{|m| - \eta}{|m + \eta|} \right] - C'_m \frac{\eta(1 + 2m + |m| + \eta)(kR)^2}{8(1 + |m|)(|m + \eta| - 1)|m + \eta|}, \quad (2.3.104)$$

$$B'_m = C'_m \frac{1}{2} \left[1 - \frac{|m| - \eta}{|m + \eta|} \right] - C'_m \frac{\eta(1 + 2m + |m| + \eta)(kR)^2}{8(1 + |m|)(|m + \eta| + 1)|m + \eta|} \quad (2.3.105)$$

Розв'язок рівняння Дірака при $R \rightarrow 0$ визначатиметься найбільш сингулярним доданком. Знайдемо поведінку A_m, B_m при різних значеннях m .

$m = 0$:

$$A'_m \sim (kR)^2 \rightarrow A_m \sim (kR)^{2-\eta}, \quad B'_m \sim 1 \rightarrow B_m \sim (kR)^\eta \quad (2.3.106)$$

$m > 0$:

$$A'_m \sim 1 \rightarrow A_m \sim (kR)^{-|m+\eta|}, \quad B'_m \sim 1 \rightarrow B_m \sim (kR)^{|m+\eta|} \quad (2.3.107)$$

$m < 0$:

$$A'_m \sim 1 \rightarrow A_m \sim (kR)^{|m+\eta|}, \quad B'_m \sim (kR)^2 \rightarrow B_m \sim (kR)^{2+|m+\eta|} \quad (2.3.108)$$

Розв'язки рівняння Дірака регулярні при $m \neq 0$. При $m = 0$, нижня компонента спінора сингулярна в початку координат.

Остаточно отримуємо, що хвильові функції діраківського спінора мають вигляд:

$$\psi_1(r) = C_1 J_{|m+\eta-1|}(kr), \quad \psi_2(r) = C_2 J_{|m+\eta|}(kr), \quad (2.3.109)$$

для $m \neq 0$,

$$\psi_1(r) = C_1 J_{1-\eta}(kr), \quad \psi_2(r) = C_2 J_{-\eta}(kr), \quad (2.3.110)$$

для $m = 0$. Відмітимо, що розв'язки диференціальних рівнянь можна отримати іншим способом. Наприклад для отримання другої компоненти, $\psi_2(r)$ (в границі $R \rightarrow 0$) треба підставити результат для $\psi_1(r)$ в рівняння (2.3.89b). Або, що еквівалентно, можна почати з рівнянь (2.3.90b) і (2.3.91b) для компоненти $\psi_2(r)$ яка також має розв'язок у вигляді функцій Бесселя. Аналогічно попередньому випадку, знаходячи відповідні константи з граничних умов та використовуючи рівняння (2.3.89а) отримуємо функцію $\psi_1(r)$.

Коефіцієнти C_1 і C_2 однозначно визначаються з використанням системи рівнянь (2.3.89) та умови нормування:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty r dr \Psi_m^\dagger(r, \varphi; k) \Psi_{m'}(r, \varphi; k') = \delta(k - k') \delta_{m, m'}. \quad (2.3.111)$$

Після взяття границі $R \rightarrow 0$, для випадку $\zeta = 1$ отримуємо наступні розв'язки:

$$\Psi_m^{(+)}(\mathbf{r}; k) = \sqrt{\frac{k}{4\pi E(k)}} \begin{bmatrix} e^{i(m-1)\varphi} \sqrt{E(k) + \Delta} J_{|m+\eta-1|}(kr) \\ \pm i e^{im\varphi} \sqrt{E(k) - \Delta} J_{|m+\eta|}(kr) \end{bmatrix}, \quad (2.3.112)$$

для додатніх значень енергії $E = E(k) = \sqrt{(\hbar v_F k)^2 + \Delta^2}$ і $m \neq 0$;

$$\Psi_m^{(-)}(\mathbf{r}; k) = \sqrt{\frac{k}{4\pi E(k)}} \begin{bmatrix} e^{i(m-1)\varphi} \sqrt{E(k) - \Delta} J_{|m+\eta-1|}(kr) \\ \mp i e^{im\varphi} \sqrt{E(k) + \Delta} J_{|m+\eta|}(kr) \end{bmatrix}, \quad (2.3.113)$$

для від'ємних значень енергії $E = -E(k)$ при $m \neq 0$. Верхній і нижній знак другої компоненти спінора відносяться до випадків $m > 0$ і $m < 0$, відповідно. Розв'язки з $m = 0$ розглядаються окремо, оскільки в цьому випадку, лише верхня компонента регулярна при $r = 0$, а нижня компонента сингулярна, і має поведінку $J_{-\eta}(kr) \sim r^{-\eta}$ поблизу початку координат:

$$\Psi_0^{(+)}(\mathbf{r}; k) = \sqrt{\frac{k}{4\pi E(k)}} \begin{bmatrix} e^{-i\varphi} \sqrt{E(k) + \Delta} J_{1-\eta}(kr) \\ -i \sqrt{E(k) - \Delta} J_{-\eta}(kr) \end{bmatrix}, \quad (2.3.114)$$

для $E = E(k)$ і

$$\Psi_0^{(-)}(\mathbf{r}; k) = \sqrt{\frac{k}{4\pi E(k)}} \begin{bmatrix} e^{-i\varphi} \sqrt{E(k) - \Delta} J_{1-\eta}(kr) \\ i \sqrt{E(k) + \Delta} J_{-\eta}(kr) \end{bmatrix}, \quad (2.3.115)$$

для $E = -E(k)$. Порівнюючи (2.3.114) і (2.3.115) бачимо, що сингулярний при $r = 0$ розв'язок з енергією $E(k) \approx \Delta$ має діркоподібний характер, оскільки сингулярний електроноподібний розв'язок зникає внаслідок $\sqrt{E(k) - \Delta}$ множника. Завершуючи обговорення випадку $\zeta = 1$ підкреслимо, що для протилежно

напрявленого магнітного поля вихору, верхня компонента спінора характеризується сингулярним розв'язком, що еквівалентний (2.3.114) і (2.3.115). Більш того, розв'язок з $m = 0$ в цьому випадку є електроноподібним. Як було вперше відмічено в [55], ця поведінка при зміні напрямку поля, порушує симетрію при заміні $\Phi \rightarrow \Phi + \Phi_0$ [97].

Сукупність розв'язків для випадку $\zeta = -1$ є:

$$\Psi_m^{(+)}(\mathbf{r}; k) = \sqrt{\frac{k}{4\pi E(k)}} \begin{bmatrix} e^{im\varphi} \sqrt{E(k) + \Delta} J_{|m+\eta|}(kr) \\ \mp i e^{i(m-1)\varphi} \sqrt{E(k) - \Delta} J_{|m+\eta-1|}(kr) \end{bmatrix}, \quad (2.3.116)$$

для $E = E(k)$ і

$$\Psi_m^{(-)}(\mathbf{r}; k) = \sqrt{\frac{k}{4\pi E(k)}} \begin{bmatrix} e^{im\varphi} \sqrt{E(k) - \Delta} J_{|m+\eta|}(kr) \\ \pm i e^{i(m-1)\varphi} \sqrt{E(k) + \Delta} J_{|m+\eta-1|}(kr) \end{bmatrix}, \quad (2.3.117)$$

для $E = -E(k)$. Прескрипція для нижнього і верхнього знаків другої компоненти спінора аналогічна випадку з $\zeta = 1$. Для розв'язків з орбітальним моментом $m = 0$ при $\zeta = -1$ маємо:

$$\Psi_0^{(+)}(\mathbf{r}; k) = \sqrt{\frac{k}{4\pi E(k)}} \begin{bmatrix} \sqrt{E(k) + \Delta} J_{-\eta}(kr) \\ i e^{-i\varphi} \sqrt{E(k) - \Delta} J_{1-\eta}(kr) \end{bmatrix}, \quad (2.3.118)$$

для $E = E(k)$ і

$$\Psi_0^{(-)}(\mathbf{r}; k) = \sqrt{\frac{k}{4\pi E(k)}} \begin{bmatrix} \sqrt{E(k) - \Delta} J_{-\eta}(kr) \\ -i e^{-i\varphi} \sqrt{E(k) + \Delta} J_{1-\eta}(kr) \end{bmatrix}, \quad (2.3.119)$$

для $E = -E(k)$. Бачимо, що в цьому випадку, верхня компонента спінора є сингулярною при $r = 0$ і відповідає, при $E(k) \approx \Delta$, незникаючій електроноподібній моді.

Отримані хвильові функції використовуються для побудови функції Гріна (ФГ) для діраківських ферміонів графену. Відмітимо, що використання польової конфігурації з магнітним полем B , сконцентрованим вздовж поверхні циліндра радіуса R (як і у нерелятивістському випадку) не впливає на остаточні

розв'язки рівняння Дірака в границі $R \rightarrow 0$ [55, 89]. Незалежність остаточної відповіді від вигляду профільної функції може бути зрозуміла, якщо розглядати несингулярні аксіально-симетричні потенціали у вигляді множини концентричних циліндричних поверхонь, з розподіленим в кожній з них магнітним полем заданої величини. Більш формально, профільна функція $h(r)$ повинна задовольняти умову (2.1.8), що виключає дельта-функціональну особливість в центрі вихору.

Розклад функції Гріна за власними функціями гамільтоніана, для кожної з \mathbf{K}_\pm точок містить як додатньо, так і від'ємно енергетичні розв'язки

$$G_\eta^{\text{D}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E + i0; \zeta) = \int_0^\infty dk \sum_{m=-\infty}^\infty \left(\frac{\Psi_m^{(+)}(\mathbf{r}; k) \Psi_m^{(+)\dagger}(\mathbf{r}'; k)}{E - E(k) + i0} + \frac{\Psi_m^{(-)}(\mathbf{r}; k) \Psi_m^{(-)\dagger}(\mathbf{r}'; k)}{E + E(k) + i0} \right), \quad (2.3.120)$$

де залежність суми від ζ визначає тип розв'язків, які використовуються для її побудови (з $\zeta = 1$ або $\zeta = -1$ відповідно). Діагональні матричні елементи $G_\eta^{\text{D}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E + i0; \zeta)$ для випадку $\zeta = 1$ мають вигляд

$$G_{\eta 11}^{\text{D}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E + i0; \zeta = 1) = \frac{E + \Delta}{2\pi(\hbar v_F)^2} \int_0^\infty \frac{kdk}{q^2 - k^2 + i0 \text{sgn} E} \quad (2.3.121)$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^\infty e^{im(\varphi - \varphi')} J_{|m+\eta|}(kr) J_{|m+\eta|}(kr'),$$

$$G_{\eta 22}^{\text{D}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E + i0; \zeta = 1) = \frac{E - \Delta}{2\pi(\hbar v_F)^2} \int_0^\infty \frac{kdk}{q^2 - k^2 + i0 \text{sgn} E} \quad (2.3.122)$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^\infty e^{im(\varphi - \varphi')} J_{|m+\eta|}(kr) J_{|m+\eta|}(kr') +$$

$$+ \frac{E - \Delta}{2\pi(\hbar v_F)^2} \int_0^\infty \frac{kdk}{q^2 - k^2 + i0 \text{sgn} E} [J_{-\eta}(kr) J_{-\eta}(kr') - J_\eta(kr) J_\eta(kr')],$$

де $q^2 = (E^2 - \Delta^2)/(\hbar v_F)^2$. Діагональні компоненти функції Гріна у співпадаючих

точках $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ приймають форму

$$\begin{aligned} G_{\eta 11}^D(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E + i0; \zeta = 1) &= \frac{E + \Delta}{2\pi(\hbar v_F)^2} g_\eta(\mathbf{r}, q), \\ G_{\eta 22}^D(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E + i0; \zeta = 1) &= \frac{E - \Delta}{2\pi(\hbar v_F)^2} [g_\eta(\mathbf{r}, q) + f_\eta(\mathbf{r}, q)] \end{aligned} \quad (2.3.123)$$

для $\zeta = 1$, та

$$\begin{aligned} G_{\eta 11}^D(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E + i0; \zeta = -1) &= \frac{E + \Delta}{2\pi(\hbar v_F)^2} [g_\eta(\mathbf{r}, q) + f_\eta(\mathbf{r}, q)], \\ G_{\eta 22}^D(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E + i0; \zeta = -1) &= \frac{E - \Delta}{2\pi(\hbar v_F)^2} g_\eta(\mathbf{r}, q), \end{aligned} \quad (2.3.124)$$

для $\zeta = -1$. Функція $g_\eta(\mathbf{r}, q)$ після аналітичного продовженням $q + i0\text{sgn}E \rightarrow z = i\mathcal{Q}\text{sgn}E$ співпадає з функцією $g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$, яка визначена в (2.1.39). Відмітимо, що хоча вираз $g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$ є однаковим для релятивістського і нерелятивістського випадку, відповідна функція $g_\eta(\mathbf{r}, q)$ дійсного аргументу q (для випадку графену) має різні аналітичні продовження і відображає той факт, що релятивістський спектр містить крім додатньої, ще й від'ємну гілку енергії. Аналогічно, функція

$$f_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q}) = - \int_0^\infty \frac{kdk}{\mathcal{Q}^2 + k^2} [J_{-\eta}^2(kr) - J_\eta^2(kr)]. \quad (2.3.125)$$

є аналітичним продовженням на уявну вісь функції $f_\eta(\mathbf{r}, q)$. Величина $f_\eta(\mathbf{r}, q)$ в $G_{\eta jj}^D(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E + i0; \zeta)$ (де $j = 1, 2$) виникає з розв'язків рівняння Дірака при $m = 0$. Використовуючи інтеграл (див. (2.12.32.12) з [92])

$$\int_0^\infty \frac{kdk}{c^2 + k^2} J_\nu^2(kr) = I_\nu(cr)K_\nu(cr), \quad (2.3.126)$$

де $I_\nu(cr)$ — модифікована функція Бесселя, а $K_\nu(cr)$ — функція Макдональда, отримуємо наступний результат для $f_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$

$$f_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q}) = -\frac{2 \sin \pi\nu}{\pi} K_\eta^2(\mathcal{Q}r). \quad (2.3.127)$$

2.4 Повна та локальна густини станів

Відповідно до матричної структури функції Гріна та існування долиинних степенів вільності $\zeta = \pm 1$, на протипагу нерелятивістському виразу (2.2.43), розрахунок повної ГС графену складається не тільки з інтегрування по площині, а ще й містить сумування діагональних компонент ФГ. Отримані величини додатково повинні бути просумовані по \mathbf{K}_{\pm} точкам. Для розуміння остаточного результату повної ГС, розглянемо вирази для кожної з \mathbf{K}_{\pm} точок окремо

$$\rho_{\eta}^{\text{D}}(E, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r dr \text{Im} [\text{tr} G_{\eta}^{\text{D}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E + i0; \zeta)]. \quad (2.4.128)$$

Неважко переконатись, що у випадку $\eta = 0$, ГС вільних діраківських квазічастинок, нормована на спінову і долиинну степінь свободи має наступний вигляд $\rho_0^{\text{D}}(E) = |E|\theta(E^2/\Delta^2 - 1)/(2\pi\hbar^2 v_F^2)$. Побудовані таким чином густини станів залежать від індексу ζ . Кожна з них визначає внесок електронних збуджень поблизу \mathbf{K}_+ і \mathbf{K}_- точок в загальну ГС. Хоча експериментально неможливо отримати ці величини окремо (в СТМ вимірюваннях сумується вклад діраківських точок в загальну ГС), таке представлення є зручним для порівняння з результатами теоретико-польових досліджень, в яких зазвичай обмежуються розглядом лише одного діраківського конуса [80].

Використовуючи (2.3.123) і (2.3.124) запишемо ГС (2.4.128) через функції $g_{\eta}(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$ і $f_{\eta}(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$, які були визначені в (2.1.39) і (2.3.125). Отримуємо

$$\begin{aligned} \rho_{\eta}^{\text{D}}(E, \zeta) = & -\frac{E}{(\pi\hbar v_F)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r dr \text{Im}[g_{\eta}(\mathbf{r}, \mathcal{Q} \rightarrow -iq \text{sgn}E + 0)] - \\ & -\frac{E - \zeta\Delta}{2(\pi\hbar v_F)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r dr \text{Im}[f_{\eta}(\mathbf{r}, \mathcal{Q} \rightarrow -iq \text{sgn}E + 0)]. \end{aligned} \quad (2.4.129)$$

Перший інтеграл виник в нерелятивістському випадку, і був розрахований вище (вираз (2.2.45)). Інтегруючи по площині функцію $f_{\eta}(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$, отриману з (2.3.127),

запишемо наступну рівність

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty r dr f_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q}) = -\frac{2\pi\eta}{\mathcal{Q}^2}. \quad (2.4.130)$$

Відмітимо, що оскільки $f_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q}) = 0$ при $\eta = 0$, немає необхідності вводити функцію $\Delta f_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$. Після інтегрування по площині отримаємо уявну частину відповідного виразу. Оскільки обидві функції (2.2.45) і (2.4.130) залежать від \mathcal{Q}^2 , їх уявна частина може бути визначена з врахуванням прескрипції $\mathcal{Q}^2 \rightarrow -q^2 = -[(E + i0)^2 - \Delta^2]/(\hbar v_F)^2$. Звідки вираз для збурення ГС $\Delta\rho_\eta^D(E, \zeta) = \rho_\eta^D(E, \zeta) - V_{2D}\rho_0^D(E)$ у ПАБ приймає вигляд

$$\Delta\rho_\eta^D(E, \zeta) = -\frac{1}{2}|\eta|(1 - |\eta|)[\delta(E - \Delta) + \delta(E + \Delta)] + \eta\delta(E + \zeta\Delta). \quad (2.4.131)$$

Перший доданок у (2.4.131), який є $\sim -|\eta|(1 - |\eta|)$ отримується з $g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$ частини (2.4.129) і відтворює нерелятивістський результат (2.2.46). Для $\Delta = 0$ він має вдвічі більше значення ніж (2.2.46). Це можна пояснити тим, що при отриманні виразу (2.4.131) сумуються діагональні компоненти функції Гріна $G_\eta^D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E + i0; \zeta)$, пов'язані як з A так і B підгратками графену. Останній доданок в (2.4.131) виникає з $f_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$ частини (2.4.129) і який визначає внесок в ГС розв'язків рівняння Дірака з нульовим орбітальним моментом.

Відмітимо, що наявність сингулярної діркоподібної компоненти спінора з нульовим $m = 0$ при $\zeta = 1$ (2.3.115) і аналогічної їй електоноподібної компоненти для $\zeta = -1$ (2.3.118) відображається в асиметричній формі останнього виразу (2.4.131). З аналізу розв'язків з нульовим $m = 0$, випливає, що при зміні напрямку поля вихору на протилежний, густини $\rho_\eta(E, \zeta = 1)$ і $\rho_\eta(E, \zeta = -1)$ змінюються одна на одну. Різниця повної ГС

$$\Delta N_\eta^D(E) = \Delta\rho_\eta^D(E, \zeta = 1) + \Delta\rho_\eta^D(E, \zeta = -1) = \eta^2[\delta(E - \Delta) + \delta(E + \Delta)] \quad (2.4.132)$$

є симетричною по відношенню до зміни знаку енергії. На протипагу нерелятивістському випадку, для рівняння Дірака вихор АБ індукує збільшення густини

станів, яке пов'язане з доданком у виразі (2.4.131), який визначається розв'язком з нульовим $m = 0$. Відмітимо, що у [80] відповідний доданок (2.4.131) має неправильний знак, оскільки цій роботі (при нульовому Δ) величина різниці ГС від'ємна при $E = 0$. Невід'ємність $\Delta\rho_\eta^D(E, \zeta)$ при $E = 0$ може бути зрозуміла за допомогою наступного простого міркування. Для $\Delta = 0$ ГС вільних діраківських квазічастинок $\rho_0^D(E = 0) = 0$. Оскільки ГС є невід'ємною величиною (за означенням), величина $\Delta\rho_\eta^D(E, \zeta)$ при $E = 0$ і $\Delta = 0$ може бути лише додатньою або рівною нулю.

Знайдемо вираз для ЛГС електронних збуджень графену за наявності ПАБ. Сучасна СТМ дозволяє вимірювати густину станів для кожної з підґраток. Тому будемо розглядати ЛГС асоційовані з A та B підґратками окремо. Вони визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} N_\eta^{D(A)}(\mathbf{r}, E) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} [G_{\eta 11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E + i0; \zeta = 1) + G_{\eta 11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E + i0; \zeta = -1)], \\ N_\eta^{D(B)}(\mathbf{r}, E) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} [G_{\eta 22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E + i0; \zeta = 1) + G_{\eta 22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E + i0; \zeta = -1)]. \end{aligned} \quad (2.4.133)$$

Розглянемо різницю $\Delta N_\eta^{D(A,B)}(\mathbf{r}, E) = N_\eta^{D(A,B)}(\mathbf{r}, E) - N_0^{D(A,B)}(\mathbf{r}, E)$ індуковану ПАБ. Використовуючи вирази (2.3.123) та (2.3.124) перепишемо її в термінах функцій $\Delta g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$ і $f_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$

$$\begin{aligned} \Delta N_\eta^{D(A,B)}(\mathbf{r}, E) &= -\frac{E \pm \Delta}{2(\pi\hbar v_F)^2} \text{Im} [2\Delta g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q} \rightarrow -iq \text{sgn}E + 0) + \\ &\quad + f_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q} \rightarrow -iq \text{sgn}E + 0)], \end{aligned} \quad (2.4.134)$$

де верхній і нижній знаки відповідають A і B підґраткам відповідно. Знайдемо остаточний вигляд різниці ЛГС врахувавши аналітичне продовження $\mathcal{Q} \rightarrow -iq \text{sgn}E$. Для функції $\Delta g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$, використовуючи (2.2.72), отримуємо

$$\text{Im} \Delta g_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q} \rightarrow -iq \text{sgn}E) = -\frac{\pi \text{sgn}E}{2} \{ \sin^2 \pi \eta [F(\eta, qr) + F(1 - \eta, qr)] - 1 \}, \quad (2.4.135)$$

де вираз $F(\eta, qr)$ був визначений в (2.2.73). В нерелятивістському випадку аналітичне продовження до дійсної осі імпульсів $\mathcal{Q} \rightarrow -iq$ відрізняється від аналітичного продовження $\mathcal{Q} \rightarrow -iq \operatorname{sgn} E$ релятивістського випадку, тому вирази (2.4.135) та (2.2.72) як функції енергії та координат не співпадатимуть. Використовуючи співвідношення [91] між функціями Макдональда уявного аргументу, функціями Ханкеля другого роду $H^{(2)}(z)$, функціями Бесселя першого $J_\nu(z)$ та другого $Y_\nu(z)$ родів,

$$K_\nu(ze^{i\frac{\pi}{2}}) = -i\frac{\pi}{2}e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}H^{(2)}(z), \quad H^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z) \quad (2.4.136)$$

отримуємо

$$K_\eta^2(\pm iz) = \frac{\pi^2}{4}e^{\mp i\pi\eta}[Y_\eta^2(z) - J_\eta^2(z) \pm 2iJ_\eta(z)Y_\eta(z)]. \quad (2.4.137)$$

Враховуючи цей результат, запишемо уявну частину аналітичного продовження функції $f_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q})$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f_\eta(\mathbf{r}, \mathcal{Q} \rightarrow -iq \operatorname{sgn} E) &= -\frac{\pi \sin \pi\eta \operatorname{sgn} E}{2} \times \\ &\times \{ \sin \pi\eta [Y_\eta^2(qr) - J_\eta^2(qr)] - 2 \cos \pi\eta J_\eta(qr)Y_\eta(qr) \}. \end{aligned} \quad (2.4.138)$$

Після підстановки (2.4.135) і (2.4.138) у вираз (2.4.134) різниця ЛГС приймає форму

$$\begin{aligned} \Delta N_\eta^{\text{D}(A,B)}(\mathbf{r}, E) &= N_0^{\text{D}}(E) \left(1 \pm \frac{\Delta}{E} \right) \theta \left(\frac{E^2}{\Delta^2} - 1 \right) \left\{ \frac{\sin^2 \pi\eta}{2} [Y_\eta^2(qr) - J_\eta^2(qr)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin 2\pi\eta}{2} J_\eta(qr)Y_\eta(qr) + \sin^2 \pi\eta [F(\eta, qr) + F(1 - \eta, qr)] - 1 \right\}, \end{aligned} \quad (2.4.139)$$

де $N_0^{\text{D}}(E) = |E|/(2\pi\hbar^2 v_F^2)$ — ЛГС для діраківських квазічастинок нормованих на спінову та підграткову степінь свободи за умови $\Delta = 0$, а $q = \sqrt{E^2 - \Delta^2}/\hbar v_F$. Частина рівняння (2.4.139), що включає в себе $F(\eta, qr)$, $F(1 - \eta, qr)$ та -1

аналогічна нерелятивістському випадку (2.2.72), в той час як друга частина (2.4.139) (з функціями Бесселя), виникає з розв'язків з нульовим $m = 0$.

В границі $qr \gg 1$ вираз для ЛГС приймає вигляд

$$\Delta N_{\eta}^{\text{D}(A,B)}(\mathbf{r}, E) = -N_0^{\text{D}}(E) \left(1 \pm \frac{\Delta}{E}\right) \theta\left(\frac{E^2}{\Delta^2} - 1\right) \frac{\eta \sin \pi \eta \sin 2qr}{\pi (qr)^2}. \quad (2.4.140)$$

Порівнюючи (2.4.140) і (2.2.74) можемо зробити висновок що у випадку графену, вплив вихору призводить до сильнішої локалізації густини станів поблизу місця його розташування (в порівнянні з нерелятивістським випадком).

В попередньому розділі було показано, що для фізично важливого випадку $\eta = 1/2$, вираз для різниці ЛГС (2.2.72) суттєво спрощується, і має вигляд (2.2.75). Ця властивість має місце і для (2.4.139), оскільки функції Бесселя половинного аргументу виражаються в термінах елементарних функцій

$$\Delta N_{\eta}^{\text{D}(A,B)}(\mathbf{r}, E) = N_0^{\text{D}}(E) \left(1 \pm \frac{\Delta}{E}\right) \theta\left(\frac{E^2}{\Delta^2} - 1\right) \left[\frac{2}{\pi} Si(2qr) - 1 + \frac{\cos 2qr}{\pi qr}\right]. \quad (2.4.141)$$

З вигляду (2.4.141) одразу можна побачити суттєву відмінність між релятивістським та нерелятивістським випадками. Розв'язки з $m = 0$ відповідають за розбіжність ЛГС, $\Delta N_{\eta}^{\text{D}(A,B)}(\mathbf{r}, E) \sim 1/qr$ для $qr \ll 1$. Результат збільшення густини станів відображається у виразі для повної ГС (2.4.132). Використовуючи асимптотичний розклад для $Si(x)$ (2.2.75), можна показати, що попередній результат (2.4.140) відтворюється для випадку $\eta = 1/2$ і $qr \gg 1$.

Малюнок 2.3 відповідає залежності (2.4.141) індукованої різниці ЛГС $\Delta N_{1/2}^{\text{D}(A,B)}(\mathbf{r}, E)$ як функції qr , для $\Delta = 0$. З графіка неважко побачити такі особливості ЛГС, як зростання при малих $qr \ll 1$ і більш швидке, ніж у випадку нерелятивістського 2DEГ, спадання $\Delta N_{1/2}^{\text{D}} \sim 1/r^2$ для $qr \gg 1$.

На малюнку 2.4 розглядається ситуація подібна до малюнку 2.2. Аналогічно нерелятивістському випадку введемо шкалу відстаней r_0 (порядку довжини відстані між атомами). При фіксованій відстані $r = 10r_0$ будується графік різниці

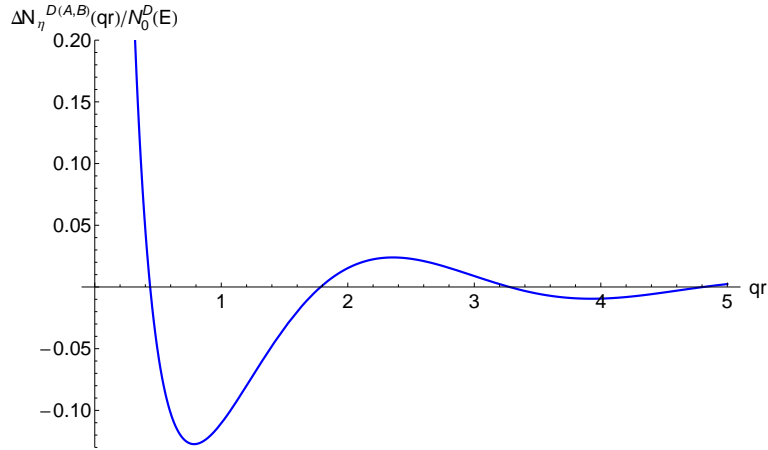


Рис. 2.3 Нормованя різниця ЛГС $\Delta N_{\eta}^{D(A,B)}(qr)/N_0^D(E)$ як функція безрозмірної величини qr для $\eta = 1/2$.

релятивістської ЛГС (2.4.141) як функції енергії. Розглядається найбільш цікавий випадок недопованого графену з нульовою густиною носіїв заряду.

На противагу нерелятивістському 2DEГ, в графені цей режим досить просто може бути створений. Енергетичну шкалу визначимо через $r_0 - E_0 = \hbar v_F/r_0$, а відповідний безрозмірний параметр запишемо наступним чином — $qr = \sqrt{(E/E_0)^2 - (\Delta/E_0)^2} r/r_0$. Для того, щоб побачити асиметрію між ЛГС для A і B підґраток, введемо скінченну щілину $\Delta = 0.1E_0$. Різниця ЛГС $\Delta N_{1/2}^{D(A)}(E)$ показана суцільною лінією, що має гострий пік поблизу $E = \Delta$ і практично відсутній пік при $E = -\Delta$, в той час коли $\Delta N_{1/2}^{D(B)}(E)$ (зображена штрихованою лінією) має пік поблизу $E = -\Delta$ і немає піку поблизу $E = \Delta$. Коли E збільшується, функція різниці локальної гусини станів дуже швидко спадає до нуля. Така поведінка аналогічна нерелятивістській ЛГС. Обговорені особливості густини станів, можуть бути використані для СТМ експериментів на графені.

Закінчуючи обговорення випадку рівняння Дірака, слід вказати на роботу [98], де вивчалася близька задача, а саме ефект поляризації ферміонного вакуу-

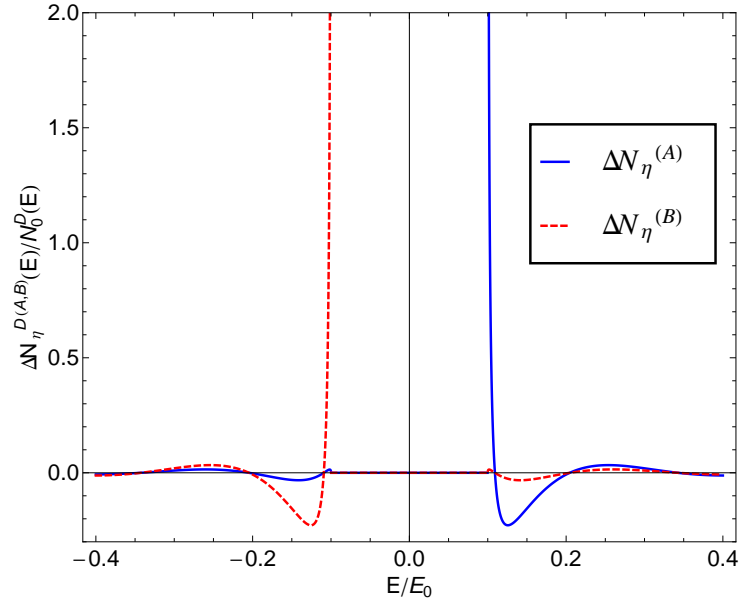


Рис. 2.4 Нормована ЛГС $\Delta N_\eta^{D(A,B)}(E)/N_0^D(E)$ як функція енергії E для $r/r_0 = 10$, $\Delta = 0.1E_0$ і $\eta = 1/2$.

му у полі нескінченно-тонкого соленоїда, на відстанях набагато більших від радіусу соленоїда. Конструюючи ФГ автори знехтували дельта функцією (2.3.84), мотивуючи це тим, що вони цікавляться випадком коли $r \gg R$. Одним з їхніх цікавих висновків є занулення струму, індукованого вихором при $\eta = 1/2$.

2.5 Функція Гріна графена в потенціалі Ааронова-Бома

Під ФГ будемо розуміти розв'язок рівняння

$$[E - \hat{H}(\mathbf{r})]G(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.5.142)$$

де $\hat{H}(\mathbf{r})$ — гамільтоніан системи, \mathbf{r} — радіус-вектор, E — параметр енергії, який, в загальному випадку, може приймати комплексні значення. Як відомо ФГ можна побудувати у вигляді

$$G(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n \frac{\Psi_n(\mathbf{r})\Psi_n^\dagger(\mathbf{r}')}{E - E_n + i0} \quad (2.5.143)$$

з власних функцій $\Psi_n(\mathbf{r})$ і власних значень E_n задачі

$$[\hat{H}(\mathbf{r}) - E_n]\Psi_n(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.5.144)$$

де n — повний набір квантових чисел, що характеризують власну хвильову функцію. Для усунення неоднозначності до E додано нескінченно-малий умовний доданок. Під знаком суми слід розуміти сумування, коли спектр дискретний, та інтегрування, коли він неперервний. Якщо спектр характеризується як неперервним, так і дискретним квантовим числом, під сумою слід розуміти інтегрування і сумування, відповідно.

У випадку рівняння Дірака, гамільтоніан і $\Phi\Gamma$ є матрицями, а розв'язок рівняння Дірака — спінором. Гамільтоніан, який описує електронні збудження в графені, може бути представлений сумою [93]

$$\hat{H}(\mathbf{r}) = \hat{H}(\mathbf{r}, +1) \oplus \hat{H}(\mathbf{r}, -1). \quad (2.5.145)$$

Обидва оператори $\hat{H}(\mathbf{r}, \zeta)$, де параметр $\zeta = \pm 1$ відповідає тому чи іншому діраківському конусу, мають однакову структуру

$$\hat{H}(\mathbf{r}, \zeta) = -i\hbar v_F \gamma_\zeta^0 \gamma_\zeta^j D_j + \gamma_\zeta^0 \Delta, \quad (2.5.146)$$

тому зручно розглядати їх одночасно, розрізняючи параметром ζ . Пошук власних функцій зводиться до розв'язку системи диференціальних рівнянь, що визначаються гамільтоніанами $\hat{H}(\mathbf{r}, \zeta)$.

Електронна $\Phi\Gamma$ графена в ПАБ визначається її діагональними елементами. Дійсно, з рівняння (2.5.142) впливають наступні рівності для недіагональних матричних елементів $\Phi\Gamma$ (подальші розрахунки відповідають випадку $\zeta = 1$, розгляд іншої діраківської точки проводиться аналогічним чином):

$$G_{12}(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\hbar v_F e^{-i\varphi}}{i(E - \Delta)} \left(\frac{\partial}{\partial r} - i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\eta}{r} \right) G_{22}(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (2.5.147)$$

$$G_{21}(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\hbar v_F e^{i\varphi}}{i(E + \Delta)} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\eta}{r} \right) G_{11}(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2.5.148)$$

Використовуючи, знайдені вище, розв'язки рівняння Дірака в ПАБ та позначення $q = \sqrt{E^2 - \Delta^2}/\hbar v_F$, запишемо діагональні елементи $\Phi\Gamma$ у вигляді:

$$G_{11}(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{(E + \Delta)}{2\pi(\hbar v_F)^2} \int_0^\infty dk \frac{k G_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{q^2 - k^2 + i0 \operatorname{sgn} E}, \quad (2.5.149)$$

$$G_{22}(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{(E - \Delta)}{2\pi(\hbar v_F)^2} \int_0^\infty dk \frac{k G_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{q^2 - k^2 + i0 \operatorname{sgn} E}, \quad (2.5.150)$$

де

$$G_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} J_{|m+\eta|}(kr) J_{|m+\eta|}(kr'), \quad (2.5.151)$$

$$G_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \sum_{\alpha=\pm 1} \operatorname{sgn} \alpha J_{\alpha\eta}(kr) J_{\alpha\eta}(kr'). \quad (2.5.152)$$

Бачимо, що для отримання (2.5.149) и (2.5.150) необхідно розрахувати вирази:

$$F_1(q, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^\infty \frac{kdk}{q^2 - k^2 + i0 \operatorname{sgn} E} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} J_{|m+\eta|}(kr) J_{|m+\eta|}(kr'), \quad (2.5.153)$$

$$F_2(q, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^\infty \frac{kdk}{q^2 - k^2 + i0 \operatorname{sgn} E} [J_{-\eta}(kr) J_{-\eta}(kr') - J_{\eta}(kr) J_{\eta}(kr')]. \quad (2.5.154)$$

Величину (2.5.153) знайдемо, використовуючи метод, запропонований в [90].

Розглянемо аналітичне продовження функції, що задається згідно правила $q + i0 \operatorname{sgn} E \rightarrow z = iQ \operatorname{sgn} E$:

$$F_1(Q, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = - \int_0^\infty \frac{kdk}{Q^2 + k^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} J_{|m+\eta|}(kr) J_{|m+\eta|}(kr'). \quad (2.5.155)$$

Величина $\theta = \varphi - \varphi'$ належить інтервалу $[-\pi, \pi]$. Абсолютне значення θ визначає менший з кутів між радіус-векторами \mathbf{r} і \mathbf{r}' , а знак — взаємне їх розташування. Кути $\theta = \pm\pi$ визначають одне і те саме розташування радіус-векторів.

Розрахуємо інтеграли суми за допомогою рівності [92]

$$\int_0^\infty \frac{kdk}{Q^2 + k^2} J_{|m+\eta|}(kr) J_{|m+\eta|}(kr') = I_{|m+\eta|}(Qr_-) K_{|m+\eta|}(Qr_+), \quad (2.5.156)$$

де r_- і r_+ — менший та більший з радіусів r, r' . Розглянемо випадок, коли $r_- = r$ и $r_+ = r'$ (якщо $r_- = r'$ і $r_+ = r$, то відповідь для ФГ зводиться до заміни $r \leftrightarrow r'$ у виразі, отриманого з врахуванням першої прескрипції). Використаємо інтегральні представлення для циліндричних функцій [99]

$$I_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{z \operatorname{ch} \omega - \nu \omega} d\omega, \quad K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z \operatorname{ch} v - \nu v} dv, \quad (2.5.157)$$

де контур інтегрування C починається і закінчується в точках $-i\pi + \infty$ і $i\pi + \infty$ відповідно. Запишемо суму (2.5.155), розкриваючи модулі індексів циліндричних функцій:

$$F_1(Q, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_C d\omega S(Q, \mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{Qr \operatorname{ch} \omega - Qr' \operatorname{ch} v}, \quad (2.5.158)$$

де

$$S(Q, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m=0}^{\infty} e^{im\theta} e^{-(m+\eta)(v+\omega)} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-im\theta} e^{-(m-\eta)(v+\omega)}. \quad (2.5.159)$$

Для розрахунку функції $F_1(Q, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ використаємо наступний прийом. Розглянемо функцію додатнього дійсного параметру a .

$$F_1(Q, \mathbf{r}, \mathbf{r}', a) = -\frac{1}{4\pi i} \int_{-a}^{\infty} dv \int_C d\omega S(Q, \mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{Qr \operatorname{ch} \omega - Qr' \operatorname{ch} v}. \quad (2.5.160)$$

Величину $F_1(Q, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ будемо шукати як границю $F_1(Q, \mathbf{r}, \mathbf{r}', a)$ при $a \rightarrow \infty$. Виберемо контур інтегрування C так, щоб виконувалась умова $\operatorname{Re} \omega > a$. Завдяки їй можна просумувати ряди в (2.5.159), використовуючи властивості геометричної прогресії:

$$S(Q, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-\eta(v+\omega)}}{1 - e^{i\theta - (\omega+v)}} - \frac{e^{\eta(v+\omega)}}{1 - e^{i\theta + (\omega+v)}}. \quad (2.5.161)$$

Неважко пересвідчитися, що при заміні змінних $v \rightarrow -v$ у першому та $\omega \rightarrow -\omega$ у другому доданках, вони приймають однаковий вигляд. При такій заміні змінних функція (2.5.160) може бути зведена до вигляду:

$$F_1(Q, \mathbf{r}, \mathbf{r}', a) = \frac{1}{4\pi i} \left[\int_{-\infty}^a dv \int_C d\omega + \int_{-a}^{\infty} dv \int_{C'} d\omega \right] \frac{e^{\eta(v-\omega)}}{e^{i\theta + v - \omega} - 1} e^{Q(r \operatorname{ch} \omega - r' \operatorname{ch} v)},$$

де C' — контур, симетричний C відносно початку координат. Розглянемо границю $a \rightarrow \infty$ і використаємо наступну тотожність

$$\int_C d\omega f(\omega) + \int_{C'} d\omega f(\omega) = \int_{i\pi-\infty}^{i\pi+\infty} d\omega f(\omega) + \int_{-i\pi+\infty}^{-i\pi-\infty} d\omega f(\omega) + \oint_{C''} d\omega f(\omega),$$

де C'' — прямокутний контур довжиною, більшою $2a$ і шириною $2\pi i$, який обходиться проти годинникової стрілки, тобто

$$F_1(Q, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = I_1 + I_2, \quad (2.5.162)$$

де

$$I_1 = -\frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dv \oint d\omega \frac{e^{\eta(v-\omega)}}{1 - e^{i\theta+v-\omega}} e^{Q(r \operatorname{ch} \omega - r' \operatorname{ch} v)}, \quad (2.5.163)$$

$$I_2 = \frac{\sin \pi \eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{\eta(v-\omega)}}{1 + e^{i\theta+v-\omega}} e^{-Q(r \operatorname{ch} \omega + r' \operatorname{ch} v)}. \quad (2.5.164)$$

Розрахунок першого інтеграла не містить труднощів у випадку $\theta \neq \pi$, оскільки всередині контура C'' знаходиться лише один полюс підінтегральної функції. У випадку $\theta = \pi$ потрібно врахувати, що два полюси підінтегральної функції знаходяться на границі контура. Розрахувавши інтеграл по контуру і використавши інтегральне представлення для функції Макдональда знайдемо:

$$I_1 = \begin{cases} -e^{-i\eta\theta} K_0(QR), & \theta \neq \pm\pi; \\ -\cos \pi\eta K_0(QR), & \theta = \pm\pi. \end{cases} \quad (2.5.165)$$

де $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Виходячи з інтегрального представлення для функції Макдональда, зведемо другий інтеграл до однократного

$$I_2 = \frac{\sin \pi \eta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{\eta x}}{1 + e^{i\theta+x}} K_0(QR_x), \quad (2.5.166)$$

де $R_x = (r^2 + r'^2 + 2rr' \operatorname{ch} x)^{1/2}$. Останній інтеграл навіть у простих випадках приводить до досить громіздких виразів, використання яких не спрощує розрахунків, що вимагають використання ФГ, і зазвичай явний вигляд інтеграла

(2.5.166) або його асимптотичну поведінку треба досліджувати в кожній задачі окремо. Тому збережемо цей доданок в інтегральній формі.

Зворотній перехід $Q \rightarrow -iq \operatorname{sgn} E$ дозволяє виписати остаточний вираз, а саме:

$$F_1(q, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mp \frac{i\pi}{2} e^{-i\eta\theta} H_0^{(j)}(qR) \pm \frac{i \sin \pi\eta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{\eta x}}{1 + e^{i\theta+x}} H_0^{(j)}(qR_x), \quad (2.5.167)$$

де $j = 1, 2$ та верхній і нижній знаки беруться для $E > 0$ та $E < 0$, відповідно, коли $\theta \neq \pi$; і

$$F_1(q, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mp \frac{i\pi}{2} \cos \pi\eta H_0^{(j)}(qR) \pm \frac{i \sin \pi\eta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{\eta x}}{1 - e^x} H_0^{(j)}(qR_x), \quad (2.5.168)$$

де вибір знаків і значень j аналогічний формулі (2.5.167), а інтеграл розуміється в сенсі головного значення при рівності $\theta = \pm\pi$. Остання рівність отримана з використанням тотожностей [91]:

$$K_\nu(iz) = -\frac{i\pi}{2} e^{-i\pi\nu/2} H_\nu^{(2)}(z), \quad K_\nu(-iz) = \frac{i\pi}{2} e^{i\pi\nu/2} H_\nu^{(1)}(z). \quad (2.5.169)$$

Розрахуємо тепер функцію $F_2(q, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$, розглядаючи його аналітичне продовження:

$$F_2(Q, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^\infty \frac{kdk}{Q^2 + k^2} [J_{-\eta}(kr)J_{-\eta}(kr') - J_\eta(kr)J_\eta(kr')]. \quad (2.5.170)$$

Використовуючи формулу (2.5.156) і запис функції Макдональда $K_\nu(z)$ через модифіковані функції Бесселя $I_\nu(z)$ [91]

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin \pi\nu} [I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)], \quad (2.5.171)$$

отримаємо наступний вираз

$$F_2(Q, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{2 \sin \pi\eta}{\pi} K_\eta(Qr)K_\eta(Qr'). \quad (2.5.172)$$

Аналогічно першому доданку знаходимо

$$F_2(q, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\pi \sin \pi\eta}{2} e^{\pm i\pi\eta} H_\eta^{(j)}(qr)H_\eta^{(j)}(qr'), \quad (2.5.173)$$

де $j = 1, 2$ та верхній і нижній знаки беруться для $E > 0$ та $E < 0$, відповідно. З отриманих виразів $F_1(q, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ і $F_2(q, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ будуються діагональні компоненти ФГ, а з використанням співвідношень (2.5.147) і (2.5.148) — недіагональні, для випадку $\zeta = 1$. Аналогічним чином розглядається ФГ для $\zeta = -1$. Отже задача знаходження електронної ФГ графену в присутності соленоїдального поля (іншою мовою, ПАБ) фактично розв'язана.

2.6 Висновок

У цьому розділі отримано спектр та хвильові функції діраківських і шрьодінгерівських квазічастинок в потенціалі Ааронова-Бома; побудоване загальне представлення для функції Гріна, локальної та повної густин станів. На основі отриманого аналітичного виразу для густин станів виявлено: зростання ЛГС поблизу вихору (степеневий закон, як функція відстані від точки розташування вихору до точки спостереження), для графену; зменшення ЛГС поблизу вихору (степеневий закон, з показником степені відмінним від випадку графену), для нерелятивістського 2DEG; ЛГС двовимірних ферміонів на великій відстані від місця розташування вихору має вигляд аарон-бомівських осциляцій, координатна поведінка яких суттєво залежить від спектру квазічастинок.

РОЗДІЛ 3

ДВОВИМІРНІ ФЕРМІОНИ В СУПЕРПОЗИЦІЇ ПОТЕНЦІАЛІВ ОДНОРІДНОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ ТА ААРОНОВА-БОМА. НЕРЕЛЯТИВІСТСЬКИЙ ВИПАДОК

В даному розділі вивчаються двовимірні електронні збудження нерелятивістського 2DEG в суперпозиції потенціалів Ааронова-Бома і постійного магнітного поля. Задача пошуку хвильових функцій рівняння Шредінгера розв'язується введенням трубки потоку скінченного радіусу, величина якого потім спрямовується до нуля (аналогічно попередньому розділові). На основі власних функцій і спектру 2DEG гамільтоніану будуються і розраховуються вирази для ГС і ЛГС. Обговорюється можливість експериментальної перевірки отриманих результатів. Розділ написаний на основі робіт [13, 14].

3.1 Хвильові функції та спектр рівняння Шрьодінгера

Розглянемо двовимірний шрьодінгерівський гамільтоніан, що описує безспінову (квазі)частинку з ефективною масою M із зарядом $-e < 0$:

$$\hat{H}_S(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2M}(D_1^2 + D_2^2), \quad (3.1.1)$$

де подовжену похідну представимо у вигляді $D_j = \nabla_j + ie/\hbar c A_j$ ($j = 1, 2$) з вектор-потенціалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, постійною Планка \hbar і швидкістю світла c .

Аналогічно попередньому розділу для уникнення математичних ускладнень, що виникають із сингулярної поведінки ПАБ, запишемо регуляризований потенціал [55, 89], який залежатиме від параметра R :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_\varphi(r)\mathbf{e}_\varphi, \quad A_\varphi(r) = \frac{Br}{2} + \frac{\Phi_0\eta}{2\pi r}\theta(r - R), \quad (3.1.2)$$

де $\mathbf{r} = (r, \varphi)$, $\Phi_0 \eta$ — потік магнітного вихору в одиницях кванту потоку $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/e$ з $\eta \in [0, 1)$. Відповідне магнітне поле

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \left(B + \frac{\eta\Phi_0}{2\pi R} \delta(r - R) \right) \mathbf{e}_z. \quad (3.1.3)$$

Радіус трубки потоку R визначає область $r > R$ де регуляризований потенціал співпадає з потенціалом Ааронова-Бома, в той час як область $r < R$ описує частинку, що рухається в постійному магнітному полі. Розв'язки задачі отримуються умовами зшивки хвильових функцій на межі цих двох областей. Хвильові функції в ПАБ отримуються в границі $R \rightarrow 0$. Як було показано в [89], остаточна відповідь не залежить від форми потенціалу в області $r < R$, за умови, що профілююча функція магнітного поля цього потенціалу не сингулярна в початку координат.

В попередньому розділі було показано, що часова залежність хвильової функції скорочується в записі виразу для ЛГС або ГС. Тому, одразу шукатимемо розв'язки рівняння (в полярних координатах (r, φ))

$$\hat{H}_S(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (3.1.4)$$

які використаємо для побудови відповідних густини станів.

Для того, щоб знайти хвильові функції спектральної задачі (3.1.4) в регуляризованому потенціалі (3.1.2) слід розв'язати її в областях $r < R$ і $r > R$.

Введемо безрозмірну координату $y = r^2/(2l^2)$, де $l = (\hbar c/eB)^{1/2}$ — магнітна довжина. В нових змінних характеристика трубки потоку матиме вигляд $\rho = R^2/2l^2$.

Область $y \in [0, \rho]$: Рівняння Шрьодінгера, після підстановки

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt/\hbar} e^{im\varphi} \psi(y) \quad (3.1.5)$$

приймає форму

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} + \frac{1}{y^2} \left(-\frac{m^2}{4} + \frac{\varepsilon - m}{2} y - \frac{y^2}{4} \right) \right] \psi(y) = 0, \quad (3.1.6)$$

де $\varepsilon = 2MEl^2/\hbar^2$ — безрозмірний параметр енергії. Шукатимемо функцію $\psi(y)$ у вигляді

$$\psi(y) = y^{|m|/2} e^{-y/2} v(y), \quad (3.1.7)$$

при цьому рівняння на власні значення зводиться до

$$yv''(y) + (1 + |m| - y)v'(y) + \frac{\varepsilon - m - |m| - 1}{2}v(y) = 0, \quad (3.1.8)$$

де штрих означає диференціювання по y . Розглянемо рівняння на $v(y)$. Оскільки воно другого порядку, то має два лінійно-незалежні розв'язки. Виберемо

$$v(y) = \Phi(1/2(|m| + m + 1 - \varepsilon), 1 + |m|, y), \quad (3.1.9)$$

де $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ вироджена гіпергеометрична функція. Другий розв'язок не є квадратично інтегровним в початку координат, тому його слід виключити з розгляду. Отже отримуємо наступну хвильову функцію

$$\psi(y) = C_m y^{|m|/2} e^{-y/2} \Phi(1/2(|m| + m + 1 - \varepsilon), 1 + |m|, y). \quad (3.1.10)$$

Область $y \in [\rho, \infty)$: Рівняння Шрьодінгера, після підстановки

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt/\hbar} e^{im\varphi} \psi(y) \quad (3.1.11)$$

приймає форму

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} + \frac{1}{y^2} \left(-\frac{(m + \eta)^2}{4} + \frac{\varepsilon - m - \eta}{2} y - \frac{y^2}{4} \right) \right] \psi(y) = 0. \quad (3.1.12)$$

Шукатимемо функцію $\psi(y)$ у вигляді

$$\psi(y) = y^{|m+\eta|/2} e^{-y/2} v(y), \quad (3.1.13)$$

тоді рівняння на власні значення зводиться до

$$yv''(y) + (1 + |m + \eta| - y)v'(y) + \frac{\varepsilon - (m + \eta) - |m + \eta| - 1}{2}v(y) = 0. \quad (3.1.14)$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$\begin{aligned} v(y) = & A_m \Phi(1/2(1 + |m + \eta| + m + \eta - \varepsilon), 1 + |m + \eta|, y) + \\ & B_m y^{-|m+\eta|} \Phi(1/2(1 - |m + \eta| + m + \eta - \varepsilon), 1 - |m + \eta|, y). \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Тоді хвильова функція записується наступним чином

$$\begin{aligned} \psi(y) = & A_m e^{-y/2} y^{|m+\eta|/2} \Phi(1/2(1 + |m + \eta| + m + \eta - \varepsilon), 1 + |m + \eta|, y) + \\ & + B_m e^{-y/2} y^{-|m+\eta|/2} \Phi(1/2(1 - |m + \eta| + m + \eta - \varepsilon), 1 - |m + \eta|, y). \end{aligned}$$

Умови зшивки в термінах функції $\psi(y)$ записуються у формі

$$\psi(\rho + 0) = \psi(\rho - 0), \quad \psi'_1(\rho + 0) = \psi'_2(\rho - 0). \quad (3.1.16)$$

Введемо позначення:

$$C'_m = C_m y^{|m|/2}, \quad A'_m = A_m y^{|m+\eta|/2}, \quad B'_m = B_m y^{-|m+\eta|/2}. \quad (3.1.17)$$

Оскільки величини коефіцієнтів визначаються границею $\rho \rightarrow 0$, зручно шукати їх у вигляді ряду по степеням цього параметру. В даному випадку достатньо врахувати лише нульовий доданок, тоді умови зшивки утворюють систему рівнянь на коефіцієнти

$$C'_m = A'_m + B'_m, \quad |m|C'_m = |m + \eta|A'_m - |m + \eta|B'_m, \quad (3.1.18)$$

розв'язуючи яку, отримаємо

$$A'_m = C'_m \frac{1}{2} \left[1 + \frac{|m|}{|m + \eta|} \right], \quad (3.1.19)$$

$$B'_m = C'_m \frac{1}{2} \left[1 - \frac{|m|}{|m + \eta|} \right]. \quad (3.1.20)$$

Розв'язок диференційного рівняння виначатиметься найбільш сингулярним коефіцієнтом. Неважко переконатись, що для всіх значень m , таким коефіцієнтом буде A_m . В границі $\rho \rightarrow 0$, отримуємо розв'язок:

$$\psi(y) = A_m y^{|m+\eta|/2} e^{-y/2} \Phi((1 + |m + \eta| + m + \eta - \varepsilon)/2, 1 + |m + \eta|, y). \quad (3.1.21)$$

Розв'язок повинен бути квадратично інтегрованим, в границі $R \rightarrow 0$. Це накладає обмеження на можливі значення першого аргументу гіпергеометричної функції, яке визначає спектр і вигляд хвильових функцій задачі:

$$\psi_{n,m}(r, \varphi) = A_{n,m} e^{im\varphi} y^{|m+\eta|/2} e^{-y/2} L_n^{|m+\eta|}(y), \quad (3.1.22)$$

які також можна отримати, розглядаючи сингулярний потенціал Ааронова-Бома [81]. Розв'язки виражаються через узагальнені поліноми Лагера $L_n^\alpha(y)$ з нормуючою константою $A_{n,m}$

$$A_{n,m}^2 = \frac{n!}{2\pi l^2 \Gamma(n + |m + \eta| + 1)}. \quad (3.1.23)$$

Величина енергії, що відповідає кожній з таких функцій (3.1.22) є

$$E_{n,m} = \frac{\hbar\omega_c}{2} (2n + 1 + |m + \eta| + m + \eta), \quad (3.1.24)$$

де $\omega_c = eB/Mc$ — циклотронна частота, $n = 0, 1, \dots$ — радіальне квантове число, $m = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$ — азимутальне квантове число. Надалі, зручно буде виразити енергії в термінах величини $E_0 \equiv \hbar\omega_c/2$.

3.2 Інтегральне представлення для густини станів

Знаючи явний вигляд хвильових функцій можемо розрахувати густину станів використовуючи представлення

$$N(\mathbf{r}, E, B) = \sum_{n,m} |\psi_{n,m}(\mathbf{r})|^2 \delta(E - E_{n,m}). \quad (3.2.25)$$

На відміну від попереднього розділу присутність постійного магнітного поля призводить до того, що спектр енергій стає дискретним. Для подальших розрахунків зручно регуляризувати дельта-функцію в (3.2.25), замінивши її розподілом Лоренца:

$$\delta(E - E_{n,m}) \rightarrow \frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{E_{n,m} - E - i\Gamma}, \quad (3.2.26)$$

де Γ — ширина рівнів Ландау. Цей найбільш простий спосіб введення уширених рівнів (з однаковою Γ для кожного рівня) є непоганою апроксимацією для не дуже сильних полів [100].

Для ілюстрації методу обчислення отримаємо ЛГС у найпростішому випадку постійного магнітного поля, тобто за відсутності вихора ($\eta = 0$). Покладаючи $\eta = 0$ в рівняння (3.1.22) отримуємо розв'язок рівняння Шредінгера для випадку $B = \text{const}$. Підставляючи ці розв'язки в означення ЛГС (3.2.25) і беручи до уваги уширення рівнів Ландау (3.2.26) представимо її у вигляді подвійної суми

$$N_0^S(\mathbf{r}, E, B) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{n,m}^2 y^{|m|} e^{-y} \frac{[L_n^{|m|}(y)]^2}{E_{n,m} + E_0 z}, \quad (3.2.27)$$

де в знаменнику ми ввели безрозмірний параметр $z = -(E + i\Gamma)/E_0$ з енергією E_0 означеною вище. Для розрахунку суми (3.2.27) зручно представити знаменник за допомогою експоненти

$$\frac{e^{-\delta(2n+|m|+m+1)}}{E_{n,m} + E_0 z} = \frac{1}{E_0} \int_0^{\infty} d\beta e^{-(\beta+\delta)(2n+|m|+m+1)} e^{-\beta z}. \quad (3.2.28)$$

Тут ми розглядаємо вираз з регуляризуючим експоненціальним фактором з $\delta > 0$ який робить сумму збіжною (величину δ слід покласти нулю наприкінці розрахунків). Використовуючи власні функції та спектр задачі запишемо ЛГС у вигляді

$$N_0^S(\mathbf{r}, E, B) = \frac{M}{\pi^2 \hbar^2} \text{Im} \left[\int_0^{\infty} d\beta e^{-(\delta+\beta)} e^{-\beta z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-y} y^{|m|} e^{-(\beta+\delta)(|m|+m)} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n + |m| + 1)} e^{-2(\beta+\delta)n} [L_n^{|m|}(y)]^2 \right]. \quad (3.2.29)$$

Працюватимемо з представленням (3.2.29) наступним чином. Спочатку розрахуємо величину його аналітичного продовження для $z > 0$. Для того, щоб отримати ЛГС повернемося до комплексного значення параметру $z \rightarrow -(E +$

$i\Gamma)/E_0$ і отримаємо уявну частину відповідного виразу. Використовуючи рівняння (10.12.20) з [91]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y)}{\Gamma(n + \alpha + 1)} z^n = \frac{(xyz)^{-\frac{\alpha}{2}}}{1-z} \exp\left(-z \frac{x+y}{1-z}\right) I_\alpha\left(2 \frac{\sqrt{xyz}}{1-z}\right), \quad |z| < 1, \quad (3.2.30)$$

де $I_\alpha(x)$ є модифікованою функцією Бесселя аргументу x , знайдемо сумму по n в (3.2.29)

$$N_0^S(\mathbf{r}, E, B) = \frac{M}{\pi^2 \hbar^2} \text{Im} \left[\int_0^\infty d\beta e^{-(\delta+\beta)} e^{-\beta z} \frac{e^{-y \coth(\delta+\beta)}}{1 - e^{-2(\delta+\beta)}} \times \right. \\ \left. \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(\delta+\beta)m} I_{|m|} \left(\frac{y}{\sinh(\delta + \beta)} \right) \right]. \quad (3.2.31)$$

Розрахуємо суму по m в (3.2.31) використовуючи властивості модифікованої функції Бесселя $I_m(x) = I_{-m}(x)$ та її генеруючої функції [91]

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m I_m(x) = \exp\left(\frac{x}{2}[z + 1/z]\right). \quad (3.2.32)$$

Отримаємо

$$N_0^S(E, B) = \frac{M}{(\pi \hbar)^2} \text{Im} \left[\int_0^\infty d\beta \frac{e^{-(\delta+\beta)} e^{-\beta z}}{1 - e^{-2(\delta+\beta)}} \right]. \quad (3.2.33)$$

З останнього виразу неважко побачити, що він не залежить від y , таким чином в постійному магнітному полі ЛГС є координатно-незалежною. Ввівши нову змінну $x = 2(\delta + \beta)$ перепишемо останній вираз наступним чином

$$N_0^S(E, B) = -\frac{M}{2(\pi \hbar)^2} \text{Im} \left[e^{\delta z} \int_{2\delta}^\infty dx \frac{e^{-x} - e^{-x(z+1)/2}}{1 - e^{-x}} - e^{\delta z} \int_{2\delta}^\infty dx \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right]. \quad (3.2.34)$$

В границі $\delta \rightarrow 0$ другий доданок рівняння (3.2.34) — дійсний, для відповідного аналітичного продовження змінної z , в той час як перший доданок, переписується в термінах логарифмічної похідної від гамма-функції $\psi(z)$, з використан-

ням інтегрального представлення [101]

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^\infty dt \frac{e^{-t} - e^{-tz}}{1 - e^{-t}}, \quad \text{Re}z > 0. \quad (3.2.35)$$

Остаточний вираз для густини станів матиме вигляд

$$N_0^S(E, B) = -\frac{N_0^S}{\pi} \text{Im}\psi \left(\frac{1}{2} - \frac{E + i\Gamma}{\hbar\omega_c} \right). \quad (3.2.36)$$

Тут $N_0^S = M/(2\pi\hbar^2)$ — вільна ГС 2DEG на одиницю спіна і площі системи. У цьому випадку ЛГС не залежить від \mathbf{r} , оскільки система з однорідним магнітним полем є трансляційно інваріантною. Можна знайти (3.2.36) у більш простий спосіб [102] стартуючи зі спектру

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (3.2.37)$$

який отримується з (3.1.24) при $\eta = 0$, заміною $n + (|m| + m)/2 \rightarrow n$. Тоді новий параметр n відповідтиме номеру рівня Ландау замість радіального квантового числа. Однак в цьому розділі слід використовувати (3.1.24) внаслідок азимутальної симетрії задачі m .

На малюнку 3.1 а штрихована лінія визначає енергетичну залежність ЛГС в постійному магнітному полі. Осциляційний характер густини станів можна отримати з рівняння (3.2.36), врахувавши співвідношення

$$\psi(-z) = \psi(z) + \frac{1}{z} + \pi \cot(\pi z). \quad (3.2.38)$$

Узагальнемо цей результат за наявності вихора. Повторюючи попередні кроки в розрахунку отримуємо наступний вираз

$$N_0^S(\mathbf{r}, E, B) = \frac{M}{\pi^2\hbar^2} \text{Im} \left[\int_0^\infty d\beta e^{-(\delta+\beta)} e^{-\beta z} \frac{e^{-y \coth(\delta+\beta)}}{1 - e^{-2(\delta+\beta)}} \times \sum_{m=-\infty}^\infty e^{-(\delta+\beta)(m+\eta)} I_{|m+\eta|} \left(\frac{y}{\sinh(\delta + \beta)} \right) \right]. \quad (3.2.39)$$

Сума по азимутальному квантовому числу

$$\Sigma(\eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\beta(m+\eta)} I_{|m+\eta|}(x). \quad (3.2.40)$$

може бути отримана з використанням методу описаному в [90]. Інтегральне представлення модифікованої функції Бесселя має вигляд [103]

$$I_{\nu}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{z \cosh \omega - \nu \omega} d\omega \quad (3.2.41)$$

де C — контур в комплексній площині ω , який починається в $-i\pi + \infty$ і закінчується в $i\pi + \infty$, тоді для суми по m отримуємо

$$\Sigma(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\omega e^{x \cosh \omega} \left[\sum_{m=0}^{\infty} e^{-(\beta+\omega)(m+\eta)} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(\omega-\beta)(m-\eta)} \right]. \quad (3.2.42)$$

Виберемо контур C таким чином, щоб задовольнялась умова $\operatorname{Re} \omega > \beta$ (при цьому сума стає збіжною і може бути розрахована)

$$\Sigma(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\omega e^{x \cosh \omega} \left[\frac{e^{-(\beta+\omega)\eta}}{1 - e^{-(\beta+\omega)}} + \frac{e^{(\omega-\beta)\eta}}{e^{(\omega-\beta)} - 1} \right]. \quad (3.2.43)$$

Зробивши заміну змінних $\omega \rightarrow -\omega$ в другому інтегралі, запишемо

$$\Sigma(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_C + \int_{C'} \right] d\omega e^{x \cosh \omega} \frac{e^{-(\beta+\omega)\eta}}{1 - e^{-(\beta+\omega)}}, \quad (3.2.44)$$

де контур C' є симетричним C відносно початку координат. Представимо відповідні інтеграли по змінній ω у формі

$$\int_C d\omega + \int_{C'} d\omega = \int_{-\infty+i\pi}^{\infty+i\pi} d\omega + \int_{\infty-i\pi}^{-\infty-i\pi} d\omega + \oint_{C''} d\omega, \quad (3.2.45)$$

де C'' — прямокутник з довжиною більшою, ніж 2β і шириною $2\pi i$, який розташований симетрично по відношенню до початку координат (сторони паралельні осям абсцис та ординат) та який при інтегруванні обходиться проти годинникової стріли. Всередині контура C'' підінтегральна функція має лише один полюс

при $\omega_0 = -\beta$, тому цей інтеграл не залежить від η і відповідає $\Sigma(0)$. Зводячи подібні доданки, отримуємо остаточний вираз для суми (3.2.40)

$$\Sigma(\eta) = -\frac{\sin \pi \eta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-x \cosh \omega} \frac{e^{-(\beta+\omega)\eta}}{1 + e^{-(\beta+\omega)}} + \Sigma(0), \quad (3.2.46)$$

де

$$\Sigma(0) = e^{x \cosh \beta}. \quad (3.2.47)$$

Наостанок відмітимо, що величини $\Sigma(0)$, отримані з теорії лишків при $\eta = 0$ та з твірної функції для модифікованої функції Бесселя (3.2.32) при $z = e^{-\beta}$ співпадають.

Використовуючи знайдену формулу, запишемо вираз для суми по m у наступній формі

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(\delta+\beta)(m+\eta)} I_{|m+\eta|} \left(\frac{y}{\sinh(\delta+\beta)} \right) &= e^{y \coth(\delta+\beta)} - \\ &- \frac{\sin \pi \eta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-y \cosh \omega / \sinh(\delta+\beta)} \frac{e^{-\eta(\delta+\beta+\omega)}}{1 + e^{-(\delta+\beta+\omega)}}. \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

Перший доданок відповідає ЛГС за відсутності вихора та співпадає з розрахованим вище. Другий доданок визначає збурення ЛГС $\Delta N_{\eta}^{\text{S}}(\mathbf{r}, E, B) = N_{\eta}^{\text{S}}(\mathbf{r}, E, B) - N_0^{\text{S}}(\mathbf{r}, E)$, індуковане ПАБ

$$\begin{aligned} \Delta N_{\eta}^{\text{S}}(\mathbf{r}, E, B) &= -\frac{M}{(\pi \hbar)^2} \frac{\sin \pi \eta}{\pi} \text{Im} \left[\int_0^{\infty} d\beta e^{-(\delta+\beta)} e^{-\beta z} \frac{e^{-y \coth(\delta+\beta)}}{1 - e^{-2(\delta+\beta)}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-y \cosh \omega / \sinh(\delta+\beta)} \frac{e^{-\eta(\delta+\beta+\omega)}}{1 + e^{-(\delta+\beta+\omega)}} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.49)$$

Тут $N_{\eta}^{\text{S}}(\mathbf{r}, E, B)$ — ЛГС в присутності однорідного та аарон-бомівського магнітних полів, а $N_0^{\text{S}}(\mathbf{r}, E, B)$ — ЛГС в постійному магнітному полі за відсутності вихора (аргумент \mathbf{r} використовується для того, щоб відрізнити ЛГС і ГС). Відповідна величина розраховується при $z > 0$ з наступним аналітичним продовженням $z \rightarrow -(E + i\Gamma)/E_0$, яке слід робити після усіх обчислень. Інтегральне

представлення різниці ЛГС (3.2.49) є основною формулою при аналізі густин електронних станів системи.

3.3 Повна густина станів

Як було показано вище, в постійному магнітному полі ЛГС є координатно незалежною і пропорційною до ГС (яку можна отримати, домноживши першу на 2D об'єм (площу) системи V_{2D}). За наявності магнітного вихору, ЛГС стає координатно залежною. Повна ГС на одиницю спінової степені вільності може бути отримана з (3.2.25) інтегруванням по площині

$$N_{\eta}^S(E, B) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r dr N_{\eta}(\mathbf{r}, E, B). \quad (3.3.50)$$

Підставляючи (3.2.49) в означення (3.3.50) та інтегруючи по просторовим координатам представимо вираз для різниці ЛГС у наступній формі

$$\Delta N_{\eta}^S(E, B) = -\sin \pi \eta \frac{Ml^2}{4(\pi \hbar)^2} \text{Im} \left[\int_0^{\infty} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{e^{-\beta z} e^{(1/2-\eta)v}}{\cosh^2(v/2) \cosh(\beta + \delta - v/2)} \right], \quad (3.3.51)$$

де ми ввели нову змінну $v = \omega + \beta + \delta$. Перепишемо подвійний інтеграл в нових змінних $t = e^{-2\beta}$, $x = e^v$ відповідно

$$\Delta N_{\eta}^S(E, B) = -\sin \pi \eta \frac{Ml^2 e^{-\delta}}{(\pi \hbar)^2} \text{Im} \left[\int_0^1 dt t^{(z-1)/2} \int_0^{\infty} \frac{dx x^{1-\eta}}{(1+x)^2 (1+te^{-2\delta}x)} \right]. \quad (3.3.52)$$

Другий інтеграл розраховується з використанням теорії лишків

$$\int_0^{\infty} \frac{dx x^{1-\eta}}{(1+x)^2 (1+te^{-2\delta}x)} = \frac{\pi}{\sin \pi \eta} \frac{1 - \eta + \eta e^{-2\delta}t - e^{-2\eta\delta}t\eta}{(1 - e^{-2\delta}t)^2}. \quad (3.3.53)$$

Інтеграл, який залишився, може бути представлений в термінах гіпергеометри-

чної функції

$$\int_0^1 dt t^{(z-1)/2} \frac{1 - \eta + \eta e^{-2\delta t} - e^{-2\eta\delta t}}{(1 - e^{-2\delta t})^2} = -\frac{z + 2\eta - 1}{1 + z} {}_2F_1 \left(1, \frac{1+z}{2}; \frac{3+z}{2}; e^{-2\delta} \right) + e^{-2\delta\eta} \frac{z + 2\eta - 1}{1 + z + 2\eta} {}_2F_1 \left(1, \frac{1+z}{2} + \eta; \frac{3+z}{2} + \eta; e^{-2\delta} \right) + \frac{1 - e^{-2\delta\eta}}{1 - e^{-2\delta}}. \quad (3.3.54)$$

Використаємо розклад в ряд Тейлора виразу в (3.3.54)

$$\begin{aligned} \frac{e^{-2\delta\eta}}{z + 2\eta + 1} {}_2F_1 \left(1, \frac{1+z}{2} + \eta, \frac{3+z}{2} + \eta, e^{-2\delta} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2\delta(n+\eta)}}{z + 1 + 2\eta + 2n} = \\ &= e^{\delta(z+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\delta}^{\infty} dx e^{-x(2n+2\eta+z+1)} = e^{\delta(z+1)} \int_{\delta}^{\infty} dx \frac{e^{-x(z+1+2\eta)}}{1 - e^{-2x}}, \end{aligned} \quad (3.3.55)$$

де перший доданок в (3.3.54) може бути відтворений, якщо покласти $\eta = 0$. Наявність скінченного $\delta > 0$ робить гіпергеометричний ряд збіжним (наприкінці розрахунків слід узяти границю $\delta \rightarrow 0$). Беручи до уваги інтегральне представлення для логарифмічної похідної (3.2.35), аналогічно (3.2.34), виразимо ГС (3.3.52) у наступному вигляді

$$\Delta N_{\eta}^S(E, B) = \frac{Ml^2}{2\pi\hbar^2} \text{Im} \left\{ (z + 2\eta - 1) \left[\psi \left(\frac{z+1}{2} + \eta \right) - \psi \left(\frac{z+1}{2} \right) \right] \right\} \quad (3.3.56)$$

яка після аналітичного продовження $z \rightarrow -2(E + i\Gamma)/(\hbar\omega_c)$ приймає форму

$$\Delta N_{\eta}^S(E, B) = \frac{1}{\pi\hbar\omega_c} \text{Im} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{E + i\Gamma}{\hbar\omega_c} - \eta \right) \left[\psi \left(\frac{1}{2} - \frac{E + i\Gamma}{\hbar\omega_c} \right) - \psi \left(\frac{1}{2} - \frac{E + i\Gamma}{\hbar\omega_c} + \eta \right) \right] \right\}. \quad (3.3.57)$$

Оскільки логарифмічна похідна гамма функції $\psi(z)$ має прості полюси при $z = 0, -1, -2, \dots$ неважко побачити, що в границі $\Gamma \rightarrow 0$ різниця ГС (3.3.57) зводиться до дельта-функціональних піків, положення яких відповідають рів-

ням Ландау

$$\begin{aligned} \Delta N_{\eta}^S(E, B) = & - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1-\eta) \delta \left(E - \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \delta \left(E - \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} + \eta \right) \right) \end{aligned} \quad (3.3.58)$$

З фізичної точки зору, вираз (3.3.58) (цитуючи [76]) можна інтерпретувати наступним чином — вплив вихора призводить до того, що $n+1-\eta$ рівнів з енергією $E_{n,m<0} = \hbar\omega_c(n+1/2)$ зникають, а $n+1$ рівнів виникають, з енергією $E_{n+m \rightarrow n, m \geq 0} = \hbar\omega_c(n+1/2+\eta)$.

Використовуючи асимптотичний розклад

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + O\left(\frac{1}{z^4}\right) \quad (3.3.59)$$

можна отримати для (3.3.57) границю нульового поля $B \rightarrow 0$ і відтворити результат для ГС в полі Ааронова-Бома [10, 76, 78]

$$\Delta N_{\eta}^S(E, B=0) = N_{\eta}^S(E, B=0) - V_{2D} N_0^S = -\frac{1}{2}\eta(1-\eta)\delta(E). \quad (3.3.60)$$

Інтегруючи вираз (3.3.60) знайдемо повну різницю кількості станів, що індукована вихором

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE \Delta N_{\eta}^S(E, B) = -\frac{1}{2}\eta(1-\eta). \quad (3.3.61)$$

З іншого боку інтегруючи (3.3.58) (з відповідною регуляризацією) отримуємо таке ж саме числове значення. Оскільки ця величина не залежить від величини B несингулярного фонового магнітного поля, можна припустити, що вона має топологічну природу.

3.4 Локальна густина станів

Хоча регуляризаційний параметр δ важливий для розрахунку ГС, підінтегральний вираз в (3.2.49) залишається регулярним навіть в границі $\delta \rightarrow 0$.

Враховуючи цей факт, розглянемо одразу відповідну границю в (3.2.49):

$$\Delta N_{\eta}^S(\mathbf{r}, E, B) = -\frac{M}{(\pi\hbar)^2} \frac{\sin \pi\eta}{2\pi} \text{Im} \left[I \left(y, z \rightarrow -\frac{E + i\Gamma}{E_0}, \eta \right) \right], \quad (3.4.62)$$

де

$$I(y, z, \eta) = \int_0^{\infty} d\beta e^{-\beta z} \frac{e^{-y \coth \beta}}{\sinh \beta} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-y \cosh \omega / \sinh \beta} \frac{e^{-\eta(\omega+\beta)}}{1 + e^{-(\omega+\beta)}}, \quad (3.4.63)$$

а змінна y вказує на координатну залежність різниці ЛГС. Хоча інтеграли в (3.4.63) можуть бути розраховані чисельно, цей розрахунок є досить проблематичним оскільки незрозуміло як зробити в такому випадку аналітичне продовження з $z > 0$ до комплексного значення $z \rightarrow -(E + i\Gamma)/E_0$.

Для розрахунку ЛГС (аналогічно попередньому розділу) розглянемо спочатку значення її похідної $dI(y, z, \eta)/dy$, а функцію $I(y, z, \eta)$ представимо у формі

$$I(y, z, \eta) = - \int_y^{\infty} \frac{dI(Q, z, \eta)}{dQ}, \quad (3.4.64)$$

де була використана властивість $I(\infty, z, \eta) = 0$. Похідна $dI(Q, z, \eta)/dQ$ містить два доданки

$$\frac{dI(Q, z, \eta)}{dQ} = \frac{dI_1(Q, z, \eta)}{dQ} + \frac{dI_2(Q, z, \eta)}{dQ}, \quad (3.4.65)$$

де

$$\frac{dI_1}{dQ} = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\beta e^{-\beta(z+\eta)} \frac{e^{-Q \coth \beta}}{\sinh^2 \beta} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-Q \cosh \omega / \sinh \beta} e^{-(\eta-1)\omega}, \quad (3.4.66)$$

$$\frac{dI_2}{dQ} = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\beta e^{-\beta(z+\eta-1)} \frac{e^{-Q \coth \beta}}{\sinh^2 \beta} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-Q \cosh \omega / \sinh \beta} e^{-\eta\omega}. \quad (3.4.67)$$

Враховавши інтегральне представлення функції Макдональда $K_{\nu}(x)$ [91]

$$K_{\nu}(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x \cosh \omega - \nu x} dx, \quad (3.4.68)$$

отримаємо

$$\frac{dI_1}{dQ} = - \int_0^{\infty} d\beta e^{-\beta(z+\eta)} \frac{e^{-Q \coth \beta}}{\sinh^2 \beta} K_{1-\eta}(Q/\sinh \beta), \quad (3.4.69)$$

$$\frac{dI_2}{dQ} = - \int_0^\infty d\beta e^{-\beta(z+\eta-1)} \frac{e^{-Q \coth \beta}}{\sinh^2 \beta} K_\eta(Q/\sinh \beta). \quad (3.4.70)$$

Введемо нову змінну t за допомогою співвідношення $e^{-2\beta} = t/(1+t)$. Отримаємо

$$\frac{dI_1}{dQ} = -2e^{-Q} \int_0^\infty dt t^{(z+\eta)/2} (1+t)^{-(z+\eta)/2} e^{-2Qt} K_{1-\eta}(2Q\sqrt{t(1+t)}), \quad (3.4.71)$$

$$\frac{dI_2}{dQ} = -2e^{-Q} \int_0^\infty dt t^{(z+\eta-1)/2} (1+t)^{-(z+\eta-1)/2} e^{-2Qt} K_\eta(2Q\sqrt{t(1+t)}). \quad (3.4.72)$$

Для інтегрування по t функцій в (3.4.71) і (3.4.72), використаємо формулу (2.16.10.2) з [92]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \frac{x^{\rho-1}}{(x+z)^\rho} e^{-px} K_\nu(c\sqrt{x^2+xz}) &= \frac{1}{cz} \Gamma\left(\rho + \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\rho - \frac{\nu}{2}\right) e^{pz/2} \times \\ &\times W_{1/2-\rho, \nu/2}(z_+/2) W_{1/2-\rho, \nu/2}(z_-/2), \quad z_\pm = p \pm \sqrt{p^2 - c^2}, \\ \operatorname{Re}(p+c) > 0, |\arg z| < \pi, \quad 2\operatorname{Re}\rho > |\operatorname{Re}\nu|, \end{aligned} \quad (3.4.73)$$

де $W_{\lambda, \mu}(z)$ — функція Уїттекера. Адаптуємо (3.4.73) для розрахунку виразів (3.4.71) і (3.4.72). Для цього покладемо $z = 1$ в (3.4.73), продиференціюємо результат по p і візьмемо границю $p \rightarrow c$. Отримаємо

$$\int_0^\infty dx \frac{x^\rho}{(x+1)^\rho} e^{-cx} K_\nu(c\sqrt{x(x+1)}) = -\frac{1}{2} \Gamma\left(\rho + \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\rho - \frac{\nu}{2}\right) e^{c/2} G_{1/2-\rho, \nu/2}\left(\frac{c}{2}\right), \quad (3.4.74)$$

де функція $G_{\lambda, \mu}(Q)$ означена наступним чином

$$G_{\lambda, \mu}(Q) = \frac{1}{2Q} W_{\lambda, \mu}^2(Q) + \frac{1}{Q} W_{\lambda, \mu}(Q) W'_{\lambda, \mu}(Q) + W''_{\lambda, \mu}(Q) W_{\lambda, \mu}(Q) - W_{\lambda, \mu}'^2(Q).$$

Використовуючи отримані інтеграли, запишемо

$$\frac{dI_1}{dQ} = \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+2\eta-1}{2}\right) G_{(1-z-\eta)/2, (1-\eta)/2}(Q) \quad (3.4.75)$$

$$\frac{dI_2}{dQ} = \Gamma\left(\frac{z-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+2\eta-1}{2}\right) G_{(2-z-\eta)/2, \eta/2}(Q). \quad (3.4.76)$$

Враховуючи диференційне рівняння

$$W''_{\lambda, \mu}(z) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} + \frac{1/4 - \mu^2}{z^2}\right) W_{\lambda, \mu}(z) = 0 \quad (3.4.77)$$

і формули рекурсії

$$z \frac{d}{dz} W_{\lambda, \mu}(z) = \left(\lambda - \frac{z}{2} \right) W_{\lambda, \mu}(z) - \left[\mu^2 - \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^2 \right] W_{\lambda-1, \mu}(z) \quad (3.4.78)$$

для функції Уіттекера [103] перепишемо $G_{\lambda, \mu}(Q)$ у вигляді

$$\begin{aligned} G_{\lambda, \mu}(Q) = & \frac{\mu^2 + (\lambda - 1/2)^2}{Q^2} W_{\lambda, \mu}^2(Q) - \frac{[\mu^2 - (\lambda - 1/2)^2]^2}{Q^2} W_{\lambda-1, \mu}^2(Q) - \\ & - \frac{\mu^2 - (\lambda - 1/2)^2}{Q} W_{\lambda, \mu}(Q) W_{\lambda-1, \mu}(Q) - (\lambda - 1/2) \left[\left(\frac{W_{\lambda, \mu}^2(Q)}{Q} \right)' + \frac{W_{\lambda, \mu}^2(Q)}{Q} \right]. \end{aligned} \quad (3.4.79)$$

Для отримання $F_{\lambda, \mu}(Q) = \int dQ G_{\lambda, \mu}(Q)$ ми застосуємо співвідношення

$$\begin{aligned} \int \frac{dQ}{Q} W_{\lambda, \mu}(Q) W_{\rho, \mu}(Q) &= \frac{1}{\rho - \lambda} [W'_{\lambda, \mu}(Q) W_{\rho, \mu}(Q) - W'_{\rho, \mu}(Q) W_{\lambda, \mu}(Q)], \\ \int \frac{dQ}{Q} W_{\lambda, \mu}(Q) W_{\lambda, \mu}(Q) &= W'_{\lambda, \mu}(Q) \partial_{\lambda} W_{\lambda, \mu}(Q) - \partial_{\lambda} W'_{\lambda, \mu}(Q) W_{\lambda, \mu}(Q), \\ \int \frac{dQ}{Q^2} W_{\lambda, \nu}(Q) W_{\lambda, \nu}(Q) &= \frac{1}{2\nu} [\partial_{\nu} W'_{\lambda, \nu}(Q) W_{\lambda, \nu}(Q) - W'_{\lambda, \nu}(Q) \partial_{\nu} W_{\lambda, \nu}(Q)] \end{aligned}$$

які є наслідками диференційного рівняння (3.4.77) для функції Уіттекера. Використовуючи формулу рекурсії (3.4.78) отримаємо наступний результат

$$\begin{aligned} F_{\lambda, \mu}(Q) = & \frac{\mu^2 + (\lambda - 1/2)^2}{2\mu Q} [W_{\lambda+1, \mu}(Q) \partial_{\mu} W_{\lambda, \mu}(Q) - W_{\lambda, \mu}(Q) \partial_{\mu} W_{\lambda+1, \mu}(Q)] \\ & - \frac{[\mu^2 - (\lambda - 1/2)^2]^2}{2\mu Q} [W_{\lambda, \mu}(Q) \partial_{\mu} W_{\lambda-1, \mu}(Q) - W_{\lambda-1, \mu}(Q) \partial_{\mu} W_{\lambda, \mu}(Q)] \\ & + \frac{[\mu^2 - (\lambda - 1/2)^2]}{Q} [W_{\lambda, \mu}^2(Q) - W_{\lambda-1, \mu}(Q) \{W_{\lambda, \mu}(Q) + W_{\lambda+1, \mu}(Q)\}] \\ & - \frac{2\lambda - 1}{2Q} [2W_{\lambda, \mu}^2(Q) - W_{\lambda+1, \mu}(Q) \partial_{\lambda} W_{\lambda, \mu}(Q) + W_{\lambda, \mu}(Q) \partial_{\lambda} W_{\lambda+1, \mu}(Q)]. \end{aligned} \quad (3.4.80)$$

Інтеграли кожного з доданків (3.4.65) виражаються через $F_{\lambda, \mu}(Q)$ з множниками в (3.4.75) і (3.4.76). Таким чином ми отримуємо остаточний вираз для функції $I(y, z, \eta)$, яка була визначена в (3.4.64).

Отже функція $I(y, z, \eta)$ записується у вигляді

$$I(y, z, \eta) = \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+2\eta-1}{2}\right) F_{(1-z-\eta)/2, (1-\eta)/2}(y) \\ + \Gamma\left(\frac{z-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+2\eta-1}{2}\right) F_{(2-z-\eta)/2, \eta/2}(y), \quad (3.4.81)$$

де функція $F_{\lambda, \mu}(y)$ дається формулою (3.4.80).

Для повного аналізу розглянемо асимптотики $\text{Im}I(y, z \rightarrow -(E + i\Gamma)/E_0, \eta)$ в границях $y \rightarrow 0$ і $y \rightarrow \infty$. Для цього використаємо наступні властивості функції Уйттекера:

$$W_{\lambda, \mu}(y) \approx y^{1/2-\mu} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(1/2 + \mu - \lambda)} + O(y^{3/2-\mu}) \\ + y^{1/2+\mu} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(1/2 - \mu - \lambda)} + O(y^{3/2+\mu}), \quad y \rightarrow 0, \quad (3.4.82)$$

$$W_{\lambda, \mu}(y) \approx e^{-y/2} y^\lambda [1 + O(1/y)], \quad y \rightarrow \infty. \quad (3.4.83)$$

Підставляючи (3.4.82) у (3.4.81) і опускаючи усі доданки які не вносять вклад в $\text{Im}I(y, z, \eta)$, отримаємо

$$\text{Im}I(y \rightarrow 0, z, \eta) \\ \approx -\frac{\pi}{\sin \pi \eta} \text{Im} \left[\psi\left(\frac{z-3}{2}\right) + \frac{4(z-2)}{(z-1)(z-3)} \right]. \quad (3.4.84)$$

З врахуванням властивостей логарифмічної похідної гамма-функції

$$\psi(z) = \psi(z+1) - \frac{1}{z} \quad (3.4.85)$$

матимемо наступний результат

$$\text{Im}I(y = 0, z, \eta) = -\frac{\pi}{\sin \pi \eta} \text{Im} \psi\left(\frac{1+z}{2}\right). \quad (3.4.86)$$

Цю відповідь можна отримати з інтегрального представлення (3.4.63), безпосередньою підстановкою $y = 0$

$$I(y = 0, z, \eta) = \int_0^\infty d\beta \frac{e^{-\beta z}}{\sinh \beta} \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{e^{-\eta\omega}}{1 + e^{-\omega}}. \quad (3.4.87)$$

Тепер інтеграл по змінній ω елементарний і після заміни $2\beta \rightarrow \beta$ він зводиться до

$$I(y = 0, z, \eta) = \frac{\pi}{\sin \pi \eta} \int_0^\infty d\beta \frac{e^{-\beta(z+1)/2}}{1 - e^{-\beta}}. \quad (3.4.88)$$

Виділяючи з нього уявну частину логарифмічної похідної для гамма функції (3.2.35) відтворюємо результат (3.4.86).

Наступні степеневі доданки розкладу $\text{Im}I(y \rightarrow 0, z, \eta)$ можуть бути отримані наступним чином: розкладаємо функцію dI/dQ в ряд Маклорена по змінній Q ; інтегруємо результат по цій змінній, використовуючи умову, що при $y = 0$ він повинен співпадати з (3.4.86). Для випадку $y \rightarrow 0$ розклад міститиме доданки $\sim y^{1-\eta}$ і y^η з множниками, що роблять відповідний вираз для ЛГС розбіжним при $\eta = 0, 1$, що є свідченням неаналітичності ЛГС, як функції енергії та координат.

Підставляючи асимптотики (3.4.83) в (3.4.81) отримуємо, що для $y \rightarrow \infty$

$$F_{\lambda, \mu}(y) \sim e^{-y} y^{2\lambda-3} \left(\frac{1}{4} + \lambda(\lambda - 1) - \mu^2 \right). \quad (3.4.89)$$

Розрахована ЛГС на основі рівнянь (3.4.62) і (3.4.81) показана на графіках 3.1 і 3.2.

Підкреслимо, що на малюнку 3.1 побудована повна ЛГС $N_\eta^S(r, E, B)$ як функція енергії E для фіксованих значень r , а на малюнку 3.2 та сама величина записана як функція відстані r від центра вихору для фіксованих значень E . Оскільки вираз (3.4.62) описує збурення ЛГС $\Delta N_\eta^S(r, E, B)$ за наявності вихору, для того, щоб отримати значення ЛГС $N_\eta^S(r, E, B)$ ми додамо ΔN_η^S до значення ЛГС при $\eta = 0$, яке дається формулою (3.2.36). Відмітимо, що на відміну від попереднього розділу при побудові цих графіків ми не приймали до уваги наявності скінченної кількості носіїв заряду в 2ДЕГ, що зсувають рівень енергій. Такий спосіб зручний для порівняння з діраківським випадком, де невелика кількість носіїв заряду може бути реалізована експериментально .

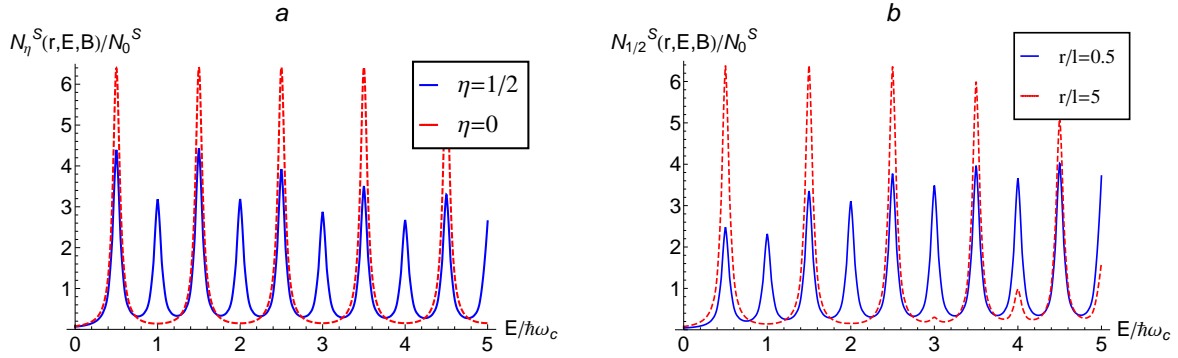


Рис. 3.1 Нормована ЛГС $N_{\eta}^S(r, E, B)/N_0^S$ як функція енергії E в одиницях $\hbar\omega_c$. (а) Для $\eta = 0$ (немає вихору і ЛГС є r -незалежною, штрихована) і $\eta = 1/2$ для $r = l$ (суцільна лінія). (б) обидві лінії для $\eta = 1/2$, $r = 0.5l$ (суцільна лінія) і $r = 5l$ (штрихована). В усіх випадках $\Gamma = 0.05\hbar\omega_c$.

Хоча, модель, яка розглядається може бути використана для будь яких значень відстані r від центру вихору, існують фізичні обмеження для можливих значень r , у випадку експериментальної реалізації з використанням надпровідників другого роду. По-перше, r не може бути менше радіусу осердя вихору, величина якого значно більша за величину r_0 відстані між атомами вуглецю. Нагадаємо, що в попередньому розділі координата r вимірювалась в одиницях r_0 , оскільки для $B = 0$ немає характерного масштабу довжини, такого як, наприклад, магнітна довжина. По-друге, врахуємо те, що ми замінили магнітне поле, створене іншими вихорами на постійне магнітне поле. Ця апроксимація добре узгоджена, якщо ми працюємо поблизу вибраного ними вихора. У цьому випадку значення r повинно бути меншим за відстань між вихорами l_v . Цей масштаб пропорційний магнітній довжині [104] $l_v = c\sqrt{\pi}l \approx 1.77l$, де $c \approx 1$ — геометричний фактор, який залежить від типу ґратки Абрикосова. Тому, хоча ми можемо, дослідити отриманий вираз для густини станів теоретично, для всіх можливих відстаней, практично (в експерименті з ґраткою вихорів Абрикосова)

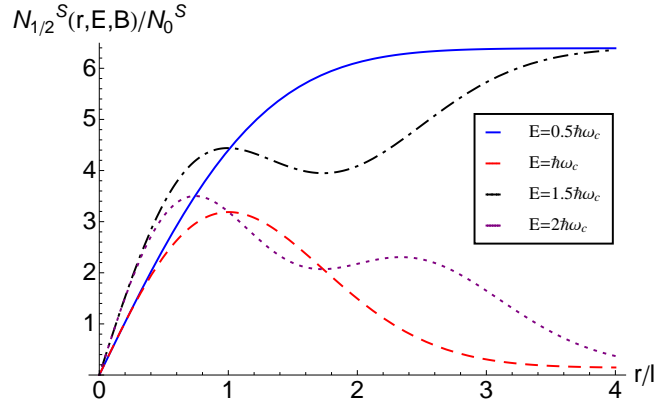


Рис. 3.2 Нормована ЛГС $N_{1/2}^S(r, E, B)/N_0^S$ як функція відстані r виміряна в одиницях магнітної довжини l для чотирьох значень $E/\hbar\omega_c = 0.5, 1.5$ (звичайні рівня Ландау) і $E/\hbar\omega_c = 1, 2$ (вихроподібні рівні). Ширина рівнів $\Gamma = 0.05\hbar\omega_c$. ми не можемо досягти області $r \gg l$.

На малюнку 3.1 а порівнюється вже обговорювана величина (3.2.36) для постійного магнітного поля з випадком ґратки Абрикосова (тобто при $\eta = 1/2$) для $r = l$. Можна побачити, що в той час як для $\eta = 0$ (штрихована лінія є, очевидно, r - незалежною) присутні лише піки при половинних $E/\hbar\omega_c$, для $\eta = 1/2$ величина цих піків зменшується і з'являється серія нових піків при дійсних значеннях $E/\hbar\omega_c$ (які зображені суцільною лінією). Така поведінка очікувана, і її можна отримати з виразу для різниці ГС (3.3.58) або (3.3.57) і була обговорювана вище. Випадок з вихором Абрикосова зображений на малюнку 3.1 б, де побудована енергетична залежність ЛГС для $r = 0.5l$ (суцільна лінія) і $r = 5l$ (штрихована лінія). Порівнюючи результати з $r/l = 0.5, 1.0, 5.0$ отримуємо, що при зростанні r , при половинних значеннях $E/\hbar\omega_c$ висота піків збільшується, в той час як при $r = 5.0l$ вони практично зникають. Така поведінка вказує на те що відповідні енергетичні рівні відповідають вихору. З іншого боку, половинні- $E/\hbar\omega_c$ піки, що відповідають звичайним рівням Ландау (3.2.37) сформованим в постійному магнітному полі, стають меншими при зменшенні

відстані r . Підкреслимо, що навіть для довільного значення потоку вихору η ці рівні не змінюють свого положення, в той час, як вихрові рівні зсуваються на величину пропорційну величині потоку магнітного потоку.

Для подальшого аналізу виразу (3.4.81) (який був застосований для побудови малюнку 3.1) відмітимо наступну особливість задачі. Бачимо, що розташування усіх піків контролюється гамма-функцією $\Gamma(z)$, яка має полюси при $z = 0, -1, -2, \dots$. Однак, інтенсивність таких піків складним чином залежить від модулюючої функції $F_{\lambda,\mu}(y)$. Для прикладу, ми перевірили, що хоча гамма-функція $\Gamma[(z - 1)/2]$ в другому доданкові для (3.4.81) містить полюс при від'ємному значенні енергії $E = -\hbar\omega_c/2$, сама ЛГС не містить особливостей в цій точці. Для повного дослідження ЛГС визначимо її поведінку при $r \rightarrow 0$ і $r \rightarrow \infty$. Беручи до уваги при $y \rightarrow 0$ границя $\text{Im}I$ дається рівнянням (3.4.86), отримаємо що значення $\Delta N_\eta^S(\mathbf{r} = 0, E, B)$ дорівнює значенню ЛГС в постійному магнітному полі (3.2.36) з протилежним знаком. Це означає, що ЛГС в центрі вихору повністю зникає,

$$N_\eta^S(\mathbf{r} = 0, E, B) = 0. \quad (3.4.90)$$

Формально ця властивість полягає у тому простому факті, що розв'язки (3.1.22) рівняння Шредінгера зануляються в початку координат, $\psi_{n,m}(r = 0, \varphi) = 0$. Таке зменшення ЛГС, індуковане вихором, в нерелятивістському 2DEG мало місце для випадку неперервного спектру рівняння Шредінгера в попередньому розділі. Отже можна зробити висновок, що відповідна поведінка ЛГС, має місце і у випадку постійного магнітного поля. Ця властивість задачі може бути спостережена на малюнку 3.2, де усі чотири лінії починаються з нуля. Два з цих графіків, а саме суцільна і штрих-пунктирна лінії відповідають рівнянню Ландау з $E/\hbar\omega_c = 0.5, 1.5$, а дві інші (штрихована і пунктирна) відповідають вихровим рівням з $E/\hbar\omega_c = 1, 2$. Для малих значень $r < l$ усі лінії зроста-

ють лінійним чином, що передбачається аналітичним розрахунком описаним вище (якщо ми покладемо $\eta = 1/2$). Оскільки для великих значень y функція $F_{\lambda\mu}$ спадає експоненційно (що можна побачити з (3.4.89)), різниця ЛГС $\Delta N_{\eta}^S(\mathbf{r}, E, B) \sim e^{-r^2/2l^2}$ для $r \rightarrow \infty$. Відповідно, для великих r поведінка ЛГС визначатиметься координатно-незалежною ЛГС в постійному магнітному полі (3.2.36). Тому в границі великих r всі криві на малюнку 3.2 визначатимуться відповідним значенням ЛГС штрихованої лінії на малюнку 3.1 а. Відмітимо, що знайдена в [10] специфічна поблизу вихора поведінка в теорії з потенціалом Ааронова-Бома, залишається і у випадку ненульового магнітного поля. Очікується, що така координатна залежність ГС може бути спостережена в скануючій тунельній мікроскопії, де роль потенціала Ааронова-Бома відводиться вихорам Абрикосова в надпровідниках II-типу, розташованих поблизу двовимірної системи [105].

3.5 Висновок

З аналізу шрьодінгерівської задачі за наявності як потенціала Ааронова-Бома, так і ненульового просторово-однорідного магнітного поля, отримується спектр, власні функції, аналітичний вираз для локальної і повної густини станів. Встановлено: ЛГС електронних збуджень нерелятивістського 2DEG зменшується, при наближенні до вихору (відповідний вираз має степеневу залежність, як функція відстані від точки спостереження до місця знаходження вихору, а показник степеня визначається величиною магнітного потоку, що містить ПАБ) і обертається в нуль в його центрі; виявлено серію нових “вихрових” піків густини станів системи.

РОЗДІЛ 4

ДВОВИМІРНІ ФЕРМІОНИ В СУПЕРПОЗИЦІЇ ПОТЕНЦІАЛІВ ОДНОРІДНОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ ТА ААРОНОВА-БОМА. РЕЛЯТИВІСТСЬКИЙ ВИПАДОК

В цьому розділі розглядається графен в суперпозиції потенціалів АБ та постійного магнітного поля. На основі спектру та власних функцій гамільтоніану Дірака розраховуються ГС та ЛГС відповідних електронних збуджень. Проводиться порівняння з аналогічною задачею з нерелятивістським 2ДЕГ та обговорюється можливість експериментальної перевірки отриманих результатів.

4.1 Хвильові функції та спектр рівняння Дірака

Розглянемо рівняння Дірака, що описує електронні збудження графену

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t, \zeta) = \hat{H}_D \Psi(\mathbf{r}, t, \zeta), \quad (4.1.1)$$

в регуляризованому потенціалі (3.1.2). Розв'язки з енергією E шукатимемо у вигляді $\Psi(\mathbf{r}, t, \zeta) = \exp(-iEt/\hbar) \Psi(\mathbf{r}, \zeta)$, тоді компоненти спінора

$$\Psi(\mathbf{r}, \zeta) = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{r}, \zeta) \\ i\psi_2(\mathbf{r}, \zeta) \end{bmatrix} \quad (4.1.2)$$

в полярних координатах $\mathbf{r} = (r, \varphi)$ задовольнятимуть наступним рівнянням

$$\begin{aligned} (E - \Delta)\psi_1(\mathbf{r}, \zeta) - \hbar v_F e^{-i\zeta\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i\zeta}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e\zeta A_\varphi}{\hbar c} \right) \psi_2(\mathbf{r}, \zeta) &= 0, \\ \hbar v_F e^{i\zeta\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i\zeta}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{e\zeta A_\varphi}{\hbar c} \right) \psi_1(\mathbf{r}, \zeta) + (E + \Delta)\psi_2(\mathbf{r}, \zeta) &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Векторний потенціал (3.1.2) визначає умови зшивки компонент хвильової функції при $r = R$:

$$\begin{aligned}\psi_1(R + 0, \varphi, \zeta) &= \psi_1(R - 0, \varphi, \zeta), \\ \psi_2(R + 0, \varphi, \zeta) &= \psi_2(R - 0, \varphi, \zeta),\end{aligned}\tag{4.1.4}$$

та їх похідних:

$$\begin{aligned}\psi_1'(R + 0, \varphi, \zeta) - \psi_1'(R - 0, \varphi, \zeta) &= \frac{\zeta\eta}{R}\psi_1(R, \varphi, \zeta), \\ \psi_2'(R + 0, \varphi, \zeta) - \psi_2'(R - 0, \varphi, \zeta) &= -\frac{\zeta\eta}{R}\psi_2(R, \varphi, \zeta),\end{aligned}\tag{4.1.5}$$

де штрих означає диференціювання по r . Умова розривності (4.1.5) впливає з рівняння руху квазічастинок графену в потенціалі (3.1.2) та може бути отримана з сингулярного при $r = R$ псевдо-зеєманівського доданку в квадратованому рівнянні Дірака (аналогічно першому розділу або [10]).

Розглянемо випадок $\zeta = 1$ (надалі індекс ζ в хвильових функціях буде опущений) і шукатимемо розв'язки системи (4.1.3) у формі:

$$\psi_1(\mathbf{r}, 1) = e^{i(m-1)\varphi}\psi_1(r), \quad \psi_2(\mathbf{r}, 1) = e^{im\varphi}\psi_2(r).\tag{4.1.6}$$

Тоді радіальні компоненти спінора $\psi_1(r)$ і $\psi_2(r)$ задовольнятимуть рівнянням

$$\begin{aligned}\psi_1(r) &= \frac{\hbar v_F}{E - \Delta} \left[\frac{d}{dr} + \frac{m + \eta\theta(r - R)}{r} + \frac{r}{2l^2} \right] \psi_2(r), \\ \psi_2(r) &= -\frac{\hbar v_F}{E + \Delta} \left[\frac{d}{dr} - \frac{m + \eta\theta(r - R) - 1}{r} - \frac{r}{2l^2} \right] \psi_1(r).\end{aligned}\tag{4.1.7}$$

Ввівши безрозмірну величину $y = r^2/2l^2$ і позначивши $\rho = R^2/2l^2$ перепишемо (4.1.7) для двох областей руху квазічастинок окремо. Для $y \in [0, \rho]$ система рівнянь приймає форму

$$\psi_1(y) = \frac{\hbar v_F \sqrt{2}}{(E - \Delta)l} \sqrt{y} \left[\frac{d}{dy} + \frac{m}{2y} + \frac{1}{2} \right] \psi_2(y),\tag{4.1.8a}$$

$$\psi_2(y) = -\frac{\hbar v_F \sqrt{2}}{(E + \Delta)l} \sqrt{y} \left[\frac{d}{dy} - \frac{m - 1}{y} - \frac{1}{2} \right] \psi_1(y).\tag{4.1.8b}$$

Оскільки поле АБ при $y < \rho$ відсутнє, задача в цій області тотожна задачі у роботі [106]. Для $y \in [\rho, \infty)$ система (4.1.7) перепишеться у наступному вигляді

$$\psi_1(y) = \frac{\hbar v_F \sqrt{2}}{(E - \Delta)l} \sqrt{y} \left[\frac{d}{dy} + \frac{m + \eta}{2y} + \frac{1}{2} \right] \psi_2(y), \quad (4.1.9a)$$

$$\psi_2(y) = -\frac{\hbar v_F \sqrt{2}}{(E + \Delta)l} \sqrt{y} \left[\frac{d}{dy} - \frac{m + \eta - 1}{2y} - \frac{1}{2} \right] \psi_1(y). \quad (4.1.9b)$$

Умови зшивки (4.1.4) і (4.1.5) в нових змінних приймають вигляд

$$\psi_1(\rho - 0) = \psi_1(\rho + 0), \quad \psi_1'(\rho + 0) - \psi_1'(\rho - 0) = \frac{\eta}{2\rho} \psi_1(\rho), \quad (4.1.10)$$

$$\psi_2(\rho - 0) = \psi_2(\rho + 0), \quad \psi_2'(\rho + 0) - \psi_2'(\rho - 0) = -\frac{\eta}{2\rho} \psi_2(\rho), \quad (4.1.11)$$

де тепер штрих означає похідну по y . З системи (4.1.8) можна отримати, що для області $y \in [0, \rho]$ компоненти спінора задовольняють наступним диференціальним рівнянням другого порядку:

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} - \frac{1}{4} - \frac{(m-1)^2}{4y^2} + \frac{\lambda - m}{2y} \right] \psi_1(y) = 0, \quad (4.1.12a)$$

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} - \frac{1}{4} - \frac{m^2}{4y^2} + \frac{\lambda - m + 1}{2y} \right] \psi_2(y) = 0, \quad (4.1.12b)$$

де ми ввели позначення $\lambda = (E^2 - \Delta^2)l^2 / (\hbar v_F)^2$. Аналогічна система рівнянь для $y \in [\rho, \infty)$ (що відповідає (4.1.9)) може бути отримана з (4.1.12) заміною $m \rightarrow m + \eta$:

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} - \frac{1}{4} - \frac{(m + \eta - 1)^2}{4y^2} + \frac{\lambda - m - \eta}{2y} \right] \psi_1(y) = 0, \quad (4.1.13a)$$

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} - \frac{1}{4} - \frac{(m + \eta)^2}{4y^2} + \frac{\lambda - m - \eta + 1}{2y} \right] \psi_2(y) = 0, \quad (4.1.13b)$$

Розглянемо загальну схему пошуку власних спінорних функцій на прикладі першої компоненти $\psi_1(r)$. Виявляється, що (4.1.12a) і (4.1.13a) зводяться до диференціальних рівнянь на вироджену гіпергеометричну функцію (див

рівн. (6.3.1) в [101]). Розв'язки для областей $y \in [0, \rho]$ і $y \in [\rho, \infty)$ мають вигляд

$$\psi_1(y) = C_m e^{-y/2} y^{|m-1|/2} \Phi \left(\frac{|m-1| + m + 1 - \lambda}{2}, 1 + |m-1|; y \right), \quad r < R \quad (4.1.14a)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(y) = & A_m e^{-y/2} y^{|m+\eta-1|/2} \Phi \left(\frac{a_+ - \lambda}{2}, 1 + |m + \eta - 1|; y \right) + B_m e^{-y/2} \times \\ & \times y^{-|m+\eta-1|/2} \Phi \left(\frac{a_- - \lambda}{2}, 1 - |m + \eta - 1|; y \right), \quad r > R, \end{aligned} \quad (4.1.14b)$$

де $a_{\pm} \equiv m + \eta + 1 \pm |m + \eta - 1|$, A_m, B_m, C_m — числові константи, а $\Phi(a, c; z)$ — вироджена гіпергеометрична функція. Розв'язок (4.1.14a) однозначно отримується з умови квадратичної інтегрованості хвильової функції поблизу початку координат (за відсутності потенціалу Ааронова-Бома) при $r < R$. Записуючи компоненту спінора (4.1.14b) ми використали той факт, що загальний розв'язок рівняння типу (4.1.13a) може бути виражений за допомогою двох лінійно незалежних функцій $\Phi(a, c; z)$ і $z^{1-c} \Phi(a - c + 1, 2 - c; z)$ (для нецілих значень c). Коефіцієнти A_m, B_m та C_m отримуються з умов зшивки (4.1.10). Розгляд границі $R \rightarrow 0$ ($\rho \rightarrow 0$) спрощує розрахунок, оскільки в цьому випадку, коефіцієнти можна шукати у вигляді ряду по степеням ρ (при цьому виявляється, що для аналізу відповідних розв'язків, достатньо обмежитись лінійною функцією). Спектр енергій системи отримується наступним чином. В границі $\rho \rightarrow 0$ перша компонента спінора приймає вигляд

$$\psi_1(y) = A_m e^{-y/2} y^{|m+\eta-1|/2} \Phi \left(\frac{a_+ - \lambda}{2}, 1 + |m + \eta - 1|; y \right). \quad (4.1.15)$$

Оскільки $\Phi(a, c; z)$ має поведінку e^y при великих значеннях y крім значень $a = -n$ з натуральними $n = 0, 1, 2, \dots$, то умова квадратичної інтегрованості фіксує вигляд хвильової функції задачі. В цьому випадку Φ -функція зводиться

до узагальнених поліномів Лагерра (див (6.9.2.36) в [101])

$$L_n^\alpha(y) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)n!} \Phi(-n, \alpha + 1, y). \quad (4.1.16)$$

Отже розглянемо першу компоненту спінора рівняння (4.1.12а). Розв'язок шукатимемо у вигляді $\psi_1(y) = y^{|m-1|/2} e^{-y/2} v(y)$. Отримаємо рівняння на $v(y)$

$$yv''(y) + (1 + |m - 1| - y)v'(y) - \frac{1}{2}(|m - 1| + m + 1 - \varepsilon)v(y) = 0. \quad (4.1.17)$$

Виберемо його розв'язок таким чином

$$v(y) = \Phi((|m - 1| + m + 1 - \varepsilon)/2, 1 + |m - 1|, y). \quad (4.1.18)$$

Другий розв'язок не є квадратично інтегровним в початку координат, тому його слід виключити. Перша компонента спінора в заданій області матиме форму:

$$\psi_1(y) = y^{|m-1|/2} e^{-y/2} \Phi((|m - 1| + m + 1 - \varepsilon)/2, 1 + |m - 1|, y). \quad (4.1.19)$$

Розглянемо першу компоненту в рівнянні (4.1.13а). Розв'язок шукатимемо у вигляді $\psi_1(y) = y^{|m+\eta-1|/2} e^{-y/2} v(y)$. Отримуємо рівняння на $v(y)$

$$yv''(y) + (1 + |m + \eta - 1| - y)v'(y) - \frac{1}{2}(|m + \eta - 1| + m + \eta + 1 - \varepsilon)v(y) = 0. \quad (4.1.20)$$

Рівняння другого порядку має два лінійно-незалежні розв'язки

$$v(y) = A_m \Phi((|m + \eta - 1| + m + \eta + 1 - \varepsilon)/2, 1 + |m + \eta - 1|, y) + B_m y^{-|m+\eta-1|} \Phi((-|m + \eta - 1| + m + \eta + 1 - \varepsilon)/2, 1 - |m + \eta - 1|, y). \quad (4.1.21)$$

Введемо позначення:

$$C'_m = C_m y^{|m-1|/2} \quad (4.1.22)$$

$$A'_m = A_m y^{|m+\eta-1|/2} \quad (4.1.23)$$

$$B'_m = B_m y^{-|m+\eta-1|/2} \quad (4.1.24)$$

Умови зшивки приймають вигляд:

$$C'_m [1 + c_{1m}\rho] = A'_m [1 + a_{1m}\rho_m] + B'_m [1 + b_{1m}\rho_m] \quad (4.1.25)$$

$$C'_m |m-1| [1 + c_{2m}\rho] + C'_m \eta = A'_m |m+\eta-1| [1 + a_{2m}\rho] - B'_m |m+\eta-1| [1 + b_{2m}\rho] \quad (4.1.26)$$

Коефіцієнти $a_{1m}, a_{2m}, b_{1m}, b_{2m}, c_{1m}, c_{2m}$ отримуються з розкладу відповідних гіпергеометричних функцій. Розв'язки системи рівнянь запишемо з тією ж степінню точності, з якою записана сама система.

$$A'_m = C'_m \frac{1}{2} \left[1 + \frac{|m-1| + \eta}{|m+\eta-1|} \right] + a_m \rho, \quad (4.1.27)$$

$$B'_m = C'_m \frac{1}{2} \left[1 - \frac{|m-1| + \eta}{|m+\eta-1|} \right] + b_m \rho. \quad (4.1.28)$$

Коефіцієнти a_m, b_m виражаються через $a_{1m}, a_{2m}, b_{1m}, b_{2m}, c_{1m}, c_{2m}$ і не обертаються в нуль при тих значеннях m , при яких коефіцієнти перед C'_m можуть занулятися. Розв'язок рівняння Дірака при $\rho \rightarrow 0$ визначатиметься найбільш сингулярним доданком. Знайдемо поведінку A_m, B_m при різних значеннях m .

$m \geq 1$:

$$A'_m \sim 1 \rightarrow A_m \sim \rho^{-|m+\eta-1|}, \quad B'_m \sim \rho \rightarrow B_m \sim \rho^{1+|m+\eta-1|} \quad (4.1.29)$$

$m < 1$:

$$A'_m \sim 1 \rightarrow A_m \sim \rho^{-|m+\eta-1|}, \quad B'_m \sim 1 \rightarrow B_m \sim \rho^{|m+\eta-1|} \quad (4.1.30)$$

Звідки отримуємо розв'язок в границі $\rho \rightarrow 0$

$$\psi_1(r) = A_m y^{|m+\eta-1|/2} e^{-y/2} \Phi((|m+\eta-1| + m + \eta + 1 - \varepsilon)/2, 1 + |m+\eta-1|, y). \quad (4.1.31)$$

Власна функція відповідно буде

$$\psi_1(r) = A_m y^{|m+\eta-1|/2} e^{-y/2} L_n^{|m+\eta-1|}(y). \quad (4.1.32)$$

Розглянемо другу компоненту спінора в рівнянні (4.1.12b). Розв'язок шукатимемо у вигляді $\psi_2(y) = y^{|m|/2} e^{-y/2} v(y)$. Отримуємо рівняння на $v(y)$

$$y v''(y) + (1 + |m| - y) v'(y) - \frac{1}{2} (|m| + m + 2 - \varepsilon) v(y) = 0. \quad (4.1.33)$$

Воно має два лінійно-незалежні розв'язки. Виберемо перший

$$v(y) = \Phi((|m| + m + 2 - \varepsilon)/2, 1 + |m|, y). \quad (4.1.34)$$

Другий розв'язок не є квадратично інтегровним в початку координат, тому його слід виключити з розгляду. Отримуємо наступний вираз для другої компоненти спінора

$$\psi_2(y) = y^{|m|/2} e^{-y/2} \Phi((|m| + m + 2 - \varepsilon)/2, 1 + |m|, y). \quad (4.1.35)$$

Розглянемо другу компоненту в рівнянні (4.1.13b). Розв'язок шукатимемо у вигляді $\psi_2(y) = y^{|m+\eta|/2} e^{-y/2} v(y)$. Отримуємо рівняння на $v(y)$

$$y v''(y) + (1 + |m + \eta| - y) v'(y) - \frac{1}{2} (|m + \eta| + m + \eta + 2 - \varepsilon) v(y) = 0. \quad (4.1.36)$$

Воно має два лінійно-незалежні розв'язки. Шукана відповідь має вигляд

$$v(y) = A_m \Phi((|m + \eta| + m + \eta + 2 - \varepsilon)/2, 1 + |m + \eta|, y) + B_m y^{-|m+\eta|} \Phi((-|m + \eta| + m + \eta + 2 - \varepsilon)/2, 1 - |m + \eta|, y). \quad (4.1.37)$$

Введемо позначення:

$$C'_m = C_m y^{|m|/2} \quad (4.1.38)$$

$$A'_m = A_m y^{|m+\eta|/2} \quad (4.1.39)$$

$$B'_m = B_m y^{-|m+\eta|/2} \quad (4.1.40)$$

Умови зшивки приймають вигляд:

$$C'_m [1 + c_{1m}\rho] = A'_m [1 + a_{1m}\rho_m] + B'_m [1 + b_{1m}\rho_m] \quad (4.1.41)$$

$$C'_m |m| [1 + c_{2m}\rho] - C'_m \eta = A'_m |m + \eta| [1 + a_{2m}\rho] - B'_m |m + \eta| [1 + b_{2m}\rho], \quad (4.1.42)$$

де як і в попередньому випадку числові значення коефіцієнтів $a_{1m}, a_{2m}, b_{1m}, b_{2m}, c_{1m}, c_{2m}$ можна отримати з відповідних розкладів гіпергеометричних функцій. Розв'язки системи рівнянь запишемо з тією ж степінню точності, з якою записана сама система

$$A'_m = C'_m \frac{1}{2} \left[1 + \frac{|m| - \eta}{|m + \eta|} \right] + a_m \rho, \quad (4.1.43)$$

$$B'_m = C'_m \frac{1}{2} \left[1 - \frac{|m| - \eta}{|m + \eta|} \right] + b_m \rho, \quad (4.1.44)$$

де коефіцієнти a_m, b_m є ненульовими при тих значеннях m , при яких коефіцієнти перед C'_m обертаються в нуль. Розв'язок рівняння Дірака при $\rho \rightarrow 0$ визначатиметься найбільш сингулярним доданком. Знайдемо поведінку A_m, B_m при різних значеннях m .

$m \geq 1$:

$$A'_m \sim 1 \rightarrow A_m \sim \rho^{-|m+\eta|/2}, \quad B'_m \sim 1 \rightarrow B_m \sim \rho^{|m+\eta|/2} \quad (4.1.45)$$

$m = 0$:

$$A'_m \sim \rho \rightarrow A_m \sim \rho^{1-\eta/2}, \quad B'_m \sim 1 \rightarrow B_m \sim \rho^{\eta/2} \quad (4.1.46)$$

$m < 0$:

$$A'_m \sim 1 \rightarrow A_m \sim \rho^{-|m+\eta|/2}, \quad B'_m \sim \rho \rightarrow B_m \sim \rho^{1+|m+\eta|/2} \quad (4.1.47)$$

Звідки отримуємо вигляд для другої компоненти спінора в границі $\rho \rightarrow 0$

$m \neq 0$:

$$\psi_2(r) = A_m y^{|m+\eta|/2} e^{-y/2} \Phi((|m+\eta|+m+\eta+2-\varepsilon)/2, 1+|m+\eta|, y). \quad (4.1.48)$$

$m = 0$:

$$\psi_2(r) = A_0 y^{-\eta/2} e^{-y/2} \Phi((2-\varepsilon)/2, 1-\eta, y). \quad (4.1.49)$$

Нормованими розв'язками будуть

$m \neq 0$:

$$\psi_2(r) = A_m y^{|m+\eta|/2} e^{-y/2} L_n^{|m+\eta|}(y). \quad (4.1.50)$$

$m = 0$:

$$\psi_2(r) = A_0 y^{-\eta/2} e^{-y/2} L_n^{-\eta}(y). \quad (4.1.51)$$

Вводячи функції

$$J_\nu^n(x) = \left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\nu+1)} \right)^{1/2} e^{-x/2} x^{\nu/2} L_n^\nu(x), \quad (4.1.52)$$

можна переписати розв'язки рівнянь, що розглядалися, у більш компактній формі:

$$\psi_1(y) = A_m J_{|m+\eta-1|}^n(y), \quad (4.1.53)$$

$m \neq 0$:

$$\psi_2(r) = A_m J_{|m+\eta|}^n(y), \quad (4.1.54)$$

$m = 0$:

$$\psi_2(r) = A_0 J_{-\eta}^n(y). \quad (4.1.55)$$

Означення(4.1.52) узагальнює функції, розглянуті в [107] на нецілі значення $\nu > -1$. Ці функції задовольняють наступній умові ортогональності

$$\int_0^\infty dx J_\nu^n(x) J_\nu^{n'}(x) = \delta_{nn'}. \quad (4.1.56)$$

Неважно пересвідчитись, що з $\psi_1(y)$ можна отримати $\psi_2(y)$ з (4.1.9b) використовуючи формули рекурсії [107]

$$\begin{aligned} (x + \nu)J_\nu^n(x) &= [x(n + \nu)]^{\frac{1}{2}}J_{\nu-1}^n(x) + [x(n + \nu + 1)]^{\frac{1}{2}}J_{\nu+1}^n(x), \\ 2x(d/dx)J_\nu^n(x) &= [x(n + \nu)]^{\frac{1}{2}}J_{\nu-1}^n(x) - [x(n + \nu + 1)]^{\frac{1}{2}}J_{\nu+1}^n(x). \end{aligned} \quad (4.1.57)$$

Враховуючи, що спінори повинні задовольняти умові нормування

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty r dr \Psi_{n'm'}^\dagger(\mathbf{r}, \zeta) \Psi_{nm}(\mathbf{r}, \zeta) = \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} \quad (4.1.58)$$

можна послідовно знайти розв'язки (4.1.59), (4.1.60), і (4.1.61) для $n > 0$.

Пошук розв'язків з енергією $E = \pm\Delta$ розглядається окремо. Аналізуючи систему (4.1.9) можна показати, що розв'язок з енергією $E = -\Delta$, існує при умовах $m \leq 0$ і $\psi_1(r) = 0$. Відповідний нормований спінор (4.1.63). Можна перевірити, що при $\eta = 0$ ці розв'язки прямують до відомих у літературі [106]. Для цього слід перепозначити квантові числа $n + m \rightarrow n$ для $m \geq 1$ і $n + 1 \rightarrow n$ для $m \leq 0$ і використати властивість $J_\nu^n(y) = (-1)^\nu J_{-\nu}^{n+\nu}(y)$ яка має місце коли $J_\nu^n(y)$ можна визначити. Для цілих значень ν ці функції визначені в [107]. Після перепозначення, спектр (4.1.62) матиме загальноприйнятий вигляд для рівнів Ландау.

Після взяття границі $R \rightarrow 0$ отримуємо наступні розв'язки:

$$\Psi_{n,m}^{(\pm)}(\mathbf{r}, 1) = \frac{1}{2l\sqrt{\pi\mathcal{E}_{n,m}}} \begin{bmatrix} \sqrt{\mathcal{E}_{n,m} \pm \Delta} e^{i(m-1)\varphi} J_{m+\eta-1}^n(y) \\ \pm i\sqrt{\mathcal{E}_{n,m} \mp \Delta} e^{im\varphi} J_{m+\eta}^n(y) \end{bmatrix} \quad (4.1.59)$$

для $m > 0$,

$$\Psi_{n,0}^{(\pm)}(\mathbf{r}, 1) = \frac{1}{2l\sqrt{\pi\mathcal{E}_{n,0}}} \begin{bmatrix} \sqrt{\mathcal{E}_{n,0} \pm \Delta} e^{-i\varphi} J_{1-\eta}^n(y) \\ \mp i\sqrt{\mathcal{E}_{n,0} \mp \Delta} J_{-\eta}^{n+1}(y) \end{bmatrix} \quad (4.1.60)$$

для $m = 0$, і

$$\Psi_{n,m}^{(\pm)}(\mathbf{r}, 1) = \frac{1}{2l\sqrt{\pi\mathcal{E}_{n,m}}} \begin{bmatrix} \sqrt{\mathcal{E}_{n,m} \pm \Delta} e^{i(m-1)\varphi} J_{|m+\eta-1|}^n(y) \\ \mp i\sqrt{\mathcal{E}_{n,m} \mp \Delta} e^{im\varphi} J_{|m+\eta|}^{n+1}(y) \end{bmatrix} \quad (4.1.61)$$

для $m < 0$. Нижні і верхні знаки \pm відповідають розв'язкам з додатною і від'ємною енергіями $\mathcal{E}^{(\pm)} = \pm \mathcal{E}_{n,m}$ з абсолютним значенням енергії

$$\mathcal{E}_{n,m} = \sqrt{\Delta^2 + \epsilon_0^2 \lambda_{n,m}}, \quad \lambda_{n,m} = 2n + |m + \eta - 1| + m + \eta + 1 \quad (4.1.62)$$

для $n \geq 0$, функція $J_\nu^n(y)$ визначена в (4.1.52) з y як і у нерелятивістському випадку, і релятивістським параметром енергії $\epsilon_0 = \hbar v_F/l$. Спіно́р з енергією $\mathcal{E} = -\Delta$ є діркоподібним

$$\Psi_{0,m}^{(-)}(\mathbf{r}, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{im\varphi} J_{|m|-\eta}^0(y) \end{bmatrix}, \quad m \leq 0. \quad (4.1.63)$$

Порівняємо розв'язки рівняння Шредінгера і Дірака з нульовим значенням азимутального числа $m = 0$. З рівняння (3.1.22) можна побачити, що $\psi_{n,0}(r, 1) \sim r^\eta$, оскільки з [91]

$$L_n^\alpha(0) = \binom{n + \alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)n!}. \quad (4.1.64)$$

З іншого боку, розглядаючи рівняння (4.1.60) і (4.1.63) для $m = 0$ отримуємо, що верхні компоненти регулярні при $r = 0$, а нижні компоненти розбігаються як $\psi_{2n,0}(r, 1) \sim r^{-\eta}$. Порівнюючи цей результат з поведінкою хвильових функцій в потенціалі Ааронова-Бома [10] неважко побачити, що наявність додаткового постійного магнітного поля, не змінює поведінку розв'язків з $m = 0$ при $r \rightarrow 0$. Також, як і в [10] розв'язки з $E = \pm\Delta$ (4.1.63) для $\zeta = 1$ при вибраному напрямі полів є діркоподібним, $\mathcal{E} = -\Delta$.

Розв'язки для випадку $\zeta = -1$ мають наступний вигляд:

$$\Psi_{n,m}^{(\pm)}(\mathbf{r}, -1) = \frac{1}{2l\sqrt{\pi}\mathcal{E}_{n,m}} \begin{bmatrix} \mp\sqrt{\mathcal{E}_{n,m} \pm \Delta} e^{im\varphi} J_{m+\eta}^n(y) \\ i\sqrt{\mathcal{E}_{n,m} \mp \Delta} e^{i(m-1)\varphi} J_{m+\eta-1}^n(y) \end{bmatrix} \quad (4.1.65)$$

for $m > 0$,

$$\Psi_{n,0}^{(\pm)}(\mathbf{r}, -1) = \frac{1}{2l\sqrt{\pi}\mathcal{E}_{n,0}} \begin{bmatrix} \pm\sqrt{\mathcal{E}_{n,0} \pm \Delta} J_{-\eta}^{n+1}(y) \\ i\sqrt{\mathcal{E}_{n,0} \mp \Delta} e^{-i\varphi} J_{1-\eta}^n(y) \end{bmatrix} \quad (4.1.66)$$

for $m = 0$, and

$$\Psi_{n,m}^{(\pm)}(\mathbf{r}, -1) = \frac{1}{2l\sqrt{\pi\mathcal{E}_{n,m}}} \begin{bmatrix} \pm\sqrt{\mathcal{E}_{n,m} \pm \Delta} e^{im\varphi} J_{|m+\eta|}^{n+1}(y) \\ i\sqrt{\mathcal{E}_{n,m} \mp \Delta} e^{i(m-1)\varphi} J_{|m+\eta-1|}^n(y) \end{bmatrix} \quad (4.1.67)$$

для $m < 0$.

Аналогічно попередньому випадку, знаки \pm відповідають розв'язкам з енергіями $\mathcal{E}^{(\pm)} = \pm\mathcal{E}_{n,m}$ при $n \geq 0$ і енергії $\mathcal{E}_{n,m}$ з рівняння (4.1.62). Розв'язки з $E = \pm\Delta$ мають вигляд

$$\Psi_{0,m}(\mathbf{r}, -1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l} \begin{bmatrix} e^{im\varphi} J_{|m|-\eta}^0(y) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad m \leq 0, \quad (4.1.68)$$

і є електроноподібними, $\mathcal{E} = \Delta$. Також нижні компоненти розв'язків з $m = 0$ (4.1.66) і (4.1.68) регулярні при $r = 0$, а верхні компоненти розбіжні степеневим чином $\psi_{1n,0}(r, -1) \sim r^{-\eta}$.

4.2 Інтегральне представлення для густини станів

Розв'язки рівняння Дірака характеризуються не тільки квантовими числами, але ще й підгратковими індексами A і B , знаками енергії \pm та долинним індексом $\zeta = \pm 1$. Тому замість запису виразу для густини станів, як в попередньому розділі (3.2.25), зручніше побудувати функцію Гріна, за допомогою якої потім сконструювати вираз для густини станів, використовуючи її матричні елементи. Розклад функції Гріна по власним функціям гамільтоніану Дірака має вигляд

$$G_{\eta}^{\text{D}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E + i0; \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Psi_{n,m}^{(+)}(\mathbf{r}, \zeta) \Psi_{n,m}^{(+)\dagger}(\mathbf{r}', \zeta)}{E - \mathcal{E}_{n,m} + i0} + \frac{\Psi_{n,m}^{(-)}(\mathbf{r}, \zeta) \Psi_{n,m}^{(-)\dagger}(\mathbf{r}')}{E + \mathcal{E}_{n,m} + i0} \right). \quad (4.2.69)$$

Густина станів ЛГС для A і B підґраток виражена в термінах функції Гріна (4.2.69) має вигляд

$$\begin{aligned} N_{\eta}^{\text{D}(A)}(\mathbf{r}, E) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} [G_{\eta 11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E + i\Gamma; \zeta = 1) + G_{\eta 11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E + i\Gamma; \zeta = -1)], \\ N_{\eta}^{\text{D}(B)}(\mathbf{r}, E) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} [G_{\eta 22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E + i\Gamma; \zeta = 1) + G_{\eta 22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E + i\Gamma; \zeta = -1)], \end{aligned} \quad (4.2.70)$$

де було введено уширення рівнів Ландау Γ , аналогічне попередньому розділу. Підставляючи розв'язки рівняння Дірака у вираз для функції Гріна (4.2.69) та використовуючи означення (4.2.70) отримуємо

$$N_{\eta}^{\text{D}(A,B)}(\mathbf{r}, E, B) = -N_0^{\text{D}} \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\frac{E + i\Gamma \pm \Delta}{\epsilon_0} G \left(y, z \rightarrow -\frac{(E + i\Gamma)^2 - \Delta^2}{\epsilon_0^2}, \eta \right) \right], \quad (4.2.71)$$

де верхній (нижній) знаки відповідають A (B) підґраткам, релятивістська шкала енергій ϵ_0 була означена вище, а нормуюча константа $N_0^{\text{D}} = \epsilon_0 / (2\pi\hbar^2 v_F^2)$ відповідає значенню ГС для вільних квазічастинок ($\eta = B = \Gamma = 0$) нормовану на одиницю спінової і підґраткової степені вільності взятих при енергії $E = \epsilon_0$ і нульовій щілині $\Delta = 0$. У виразі (4.2.71) була введена функція

$$G(y, z, \eta) = \sum_{i=1}^3 g_i(y, z, \eta) \quad (4.2.72)$$

яка містить три доданки

$$\begin{aligned} g_1(y, z, \eta) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{[J_{|m+\eta-1|}^n(y)]^2}{z + \lambda_{n,m}}, \\ g_2(y, z, \eta) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{[J_{|m+\eta|}^n(y)]^2}{z + \lambda'_{n,m}}, \\ g_3(y, z, \eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{[J_{\eta}^n(y)]^2}{z + 2(n + \eta)} - \frac{[J_{-\eta}^n(y)]^2}{z + 2n} \right) \end{aligned} \quad (4.2.73)$$

з $\lambda_{n,m}$ визначеною в (4.1.62) і

$$\lambda'_{n,m} = 2n + |m + \eta| + m + \eta. \quad (4.2.74)$$

Відмітимо, що функція $g_3(y, z, \eta)$ містить сингулярні доданки, які виникають з розв'язків рівняння Дірака при $m = 0$.

Вклади $g_{1,2}(y, z, \eta)$ можуть бути розраховані аналогічно шредінгерівському випадку (3.2.49), підніманням знаменника за допомогою експоненти (аналогічно (3.2.28)). Вводячи регуляризуючий фактор $\delta > 0$ і використовуючи суму для добутків поліномів Лагера, отримуємо

$$g_1(y, z, \eta) = - \int_0^\infty d\beta e^{-\beta z} \frac{e^{-2(\delta+\beta)}}{1 - e^{-2(\delta+\beta)}} e^{-y \coth(\delta+\beta)} \times \\ \times \sum_{m=-\infty}^\infty e^{-(\delta+\beta)(m+\eta)} I_{|m+\eta|} \left(\frac{y}{\sinh(\delta + \beta)} \right). \quad (4.2.75)$$

В остаточному виразі був зсунутий індекс сумування $m \rightarrow m + 1$.

Сума по m може бути знайдена за допомогою рівності (3.2.46), яка була отримана в попередньому розділі

$$\Delta g_1(y, z, \eta) \equiv g_1(y, z, \eta) - g_1(y, z, 0) = \\ = \frac{\sin \pi \eta}{\pi} \int_0^\infty d\beta e^{-\beta z} \frac{e^{-2(\delta+\beta)}}{1 - e^{-2(\delta+\beta)}} e^{-y \coth(\delta+\beta)} \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{-y \cosh \omega / \sinh(\delta+\beta)} \frac{e^{-\eta(\omega+\delta+\beta)}}{1 + e^{-(\omega+\delta+\beta)}}. \quad (4.2.76)$$

Введена функція $\Delta g_1(y, z, \eta)$ описує збурення, індуковане вихором. Аналогічно, для $\Delta g_2(y, z, \eta)$ маємо

$$\Delta g_2(y, z, \eta) \equiv g_2(y, z, \eta) - g_2(y, z, 0) = \\ = \frac{\sin \pi \eta}{\pi} \int_0^\infty d\beta e^{-\beta z} \frac{1}{1 - e^{-2(\delta+\beta)}} e^{-y \coth(\delta+\beta)} \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{-y \cosh \omega / \sinh(\delta+\beta)} \frac{e^{-\eta(\omega+\delta+\beta)}}{1 + e^{-(\omega+\delta+\beta)}}. \quad (4.2.77)$$

Випадок $g_3(y, z, \eta)$ навіть простіший, в тому сенсі, що він не містить сумування по m . Використовуючи суму для поліномів Лагера запишемо аналог рівності

(4.2.75). Він містить різницю двох модифікованих функцій Бесселя, яка може бути представлена за допомогою функції Макдональда [91]

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin \pi \nu} [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]. \quad (4.2.78)$$

Остаточно отримуємо наступне співвідношення

$$g_3(y, z, \eta) = -\frac{2 \sin \pi \eta}{\pi} \int_0^\infty d\beta e^{-\beta z} \frac{e^{-(\delta+\beta)\eta}}{1 - e^{-2(\delta+\beta)}} e^{-y \coth(\delta+\beta)} K_\eta \left(\frac{y}{\sinh(\delta + \beta)} \right). \quad (4.2.79)$$

Відмітимо, що оскільки $g_3(y, z, \eta = 0) = 0$, немає потреби вводити функцію Δg_3 . Маючи явний вигляд функцій $\Delta g_{1,2}$ і g_3 ми можемо порахувати збурення ЛГС індуковане вихором $\Delta N_\eta^{\text{D}(A,B)}(\mathbf{r}, E, B) = N_\eta^{\text{D}(A,B)}(\mathbf{r}, E, B) - N_0^{\text{D}(A,B)}(\mathbf{r}, E, B)$. Відповідний розгляд можна зробити аналогічно нерелятивістському випадку.

Спочатку, розглянемо ЛГС в постійному магнітному полі ($\eta = 0$) яка внаслідок трансляційної інваріантності співпадатиме з ГС, нормовану на одиницю площі. ЛГС може бути отримана подібним до (3.2.36) чином, з тою лише різницею (на відміну від нерелятивістського випадку), що обрізаючий параметр δ входить в остаточний вираз,

$$N_0^{\text{D}(A,B)}(E, B) = -\frac{N_0^{\text{D}}}{\pi} \text{Im} \left[\frac{E + i\Gamma \pm \Delta}{\epsilon_0} \left(\ln(2\delta) + \gamma + \psi \left(\frac{z}{2} \right) + \frac{1}{z} \right) \right], \quad (4.2.80)$$

де були залишені лише розбіжні в границі $\delta \rightarrow 0$ доданки. Для більшої зручності вираз (4.2.80) перепишемо у формі отриманій в [102], де замість параметру δ був використаний параметр ширини зони W

$$N_0^{\text{D}(A,B)}(E, B) = \frac{N_0^{\text{D}}}{\pi} \left\{ \frac{\Gamma}{\epsilon_0} \ln \frac{W^2}{2\epsilon_0^2} - \text{Im} \left[\frac{E + i\Gamma \pm \Delta}{\epsilon_0} \times \left(\psi \left(\frac{\Delta^2 - (E + i\Gamma)^2}{2\epsilon_0^2} \right) + \frac{\epsilon_0^2}{\Delta^2 - (E + i\Gamma)^2} \right) \right] \right\}. \quad (4.2.81)$$

Перевага такого представлення полягає в тому, що в границі $B \rightarrow 0$ цей вираз приймає загальноприйнятну форму [102]. Квантові магнітні осциляції ЛГС,

$N_0^D(E, B) = N_0^{D(A)}(E, B) = N_0^{D(B)}(E, B)$ для $\Delta = 0$ показані на малюнку 4.1 а (штрихована лінія). В області додатніх значень енергій, розташування піків $\mathcal{E}_n/\epsilon_0 = \sqrt{2n}$ знаходиться у відповідності з діраківським спектром. Нееквідистантні рівні Ландау разом з піком при $E = 0$ є свідченням того, що квазі-частинки мають діраківський характер. Формула (3.2.38) дозволяє виділити ці осциляції аналітично [102].

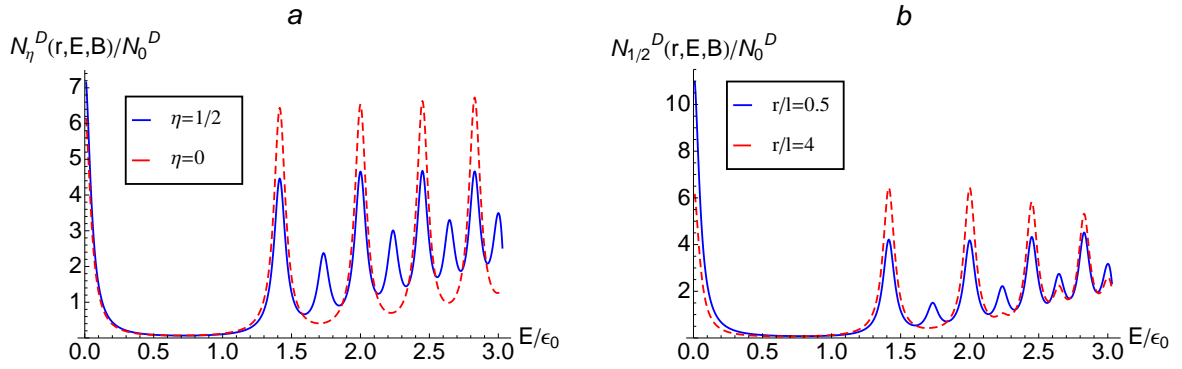


Рис. 4.1 Нормована ЛГС $N_\eta^D(r, E, B)/N_0^D(\epsilon_0)$ як функція енергії E в одиницях релятивістської енергетичної шкали ϵ_0 . ЛГС є парною функцією від E , тому показана лише область додатніх енергій. (а) Для $\eta = 0$ (відсутній вихор і ЛГС є r -незалежною) та $\eta = 1/2$ для $r = l$. (б) Обидві лінії для $\eta = 1/2$, $r = 0.5l$ і $r = 4l$. В усіх випадках $\Gamma = 0.05\epsilon_0$, $W/\epsilon_0 = 3.35$ та $\Delta = 0$.

4.3 Повна густина станів

Повна ГС на одиницю спінової степені вільності отримується інтегруванням по просторовим змінним (3.3.50). Відповідно, збурення ГС, індуковане вихором $\Delta N_\eta^{D(A,B)}(E, B) = N_\eta^{D(A,B)}(E, B) - N_0^{D(A,B)}(E, B)$ для A і B підґраток приймає

ВИГЛЯД

$$\begin{aligned} \Delta N_{\eta}^{\text{D}(A,B)}(E, B) = & -2N_0^{\text{D}} l^2 \text{Im} \left[\frac{E + i\Gamma \pm \Delta}{\epsilon_0} \times \right. \\ & \left. \times \int_0^{\infty} dy (\Delta g_1(y, z, \eta) + \Delta g_2(y, z, \eta) + g_3(y, z, \eta)) \right]. \end{aligned} \quad (4.3.82)$$

Відповідний розрахунок на основі (4.3.82) (подібний нерелятивістському випадку) дозволяє записати

$$\begin{aligned} \Delta N_{\eta}^{\text{D}(A,B)}(E, B) = & -\text{Im} \left\{ \frac{E + i\Gamma \pm \Delta}{2\pi\epsilon_0^2} \left[2\eta \left(1 + \frac{1}{z} \right) + (z + 2\eta) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(\psi \left(\frac{z}{2} \right) - \psi \left(\frac{z + 2\eta}{2} \right) \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.83)$$

де $z \rightarrow -[(E + i\Gamma)^2 - \Delta^2]/\epsilon_0^2$. В чистій границі $\Gamma \rightarrow 0$ різниця ГС зводиться до

$$\begin{aligned} \Delta N_{\eta}^{\text{D}(A,B)}(E, B) = & \eta\delta(E \pm \Delta) + 2(E \pm \Delta)\text{sgn}E \times \\ & \times \left[\sum_{n=1}^{\infty} n\delta(E^2 - \Delta^2 - 2(n + \eta)\epsilon_0^2) - \sum_{n=1}^{\infty} (n - \eta)\delta(E^2 - \Delta^2 - 2n\epsilon_0^2) \right], \end{aligned} \quad (4.3.84)$$

де за виключенням першого, пропорційної до η доданку нульової моди, кожна дельта-функція відповідає пікам з додатньою і від'ємною енергіями. Порівняння цього результату з (3.3.58) для нерелятивістської задачі визначає відмінність між цими випадками. Можна побачити з (3.3.58) що всі піки енергії, які ототожнюються зі звичайними рівнями Ландау, значно менші за, піки, які відповідають вихору. На перший погляд, вираз (4.3.84) має структуру, аналогічну шредінгерівському випадку, де рівні Ландау $\mathcal{E}_n^{(\pm)} = \pm\sqrt{\Delta^2 + 2\epsilon_0^2 n}$ з $n = 1, 2, \dots$ зникають, а вихуроподібні рівні $\mathcal{E}_n^{(\pm)} = \pm\sqrt{\Delta^2 + 2\epsilon_0^2(n + \eta)}$ з $n = 1, 2, 3, \dots$ з'являються. Однак, перші доданки $\eta\delta(E \pm \Delta)$, які відповідають розв'язкам з нульовою модою рівняння Дірака, існують при довільному значенні магнітного поля і магнітний вихор додає лише η -пропорційний доданок з дельта-функцією. Ця властивість є ілюстрацією топологічної природи найнижчого рівня Ландау [108].

Границю $B \rightarrow 0$ можна отримати використовуючи асимптотичний розклад який для виразу в квадратних дужках рівняння (4.3.83) дає

$$2\eta \left(1 + \frac{1}{z}\right) + (z + 2\eta) \left(\psi\left(\frac{z}{2}\right) - \psi\left(\frac{z + 2\eta}{2}\right)\right) = -\frac{2\eta^2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (4.3.85)$$

Підставляючи (4.3.85) в рівнянні (4.3.83) і роблячи аналітичне продовження $z \rightarrow -[(E + i\Gamma)^2 - \Delta^2]/\epsilon_0^2$ в чистій границі $\Gamma \rightarrow 0$ маємо

$$\Delta N_\eta^{\text{D}(A,B)}(E, B = 0) = N_\eta^{\text{D}(A,B)}(E, B = 0) - V_{2D} N_0^{\text{D}(A,B)} = \eta^2 \delta(E \mp \Delta). \quad (4.3.86)$$

Отриманий результат знаходиться у відповідності з [10] та [79]. Розглянемо у цій же границі ГС $\rho_\eta^{\text{D}}(E, \zeta)$ для кожної з \mathbf{K}_\pm точок окремо (але підсумований по гратковим змінним A та B). Збурення $\Delta\rho_\eta^{\text{D}}(E, \zeta) = \rho_\eta^{\text{D}}(E, \zeta) - V_{2D}\rho_0^{\text{D}}(E)$ нормоване на ГС вільних квазічастинок на одиницю спінової і долинної степені вільності, $\rho_0^{\text{D}}(E) = |E|\theta(E^2/\Delta^2 - 1)/(2\pi\hbar^2v_F^2)$, зводиться до виду

$$\Delta\rho_\eta^{\text{D}}(E, \zeta) = -\frac{1}{2}\eta(1 - \eta)[\delta(E - \Delta) + \delta(E + \Delta)] + \eta\delta(E + \zeta\Delta), \quad \eta > 0. \quad (4.3.87)$$

Інтегруючи (4.3.86) можна знайти повну різницю кількості станів індуковану вихором

$$\Delta N_\eta^{\text{D}} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dE (\Delta N_\eta^{\text{D}(A)}(E, B = 0) + \Delta N_\eta^{\text{D}(B)}(E, B = 0)) = 2\eta^2. \quad (4.3.88)$$

Виявляється, що як і у нерелятивістському випадку, різниця кількості станів для діраківських квазічастинок не залежить від величини магнітного поля B . Це твердження можна отримати інтегруючи суму (4.3.84) з використанням відповідної регуляризації. Закінчуючи обговорення ГС відмітимо, що значення ΔN_η^{D} також може бути отримане з розрахунку дробового ферміонного числа, індукованого магнітним потоком [64] яке в термінах ГС (4.3.87) записується

наступним чином

$$N_\eta = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dE \operatorname{sgn} E \Delta \rho_\eta^D(E, \zeta) = \frac{\zeta \eta}{2}. \quad (4.3.89)$$

4.4 Локальна густина станів

Внески $\Delta g_{1,2}(y, z, \eta)$ до релятивістської ЛГС, які даються рівняннями (4.2.76) і (4.2.77) можуть бути записані в термінах функцій $I(y, z, \eta)$ означених в (3.4.63) (які були використані для запису нерелятивістської ЛГС)

$$\Delta g_1(y, z, \eta) = \frac{\sin \pi \eta}{2\pi} I(y, z + 1, \eta), \quad (4.4.90)$$

$$\Delta g_2(y, z, \eta) = \frac{\sin \pi \eta}{2\pi} I(y, z - 1, \eta). \quad (4.4.91)$$

Тому достатньо розрахувати доданок g_3 даний рівнянням (4.2.79). Заміною змінних $x = e^{-\beta}$, отримуємо

$$g_3(y, z, \eta) = -\frac{2 \sin \pi \eta}{\pi} \int_0^1 dx \frac{x^{z+\eta-1}}{1-x^2} e^{-y(1+x^2)/(1-x^2)} K_\eta \left(\frac{2xy}{1-x^2} \right), \quad (4.4.92)$$

Використовуючи інтеграл (2.16.10.5) з [92] (також можна зробити заміну змінних на величину t за допомогою тотожності $e^{-\beta} = [t/(1+t)]^{1/2}$ і використати інтеграл (3.4.73))

$$\int_0^y dx \frac{x^{\alpha-1}}{x^2-y^2} \exp \left(-b \frac{y^2+x^2}{y^2-x^2} \right) K_\nu \left(\frac{2cx}{y^2-x^2} \right) = -\frac{y^{\alpha-1}}{4c} \Gamma \left(\frac{\alpha-\nu}{2} \right) \Gamma \left(\frac{\alpha+\nu}{2} \right) \times \\ \times W_{(1-\alpha)/2, \nu/2} \left(b + \sqrt{b^2 - (c/y)^2} \right) W_{(1-\alpha)/2, \nu/2} \left(b - \sqrt{b^2 - (c/y)^2} \right), \quad (4.4.93)$$

Представимо доданок $g_3(y, z, \eta)$ в термінах функції Уіттекера $W_{\lambda\mu}(z)$ наступним чином

$$g_3(y, z, \eta) = \frac{\sin \pi \eta}{2\pi} I^D(y, z, \eta) \quad (4.4.94)$$

де

$$I^D(y, z, \eta) = -\frac{1}{y} \Gamma \left(\frac{z}{2} \right) \Gamma \left(\frac{z+2\eta}{2} \right) W_{(1-z-\eta)/2, \eta/2}^2(y). \quad (4.4.95)$$

Остаточний вираз збуреної вихором релятивістської ЛГС приймає вигляд

$$\Delta N_{\eta}^{\text{D}(A,B)}(\mathbf{r}, E, B) = -N_0^{\text{D}} \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\frac{E + i\Gamma \pm \Delta}{\epsilon_0} \Delta G \left(y, z \rightarrow -\frac{(E + i\Gamma)^2 - \Delta^2}{\epsilon_0^2}, \eta \right) \right], \quad (4.4.96)$$

де функція $\Delta G(y, z, \eta)$ визначається наступним чином

$$\Delta G(y, z, \eta) = \frac{\sin \pi \eta}{2\pi} [I(y, z + 1, \eta) + I(y, z - 1, \eta) + I^{\text{D}}(y, z, \eta)]. \quad (4.4.97)$$

і виражається через означені вище функції (3.4.81) і (4.4.95).

Для повноти аналізу відповідних виразів розглянемо поведінку ЛГС в найбільш цікавому випадку малих r , де очікується суттєва відмінність між шредінгерівським і діраківським випадком. Враховуючи (3.4.90) відмітимо, що нерелятивістська ЛГС в центрі вихора приймає нульове значення. Оскільки перші два доданки рівняння (4.2.72) з $g_{1,2}(y, z, \eta)$ (які є складовими елементами ЛГС (4.2.71)) зникають при $y = 0$, то доданком, від якого залежить ЛГС в границі $r \rightarrow 0 \in I^{\text{D}}(y, z, \eta)$ (в основі якого лежать розв'язки при $m = 0$).

Відповідний результат може бути перевірений з використанням виразів (4.4.96) та (4.4.97) для $\Delta N_{\eta}^{\text{D}(A,B)}(\mathbf{r} = 0, E, B)$. Для $y = 0$ перші два доданки рівняння (4.4.97) з функцією I , яка виникає з $\Delta g_{1,2}(y, z, \eta)$ (див рівняння (4.4.90) і (4.4.91)) може бути об'єднана

$$\frac{\sin \pi \eta}{2\pi} \text{Im} [I(y = 0, z + 1, \eta) + I(y = 0, z - 1, \eta)] = -\text{Im} \left[\psi \left(\frac{z}{2} \right) + \frac{1}{z} \right], \quad (4.4.98)$$

де ми використали значення $\text{Im} I(y = 0, z, \eta)$ (яке було встановлене у (3.4.86)) і потім перетворили першу логарифмічну похідну гамма-функції (3.4.85). Остаточно знаходимо, що в границі $\Gamma \rightarrow 0$ внесок цих $\Delta g_{1,2}(y, z, \eta)$ доданків до різниці ЛГС $\Delta N_{\eta}^{\text{D}(A,B)}(\mathbf{r} = 0, E, B)$ даною рівнянням (4.4.96) відповідає значенню ЛГС в постійному магнітному полі (4.2.80) з протилежним знаком.

Знайдемо асимптотичну поведінку функції $I^D(y, z, \eta)$ в границі $r \rightarrow 0$. Використовуючи розклад функції Уїттекера (3.4.82) в границі $y \rightarrow 0$, ми отримаємо, що

$$I^D(y, z, \eta) = -\frac{\Gamma(z/2)\Gamma^2(\eta)}{\Gamma(\eta + z/2)}y^{-\eta} + O(y^0), \quad y \rightarrow 0. \quad (4.4.99)$$

Тому ЛГС розбігається в початку координат як

$$N_\eta^{D(A,B)}(\mathbf{r}, E, B) \sim r^{-2\eta} \text{Im} \left[\frac{E + i\Gamma \pm \Delta}{\epsilon_0} \Gamma \left(\frac{\Delta^2 - (E + i\Gamma)^2}{2\epsilon_0^2} \right) \times \right. \\ \left. \times \Gamma^{-1} \left(\frac{\Delta^2 - (E + i\Gamma)^2}{2\epsilon_0^2} + \eta \right) \right]. \quad (4.4.100)$$

Для $\eta = 1/2$ розбіжність $\sim r^{-1}$, має такий самий характер, як і за відсутності магнітного поля [10]. Як було показано вище, наявність постійного магнітного поля робить розбіжність ЛГС енергетично-залежною.

Чисельні розрахунки повної ЛГС на основі рівнянь (4.4.96) і (4.4.97) показані на малюнках 4.1, 4.2 і 4.3. Оскільки (4.4.96) описує збурення ЛГС $\Delta N_\eta^D(r, E, B)$ за наявності вихора, для отримання величини ЛГС $N_\eta^D(r, E, B)$ додамо ΔN_η^S до значення ЛГС при $\eta = 0$, яке дається виразом (4.2.81).

На малюнку 4.1 а ми порівнюємо вже обговорюваний випадок (4.2.81) ЛГС для постійного магнітного поля за відсутності вихора і наявності вихора при $\eta = 1/2$ для $r = l$. Оскільки розглядається ситуація, коли $\Delta = 0$ і немає відмінності між підгратками, то $N_0^D(E, B) = N_0^{D(A)}(E, B) = N_0^{D(B)}(E, B)$ і ЛГС — парна функція енергії, тому достатньо розглянути лише область додатніх енергій. Бачимо, порівнюючи $\eta = 0$ (штрихована лінія) і $\eta = 1/2$ (суцільна лінія), що виникає набір нових піків $\mathcal{E}_n/\epsilon_0 = \sqrt{2n+1}$ з $n = 1, 2, \dots$, а пік найнижчого рівня Ландау ($n = 0$) зростає. Поведінка густини станів може бути зрозуміла з виразу для різниці ГС (4.3.84) (або (4.3.83), яка розглядалася вище). Випадок вихора Абрикосова поданий в 4.1 б, де була побудована енергетична залежність

ЛГС для $r = 0.5l$ (суцільна лінія) і $r = 4l$ (штрихована лінія). Порівнююючи результати для $r/l = 0.5, 1.0, 4.0$ отримуємо, що якщо відстань r зменшується, піки енергій $\mathcal{E}_n/\epsilon_0 = \sqrt{2n+1}$ при $n = 1, 2, 3, \dots$, що відповідають вихору стають вищі. Коли r зменшується ще більше, піки, що відповідають рівням Ландау зростають швидше, ніж вихрово-подібні піки. Така поведінка відповідає неаналітичній залежності від енергії значення ЛГС. Загалом, висота піків густини станів $\mathcal{E}_n/\epsilon_0 = \sqrt{2n}$ при $n = 1, 2, \dots$, що відповідають рівням Ландау зменшуються при зменшенні r , для областей не дуже близьких до вихору. Нагадаємо, що навіть при довільному значенні потоку магнітного поля η відповідні рівні не змінюють свого положення, в той час як розташування рівнів, які виникають внаслідок вихору залежать від величини потоку, що він містить. Малюнок 4.1 також ілюструє спеціальний характер найнижчого рівня Ландау, який присутній навіть в неоднорідному магнітному полі довільної конфігурації (наприклад [109]), і який зростає при зменшенні r .

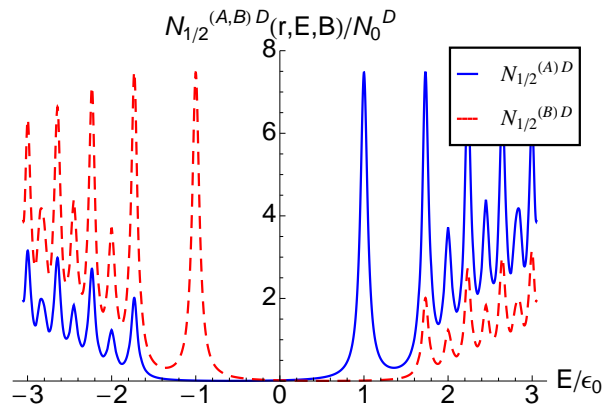


Рис. 4.2 Нормована ЛГС $N_{1/2}^{D(A,B)}(r, E, B)/N_0^D(\epsilon_0)$ як функція енергії E в одиницях релятивістської шкали енергії ϵ_0 для $r = l$. Щілина $\Delta = \epsilon_0$, ширина $\Gamma = 0.05\epsilon_0$, $W/\epsilon_0 = 3.35$.

На малюнку 4.2 ми розглянули енергетичну залежність $N_{1/2}^{D(A,B)}(r, E, B)$ при наявності щілини $\Delta = \epsilon_0$ в спектрі. Відстань від центру вихору $r = l$. За нену-

льового значення величини щілини виникає асиметрія між ЛГС A і B підґраток, і як наслідок — асиметрія ЛГС по відношенню до $E = 0$, тому будуватимемо як додатні так і від’ємні значення області енергій. Неважко побачити, що пік нульового рівня енергій при $\mathcal{E} = \Delta$ є лише в $N_{1/2}^{D(A)}(r, E, B)$, в той час, як пік $\mathcal{E} = -\Delta$ є тільки в $N_{1/2}^{D(B)}(r, E, B)$. Вихороподібні рівні стають також асиметричними по відношенню до $E = 0$. Ці ілюстрації вказують на те, що для графену вирощеному на субстраті (який призводить до нееквівалентності підґраток), усі ефекти можуть бути виміряні за допомогою СТМ.

З рівняння (4.4.100) очікується, що наявність постійного магнітного поля призводить до розбіжності r^{-1} при $r \rightarrow 0$, а також, що ЛГС залежатиме від значення енергії: зростатиме, коли енергія E приймає значення рівнів Ландау, $\mathcal{E}_n^{(\pm)} = \pm\sqrt{\Delta^2 + 2\epsilon_0^2 n}$ з $n = 0, 1, 2, \dots$, і спадатиме, коли E дорівнює енергії вихороподібних рівнів, $\mathcal{E}_n^{(\pm)} = \pm\sqrt{\Delta^2 + 2\epsilon_0^2(n + \eta)}$ з $n = 1, 2, \dots$. На малюнк-

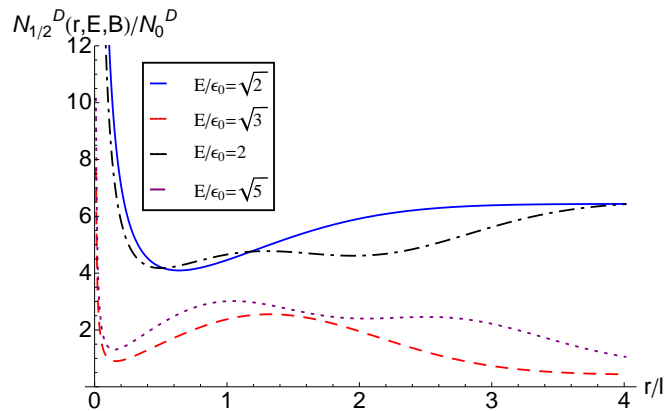


Рис. 4.3 Нормована ЛГС $N_{1/2}^D(r, E, B)/N_0^D(\epsilon_0)$ як функція відстані r виміряна в одиницях магнітної довжини l з вихором для чотирьох значень енергії $E/\epsilon_0 = \sqrt{2}, 2$ (рівні Ландау) і $E/\epsilon_0 = \sqrt{3}, \sqrt{5}$ (вихороподібні рівні). Ширина $\Gamma = 0.05\epsilon_0$, $W/\epsilon_0 = 3.35$ і $\Delta = 0$.

ку 4.3 показана залежність ЛГС як функції відстані r для фіксованих значень енергії при $\Delta = 0$. Суцільна і штрих-пунктирна лінії, які відповідають енергі-

ям $E/\epsilon_0 = \sqrt{2}, 2$ звичайних рівнів Ландау, мають розбіжну поведінку поблизу вихора. Звичайно, ця розбіжність присутня і при $E = 0$ і відповідним лініям з більшою енергією $E/\epsilon_0 = \sqrt{2}$ і $E/\epsilon_0 = 2$. З іншого боку, штрихована і пунктирна лінії, які відповідають енергіям $E/\epsilon_0 = \sqrt{3}, \sqrt{5}$ вихороподібних ліній прямують до деякого постійного значення при $r = 0$. Строго кажучи r^{-1} розбіжність зникає лише коли функція $\Gamma^{-1}(\eta + z/2)$ в рівнянні (4.4.100) має нуль, однак для малих значень ширини рівня Γ розбіжність буде подавленою при відповідному значенні енергії. Для $r \gg l$ поведінка ЛГС аналогічна нерелятивістському випадкові. Оскільки в цій границі різниця ЛГС $\Delta N_\eta^S(\mathbf{r}, E, B) \sim e^{-r^2/2l^2}$, при великих r поведінка ЛГС визначається вкладом координатно-незалежної ЛГС (4.2.81). Отже в границі великих r всі криві на малюнку 4.3 визначатимуться відповідним значенням ЛГС штрихованої кривої на малюнку 4.1 а.

4.5 Висновок

В розділі проводиться послідовний аналіз розв'язків рівняння Дірака в суперпозиції векторних потенціалів однорідного магнітного поля та Ааронова-Бома. На основі отриманого спектру та хвильових функцій гамільтоніану побудовано представлення для функції Гріна відповідної системи. На основі ФГ розраховано аналітичний вираз для ЛГС і ГС діраківських ферміонів. Встановлено: ЛГС електронних збуджень квазічастинок збільшується, при наближенні до вихору (відповідний вираз має степеневу залежність, як функція відстані від точки спостереження до місця знаходження вихору, а показник степеня визначається величиною магнітного потоку, що містить ПАБ); виявлено серію нових “вихрових” піків густини станів системи; ЛГС системи може бути представлена у вигляді добутку двох функцій: перша визначає положення піків густини станів, друга — амплітуду цих піків.

ВИСНОВКИ

У дисертації виконано теоретичний аналіз наукової проблеми щодо електронних властивостей двовимірних систем (графен, нерелятивістський 2DEG) за наявності потенціалу Ааронова-Бома. Зокрема в роботі вказані та досліджені ті фізичні ефекти, які можуть бути перевірені експериментально. На основі кожного з розділів дисертації, де наведені оригінальні результати, можна зробити наступні висновки:

- Визначено, що локальна густина станів електронних збуджень графену у присутності потенціалу Ааронова-Бома як функція відстані від місця розташування вихору до точки спостереження розбігається за степеневим законом при наближенні до нього; локальна густина станів нерелятивістського 2DEG у потенціалі Ааронова-Бома змінюється за тим же законом, але, навпаки, спадає при прямуванні до місця знаходження вихору — при цьому в обох випадках показник степені залежить лише від величини потоку, що містить потенціал Ааронова-Бома;
- Отримано, що різниця локальних густин станів масивного і безмасового двовимірних електронних газів у потенціалі Ааронова-Бома на великих відстанях від місця розташування вихору має спадаючу осциляційну поведінку з періодом, який визначається величиною енергії квазічастинок; характер спадання залежить від спектру квазічастинок і також є степеневим, зокрема, для рівняння Дірака — поведінка $\sim r^{-2}$, а для рівняння Шредінгера — $\sim r^{-1}$;
- Виявлено, що у суперпозиції потенціалів Ааронова-Бома та постійного магнітного поля локальна густина станів релятивістського і нерелятивістсько-

го 2DEГ поблизу магнітного вихора як функція координат має ту ж степеневу поведінку, що і у випадку одиничного вихору; залежність різниці локальних густин станів від енергії при малих значеннях відстаней до місця розташування вихору має неаналітичний характер;

- Визначено, що суперпозиція потенціалів Ааронова-Бома та постійного магнітного поля індукує додаткові “вихрові” піки густин станів, для яких визначено форму та розташування; знайдено кратності виродження енергетичних рівнів, що відповідають новим пікам;
- Показано, що залежність від енергії локальної густини станів двовимірних електронних газів у присутності потенціала Ааронова-Бома та постійного магнітного поля (при фіксованій відстані) може бути представлена в аналітичному вигляді добутку двох функцій — перша фіксує положення як ландауських, так і “вихрових” піків, а друга – визначає їх висоту.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Intrinsic and extrinsic performance limits of graphene devices on SiO₂ / J. H. Chen, C. Jang, S. Xiao et al. // Nature Nanotech. — 2008. — Vol. 3. — P. 205 – 209.
2. Gonzales J. Continuum approximation to fullerene molecules / J. Gonzalez, F. Guinea, M. A. H. Vozmediano // Phys. Rev. Lett. — 1992. — Vol. 69, No. 1. — P. 172 – 175.
3. LeClair A. Relevance of Disorder for Dirac Fermions with Imaginary Vector Potentials / A. LeClair // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 84, No. 6. — P. 1292 – 1295.
4. Lammert V.H. Graphene cones: A Classification by fictitious flux and electronic properties / P. E. Lammert, V. H. Crespi // Phys. Rev. B. — 2004. — Vol. 69, No. 3. — P. 035406-1 – 035406-13.
5. Juan F. Aharonov–Bohm interferences from local deformations in graphene / F. de Juan, A. Cortijo, M. A. H. Vozmediano, A. Cano // Nature Phys. — 2011. — Vol. 7. — P. 810 – 815.
6. Bending S. J. Weak localization in a distribution of magnetic flux tubes / S. J. Bending, K. von Klitzing, K. Ploog // Phys. Rev. Lett. — 1990. — Vol. 65, No. 8. — P. 1060 – 1063.
7. Geim A. K. Asymmetric scattering and diffraction of two-dimensional electrons at quantized tubes of magnetic flux / A. K. Geim, S. J. Bending, I. V. Grigorieva // Phys. Rev. Lett. — 1992. — Vol. 69, No. 15. — P. 2252 – 2255.

8. Khaetskii A. V. The Hall effect and magnetoresistance of a two-dimensional electron gas upon scattering on microinhomogeneities of a magnetic field / A. V. Khaetskii // *J. Phys. Cond. Matt.* — 1991. — Vol. 3, No. 27. — P. 5115 – 51241.
9. Brey L. Hall resistance of two-dimensional electron gas in the presence of magnetic flux tubes / L. Brey, H. A. Fertig // *Phys. Rev. B.* — 1993. — Vol. 47, No. 23. — P. 15961 – 15964.
10. Slobodeniuk A. O. Aharonov-Bohm effect in relativistic and nonrelativistic two-dimensional electron gases: A comparative study / A. O. Slobodeniuk, S. G. Sharapov, V. M. Loktev // *Phys. Rev. B.* — 2010. — Vol. 82, No. 7. — P. 075316-1 – 075316-11.
11. Slobodeniuk A. O. Electron Green's Function of Graphene in the Aharonov-Bohm Potential / A. O. Slobodeniuk // *Ukr. J. Phys.* — 2011. — Vol. 56, No. 1. — P. 74 – 79.
12. Слободенюк А.О. Розв'язки рівняння Дірака у неоднорідному магнітному полі / А. О. Слободенюк // *ДАН України.* — 2011.— № 5. — С. 82 – 87.
13. Slobodeniuk A. O. Density of states of relativistic and nonrelativistic two-dimensional electron gases in a uniform magnetic and Aharonov-Bohm fields / A. O. Slobodeniuk, S. G. Sharapov, V. M. Loktev // *Phys. Rev. B.* — 2011. — Vol. 84, No. 12. — P. 125306-1 – 125306-17.
14. Slobodeniuk A.O. Electronic density of states for two-dimensional system in uniform magnetic and Aharonov-Bohm fields / A. O. Slobodeniuk, S. G. Sharapov, V. M. Loktev // *ФНТ.* — 2011. — Т. 37, № 11. — С. 1181 – 1189.

15. Слободенюк А. О. Густина станів двовимірних електронних систем в потенціалі Ааронова-Бома / А. О. Слободенюк, С. Г. Шарапов, В. М. Локтєв // 10-а Всеукраїнська школа-семінар та конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, 3 - 4 червня 2010 р: збірка тез. — Україна, Львів, 2010. — С. 41.
16. Slobodeniuk A. O. Electronic properties of graphene at the presense of Aharonov-Bohm's potential / A. O. Slobodeniuk // Modern problems of theoretical physics: Young scientists conference, 22 - 24 December 2010: program and abstracts. — Ukraine, Kyiv, 2010. — P. 88.
17. Слободенюк А. О. Густина електронних станів двовимірних систем у суперпозиції Аарон-Бомівського і постійного магнітного полів / А. О. Слободенюк, С. Г. Шарапов, В. М. Локтєв // 11-а Всеукраїнська школа-семінар та конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, 1 - 3 червня 2011 р: збірка тез. — Україна, Львів, 2011. — С. 58.
18. Slobodeniuk A. O. Density of states of graphene at the presence of Aharonov-Bohm and constant potential / A. O. Slobodeniuk, S. G. Sharapov, V. M. Loktev // Low temperature physics: 2nd International Conference for Young Scientists, 6-10 June 2011: conference programme and abstract books . — Ukraine, Kharkiv, 2011. — P. 138.
19. Schubnikov L. W. Die widerstandsänderung von wismuteinkristallen im magnetfeld bei der temperatur von flussigem stickstoff / L. W. Schubnikov, W. J. de Haas // Proc. Netherlands R. Acad. Sci. — 1930. — Vol. 33. — P. 130 – 163.
20. de Haas W. J. Oscillations in the Magnetization of Bismuth / W. J. de Haas, P. M. Van Alphen // Leiden Commun. — 1930. — Vol. 208d. — P. 212a – 212a.

21. Landau L. Diamagnetismus der Metalle / L. Landau // Zs. Phys. — 1930. — Vol. 64. — P. 629 – 637.
22. Peierls R. On the theory of the diamagnetism of conduction electrons / R. Peierls // Z. Phys. — 1933. — Vol. 80. — P. 763 – 791.
23. Peierls R. On the theory of the diamagnetism of conduction electrons. II Strong magnetic fields / R. Peierls // Z. Phys. — 1933. — Vol. 81. — P. 186 – 194.
24. Румер Ю. Б. К теории магнетизма электронного газа / Ю. Б. Румер // ЖЭТФ. — 1948. — Т. 18, № 12. — С. 1081 – 1095.
25. Румер Ю. Б. Периодическая зависимость магнитной восприимчивости от поля при низких температурах / Ю. Б. Румер // ЖЭТФ. — 1950. — Т. 20, № 6. — С. 573 – 573.
26. Onsager L. Interpretation of the de Haas-van Alphen Effect / L. Onsager // Phil. Mag. — 1952. — Vol. 43, No. 7. — P. 1006 – 1008.
27. Лифшиц И. М. К теории эффекта де Гааза-ван Альфена для частиц с произвольным законом дисперсии / И. М. Лифшиц, А. М. Косевич // ДАН СССР. — 1954. — Т. 96, № 5. — С. 963 – 966.
28. Лифшиц И. М. К теории магнитной восприимчивости металлов при низких температурах / И. М. Лифшиц, А. М. Косевич // ЖЭТФ. — 1955. — Т. 29, № 6. — С. 730 – 742.
29. Лифшиц И. М. Об определении поверхности Ферми и скоростей электронов в металле по осцилляциям магнитной восприимчивости / И. М. Лифшиц, А. В. Погорелов // ДАН СССР. — 1954. — Т. 96, № 6. — С. 1143 – 1145.

30. Pippard A. B. The Anomalous Skin Effect in Anisotropic Metals / A.B.Pippard // Proc. Roy. Soc. A. — 1954. — Vol. 224, No. 1157. — P. 273 – 282.
31. Лифшиц И. М. К теории гальваномагнитных явлений в металлах / И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов // ЖЭТФ. — 1956. — Т. 31, № 1. — С. 63 – 79.
32. Лифшиц И. М. Квантовая теория электропроводности металлов в магнитном поле / И. М. Лифшиц // ЖЭТФ. — 1956. — Т. 30, № 4. — С. 814 – 816.
33. Pippard A. B. A proposal for determining the fermi surface by magneto-acoustic resonance / A. B. Pippard // Phil. Mag. — 1957. — Vol.2, No. 21. — P. 1147 – 1148.
34. Азбель М. Я. Теория циклотронного резонанса в металлах / М. Я. Азбель, Э. А. Канер // ЖЭТФ. — 1956. — Т. 30, № 4. — С. 811 – 813.
35. Гантмахер В. Ф. Размерный эффект в металлах в кратных магнитных полях / В. Ф. Гантмахер // ЖЭТФ. — 1962. — Т. 43, № 1. — С. 345 – 347.
36. Bommel H. E. Attenuation in superconducting and normal-conducting tin at low temperatures / H. E. Bommel // Phys. Rev. — 1955. — Vol. 100, No. 2. — P. 758 – 759.
37. Гуревич В. Л. Поглощение ультразвука в металлах в магнитном поле / В. Л. Гуревич // ЖЭТФ. — 1959. — Т. 37, № 1. — С. 71 – 82.
38. Гуревич В. Л. Гигантские квантовые осцилляции поглощения звука металлами в магнитном поле // В. Л. Гуревич, В. Г. Скобов, Ю. А. Фирсов // ЖЭТФ. — 1961. — Т. 40, № 3. — С. 786 – 791.

39. Королюк А. П. Новый тип квантовых осцилляций коэффициента поглощения ультразвука в цинке / А. П. Королюк, Т. А. Прущак // ЖЭТФ. — 1961. — Т. 41, № 5. — С. 1689 – 1691.
40. Гальперин Ю. М. Гигантские осцилляции поглощения звука металлами в случае открытых траекторий / Ю. М. Гальперин, С. В. Ганцевич, В. Л. Гуревич // ЖЭТФ. — 1969. — Т. 56, № 5. — С. 1728 – 1736.
41. von Klitzing K. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance / K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper // Phys. Rev. Lett. — 1980. — Vol. 45, No. 6. — P. 494 – 497.
42. Observation of a fractional quantum number / D. C. Tsui, H. L. Störmer, J. C. M. Hwang et al. // Phys. Rev. B. — 1983. — Vol. 28, No. 4.— P. 2274 – 2275.
43. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films / K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov et al. // Science. — 2004. — Vol. 306, No. 5696. — P. 666 – 669.
44. Gusynin V. P. Unconventional Integer Quantum Hall Effect in Graphene / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 95, No. 14. — P. 146801-1 – 146801-4.
45. Peres N. M. R. Electronic Properties of Disordered Two-Dimensional Carbon / N. M. R. Peres, F. Guinea, A. H. Castro Neto // Phys. Rev. B. — 2006. — Vol. 73, No. 12. — P. 125411-1 – 125411-23.
46. Experimental Observation of Quantum Hall Effect and Berry’s Phase in Graphene / Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormer et al. // Nature. — 2005. — Vol. 438. — P. 201 – 204.

47. Two-Dimensional Gas of Massless Dirac Fermions in Graphene / K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov et al. // *Nature*. — 2005. — Vol. 438. — P. 197 – 200.
48. Fractional quantum Hall effect and insulating phase of Dirac electrons in graphene / X. Du, I. Skachko, F. Duerr et al. // *Nature*. — 2009. — Vol. 462. — P. 192 – 195.
49. Observation of the fractional quantum Hall effect in graphene / K. I. Bolotin, F. Ghahari, M. D. Shulman et al. // *Nature*. — 2009. — Vol. 462. — P. 196 – 199.
50. Checkelsky J. G. Zero-Energy State in Graphene in a High Magnetic Field / J. G. Checkelsky, L. Li, N. P. Ong // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100, No. 20. — P. 206801-1 – 206801-4.
51. Checkelsky J. G. Divergent resistance at the Dirac point in graphene: Evidence for a transformation in a high magnetic field / J. G. Checkelsky, L. Li, N. P. Ong // *Phys. Rev. B*. — 2009. — Vol. 79, No. 11 — P. 115434-1 – 115434-7.
52. Jackiw R. Two-Dimensional Angular Momentum in the Presence of Long-Range Magnetic Flux / R. Jackiw, A. N. Redlich // *Phys. Rev. Lett.* — 1983. — Vol. 50, No. 8. — P. 555 – 559.
53. Jackiw R. Zero Modes of the Vortex - Fermion System / R. Jackiw, P. Rossi // *Nucl. Phys. B*. — 1981. — Vol. 190, No. 4. — P. 681 – 691.
54. de Sousa G. Ph. Fermions in an Aharonov-Bohm field and cosmic strings / G. Ph. de Sousa // *Phys. Rev. D*. — 1989. — Vol. 40, No. 4. — P. 1346 – 1349.

55. Alford M. G. Enhanced baryon number violation around cosmic strings / M. G. Alford, J. March-Russel, F. Wilczek // Nucl. Phys. B. — 1989. — Vol. 328, No. 1. — P. 140 – 158.
56. Alford M. G. Aharonov-Bohm interaction of cosmic strings with matter / M. G. Alford, F. Wilczek // Phys. Rev. Lett. — 1989. — Vol. 62. — P. 1071 – 1074.
57. Jackiw R. Solitons with Fermion Number $1/2$ / R. Jackiw, C. Rebbi / Phys. Rev. D. — 1976. — Vol. 13, No. 12. — P. 3398 – 3409.
58. Jackiw R. Spin from Isospin in a Gauge Theory / R. Jackiw, C. Rebbi // Phys. Rev. Lett. — 1976. — Vol. 36, No. 19. — P. 1116 – 1119.
59. 't Hooft G. Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle / G. 't Hooft // Phys. Rev. D. — 1976. — Vol. 14, No. 12. — P. 3432 – 3450.
60. Niemi A. J. Anomalies, Levinson's theorem, and fermion determinants / A. J. Niemi, G. W. Semenoff // Phys. Rev. D. — 1985. — Vol. 32. — P. 471 – 475.
61. Su W. P. Solitons in Polyacetylene / W. P. Su, J. R. Schrieffer, A. J. Heeger // Phys. Rev. Lett. — 1979. — Vol. 42, No. 25. — P. 1698 – 1701.
62. Jackiw R. Solitons with Fermion Number $1/2$ in Condensed Matter and Relativistic Field Theories / R. Jackiw, J. R. Schrieffer // Nucl. Phys. B. — 1981. — Vol. 190, No. 2. — P. 253 – 265.
63. Semenoff G. Condensed-Matter Simulation of a Three-Dimensional Anomaly / G. W. Semenoff // Phys. Rev. Lett. — 1984. — Vol. 53, No. 26. — P. 2449 – 2452.

64. Niemi A. J. Axial-Anomaly-Induced Fermion Fractionization and Effective Gauge-Theory Actions in Odd-Dimensional Space-Times / A. J. Niemi, G. W. Semenoff // *Phys. Rev. Lett.* — 1983. — Vol. 51, No. 23. — P. 2077 – 2080.
65. Wilczek F. Magnetic Flux, Angular Momentum, and Statistics / F. Wilczek // *Phys. Rev. Lett.* — 1982. — Vol. 48, No. 17. — P. 1144 – 1146.
66. Jackiw R. Dynamical Symmetry of the Magnetic Vortex / R. Jackiw // *Annals Phys.* — 1990. — Vol. 201. — P. 83 – 116.
67. Sitenko Yu. A., Selfadjointness of the two-dimensional massless Dirac Hamiltonian and vacuum polarization effects in the background of a singular magnetic vortex / Yu. A. Sitenko // *Phys. Lett. B.* — 1996. — Vol. 387, No. 2. — P. 334 – 340.
68. Sitenko Yu. A. Selfadjointness of the Dirac Hamiltonian and vacuum quantum numbers induced by a singular external field / Yu. A. Sitenko // *Phys. Atom. Nucl.* — 1997. — Vol. 60. — P. 2102 – 2113.
69. Gavrilov S. P. Dirac equation in magnetic-solenoid field / S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, A. A. Smirnov // *Eur. Phys. J. C.* — 2003. — Vol. 32, No. 1. — P. 119 – 142.
70. Gavrilov S. P. Green functions of the Dirac equation with magnetic solenoid field / S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, A. A. Smirnov // *J. Math. Phys.* — 2004. — Vol. 45, No. 5. — P. 1873 – 1886.
71. Mel'nikov A. S. Aharonov-Bohm Effect for Quasiparticles around a Vortex Line in a d-Wave Superconductor / A. S. Mel'nikov // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86, No. 18. — P. 4108 – 4111.

72. Melikyan A. Dirac-Bogoliubov-deGennes quasiparticles in a vortex lattice / A. Melikyan, Z. Tešanović // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 76, No. 9. — P. 094509-1 – 094509-30.
73. Cortijo A. Effects of topological defects and local curvature on the electronic properties of planar graphene / A. Cortijo, M. A. H. Vozmediano // Nucl. Phys. B. — 2007. — Vol. 763, No. 3. — P. 293 – 308.
74. Vozmediano M. A. H. Gauge fields in graphene / M. A. H. Vozmediano, M. I. Katsnelson, F. Guinea // Phys. Rep. — 2010. — Vol. 496, No. 4-5. — P. 109 – 148.
75. Sitenko Yu. A. Electronic properties of graphene with a topological defect / Yu. A. Sitenko, N. D. Vlasii // Nucl. Phys. B. — 2007. — Vol. 787, No. 3. — P. 241 – 259.
76. Desbois, J. Hall conductivity for two-dimensional magnetic systems / J. Desbois, S. Ouvry, C. Texier // Nucl. Phys. B. — 1997. — Vol. 500, No. 1-3. — P. 486 – 510.
77. Гейм А. К. Мезоскопические флуктуации проводимости в системах с магнитными примесями / А. К. Гейм, С. В. Дубонос, И. Ю. Антонова // Письма в ЖЭТФ. — 1990. — Т. 52, № 4. — С. 873 – 876.
78. Moroz A. Single-particle density of states, bound states, phase-shift flip, and a resonance in the presence of an Aharonov-Bohm potential / A. Moroz // Phys. Rev. A. — 1996. — Vol. 53, No. 2. — P. 669 – 694.
79. Moroz A. The single-particle density of states and the resonance in the Aharonov-Bohm potential / A. Moroz // Mod. Phys. Lett. B. — 1995. — Vol. 9, No. 22. — P. 1407 – 1417.

80. Moroz A. The Aharonov-Casher theorem and the axial anomaly in the Aharonov-Bohm potential / A. Moroz // *Phys. Lett. B.* — 1995. — Vol. 358, No. 3-4. — P. 305 – 311.
81. Anyons in a weakly interacting system / C. Weeks, G. Rosenberg, B. Seradjeh et al. // *Nature Phys.* — 2007. — Vol. 3. — P. 796 – 801.
82. Гейм А. К. Нелокальное магнетосопротивление пленок висмута помещенных в неоднородное поле вихрей Абрикосова / А. К. Гейм // *Письма в ЖЭТФ.* — 1989. — Т. 50, № 8. — С. 359 – 362.
83. Гейм А. К. Эффект Холла и магнетосопротивление двумерного электронного газа при рассеянии на квантах магнитного потока / А. К. Гейм, С. В. Дубонос, А. В. Хаецкий // *Письма в ЖЭТФ.* — 1990. — Т. 51, № 2. — С. 108 – 110.
84. Observation of Aharonov-Bohm conductance oscillations in a graphene ring / S. Russo, J. B. Oostinga, D. Wehenkel et al. // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77, No. 8. — P. 085413-1 – 085413-5.
85. Abedpour N. Strains and pseudomagnetic fields in circular graphene rings / N. Abedpour, R. Asgari, F. Guinea // *Phys. Rev. B.* — 2011. — Vol. 84, No. 11. — P. 115437-1 – 115437-8.
86. The Aharonov-Bohm effect in a side-gated graphene ring / M. Huefner, F. Moliator, A. Jacobsen et al. // *New J. Phys.* — 2010. — Vol. 12, No. 4. — P. 043054-1 – 043054-10.
87. Bai J. Graphene nanomesh / J. Bai, X. Zhong, S. Jiang et al. // *Nature Nanotech.* — 2010. — Vol. 5. — P. 190 – 194.

88. Jackiw R. Diverse topics in theoretical and mathematical physics / R. Jackiw.
– Singapore: World Scientific, 1995. — 514 p.
89. Hagen C. R. Aharonov-Bohm scattering of particles with spin / C. R. Hagen //
Phys. Rev. Lett. — 1990. — Vol. 64, No. 5. — P. 503 – 506.
90. Marino E. C. Euclidean Functional Integral Approach For Disorder Variables
And Kinks / E. C. Marino, B. Schroer, J. A. Swieca // Nucl. Phys. B. — 1982.
— Vol. 200, No. 3. — P. 473 – 497.
91. Bateman H. Higher Transcendental Functions: in 2 vol. Vol. 2 / H. Bateman,
A. Erdelyi. — New York: Mc Graw-Hill book Co., 1953. — 396 p.
92. Prudnikov A. P. Integral and Series: in 3 vol. Vol. 2 : Special Functions / A. P.
Prudnikov, Yu. A. Brychkov, I. O. Marychev. — New York: CRC Press, 1990.
— 750 p.
93. Gusynin V. P. AC conductivity of graphene: from tight-binding model to 2+1-
dimensional quantum electrodynamics / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, J. P.
Carbotte // Int. J. Mod. Phys. B. — 2007. — Vol. 21. — P. 4611 – 4658.
94. Wallace P. R. The Band Theory of Graphite / P. R. Wallace // Phys. Rev. —
1947. — Vol. 71, No. 9. — P. 622 – 634.
95. Li G. Scanning Tunneling Spectroscopy of Graphene on Graphite / G. Li, A. Lui-
can, E. Y. Andrei // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 102, No. 17. — P. 176804-1
– 176804-4.
96. Sitenko Yu. A. Selfadjointness of the two-dimensional massless Dirac Hamiltoni-
an and vacuum polarization effects in the background of a singular magnetic
vortex / Yu. A. Sitenko // Annals of Phys. — 2000. — Vol. 282, No. 2. — P. 167
– 217.

97. Beneventano C. G. Dirac fields in the background of a magnetic flux string and spectral boundary conditions / C. G. Beneventano, M. De Francia, E. M. Santangelo // *Int. J. Mod. Phys. A.* — 1999. — Vol. 14. — P. 4749 – 4762.
98. Induced current and Aharonov-Bohm effect in graphene / R. Jackiw, A. I. Mielstein, S.-Y. Pi et al. // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 80, No. 3. — P. 033413-1 – 033413-3.
99. Никифоров А. Ф. Специальные функции математической физики / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. — М.: Наука, 1978. — 320 с.
100. Shoenberg D. *Magnetic Oscillations in Metals* / D. Shoenberg. — Cambridge: Cambridge University Press, 1984. — 596 p.
101. Bateman H. *Higher Transcendental Functions: in 2 vol. Vol. 1* / H. Bateman, A. Erdelyi. — New York: Mc Graw-Hill book Co., 1953. — 292 p.
102. Sharapov S. G. Magnetic oscillations in planar systems with the Dirac-like spectrum of quasiparticle excitations / S. G. Sharapov, V.P. Gusynin, H. Beck // *Phys. Rev. B.* — 2004. — Vol. 69, No. 7. — P. 075104-1 – 075104-22.
103. Gradshteyn I. S. *Table of Integrals Series and Products* / I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik. — New York: Academic Press, 1980. — 1160 p.
104. Tinkham M. *Introduction to Superconductivity* / M. Tinkham. — 2nd ed. — New York: McGraw-Hill book Co., 1996. — 454 p.
105. *Quantum Hall Transition in Real Space: From Localized to Extended States* / K. K. Hashimoto, C. Sohrmann, J. Wieble et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 101, No. 25. — P. 256802-1 – 256802-4.

106. Gusynin V. P. Transport of Dirac quasiparticles in graphene: Hall and optical conductivities / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov // Phys. Rev. B. — 2006. — Vol. 73, No. 24. — P. 245411-1 – 245411-18.
107. Melrose D. B. Quantum electrodynamics in strong magnetic fields. I Electron states / D. B. Melrose, A. J. Parle // Aust. J. Phys. — 1983. — Vol. 36. — P. 755 – 774.
108. Jackiw R. Fractional charge and zero modes for planar systems in a magnetic field / R. Jackiw // Phys. Rev. D. — 1984. — Vol. 29, No. 10. — P. 2375 – 2377.
109. Roy B. Inhomogeneous magnetic catalysis on graphene's honeycomb lattice / B. Roy, I. F. Herbut // Phys. Rev. B. — 2011. — Vol. 83, No. 19. — P. 195422-1 – 195422-7.

Подяка

- Локтеву Вадиму Михайловичу та Шарапову Сергію Геннадійовичу за можливість працювати з ними впродовж мого навчання в аспірантурі.
- Гамаюну Олександрю Володимировичу та Кашубі Олександрю Богдановичу за чисельні наукові дискусії.