

Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова

На правах рукопису

ГАМАЮН ОЛЕКСАНДР ВОЛОДИМИРОВИЧ

УДК 530.145, 538.9

ЕЛЕКТРОН-ЕЛЕКТРОННА ВЗАЄМОДІЯ
ТА ГЕНЕРАЦІЯ ЩІЛИНИ В ГРАФЕНІ

01.04.02 — теоретична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Гусинін Валерій Павлович
доктор фіз.-мат. наук, професор

Київ – 2011

ЗМІСТ

ВСТУП

4

РОЗДІЛ 1 НАДКРИТИЧНИЙ КУЛОНІВСЬКИЙ ЦЕНТР ТА ЕКСИТОННА НЕСТАБІЛЬНІСТЬ

16

1.1 Вступ	16
1.2 Кулонівський центр	19
1.3 Екситонна нестабільність	30
1.3.1 Рівняння Бете-Солпітера	30
1.3.2 Тахіонні стани	35
1.4 Висновки	44

РОЗДІЛ 2 ГЕНЕРАЦІЯ ЩІЛИНИ

46

2.1 Вступ	46
2.2 Генерація щілини та критична константа зв'язку	48
2.3 Нелінійне рівняння та критичні показники	53
2.4 Фазова діаграма в моделі з додатковою чотириферміонною взаємодією	62
2.5 Висновки	69

РОЗДІЛ 3 ГЕНЕРАЦІЯ ЩІЛИНИ У ЗОВНІШНЬОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

72

3.1 Вступ	72
---------------------	----

3.2	Потенціальна яма	74
3.2.1	Нестабільність в спектрі за відсутності магнітного поля .	77
3.2.2	Нестабільність в спектрі індукована магнітним полем . .	79
3.3	Кулонівський центр	84
3.4	Висновки	88

РОЗДІЛ 4 ДИНАМІЧНА ПОЛЯРИЗАЦІЯ ДВОШАРОВОГО ГРАФЕНУ

4.1	Вступ	90
4.2	Розрахунок в наближенні випадкових фаз	91
4.2.1	Обчислення $\Pi^0(\omega, k)$	96
4.2.2	Обчислення $\Pi^-(\omega, k)$	98
4.3	Аналіз часткових випадків	105
4.3.1	Статичне екронування	105
4.3.2	Плазмони	109
4.4	Висновки	112
	ВИСНОВКИ	113
	СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	116

ВСТУП

Графен – двовимірний шар атомів вуглецю – був експериментально відкритий в 2004 році [1]. Новий матеріал відразу привернув до себе увагу величезної кількості науковців [2, 3, 4]. Щомісяця дослідженню незвичних властивостей графену присвячується велика кількість наукових публікацій.

Графен є двовимірною сполукою вуглецю у вигляді одного шару атомів, об'єднаних у правильну гексагональну ґратку, і є першим прикладом реального двовимірного кристалу. Він є базовим елементом для інших форм (алотропів) вуглецю. Так графіт є сукупністю шарів графену досить слабко зв'язаних між собою, нанотрубки – це згорнуті шари графену, а фуллерен утворюється шляхом згортання графену в сферу, включаючи при цьому декілька п'ятикутників, необхідних з точки зору топологічної ейлерової характеристики.

Низькоенергетична структура графену формується π -електронними орбіталями і складається з валентної зони та зони провідності (Рис. 1). Енергетичні поверхні є конусами, котрі дотикаються один до одного в так званих діраківських точках, що є наслідком спеціальної структури ґратки. В околі цих точок закон дисперсії можна вважати лінійним. Натомість в центрі зони, тобто при енергіях порядку 3eV, лінійне наближення не є справедливим.

Електрони поблизу поверхні Фермі описуються в термінах ефективної лоренци-інваріантної теорії, де кінетична енергія E_G дається виразом, що від-

повідає лінійному закону дисперсії [4]

$$E_G = \pm v_F |\mathbf{p}|,$$

де $v_F \approx 10^6 m/s$ – швидкість Фермі. Завдяки тому, що гексагональна гратка складається з двох трикутних підграток (Рис. 1), а також через існування двох нееквівалентних діраківських точок в зоні Брілюєна, хвильові функції лінійних збуджень можна згрупувати в діраківські спінори, що відповідають звідному представленню гамма-матриць в $2 + 1$ вимірах.

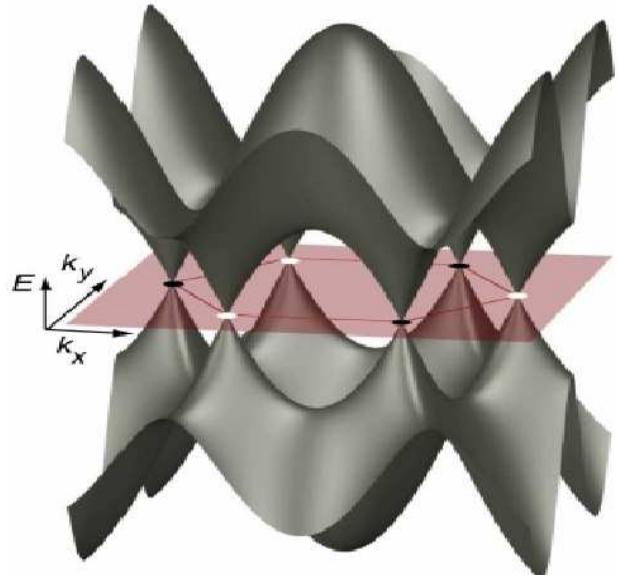
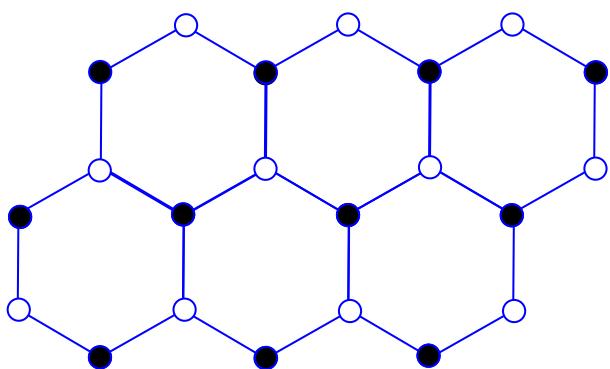


Рис. 1 Гратка та зонна структура графену.

Саме цей факт обумовлює аналогію графену з ефективною $2 + 1$ -вимірною квантовою електродинамікою, хоча взаємодія між електронами в графені є тривимірною. Тому, насправді, маємо редуковану $3 + 1$ -вимірну електродинаміку на $2 + 1$ -вимірну гіперповерхню. Слід зазначити, що через малість швидкості Фермі в порівнянні зі швидкістю світла $c/v_F \sim 300$, взаємодію

між електронами можна вважати миттєвою. Також відносна малість швидкості Фермі приводить до того, що в графені стануть експериментально доступними деякі ефекти фундаментальної фізики, які не можна перевірити за звичайних умов [5, 6, 7, 8, 9]. Дійсно, ефективна постійна тонкої структури в графені $\alpha^{\text{eff}} = e^2/\hbar v_F \sim 1$, на відміну від реальної квантової електродинаміки, де $\alpha \ll 1$. Тому значення критичних величин зарядів та амплітуд поля можуть бути експериментально досягнуті. Так, можна сподіватися, що аналоги таких ефектів як zitterbewegung (рух з тремтінням [10]), аномальна проникність крізь потенціальні бар'єри (клейнівське тунелювання [11]), народження частинок у зовнішньому полі (ефект Швінгера [12]), падіння на кулонівський центр [13, 14, 15] та інші будуть експериментально перевірені в графені. Наприклад, клейнівське тунелювання вже експериментально спостерігалось в роботі [16].

“Релятивістська” природа носіїв заряду в графені була передбачена досить давно [17, 18]. Експериментально вона була підтверджена через спостереження квантового ефекту Хола (KEX) [19, 20, 21]. Дійсно, різниця між поведінкою частинок зі звичайним параболічним спектром та лінійним, діраківським спектром стає особливо яскравою у зовнішньому магнітному полі. Для двовимірного нерелятивістського електронного газу рівні енергії в постійному магнітному полі еквідистантні і визначаються формулою Ландау $E_n = \hbar\omega_c(n + 1/2)$, де ω_c - циклотронна частота. Для релятивістського безмасового діраківського газу рівні енергії дорівнюють $E_n = \pm\sqrt{2n\hbar v_F^2 eB/c}$. Отже в релятивістському відстань між енергетичними рівнями зменшується із ростом рівня n як $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Квантовий ефект Хола полягає у тому, що поперечна провідність двовимірного електронного газу в зовнішньому магнітному полі є квантованою [22] і набуває тільки дискретних значень $\nu e^2/h$, де ν - додатне ціле число (параметр заповнення), h - постійна Планка, а e - заряд електрона. Квантування є настільки точним, що зараз КЕХ використовується для стандартизації опору в метрології. Квантовий ефект Хола виявився дуже важливим явищем, не тільки для фізики конденсованого стану [23, 24], але й для (2 + 1)-вимірних квантових теорій поля [25, 26, 27] та математичної фізики [28].

В роботах [29, 30, 31, 32] в моделі невзаємодіючих електронів теоретично було показано, що “релятивістський закон” дисперсії квазічастинкових збуджень в графені призводить до незвичайної форми квантової холівської провідності $\sigma_{xy} = (4e^2/h)(n + 1/2)$, де $n = 0, \pm 1, \dots$. Цей “аномальний” КЕХ в графені був експериментально підтверджений в 2005 році двома експериментальними групами [19, 20]. Важливо також, що $\omega_c = eB/(mc) \ll \sqrt{\hbar v_F^2 eB/c}$ для магнітних полів доступних в лабораторії, і тому на відміну від звичайного КЕХ, який потребує дуже низьких температур, аномальний КЕХ в графені спостерігається навіть при кімнатних температурах [21]. Слід також зазначити, що КЕХ є дуже чутливим до кількості шарів в графені. Наприклад, в двошаровому графені спостерігаються інші значення холівських плато [33]. Таким чином, КЕХ можна використовувати для визначення чи є досліджуваний зразок дійсно моношаром графену.

Подальші експериментальні дослідження оптичних та транспортних властивостей графену [34, 35, 36, 37] теж вдалося описати без врахування взаємодії [38, 39]. Так було показано [38], що оптична провідність є постійною вели-

чиною для досить широкого інтервалу частот, і з точністю порядку декількох відсотків визначається метрологічним квантом провідності $\sigma_{xx}(\omega) = e^2/4\hbar$. Коефіцієнт проходження світла через графен прямо пов'язаний з оптичною провідністю і визначається постійною тонкої структури: $t = 1 - \pi\alpha$, $\alpha = e^2/\hbar c$ [40]. Поведінка оптичної провідності має пороговий характер, який залежить від концентрації носіїв. Цей результат було підтверджено в декількох експериментах [35, 36, 40], причому навіть для енергій світла порядку 3eV відхилення від діраківської теорії було всього декілька відсотків. Відмітимо також, що поблизу діраківської точки сигнал Нернста в графені стає великим та додатнім, в 100 разів більше, ніж у звичайних системах [30].

Подальші дослідження магнетооптичних та магнетотранспортних властивостей графену в сильних магнітних полях показали відхилення від теорії невзаємодіючих електронів і продемонстрували важливість врахування взаємодії. Зокрема, в роботі [41] методами циклотронного резонансу було виявлено асиметрію між електронними та дірковими зонами, яка приводить до 5% різниці між швидкостями електронів та дірок при енергіях 125meV. В роботі [42] для величин магнітного поля до $B = 18\text{T}$ були досліджені переходи між рівнями Ландау. Вимірювання дали вище значення для швидкості Фермі, а значення енергії переходу між рівнями Ландау суттєво відрізнялось від отриманого в моделі невзаємодіючих частинок. При дослідах з більшими полями – до 45T, було встановлено існування додаткових холівських плато [43, 44] з рівнями заповнення $\nu = 0, \pm 1, \pm 4$ при $B > 20\text{T}$. Це безпосередньо вказує на важливість врахування взаємодії, адже в моделі невзаємодіючих частинок можливі рівні заповнення даються формулою $\nu = 4(n + 1/2)$.

Для плато $\nu = 0$ було знайдено аномальне зростання опору R_0 від магнітного поля [45, 46], котре добре апроксимується законом Костерліца-Таулеса $R_0(B) \sim \exp(1/\sqrt{1 - B/B_c})$, $B_c \approx 30\text{T}$. Цей факт досі не набув загально-визаного теоретичного пояснення. Нарешті, ефекти взаємодії були безпосередньо продемонстровані у відкритті дробового квантового ефекту Хола в графені при $\nu = 1/3$ [47, 48].

Важливість врахування кулонівської взаємодії можна теоретично передбачити через форму спектру. Дійсно, лінійний закон дисперсії суттєво впливає на оцінку “сили” кулонівської енергії. Якщо середня відстань між електронами ℓ , то середню кінетичну енергію можна оцінити як $E_G \approx \hbar v_F n^{1/2}$, тут $n \sim 1/\ell^2$ - густина електронів. В той же час кулонівська енергія є величиною порядку $E_C \approx e^2 n^{1/d} / \kappa$, де e – заряд електрона, а κ – діелектрична проникність середовища, що оточує матеріал. Відповідно відношення енергій

$$\alpha = \frac{E_C}{E_G} = \frac{e^2}{\kappa \hbar v_F}$$

визначається ефективною константою зв’язку в графені (“постійної тонкої структури”), яка може бути порядку 1, і майже не залежить від густини електронів, на відміну від випадку квадратичної залежності кінетичної енергії від імпульсу. В такому випадку аналогічне відношення в d -вимірному просторі набуває вигляду:

$$\frac{E_C}{E_G} = (n_0/n)^{1/d},$$

де n_0 – деяка характерна густина в матеріалі. Підбираючи густину електронів n достатньо великою, можна знехтувати ефектами взаємодії, яка внаслідок екранування стане короткодіючою.

Також через специфічний закон дисперсії, електронна густина станів $\rho(E)$ в графені зникає в діраківській точці $E = 0$, $\rho(E) \propto |E|/v_F^2$, отже графен є гібридом ізолятора та металу, оскільки щілина в спектрі також відсутня. Крім того, зникаюча густина станів означає, що кулонівська взаємодія не екранизується як в металах, а тому для створення електронного збудження достатньо нескінченно малої енергії. Це робить графен унікальним матеріалом з точки зору дослідження електрон-електронної взаємодії [49, 50].

Актуальність теми

Підсумовуючи вище сказане, можна стверджувати, що тематика досліджень дисертації є актуальною. Адже незважаючи на те, що більшість спостережуваних явищ у графені добре описуються в рамках теорії вільних діраківських квазічастинок, наразі залишається відкритим питання про роль кулонівської взаємодії між електронами [49]. Її дослідження, окрім того, що є принциповою задачею для фізики конденсованого стану, також може пролити світло на фундаментальні проблеми релятивістської квантової теорії поля.

Взагалі треба зазначити ріст числа публікацій протягом 2011 року, які націлені на дослідження саме ефектів взаємодії в графені експериментально [51, 52, 53, 54, 55, 56] та за допомогою чисельних методів [57, 58, 59, 60].

Одним із важливих проявів взаємодії є те, що при достатньо великій константі взаємодії може відбутися багаточастинковий аналог падіння на центр – екситонна нестабільність, яка приведе до фазового переходу метал-ізолятор і появи основного стану зі щілиною в спектрі квазічастинок. Знання щілини важливе також з точки зору практичних застосувань, зокрема для побудови різних електронних пристрій на основі графену.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Результати, що увійшли в дисертаційну роботу, були отримані в рамках планової наукової тематики відділу астрофізики та елементарних частинок Інституту теоретичної фізики НАН України (тема “Дослідження структури і динаміки фізичного вакууму та частинкових і колективних збуджень в фізиці високих енергій, квантових макросистемах, космології та астрофізиці” 2006-2010 рр., шифр 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0105У008402); “Динаміка квантово-польових конденсатів в фізиці і астрофізиці високих енергій та квантовій космології” 2011-2015 рр., шифр 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0110У007541).

Мета і задачі дослідження

Метою дисертаційної роботи є вивчення умов, за яких можливе динамічне порушення симетрії в графені через кулонівську взаємодію.

Зокрема, розв'язувалися наступні задачі:

- Знаходження і аналіз одночастинкового спектру графену в полі кулонівського центру, визначення критичного заряду центру.
- Розв'язок рівняння Бете-Солпітера для зв'язаного електрон-діркового стану і визначення умов, за яких цей стан стає нестабільним.
- Розв'язок рівняння на щілину в спектрі квазічастинок та його аналіз при врахуванні локальної чотирьохферміонної та статично екранованої кулонівської взаємодії. Чисельний розв'язок рівняння при врахуванні динамічної поляризації.
- Знаходження і аналіз одночастинкового спектру графену в однорідному

магнітному полі та в полі потенціальної ями. Чисельний аналіз одночастинкового спектру графену в однорідному магнітному полі та в полі кулонівського потенціалу.

- Знаходження аналітичного виразу однопетльової поляризаційної функції у двошаровому графені для довільних значень імпульсу, енергії, хімічного потенціалу. Знаходження дисперсійного закону колективних збуджень електронної густини (плазмонів). Аналіз статичного екраниування кулонівського потенціалу точкової домішки на великих та малих відстанях.

Об'єктами дослідження є квазічастинкові електронні збудження у графені.

Предметом дослідження є хвильова функція Бете-Солпітера, щілина в спектрі квазічастинок, поляризаційний тензор.

В роботі було застосовано наступні **методи дослідження**: методи пересування діаграм в квантовій теорії поля, що призводять до непертурбативних рівнянь Швінгера-Дайсона, Бете-Солпітера, а також дають можливість обчислити поляризаційний тензор в наближенні випадкових фаз (однопетльове наближення).

Наукова новизна одержаних результатів

В дисертаційній роботі вперше:

1. Отримано розв'язок рівняння Бете-Солпітера для зв'язаного електрон-діркового стану в графені. Знайдено критичне значення константи зв'язку, при якій цей зв'язаний стан стає тахіонним, що вказує на екситонну

нестабільність, котра приводить до перебудови спектру збуджень та генерації щілини в спектрі квазічастинок.

2. Знайдено і проаналізовано розв'язки рівняння на щілину в графені з урахуванням динамічної поляризації та чотириферміонної взаємодії. Показано, що врахування чотириферміонної взаємодії приводить до коректного опису фазового переходу з формуванням щілини, а динамічна поляризація приводить до зменшення критичної константи, за якої власне відбувається цей фазовий перехід.
3. Для рівняння Дірака у двовимірному просторі для квазічастинок в потенціальній ямі у постійному магнітному полі показано, що для деякого критичного значення потенціалу ями найнижчий незаповнений енергетичний рівень перетинає межу заповнених електронних станів із від'ємною енергією, що призводить до нестабільності системи. Значення критично-го потенціалу зменшується зі зменшенням щілини у спектрі квазічастинок і дорівнює нулю в безщілинному випадку, що може розглядатися як квантовомеханічний прояв явища магнітного каталізу в графені.
4. Знайдено аналітичний вираз для однопетельової поляризаційної функції у двошаровому графені при довільній частоті, імпульсі та хімічному потенціалі. Отриманий результат використано для аналітичного та чисельного знаходження спектру колективних електронних збуджень (плазмонів) та екранированого кулонівського потенціалу.

Практичне значення одержаних результатів

Результати, отримані в дисертації, мають теоретичний характер. Отримані передбачення для екситонного фазового переходу показують, що він може бути реалізований в графені, який не знаходиться на підкладці. Це відкриває можливість експериментальної перевірки. Отримані результати важливі для дослідження домішок в графені у магнітному полі та без нього, що може мати практичне застосування з точки зору зовнішнього контролю щілини.

Одержані точні аналітичні вирази для поляризаційного оператора в двошаровому графені можуть бути застосовані при розв'язанні рівнянь типу Швінгера-Дайсона для щілини та ряду інших задач. Результати для дисперсійного закону плазмонів та екранування статичного кулонівського потенціалу можуть бути безпосередньо перевірені на експерименті. Порівняння з експериментом, зокрема, дасть змогу визначити, наскільки застосовним є використане при обчисленнях однопетлеве наближення.

Особистий внесок здобувача

В роботах [61, 62] автором було проведено аналітичні та чисельні розрахунки дискретного та неперервного спектру в графені в полі регуляризованого кулонівського центру i , з рівняння Бете-Соллітера в драбинному наближенні зі статичною поляризацією, знайдено критичну константу, за якої відбувається екситонна нестабільність.

В роботі [63] автором чисельно з рівняння на щілину з урахуванням динамічної поляризації було знайдено залежність критичної константи від числа ароматів в теорії, а також залежність щілини від імпульсу та константи зв'язку. В цій же роботі автором була побудована фазова діаграма у випадку

ненульової взаємодії Гросса-Неве.

В роботах [64, 65] автором чисельно та в першому порядку теорії збурень знайдено спектр і значення критичного потенціалу для квазічастинок в графені в однорідному магнітному полі, в полі потенціальної ями та кулонівського центру.

Робота [66] виконана автором одноосібно. В ній знайдено точний аналітичний вираз однопетльової поляризаційної функції в двошаровому графені. Використовуючи цей точний вираз, отримано вигляд екраниованого статично-го кулонівського потенціалу в двошаровому графені і дисперсійний закон колективних електронних збуджень (плазмонів).

Апробація роботи

Матеріали дисертації пройшли апробацію на семінарах ІТФ НАН України (Київ, 2009-2011), доповідалися на всеукраїнських конференціях: “Сучасні проблеми теоретичної фізики”, Київ, 24-26 грудня 2009, 11-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 1-3 червня 2011, та на міжнародних конференціях: Quantum theory from small to large scales, Les Houches, France, August 2-27, 2010, The 2nd International Conference for Young Scientists, Low temperature physics, Kharkiv, Ukraine, 6-10 June 2011, The 4th Workshop on Geometric Methods in Theoretical Physics, SISSA, Trieste, Italy, July 6-12, 2011.

Публікації

За матеріалами дисертації опубліковано 9 робіт, 6 із них складають статті в наукових журналах [61, 62, 63, 64, 65, 66], а три роботи були опубліковані як тези конференцій [67, 68, 69].

РОЗДІЛ 1

НАДКРИТИЧНИЙ КУЛОНІВСЬКИЙ ЦЕНТР ТА ЕКСИТОННА НЕСТАБІЛЬНІСТЬ

1.1 Вступ

Графен є одноатомним шаром атомів вуглецю, розташованих в вузлах гексагональної гратки. Не зважаючи на те, що теоретичне передбачення існування такого матеріалу було зроблено досить давно [17, 18], справжній інтерес до графену відродився нещодавно завдяки його експериментальному виготовленню [1] та спостереженню великої кількості незвичних електронних властивостей.

Велике значення ефективної сталої “тонкої структури” $\alpha = e^2/\hbar v_F \sim 1$ означає сильне притягання між електронами та дірками в графені поблизу діраківської точки. За наявності сильного притягування можна очікувати нестабільність в екситонному каналі та подальший квантовий фазовий перехід до стану з ненульовою щілиною в спектрі квазічастинок, що означатиме перетворення графену на ізолятор [58, 70]. В графені така задача була вперше сформульована в роботах [71, 72, 73, 74], а в сильно зв'язаній квантовій електродинаміці аналогічна задача вивчалась 70–80-х роках [5, 6, 7, 8, 9].

Цей розділ ми почнемо з розгляду проблеми надкритичного кулонівського центру в графені в підрозділі (1.2), яка є квантовомеханічним аналогом задачі про екситонну нестабільність. Добре відомо [75, 76], що для кулонівського потенціалу $V_C(r) = -Ze^2/\kappa r$ спектр квазічастинок з щілиною Δ складається

з неперервного спектру при $|E| > \Delta$ та дискретного - при $0 < E < \Delta$. Енергія найнижчого зв'язаного стану E_0 становить

$$E_0 = \Delta \sqrt{1 - (2Z\alpha)^2}$$

і стає уявною при $Z\alpha > 1/2$, що відповідає явищу “падіння на центр”. Нефізичне комплексне значення енергії вказує на те, що гамільтоніан системи не є самоспряженим для надкритичних значень $Z\alpha > 1/2$, і необхідно використати деяке самоспряжене розширення. В квантовій електродинаміці цю проблему вирішують заміною сингулярного потенціалу $1/r$ регуляризованим потенціалом, який відрізняється від початкового на деякому маленькому розмірі R , що фізично відповідає скінченним розмірам ядра [77, 78, 79]. В регуляризованому потенціалі всі енергії стають дійсними, але при зростанні заряду центру Z енергія дискретних рівнів наближається до енергії нижнього континууму $E = -\Delta$, а потім “пірнає” в нього. При цьому дискретні стани перетворюються на резонанси зі скінченою шириною, які описують квазістационарні стани з комплексною енергією $\text{Im}E \neq 0$. Такі стани відповідають процесам народження електрон-діркових пар з вакууму з подальшим розповсюдженням позитрона на нескінченність і екрануванням електроном заряду центра. Критичний заряд Z_c визначається з умови появи первого квазістационарного стану з ненульовою уявною частиною енергії. Він зростає при збільшенні Δ .

Для безмасових квазічастинок в регуляризованому кулонівському потенціалі дискретні рівні відсутні для значень $Z\alpha < 1/2$, натомість при $Z\alpha > 1/2$ в спектрі починають з'являтися квазістационарні стани [13, 14]. Енергія квазістационарного стану для регуляризованого потенціалу має характерну екс-

поненціальну залежність від заряду $E \sim R^{-1} \exp(-\pi/\sqrt{(Z\alpha)^2 - 1/4})$, а критична константа $Z_c\alpha \rightarrow 1/2$ при $R\Delta \rightarrow 0$. Ми покажемо, що наявність ферміонної щілини $\Delta \ll |E|$ зменшує $|\text{Im}E|$, збільшуючи, таким чином, стабільність системи. Ситуація повністю аналогічна проблемі безмасового електрона в надкритичному кулонівському центрі в квантовій електродинаміці [80, 6].

В підрозділі (1.3) ми покажемо, що нестабільність надкритичного кулонівського центру пов'язана з екситонною нестабільністю для надкритичної константи зв'язку $\alpha > \alpha_c \sim 1$. Розв'язуючи рівняння Бете-Солпітера для електрон-діркового зв'язаного стану в графені, ми продемонструємо, що для достатньо сильної константи зв'язку в спектрі з'являються тахіонні стани з уявною енергією ($E^2 < 0$), які відіграють роль квазістаціонарних станів в надкритичному кулонівському центрі. Наявність тахіонів вказує на нестабільність основного стану. Тахіонна нестабільність є польовим аналогом явища “падіння на центр” і критична константа зв'язку α_c відіграє ту ж роль, що і $Z_c e^2 / \hbar v_F$ в задачі кулонівського центру. Однак, внаслідок багаточастинковості системи ця нестабільність призводить до зовсім інших наслідків. Оскільки константа зв'язку вільного графену $\alpha \approx 2.19$ є більшою за $1/2$, то заряд квазіелектрона в графені стає надкритичним. Це приводить до утворення електрон-діркових пар: дірка притягується до початкового квазіелектрону, утворюючи зв'язаний стан – екститон, в той же час випромінений квазіелектрон знову є надкритичним. Процес формування пар продовжується до утворення екситонного конденсату, в результаті чого в спектрі квазічастинок утворюється щілина. Отже, формування конденсату приводить до зникнення нестабільності та генерації щілини в вільному графені.

1.2 Кулоніський центр

Незважаючи на те, що задача взаємодії електронів та дірок в графені є багаточастинковою задачею, деякі ефекти можна побачити в відносно простій одночастинковій задачі взаємодії електрона з надкритичним кулонівським центром, і в подальшому порівняти результати з проблемою екситонної нестабільності в графені. Аналогічна проблема для безмасових ферміонів, що взаємодіють з зовнішнім кулонівським полем в КЕД розглядалась в статтях [6, 80].

Електронні збудження в графені в околі K -точки в полі кулонівської домішки описуються гамільтоніаном Дірака в 2+1 вимірах:

$$\mathcal{H} = (\sigma^3 \Delta + V(r) - i\hbar v_F \sigma^1 \partial_x - i\hbar v_F \sigma^2 \partial_y), \quad (1.2.1)$$

де σ^i - матриці Паулі, v_F - швидкість Фермі. (Гамільтоніан квазічастинкових збуджень біля точки K' відрізняється знаком Δ). Також ми ввели діраківську масу (щілину) Δ , яка хоч і відсутня в моделі сильнозв'язаних електронів (tight-binding model), може з'явитися завдяки спонтанному порушенню початкової $U(4)$ симетрії. Як зазначалось у вступі до даного розділу, для самоспряженості гамільтоніану кулонівський потенціал треба регуляризувати.

Для простоти ми фіксуємо регуляризацію константою [79, 81]:

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{Ze^2}{\kappa r}, & r > R, \\ V(r) &= -\frac{Ze^2}{\kappa R}, & r < R, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

де κ - константа діелектричної проникності. Задача кулонівського центру досить детально розглядалась в літературі [13, 14, 15, 75, 76, 82, 83, 84, 85].

Гамільтоніан (1.2.1) комутує з оператором повного кутового моменту $J_z = L_z + S_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\hbar}{2}\sigma_3$, тому відповідні власні функції будемо шукати у вигляді:

$$\Psi = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} e^{i\phi(j-1/2)} a(r) \\ i e^{i\phi(j+1/2)} b(r) \end{pmatrix}. \quad (1.2.3)$$

Підстановка анзацу (1.2.3) в рівняння

$$\mathcal{H}\Psi = E\Psi$$

з гамільтоніаном (1.2.1) дає систему диференціальних рівнянь першого порядку:

$$a' - (j + 1/2)\frac{a}{r} + \frac{E + \Delta - V(r)}{\hbar v_F}b = 0, \quad (1.2.4a)$$

$$b' + (j - 1/2)\frac{b}{r} - \frac{E - \Delta - V(r)}{\hbar v_F}a = 0. \quad (1.2.4b)$$

Зручно ввести змінні $\epsilon = E/\hbar v_F$, $m = \Delta/\hbar v_F$, $u = \sqrt{m^2 - \epsilon^2}$, $\rho = 2ur$ та $\alpha = e^2/\hbar v_F \kappa$, а замість функцій a та b розглядати їхні лінійні комбінації:

$$a = \frac{\sqrt{m + \epsilon}}{2}(g - f), \quad b = \frac{\sqrt{m - \epsilon}}{2}(g + f). \quad (1.2.5)$$

При цьому рівняння (1.2.4) набудуть вигляду:

$$\rho g' + g \left(\frac{\rho}{2} - \frac{1}{2} - Z\alpha \frac{\epsilon}{u} \right) + f \left(j + Z\alpha \frac{m}{u} \right) = 0, \quad (1.2.6a)$$

$$\rho f' - f \left(\frac{\rho}{2} + \frac{1}{2} - Z\alpha \frac{\epsilon}{u} \right) + g \left(j - Z\alpha \frac{m}{u} \right) = 0. \quad (1.2.6b)$$

Дискретний спектр існує тільки при $|\epsilon| < m$. Для заходження його форми підставимо f з першого рівняння (1.2.6) в друге. Тоді для g компоненти отримаємо рівняння

$$\frac{d^2g}{d\rho^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2} + Z\alpha \frac{\epsilon}{u}}{\rho} + \frac{\frac{1}{4} - j^2 + Z^2\alpha^2}{\rho^2} \right) g = 0, \quad (1.2.7)$$

що є рівнянням Уіттекера [93]. Його загальний розв'язок має вигляд

$$g = C_1 W_{\mu,\nu}(\rho) + C_2 M_{\mu,\nu}(\rho), \quad (1.2.8)$$

де $\mu = 1/2 + Z\alpha\epsilon/u$, $\nu = \sqrt{j^2 - Z^2\alpha^2}$. Взявши до уваги асимптотику функцій Уіттекера $W_{\mu,\nu}(\rho)$ та $M_{\mu,\nu}(\rho)$ при $\rho \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} W_{\mu,\nu}(\rho) &\simeq e^{-\rho/2}\rho^\mu, \\ M_{\mu,\nu}(\rho) &\simeq \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu+\nu)}e^{\rho/2}\rho^{-\mu}, \end{aligned}$$

ми маємо покласти $C_2 = 0$ для регулярності розв'язку. Тоді перше рівняння в (1.2.6) для компоненти f в області II ($r > R$) дає :

$$f_{II} = C_1 \left(j - Z\alpha \frac{m}{u} \right) W_{-\frac{1}{2}+Z\alpha\frac{\epsilon}{u},\nu}(\rho). \quad (1.2.9)$$

Розв'язки для області I ($r < R$) можуть бути отримані з рівнянь (1.2.4)

$$b_I = A_1 \operatorname{sgn}(j) r J_{|j+1/2|} \left(r \sqrt{\left(\epsilon + \frac{Z\alpha}{R} \right)^2 - m^2} \right), \quad (1.2.10)$$

$$a_I = A_1 \sqrt{\frac{\epsilon + Z\alpha/R + m}{\epsilon + Z\alpha/R - m}} r J_{|j-1/2|} \left(r \sqrt{\left(\epsilon + \frac{Z\alpha}{R} \right)^2 - m^2} \right), \quad (1.2.11)$$

де A_1 - константа. Тут ми вже врахували інфрачервону граничну умову, якій задовольняють тільки розв'язки b_I та a_I . Енергетичні рівні визначаються з умови неперервності хвильової функції при $r = R$:

$$\frac{b_I}{a_I} \Big|_{r=R} = \frac{b_{II}}{a_{II}} \Big|_{r=R}, \quad (1.2.12)$$

яка дає рівняння

$$\frac{W_{\frac{1}{2}+\frac{Z\alpha\epsilon}{u},\nu}(\rho)}{(j - \frac{Z\alpha m}{u}) W_{-\frac{1}{2}+\frac{Z\alpha\epsilon}{u},\nu}(\rho)} \Big|_{r=R} = \frac{k+1}{k-1}, \quad (1.2.13)$$

$$k = \operatorname{sgn}(j) \frac{m+\epsilon}{u} \sqrt{\frac{\epsilon + Z\alpha/R - m}{\epsilon + Z\alpha/R + m}} \frac{J_{|j+1/2|}(\tilde{\rho})}{J_{|j-1/2|}(\tilde{\rho})}, \quad \tilde{\rho} = \sqrt{(Z\alpha + \epsilon R)^2 - m^2 R^2}.$$

Оскільки параметр R введено лише для регуляризації, то можна вважати його малим. Тоді використовуючи асимптотичну поведінку Уіттекера при $\rho \rightarrow 0$:

$$W_{\mu,\nu}(\rho) \simeq \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu + \nu)} \rho^{\frac{1}{2} - \nu} + \frac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \nu)} \rho^{\frac{1}{2} + \nu},$$

можна записати рівняння (1.2.14) наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma(2\nu)} \frac{\Gamma(1 + \nu - Z\alpha \frac{\epsilon}{u})}{\Gamma(1 - \nu - Z\alpha \frac{\epsilon}{u})} (2uR)^{2\nu} = \\ - \frac{j + \nu - \frac{Z\alpha(m+\epsilon)}{u} + k_0 \left(j - \nu - \frac{Z\alpha(m-\epsilon)}{u} \right)}{j - \nu - \frac{Z\alpha(m+\epsilon)}{u} + k_0 \left(j + \nu - \frac{Z\alpha(m-\epsilon)}{u} \right)} + O(R), \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

де

$$k_0 = \operatorname{sgn}(j) \frac{m + \epsilon}{u} \frac{J_{|j+1/2|}(Z\alpha)}{J_{|j-1/2|}(Z\alpha)} \equiv \frac{m + \epsilon}{u} \sigma(Z\alpha, j). \quad (1.2.15)$$

Рівняння (1.2.14) можна записати в більш зручній формі

$$\frac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma(2\nu)} \frac{\Gamma(1 + \nu - Z\alpha \frac{\epsilon}{u})}{\Gamma(1 - \nu - Z\alpha \frac{\epsilon}{u})} (2uR)^{2\nu} = - \frac{j - \nu - \frac{Z\alpha(m-\epsilon)}{u}}{j + \nu - \frac{Z\alpha(m-\epsilon)}{u}} \frac{j + \nu - Z\alpha \sigma(Z\alpha, j)}{j - \nu - Z\alpha \sigma(Z\alpha, j)}. \quad (1.2.16)$$

За відсутності регуляризації ($R = 0$), енергетичні рівні визначаються полюсами гамма-функції $\Gamma(1 + \nu - Z\alpha \frac{\epsilon}{u})$ і нулями правої сторони рівняння (1.2.16).

Вираз для цих рівнів є аналогом формули Бальмера в КЕД [75, 76]

$$\epsilon_{n,j} = m \left[1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{(\nu + n)^2} \right]^{-1/2}, \quad \begin{cases} n = 0, 1, 2, 3, \dots, j > 0, \\ n = 1, 2, 3, \dots, j < 0. \end{cases} \quad (1.2.17)$$

Зв'язані стани для $n \geq 1$ є подвійно виродженими $\epsilon_{n,j} = \epsilon_{n,-j}$. Найнижчий рівень енергії дається формулою

$$\epsilon_{0,j=1/2} = m \sqrt{1 - (2Z\alpha)^2}. \quad (1.2.18)$$

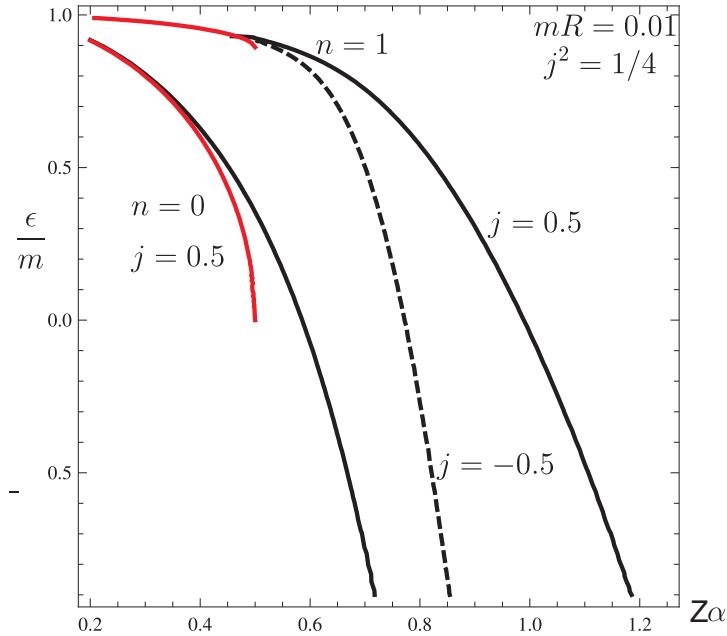


Рис. 1.1 Найнижчі енергетичні рівні як функція $Z\alpha$. Червоні лінії відповідають чистому кулонівському потенціалу (вони існують тільки до $Z\alpha < 1/2$); чорні суцільні лінії відповідають чисельним розв'язкам для $j = 1/2, mR = 0.01$; чорні пунктирні лінії – чисельним розв'язкам для $j = -1/2, mR = 0.01$.

Якщо $Z\alpha$ перевищує $1/2$, енергія (1.2.18) стає уявною, тобто відбувається “падіння на центр” [13, 14, 85]. Відповідно до [77, 79], ця проблема відсутня при ненульовому R . При $Z\alpha > 1/2$, параметр ν є уявним для певних j . Для них ми введемо позначення $\nu = i\beta, \beta = \sqrt{Z^2\alpha^2 - j^2}$. Для скінченного R дискретні рівні існують при $Z\alpha > 1/2$. Їхня енергія зменшується зі збільшенням $Z\alpha$, поки вони не досягнуть зони нижнього континууму. Поведінка найнижчих рівнів з $j = 1/2$ як функція заряду $Z\alpha$ показана на Рис. (1.1).

Критичний заряд Z_c , що відповідає зануренню в континуум, можна отримати з рівняння (1.2.16), поклавши $\epsilon = -m$ і використовуючи наслідок з

формули Стірлінга: $\frac{\Gamma(x+iy)}{\Gamma(x-iy)} \rightarrow e^{2iy \log x}$, $x \rightarrow +\infty$. Ми приходимо до рівняння

$$e^{-2i\beta \log(2Z\alpha mR)} = \frac{i\beta - j + Z\alpha\sigma(Z\alpha, j)}{-i\beta - j + Z\alpha\sigma(Z\alpha, j)} \frac{\Gamma(1 - 2i\beta)}{\Gamma(1 + 2i\beta)}, \quad (1.2.19)$$

або,

$$-\beta \log(2Z\alpha mR) = \arg(Z\alpha\sigma(Z\alpha, j) - j + i\beta) + \arg \Gamma(1 - 2i\beta) + \pi n, \quad (1.2.20)$$

де n - ціле. Легко перевірити, що для $j = 1/2$ та $n = 1$ критична константа зв'язку $Z_c\alpha$ наближається до $1/2$ при $mR \rightarrow 0$. Залежність для критичної константи $Z_c\alpha$ від mR для $j = 1/2$ показана на Рис. (1.2).

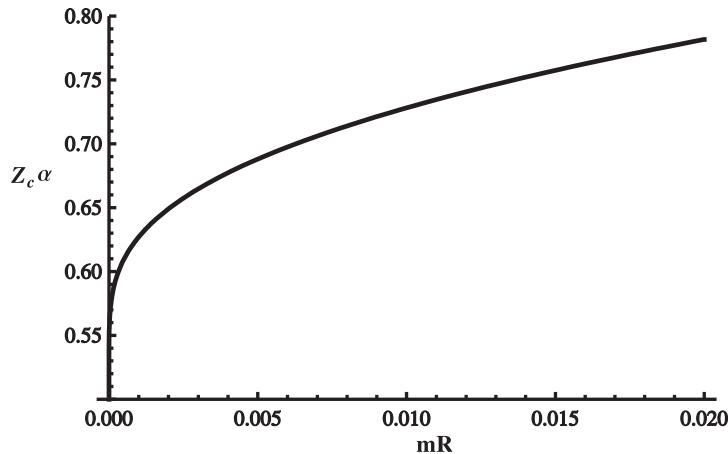


Рис. 1.2 Залежність критичної константи від mR для $1S_{1/2}$ рівня.

Зв'язані та квазістаціонарні стани в графені зі щілиною у випадку надкритичної кулонівської домішки також були чисельно досліджені в ґратковій моделі, котра має природне ультрафіолетове обрізання. Воно надає можливість контролювати розмір області в імпульсному просторі, в якій рівняння Дірака є застосовним [82, 83].

Проаналізуємо рівняння (1.2.4) у надкритичному випадку $Z\alpha > 1/2$ і покажемо, що резонансні стани з'являються для $|\epsilon| > m$ (в цьому випадку

$\Delta > 0$). Поява таких станів призводить до нестабільності надкритичного заряду з народженням електрон-діркових пар з вакууму. Народжений електрон притягується до кулонівського центру, тим самим екрануючи його. Одночасно позитивно заряджена дірка розповсюджується на нескінченість [79, 81]. Процес повторюється, поки заряд центру не буде зменшено до докритичних значень.

Функція Уіттекера $W_{\mu,\nu}(\rho)$ з $\mu = 1/2 + Z\alpha\epsilon/u$, $\nu = \sqrt{j^2 - Z^2\alpha^2}$ описує зв'язані стани для $|\epsilon| < |m|$, які розташовані на першому фізичному листі змінної u , на якому $\operatorname{Re} u > 0$ (1.2.9). Квазістаціонарні стани описуються тією самою функцією $W_{\mu,\nu}(\rho)$, але на другому - нефізичному листі, на якому $\operatorname{Re} u < 0$. Ми розглянемо розв'язки, що відповідають квазістаціонарним станам, котрі описують розбіжну позитивно заряджену хвилю при $r \rightarrow \infty$ з

$$\operatorname{Re} \epsilon < 0, \quad \operatorname{Im} \epsilon < 0, \quad \operatorname{Re} u < 0, \quad \operatorname{Im} u < 0. \quad (1.2.21)$$

При $Z^2\alpha^2 > j^2$ резонансні стани визначаються з того ж рівняння, що і зв'язані стани (1.2.14), але ν замінюється на $\nu = i\beta$. Розглянемо стани з $j = 1/2$, які відповідають $nS_{1/2}$ -станам, зокрема стану з найнижчою енергією. Відповідне рівняння набуває вигляду

$$\frac{W_{\frac{1}{2} + \frac{Z\alpha\epsilon}{u}, i\beta}(\rho)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{Z\alpha m}{u}\right) W_{-\frac{1}{2} + \frac{Z\alpha\epsilon}{u}, i\beta}(\rho)} \Big|_{r=R} = \frac{k+1}{k-1},$$

$$k = \frac{m+\epsilon}{u} \sqrt{\frac{\epsilon + Z\alpha/R - m}{\epsilon + Z\alpha/R + m}} \frac{J_1(\tilde{\rho})}{J_0(\tilde{\rho})}, \quad \tilde{\rho} = \sqrt{(Z\alpha + \epsilon R)^2 - m^2 R^2}, \quad (1.2.22)$$

де $W_{\mu,\nu}(x)$ і $J_a(x)$ - функції Уіттекера та Бесселя, відповідно.

Ми цікавимося випадком $|\epsilon| \gg m$ і, зокрема, випадком безмасового електрона ($m = 0$). Аналітичні розв'язки можуть бути отримані для значень

заряду, що не сильно перевищують критичне значення Z , де $Z\alpha - 1/2 \ll 1$. Вважаючи параметр обрізання малим ($|2uR| \ll 1$) і використовуючи асимптотику функції Уіттекера, можна знайти

$$(2uR)^{2i\beta} \frac{\Gamma(1 - 2i\beta)}{\Gamma(1 + 2i\beta)} \frac{\Gamma(1 + i\beta - \frac{Z\alpha\epsilon}{u})}{\Gamma(1 - i\beta - \frac{Z\alpha\epsilon}{u})} = \frac{\frac{1}{2} - i\beta - \frac{Z\alpha(m-\epsilon)}{u}}{\frac{1}{2} + i\beta - \frac{Z\alpha(m-\epsilon)}{u}} \frac{\frac{1}{2} + i\beta - Z\alpha \frac{J_1(Z\alpha)}{J_0(Z\alpha)}}{\frac{1}{2} - i\beta - Z\alpha \frac{J_1(Z\alpha)}{J_0(Z\alpha)}}. \quad (1.2.23)$$

Розкладаючи рівняння (1.2.23) поблизу критичної константи по степеням $\beta = \sqrt{Z^2\alpha^2 - 1/4}$, ми отримуємо наступне рівняння:

$$(-2i\sqrt{\epsilon^2 - m^2}R)^{2i\beta} = 1 + 4i\beta \times \left[\frac{J_0(1/2)}{J_0(1/2) - J_1(1/2)} + \Psi(1) - \frac{1}{2}\Psi\left(1 - \frac{i}{2}\frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - m^2}}\right) - \frac{1}{1 + i\sqrt{\frac{\epsilon-m}{\epsilon+m}}} \right], \quad (1.2.24)$$

де $\Psi(x)$ - логарифмічна похідна гамма-функції Ейлера, $u = -i\sqrt{\epsilon^2 - m^2}$.

Розглянемо спочатку безмасовий випадок $m = 0$. Після розділення модуля та фази, $\epsilon = |\epsilon|e^{i\gamma}$, рівняння (1.2.24) приймає вигляд

$$\ln(2|\epsilon|R) + i\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi n}{\beta} + 2\left[\frac{J_0(1/2)}{J_0(1/2) - J_1(1/2)} + \Psi(1) - \frac{1}{2}\Psi\left(1 - \frac{i}{2}\right) - \frac{1}{1+i}\right], \quad n = 1, 2, \dots. \quad (1.2.25)$$

Звідси

$$\begin{aligned} \epsilon_n^{(0)} &= aR^{-1}e^{i\gamma} \exp\left[-\frac{\pi n}{\sqrt{Z^2\alpha^2 - 1/4}}\right] = \\ &= -(1.18 + 0.17i)R^{-1} \exp\left[-\frac{\pi n}{\sqrt{Z^2\alpha^2 - 1/4}}\right], \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

де

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \left(1 + \coth \frac{\pi}{2}\right) \approx 3.28, \quad (1.2.27)$$

$$a = \frac{1}{2} \exp \left[\frac{2J_0(1/2)}{J_0(1/2) - J_1(1/2)} + 2\Psi(1) - 1 - \operatorname{Re}\Psi\left(1 - \frac{i}{2}\right) \right] \approx 1.19. \quad (1.2.28)$$

Енергія квазістаціонарних станів (1.2.26) має характерну суттєво-сингулярну залежність від критичної константи зв'язку, яка відображає скейлінгову інваріантність кулонівського потенціалу. Нескінченна кількість квазістаціонарних рівнів пов'язана з далекодіючим кулонівським полем. Аналогічна залежність має місце у випадку надкритичного кулонівського центру в КЕД [80].

Наші результати узгоджуються з роботою [13].

Оскільки “постійна тонкої структури” в графені має значення $e^2/\hbar v_F \approx 2.19$, нестабільність з'являється вже при $Z = 1$. Однак, наведений вище аналіз не враховує ефектів поляризації вакууму. Розглядаючи такі ефекти і застосовуючи наближення Хартрі для електрон-електронної взаємодії, можна показати [84], що ефективний заряд домішки Z_{eff} є таким, що домішка з голим зарядом $Z = 1$ залишається в докритичній області, тобто $Z_{eff}e^2/(\kappa\hbar v_F) < 1/2$ для довільної $e^2/(\kappa\hbar v_F)$, тоді як домішки з більшими Z можуть бути надкритичними.

Для скінчених m і у випадку $|\epsilon| \gg m$, $\operatorname{Re}\epsilon < 0$, розкладаючи рівняння (1.2.24) в ряд по m/ϵ до другого порядку, ми отримаємо

$$\epsilon - \frac{m^2}{2\epsilon} = \epsilon_n^{(0)} \left(1 - \frac{m}{\epsilon} + \frac{m^2}{\epsilon^2} (0.29 - 0.23i) \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.2.29)$$

Резонансні стани з $\epsilon_n^{(0)}$ описують спонтанне випромінення зарядженої дірки, коли дискретний рівень занурюється в континуум у випадку $m = 0$. Для того, щоб знайти поправки до енергетичних рівнів для ненульової m , будемо шукати розв'язок рівняння (1.2.29) у вигляді ряду $\epsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^{(k)}$, в якому $\epsilon^{(k)}$ є

величиною порядку m^k . Легко знайти перші два члени такого розкладу

$$\epsilon_n = \epsilon_n^{(0)} - m + \frac{m^2}{|\epsilon_n^{(0)}|} (0.24 + 0.20i). \quad (1.2.30)$$

Оскільки $\text{Im } \epsilon_n^{(0)} < 0$, появляє щілини зменшує ширину резонансу і таким чином збільшує стабільність системи.

До цього ми розглядали випадок $|\epsilon| \gg m$ і аналізували як ненульова маса впливає на форму резонансу. Також повчально розглянути резонансні стани поблизу рівня $\epsilon = -m$, коли зв'язані стани занурюються в континуум і визначити дійсну та уявну частину їхньої енергії. Перш за все, ненульова маса збільшує значення критичного заряду. Дійсно, використовуючи рівняння (1.2.20), ми отримуємо, що критичне значення заряду $Z_c\alpha$ для $j = 1/2$ залежить від m наступним чином (див. також Рис. (1.2))

$$Z_c\alpha \simeq \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{\log^2(cmR)}, \quad c = \exp \left[-2\Psi(1) - \frac{2J_0(1/2)}{J_0(1/2) - J_1(1/2)} \right] \approx 0.21. \quad (1.2.31)$$

Зауважимо, що залежність критичної константи від mR дуже схожа на аналогічну залежність у випадку КЕД [5, 6]. Для $Z > Z_c$, використовуючи рівняння (1.2.24), знаходимо резонансні рівні:

$$\epsilon = -m \left(1 + \xi + i \frac{3\pi}{8} e^{-\pi/\sqrt{2\xi}} \right), \quad \xi = \frac{3\pi}{8} \frac{\beta - \beta_c}{\beta\beta_c}, \quad (1.2.32)$$

де $\beta_c = \sqrt{(Z_c\alpha)^2 - 1/4}$. Так само як і в КЕД [78], уявна частина енергії резонансного стану зникає експоненційно при $Z \rightarrow Z_c$. Така поведінка пов'язана з тунелюванням крізь кулонівський бар'єр.

Для квазічастинок в графені в полі центрального потенціалу $V(r)$ можемо отримати ефективне рівняння Шредінгера [78, 79], виражаючи нижню

компоненту діраківського спінора (1.2.3) через верхню

$$\chi''(r) + k^2(r)\chi(r) = 0, \quad a(r) = \exp \left[\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{r} - \frac{\tilde{V}'}{\epsilon + m - \tilde{V}} \right) dr \right] \chi(r), \quad (1.2.33)$$

де

$$k^2(r) = 2(\mathcal{E} - U(r)), \quad \mathcal{E} = \frac{\epsilon^2 - m^2}{2}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{\hbar v_F}.$$

Ефективний потенціал можна представити у вигляді суми двох членів

$$U = U_1 + U_2,$$

$$U_1 = \epsilon \tilde{V} - \frac{\tilde{V}^2}{2} + \frac{j(j-1)}{2r^2}, \quad (1.2.34)$$

$$U_2 = \frac{1}{4} \left[\frac{\tilde{V}''}{\epsilon + m - \tilde{V}} + \frac{3}{2} \left(\frac{\tilde{V}'}{\epsilon + m - \tilde{V}} \right)^2 + \frac{2j\tilde{V}'}{r(\epsilon + m - \tilde{V})} \right], \quad (1.2.35)$$

де U_1 - ефективний потенціал поля Клейна-Гордона, а U_2 включає спінові ефекти.

Треба зазначити, що вираз (1.2.33) і потенціали (1.2.34) та (1.2.35) співпадають з відповідними рівняннями в КЕД [79]. На Рис. (1.3) зображене потенціал $U(r)$ при $Z \rightarrow Z_c$, $j = 1/2$, та $\epsilon = -m$, який має бар'єр. Тунелювання через цей бар'єр і обумовлює вище згадані резонанси.

До цього моменту ми розглядали одночастинкову задачу в зовнішньому полі. В наступному розділі ми розглянемо електрони та дірки, взаємодія між якими кулонівська, і покажемо, що така система стає нестабільною, коли константа зв'язку α перевищує деяке критичне значення α_c .

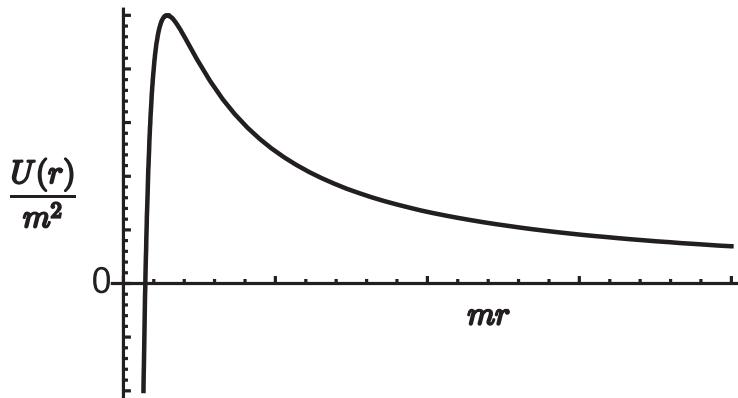


Рис. 1.3 Ефективний потенціал для кулонівського центру у випадку $\epsilon = -m$ та $Z = Z_c$.

1.3 Екситонна нестабільність

1.3.1 Рівняння Бете-Солпітера

Нестабільність системи з надкритичним зарядом, яка обговорювалась в попередньому розділі вказує на можливість екситонної нестабільності в графені при достатньо великому значенні константі зв'язку. В цьому розділі буде досліджено рівняння Бете-Солпітера (БС) для електрон-діркового стану (для огляду див. [9]) і показано, що в надкритичному випадку цей стан є тахіоном. Вказане явище подібне до куперівської нестабільності в теорії надпровідності.

Хоча куперівська нестабільність формулюється як квантовомеханічна задача двох тіл (двох електронів), вона може бути зведена до задачі однієї частинки в ефективному зовнішньому потенціалі, так само, як і задача кулонівського центру. Однак між цими двома задачами є суттєві відмінності. По-перше, кулонівська система містить заповнені діраківські конуси, і коли зв'язаний стан в них входить, то задача стає принципово багаточастинковою.

Це, зокрема, пояснює наявність резонансних станів у випадку надкритичного кулонівського потенціалу, на відміну від задачі Купера, де є тільки один зв'язаний стан з від'ємною енергією. Друга суттєва відмінність полягає в значенні критичної константи зв'язку. Вона ненульова в задачі Купера внаслідок скінченної густини станів на поверхні Фермі, що має суттєве значення для формування зв'язаного стану. З іншого боку, $\alpha_c = 1/2$ для надкритичного кулонівського центру при нульовій густині станів в діраківській точці.

Поява куперівського зв'язаного стану в теорії надпровідності пов'язана з нестабільністю нормального стану металу. Справді, відповідно до [86], рівняння БС для електрон-електронного зв'язаного стану в нормальному металі має розв'язок з уявною енергією, що відповідає taxionу. Це означає, що нормальній стан металу є нестабільним і відбувається фазовий перехід до надпровідного стану. Як вже згадувалось вище, існування резонансних станів у надкритичному кулонівському центрі вказує на можливість екситонної нестабільності в графені.

Для опису динаміки квазічастинкових збуджень в графені, ми будемо використовувати модель запропоновану в роботах [71, 73], в якій квазічастинки, обмежені двовимірною площиною, взаємодіють через тривимірне кулонівське поле. Низькоенергетичні квазічастинкові збудження описуються чотирікомпонентними діраківськими спінорами $\Psi_a^T = (\psi_{KAa}, \psi_{KBa}, \psi_{K'Ba}, \psi_{K'Aa})$, які об'єднують блоківські стани із спіновими індексами $a = 1, 2$ на двох підгратках (A, B) гексагональної гратки. Спіновий індекс виступає лише в ролі “флейворного”, тобто у спінора є N_f еквівалентних компонент, $a = 1, 2, \dots, N_f$. Для одношарового графену $N_f = 2$, для двошарового – $N_f = 4$.

Дія, яка описує графенівські квазічастинки з кулонівською взаємодією має наступний вигляд:

$$S = \int dt d^2r \bar{\Psi}_a(t, \mathbf{r}) (i\gamma^0 \partial_t - iv_F \gamma \nabla) \Psi_a(t, \mathbf{r}) \quad (1.3.36)$$

$$-\frac{1}{2} \int dt dt' d^2r d^2r' \bar{\Psi}_a(t, \mathbf{r}) \gamma^0 \Psi_a(t, \mathbf{r}) U_0(t - t', |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \bar{\Psi}_b(t', \mathbf{r}') \gamma^0 \Psi_b(t', \mathbf{r}'),$$

де $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$, а діраківські γ -матриці $\gamma^\mu = \tau^3 \otimes (\sigma^3, i\sigma^2, -i\sigma^1)$ утворюють звідне представлення алгебри Дірака в 2+1 вимірах. Матриці Паулі τ, σ діють на просторі діраківських точок (K, K') та підграток (A, B) , відповідно. Інші дві γ -матриці, котрі ми використовуємо, мають вигляд $\gamma^3 = i\tau_2 \otimes \sigma_0, \gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \tau_1 \otimes \sigma_0$, де σ_0 – одинична 2×2 матриця.

“Гола” кулонівська взаємодія $U_0(t, |\mathbf{r}|)$ має просту форму:

$$U_0(t, |\mathbf{r}|) = \frac{e^2 \delta(t)}{\kappa} \int \frac{d^2k}{2\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{|\mathbf{k}|} = \frac{e^2 \delta(t)}{\kappa |\mathbf{r}|}. \quad (1.3.37)$$

Однак, через поляризаційні ефекти вигляд цієї взаємодії змінюється:

$$U(t, |\mathbf{r}|) = \frac{e^2}{\kappa} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^2k}{2\pi} \frac{\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})}{|\mathbf{k}| + \Pi(\omega, \mathbf{k})}, \quad (1.3.38)$$

де κ – діелектрична константа підкладки, на якій розміщено графен, а поляризаційна функція $\Pi(\omega, \mathbf{k})$ пропорційна (з коефіцієнтом $2\pi/\kappa$) до часових компонент фотонної поляризації. Тоді кулонівський пропагатор дорівнює:

$$D(\omega, |\mathbf{q}|) = \frac{1}{|\mathbf{q}| + \Pi(\omega, |\mathbf{q}|)}, \quad (1.3.39)$$

де однопетльова поляризація дорівнює [87]

$$\Pi(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\pi e^2 N_f}{4\kappa} \frac{\mathbf{k}^2}{\sqrt{\hbar^2 v_F^2 \mathbf{k}^2 - \omega^2}}. \quad (1.3.40)$$

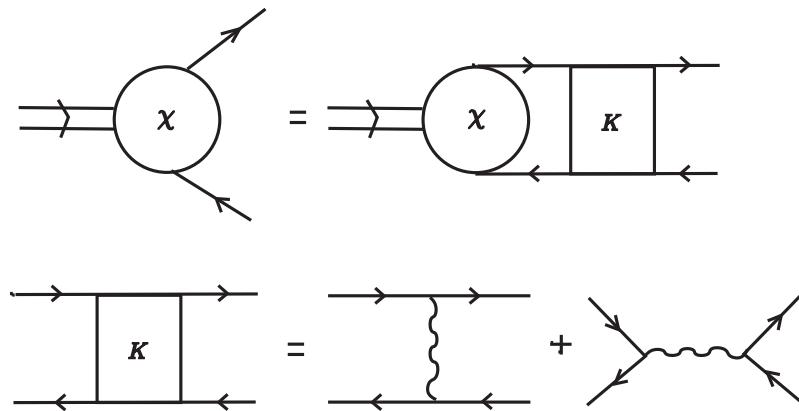


Рис. 1.4 Рівняння БС для зв'язаного електрон-діркового стану χ . Ядро K складається з двох діаграм: обміну та анігіляції. Хвиляста лінія відповідає кулонівському пропагатору.

В статичному наближенні ($\omega = 0$) вона має вигляд:

$$\Pi(\omega = 0, \mathbf{k}) = \frac{\pi e^2 N_f}{4\kappa \hbar v_F} |\mathbf{k}|. \quad (1.3.41)$$

Загальна статична поляризація з міркувань розмірності має форму $\Pi(0, |\mathbf{q}|) = |\mathbf{q}| F(\alpha, N_f)$. Однак точний вираз її невідомий, тому в даній роботі ми будемо використовувати однопетлеве наближення.

Ефективна теорія, що описується дією (1.3.36), має $U(2N_f)$ симетрію. Однак, як було зазначено в роботі [88] (див. також [89, 90, 91, 92]), ця теорія не враховує відштовхування на вузлах гратки, котрі порушують $U(2N_f)$ симетрію.

Для того, щоб проаналізувати екситонну нестабільність, ми розглянемо рівняння БС для електрон-діркового зв'язаного стану, яке схематично представлено на Рис. (1.4). Ядро K рівняння БС взято в найпростішому наближенні, і складається з двох діаграм: одна, що описує кулонівський обмін, та

інша, що описує анігіляцію. Анігіляційна діаграма не дає внеску в рівняння БС при нульовому хімічному потенціалі. Таким чином, рівняння БС приймає наступну форму:

$$\left[S^{-1}(q + \frac{1}{2}P)\chi(q, P)S^{-1}(q - \frac{1}{2}P) \right]_{\alpha\beta} = \frac{i\alpha}{(2\pi)^2} \int d^3k D(|\mathbf{q}-\mathbf{k}|) [\gamma^0\chi(k, P)\gamma^0]_{\alpha\beta}, \quad (1.3.42)$$

де $k = (k_0, \mathbf{k})$, α, β - спінорні індекси, $\chi(q, P)$ - амплітуда БС в імпульсному просторі

$$\chi_{\alpha\beta}(q, P) = \int d^3x e^{iqx} \langle 0 | T\Psi_\alpha \left(\frac{x}{2} \right) \bar{\Psi}_\beta \left(-\frac{x}{2} \right) | P \rangle, \quad (1.3.43)$$

$q = (q_0, \mathbf{q})$, $P = (P_0, \mathbf{P})$, \mathbf{q} і \mathbf{P} -відносний та загальний імпульси, відповідно, і

$$S(p) = \frac{\gamma^0 p_0 - \gamma \mathbf{p} + \Delta}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - \Delta^2 + i0}$$

є квазічастинковим пропагатором із щілиною Δ . Щілина Δ рівна нулю в невзаємодіючому графені, однак може бути згенерована завдяки сильній кулонівській взаємодії. Надалі ми покладемо $\hbar = v_F = 1$.

Статична поляризація безмасовими ферміонами $\Pi(\omega = 0, \mathbf{k})$ зсуває константу α в рівнянні (1.3.42)

$$\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{1 + \pi\alpha N_f/4} \equiv 2\lambda.$$

Далі, вводячи функцію

$$\hat{\chi}(q, p) = S^{-1}(q + \frac{1}{2}P)\chi(q, P)S^{-1}(q - \frac{1}{2}P)$$

де $p = P/2$, рівняння БС можемо записати як:

$$\hat{\chi}(q, p) = \frac{2i\lambda}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3k}{|\mathbf{q}-\mathbf{k}|} \gamma^0 S(k+p) \hat{\chi}(k, p) S(k-p) \gamma^0. \quad (1.3.44)$$

В загальному випадку матриця $\hat{\chi}$ може бути розкладена по 16 незалежним матрицям. По аналогії з квантовою електродинамікою [6] ми очікуємо формування щілини в надкритичному режимі. В такому випадку початкова $U(4)$ симетрія буде порушена (див., напр. [71, 73]), що призводить до появи безмасових намбу-голдстоунівських бозонів у спектрі. Подібно до КЕД [6], ці намбу-голдстоунівські бозони переходят в тахіони, якщо розглядаються на неправильному вакуумі без щілини. В даній роботі ми розглянемо тільки матричні структури $\hat{\chi}$, пов'язані з матрицею γ^5

$$\hat{\chi}(q, p) = \chi_5(q, p)\gamma^5 + \chi_{05}(q, p)q^i\gamma^i\gamma^0\gamma^5, \quad (1.3.45)$$

де $\chi_5(q, p)$ та $\chi_{05}(q, p)$ - скалярні функції. Ми покажемо в наступному підрозділі, що достатньо розглянути тільки χ_5 для того, щоб описати намбу-голдстоунівське збудження в масивному випадку. Однак, ми також утримаємо функцію χ_{05} , необхідну для опису тахіона.

Існують також тахіони в інших каналах, що описують різні шляхи порушення $U(2N_f)$ симетрії. Наприклад, можна використати матриці $I, \gamma^3, \gamma^3\gamma^5$ замість матриці γ^5 в рівнянні (1.3.45). Для вивчення нестабільності достатньо знайти принаймні один канал з тахіонами. Справжня схема порушення симетрії визначається розв'язком рівняння на щілину для різних параметрів порядку і встановленням тих, що відповідають глобальним мінімумам енергії системи. Для простоти ми розглянемо тільки канал, що описується хвильовою функцією (1.3.45), яка може бути знайдено аналітично.

1.3.2 Тахіонні стани

Спершу покажемо, що в спектрі рівняння БС безмасової теорії $\Delta = 0$, існує

таксіон при $\lambda > \lambda_c$ і визначимо критичне значення λ_c . Для вивчення тахіона ми покладемо $\mathbf{p} = 0$, утримуючи ненульовим p_0 . Можна перевірити, що анзац (1.3.45) узгоджується з рівнянням (1.3.44) і приводить до системи рівнянь на функції $\chi_5(q, p_0), \chi_{05}(q, p_0)$ (надалі, заради стисlosti, ми опускаємо p_0 в аргументах цих функцій). Оскільки рівняння (1.3.44) означає, що $\widehat{\chi}(q, p)$ не залежить від q_0 , ми можемо проінтегрувати по k_0 , використовуючи інтеграл

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{\pi} \frac{c_1 + c_2 k_0 + c_3 k_0^2}{((k_0 - p_0)^2 - \mathbf{k}^2 + i\delta)((k_0 + p_0)^2 - \mathbf{k}^2 + i\delta)} = \frac{c_1 + c_3(p_0^2 - \mathbf{k}^2)}{2|\mathbf{k}|(p_0^2 - \mathbf{k}^2)},$$

де $\delta \rightarrow +0$. Після цього отримаємо систему інтегральних рівнянь:

$$\chi_5(\mathbf{q}) = \lambda \int \frac{d^2 k}{2\pi} \frac{\mathbf{k}^2 (\chi_5(\mathbf{k}) + p_0 \chi_{05}(\mathbf{k}))}{|\mathbf{q} - \mathbf{k}| |\mathbf{k}| (\mathbf{k}^2 - p_0^2)} \quad (1.3.46)$$

$$\chi_{05}(\mathbf{q}) = \lambda \int \frac{d^2 k}{2\pi} \frac{\mathbf{q} \mathbf{k} (\mathbf{k}^2 \chi_{05}(\mathbf{k}) + p_0 \chi_5(\mathbf{k}))}{\mathbf{q}^2 |\mathbf{q} - \mathbf{k}| |\mathbf{k}| (\mathbf{k}^2 - p_0^2)}. \quad (1.3.47)$$

Якщо припустити, що $\chi_5(\mathbf{q})$ і $\chi_{05}(\mathbf{q})$ залежать тільки від $q = |\mathbf{q}|$, то кутове інтегрування можна легко виконати, використовуючи формулі 8.126.3, 8.126.4 з [93]

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{q^2 + k^2 - 2qk \cos \phi}} &= \frac{4}{q+k} K\left(\frac{2\sqrt{qk}}{q+k}\right) = \\ &= 4 \left[\frac{\theta(q-k)}{q} K\left(\frac{k}{q}\right) + \frac{\theta(k-q)}{k} K\left(\frac{q}{k}\right) \right], \end{aligned} \quad (1.3.48)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi \cos \phi}{\sqrt{q^2 + k^2 - 2qk \cos \phi}} &= \frac{2(q^2 + k^2)}{qk(q+k)} \left(K\left(\frac{2\sqrt{qk}}{q+k}\right) - \frac{(q+k)^2}{q^2 + k^2} E\left(\frac{2\sqrt{qk}}{q+k}\right) \right) \\ &= \frac{4}{qk} \left[q\theta(q-k) \left(K\left(\frac{k}{q}\right) - E\left(\frac{k}{q}\right) \right) + k\theta(k-q) \left(K\left(\frac{q}{k}\right) - E\left(\frac{q}{k}\right) \right) \right], \end{aligned} \quad (1.3.49)$$

де $K(x)$ і $E(x)$ - повні еліптичні інтеграли першого та другого роду, відповідно, $\theta(x)$ - сходинка Хевісайда. Надалі, для отримання аналітичних розв'язків рівняння БС ми апроксимували еліптичні інтеграли їхніми асимптотиками

$$K(x) \simeq \frac{\pi}{2} (1 + O(x^2)), \quad E(x) \simeq \frac{\pi}{2} (1 + O(x^2)), \quad x \ll 1. \quad (1.3.50)$$

Логарифмічна сингулярність, присутня в еліптичних інтегралах в рівняннях (1.3.48), та (1.3.49) при $q = k$, не впливає на якісну поведінку розв'язків, хоча вона і важлива для точного значення критичної константи зв'язку (див. р-ня (1.3.66) нижче). Таким чином ми знайшли

$$\begin{aligned} \chi_5(q) = & \lambda \int_0^q \frac{k^2 dk}{q(k^2 - p_0^2)} (\chi_5(k) + p_0 \chi_{05}(k)) + \\ & + \lambda \int_q^\Lambda \frac{k dk}{k^2 - p_0^2} (\chi_5(k) + p_0 \chi_{05}(k)), \end{aligned} \quad (1.3.51)$$

$$\begin{aligned} \chi_{05}(q) = & \frac{\lambda}{2} \int_0^q \frac{k^2 dk}{q^3(k^2 - p_0^2)} (k^2 \chi_{05}(k) + p_0 \chi_5(k)) + \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_q^\Lambda \frac{dk}{k(k^2 - p_0^2)} (k^2 \chi_{05}(k) + p_0 \chi_5(k)). \end{aligned} \quad (1.3.52)$$

Тут ми також ввели скінченне ультрафіолетове обрізання Λ , котре може бути вибране порядку π/a , де a - характерний розмір кроку гратки, для графену $a = 2.46\text{\AA}$. Альтернативно можна вибрати для Λ значення, пов'язане з найвищою енергією зони $\Lambda = t/v_F$, де $t = 2.4 \text{ eV}$ в графені.

Рівняння (1.3.51) та (1.3.52) еквівалентні наступній системі диференціаль-

них рівнянь:

$$\begin{aligned}\chi_5'' + \frac{2}{q}\chi_5' + \lambda \frac{\chi_5 + p_0\chi_{05}}{q^2 - p_0^2} &= 0, \\ \chi_{05}'' + \frac{4}{q}\chi_{05}' + \frac{3\lambda}{2} \frac{q^2\chi_{05} + p_0\chi_5}{q^2(q^2 - p_0^2)} &= 0\end{aligned}\quad (1.3.53)$$

з граничними умовами:

$$\left. q^2\chi_5' \right|_{q=0} = 0, \quad \left. [q\chi_5(q)]' \right|_{q=\Lambda} = 0, \quad \left. q^4\chi_{05}' \right|_{q=0} = 0, \quad \left. [q^3\chi_{05}(q)]' \right|_{q=\Lambda} = 0. \quad (1.3.54)$$

Система диференціальних рівнянь (1.3.53) може бути зведена до рівняння четвертого порядку, розв'язки якого можна представити в термінах узагальненої гіпергеометричної функції ${}_4F_3(q^2/p_0^2)$ та функції Мейера з відповідними граничними умовами. Цей аналіз проведено в додатку Б роботи [61]. Однак, оскільки ми шукаємо розв'язок з $p_0 \rightarrow 0$, можна розглядати безпосередньо систему (1.3.53), котра в цьому режимі розпадається на два незалежних рівняння

$$\begin{aligned}\chi_5'' + \frac{2}{q}\chi_5' + \lambda \frac{\chi_5}{q^2 - p_0^2} &= 0, \\ \chi_{05}'' + \frac{4}{q}\chi_{05}' + \frac{3\lambda}{2} \frac{\chi_{05}}{q^2 - p_0^2} &= 0,\end{aligned}\quad (1.3.55)$$

де ми утримали p_0 в знаменниках для регуляризації сингулярностей при $q \rightarrow 0$.

Очевидно, що рівняння (1.3.55) є диференціальними рівняннями для гіпергеометричної функції $F(a, b; c; z)$ [93]. Розв'язки, що задовольняють інфрачервоним граничним умовам, мають наступний вигляд:

$$\chi_5 = C_1 F\left(\frac{1+\gamma}{4}, \frac{1-\gamma}{4}; \frac{3}{2}; \frac{q^2}{p_0^2}\right), \quad \chi_{05} = C_2 F\left(\frac{3(1+\tilde{\gamma})}{4}, \frac{3(1-\tilde{\gamma})}{4}; \frac{5}{2}; \frac{q^2}{p_0^2}\right), \quad (1.3.56)$$

де $\gamma = \sqrt{1 - 4\lambda}$ і $\tilde{\gamma} = \sqrt{1 - 2\lambda/3}$. Використовуючи асимптотику гіпергеометричних функцій, можна перевірити, що ультрафіолетова гранична умова для функції χ_5 виконується тільки для $\lambda > 1/4$. Таким чином, $\lambda_c = 1/4$ є критичною константою зв'язку в нашому наближені.

Треба зазначити, що якщо б ми ігнорували ефекти поляризації вакууму, тоді $\lambda = \alpha/2$ і критичне значення $1/4$ співпадало б з критичним значенням, отриманим в задачі надкритичного кулонівського центру $Z_c\alpha = 1/2$ в попередньому підрозділі. Ультрафіолетова гранична умова для функції χ_{05} може бути виконана тільки за умови $\lambda > 3/2$. Таким чином, для $1/4 < \lambda < 3/2$ можна покласти $\chi_{05} = 0$, після чого ми залишаємося тільки з одним рівнянням на χ_5 . Після знаходження функції χ_5 , з неоднорідного рівняння (1.3.53) знаходимо χ_{05} . Знайдена в такий спосіб функція $\chi_{05} \sim p_0$. Критичне значення константи зв'язку $\lambda_c = 1/4$ співпадає зі значенням, знайденим в [73], де робилось аналогічне наближення для ядра інтегрального рівняння. В надкритичному режимі $\gamma = i\omega$, $\omega = \sqrt{4\lambda - 1}$ і функція $\chi_5(q)$ асимптотично поводить себе як:

$$\chi_5(q) \sim q^{-1/2} \cos \left(\sqrt{\lambda - 1/4} \ln q + const \right). \quad (1.3.57)$$

Така осциляційна поведінка типова для явища, відомого в квантовій механіці, як колапс (“падіння на центр”): в цьому випадку енергія системи є необмеженою знизу і тому не існує основного стану. Вузли хвильової функції зв'язаного стану сигналізують про існування тахіонних станів з уявною енергією p_0 , $\text{Im } p_0^2 < 0$.

Справді, ультрафіолетова гранична умова для χ_5 приводить до рівняння:

$$\frac{(1+i\omega)\Gamma(1+\frac{i\omega}{2})\Gamma(\frac{1-i\omega}{4})\Gamma(\frac{5-i\omega}{4})}{(1-i\omega)\Gamma(1-\frac{i\omega}{2})\Gamma(\frac{1+i\omega}{4})\Gamma(\frac{5+i\omega}{4})}\left(-\frac{\Lambda^2}{p_0^2}\right)^{i\frac{\omega}{2}}=1, \quad (1.3.58)$$

яке має тахіонний розв'язок:

$$p_0^2 = -\Lambda^2 \exp\left(-\frac{4\pi n}{\omega} + \delta(\omega)\right), \quad (1.3.59)$$

$$\delta(\omega) = \frac{4}{\omega} \left[\arctan \omega + \operatorname{Arg} \left(\Gamma\left(1+\frac{i\omega}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-i\omega}{4}\right) \Gamma\left(\frac{5-i\omega}{4}\right) \right) \right].$$

Якщо λ прямує до $1/4$ зверху, тобто $\omega \rightarrow 0$,

$$p_0^2 = -\Lambda^2 \exp\left(-\frac{4\pi n}{\omega} + \delta(0)\right), \quad (1.3.60)$$

$$\delta(0) = 4 + 2\Psi(1) - \Psi(1/4) - \Psi(5/4) \approx 7.3, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким чином, найсильніша нестабільність, і відповідно, найменше негативне значення p_0^2 , дається розв'язком для функції χ_5 з $n = 1$. Тахіони, котрі відіграють роль квазістанціонарних станів в задачі надкритичного кулонівського центру, приводять до нестабільності вакууму. Насправді, екситонна нестабільність може бути розглянута як польовий аналог “падіння на центр” і критична константа зв'язку α_c - як аналог критичного заряду $Z_c\alpha$.

Енергія тахіона (1.3.60) має характерну суттєво сингулярну особливість вигляду $1/\sqrt{\lambda - \lambda_c}$ в експоненті. Це є наслідком скейлінгової інваріантності кулонівського потенціалу і має місце в будь-якому наближенні, що не містить інших масштабів, окрім параметру обрізання [94, 95, 96, 97].

Існує дві можливості для системи з надкритичним зарядом набути стабільноті: спонтанно екранувати заряд, або згенерувати ферміонну щілину. Перша можливість реалізується у випадку надкритичного кулонівського центру,

котрий є ефективно одночастинковою задачею. Друга – динамічна генерація щілини – реалізується для квазічастинок в графені з кулонівською взаємодією. Ситуація повністю аналогічна КЕД при сильній константі зв'язку [5, 6, 9] де показано, що стабілізація вакууму через динамічну генерацію щілини є універсальним явищем.

Критичне значення λ_c визначає критичну константу зв'язку α_c як функцію числа “флейворів” N_f ,

$$\alpha_c = \frac{4\lambda_c}{2 - \pi N_f \lambda_c}, \quad (1.3.61)$$

Значення критичної константи зв'язку $\lambda_c = 1/4$ отримано у вищезгаданому наближенні для ядер (1.3.50). Більш точне значення λ_c може бути знайдено, якщо помітити, що λ_c відповідає границі $p_0 = 0$. Переходячи до цієї границі в системі (1.3.53), ми отримаємо

$$\chi_5(q) = \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^\infty dk \chi_5(k) \left[\frac{\theta(q-k)}{q} K\left(\frac{k}{q}\right) + \frac{\theta(k-q)}{k} K\left(\frac{q}{k}\right) \right], \quad (1.3.62)$$

$$\begin{aligned} \chi_{05}(q) = & \frac{2\lambda}{\pi q} \int_0^\infty dk \chi_{05}(k) \left[\theta(q-k) \left(K\left(\frac{k}{q}\right) - E\left(\frac{k}{q}\right) \right) \right. \\ & \left. + \frac{k\theta(k-q)}{q} \left(K\left(\frac{q}{k}\right) - E\left(\frac{q}{k}\right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.3.63)$$

Зазначимо, що ультрафіолетове обрізання Λ можна покласти рівним нескінченості, що відповідає критичній точці. Ці рівняння мають скейлінгову інваріантність, тому можуть бути розв'язані за допомогою наступного анзацу: $\chi_5(q) = q^{-\gamma}$, $\chi_{05}(q) = q^{-\rho}$. При цьому показники γ, ρ задовільняють насту-

пним трансцендентним рівнянням:

$$1 = \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^1 dx [x^{-\gamma} + x^{\gamma-1}] K(x), \quad 0 < \gamma < 1, \quad (1.3.64)$$

$$1 = \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^1 dx [x^{-\rho} + x^{\rho-3}] (K(x) - E(x)), \quad 0 < \rho < 3. \quad (1.3.65)$$

які визначають корені γ, ρ для будь-яких значень λ . Нестабільність проявляється в осциляційній поведінці функцій $\chi_5(q), \chi_{05}(q)$. Для функції $\chi_5(q)$ це відбувається, коли два корені рівняння (1.3.64) на інтервалі $(0, 1)$ співпадають, а потім стають комплексно спряженими. Це відбувається для $\gamma = 1/2$. Для такого значення інтеграл в рівнянні (1.3.64) може бути обчислений точно (див. [98]), що приводить до наступного точного значення критичної константи зв'язку

$$\lambda_c = \frac{4\pi^2}{\Gamma^4(1/4)} \approx 0.23. \quad (1.3.66)$$

Друге рівняння (1.3.65) дає вище критичне значення константи зв'язку $\lambda_c = 0.91$. Таким чином, нестабільність виникає при значенні $\lambda_c = 0.23$. Критичне значення $N_{crit} \approx 2.8$ відповідає $\alpha = \infty$ в рівнянні (1.3.61). Оскільки для графену критичне значення “флейворів” $N_f = 2$, отримана нами критична кулонівська константа приблизно дорівнює $\alpha_c \approx 1.62$. Альтернативно, ця константа може бути визначена з рівняння на щілину. В роботі [73] з наближеннями для ядра, аналогічними нашим (1.3.50), було отримано перебільшене значення для критичної константи $\alpha_c = 2.33$. Натомість, чисельний аналіз рівняння на щілину (1.3.70), проведений в роботі [71], дав значення $\alpha_c = 1.1$. Але в будь-якому випадку, оскільки константа зв'язку у вільному графені рівна $\alpha \approx 2.19$ ($\kappa \approx 1$), то система перебуває в нестабільній фазі. З іншого боку,

для графену на підкладці SiO_2 діелектрична константа $\kappa \approx 2.8$, відповідно $\alpha \approx 0.78$, тобто система знаходиться в стабільній фазі.

Нарешті, оскільки $U(2N_f)$ симетрія порушена спонтанно, то мають існувати намбу-голдстоунівські збудження в стабільній фазі зі згенерованою масою. Покажемо, що рівняння БС (1.3.44) насправді має такі розв'язки. Для того, щоб це побачити, відповідно до [6], покладемо $p_0 = \mathbf{p} = 0$. Тоді, рівняння (1.3.44) має розв'язок у вигляді $\chi(q, 0) = \chi_5(q, 0)\gamma_5$, який задовольняє рівнянню:

$$\chi_5(q, 0) = \frac{\lambda}{2\pi} \int \frac{d^2 k}{|\mathbf{q} - \mathbf{k}|} \frac{\chi_5(k, 0)}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \Delta^2(k)}}, \quad (1.3.67)$$

або, після інтегрування по кутам, рівнянню:

$$\chi_5(q, 0) = \lambda \int_0^\Lambda \frac{dk}{\sqrt{k^2 + \Delta^2(k)}} k \chi_5(k, 0) \mathcal{K}(q, k) \quad (1.3.68)$$

з ядром

$$\mathcal{K}(q, k) = \frac{\theta(q - k)}{q} K\left(\frac{k}{q}\right) + \frac{\theta(k - q)}{k} K\left(\frac{q}{k}\right). \quad (1.3.69)$$

З іншого боку, рівняння для щілини, отримане в роботі [73], має вигляд

$$\Delta(q) = \lambda \int_0^\Lambda \frac{dk}{\sqrt{k^2 + \Delta^2(k)}} k \Delta(k) \mathcal{K}(q, k). \quad (1.3.70)$$

Можна побачити, що рівняння (1.3.68) має розв'язок $\chi_5(q, 0) = C\Delta(q)$ де щілина $\Delta(q)$ задовольняє рівнянню (1.3.70) з деякою константою C . Отже, хвильова функція $\chi_5(q, 0)$ описує безщілинне намбу-голдстоунівське збудження. Розв'язуючи рівняння БС при ненульових p_0 та \mathbf{p} , можна отримати закон дисперсії $p_0 \sim |\mathbf{p}|$ для намбу-голдстоунівських бозонів.

1.4 Висновки

В цьому розділі ми дослідили нестабільність графену, котра виникає при сильній кулонівській константі. Для надкритичного кулонівського центру така нестабільність була відома раніше як “падіння на центр”, котре виникає, коли $Z\alpha$ перевищує критичне значення $1/2$, що призводить до появи квазістаціонарних рівнів з комплексними значеннями енергії. Енергії квазістаціонарних рівнів у випадку безмасових збуджень характеризуються суттєво-сингулярним типом залежності від константи зв’язку, що є наслідком масштабної інваріантності для кулонівського потенціалу. Ми показали, що наявність щілини в спектрі квазічастинок стабілізує систему, зменшуючи уявну частину енергії $|\text{Im}E|$ квазістаціонарних рівнів, збільшуючи таким чином їх час життя.

Розглядаючи багаточастинкову задачу сильно взаємодіючих квазічастинок в графені, ми показали, що рівняння БС для зв’язаного електрон-діркового стану містить в своєму спектрі тахіон в надкритичному режимі $\alpha > \alpha_c$ і знайшли значення критичної константи $\alpha_c = 1.62$ в статичному наближенні випадкових фаз. Тахіонні стани грають роль квазістаціонарних станів в задачі надкритичного кулонівського центру і призводять до перебудови основного стану та формування екситонного конденстату. Таким чином, існує значна спорідненість між цими двома нестабільностями; насправді тахіонна нестабільність є польовим аналогом “падіння на центр”, а критична константа зв’язку α_c є аналогом критичного кулонівського заряду $Z_c\alpha$. Фізика цих двох нестабільностей пов’язана з сильною кулонівською взаємодією.

Розраховану критичну константу $\alpha_c = 1.62$ можна порівняти зі значенням $\alpha_c = 1.08$, знайденим в монте-карлівських симуляціях [58, 59, 60] перебудови основного стану і появи щілини. Отримане значення α_c є більшим, що вказує на те, що драбинне наближення недостатньо ефективне для кількісного опису екситонної нестабільності і формування щілини у вільному графені.

Звичайно, врахування вкладів вищих порядків теорії збурення, а також вдосконалення миттєвого наближення для взаємодії може змінити значення критичної константи. Суттєвим, однак, є те, що перебудова основного стану пов'язана з явищем “падіння на надкритичний кулонівський центр”. Таким чином, реалістичність перебудови основного стану в графені за рахунок сильної кулонівської взаємодії видається правдоподібною навіть за межами драбинного наближення.

Нарешті, фізична структура нестабільностей в графені дуже подібна до нестабільностей в сильнозв'язаній КЕД [5, 6, 7, 8, 9], де драбинне наближення недостатнє для кількісного опису, оскільки критична константа зв'язку для кірального порушення симетрії є порядку 1. Однак, основні якісні результати цього наближення виживають навіть коли взяти до уваги всі діаграми з фотонними обмінами (так зване заморожене (quenched) наближення без ферміонних петель) [94, 95, 96, 97]. Далі, існування критичної точки точно доведено в гратковій КЕД [99]. Також можна помітити, що в присутності магнітного поля значення критичної константи зменшується до нуля (так званий магнітний каталіз [100, 101, 102]), таким чином формування щілини може мати місце навіть при слабкій константі зв'язку.

РОЗДІЛ 2

ГЕНЕРАЦІЯ ЩІЛИНИ

2.1 Вступ

Задача генерації щілини в графені в наближенні випадкових фаз була розглянута в роботах [71, 73, 74] ще до фактичного виготовлення цього матеріалу. Нещодавно, за допомогою ґраткових Монте-Карло (МК) симуляцій було знайдено критичне значення константи зв'язку $\alpha_c = 1.08$ для переходу напівпровідник-ізолятор [58, 59, 60]. В [73] було показано, що врахування частотної залежності може понизити значення критичної константи зв'язку.

В цьому розділі ми дослідимо детально генерацію щілини в графені. Результати, викладені тут, були отримані в роботі [63]. Ми покажемо, що розв'язок рівняння на щілину з динамічною поляризацією призводить до значення критичної константи зв'язку $\alpha_c = 0.92$ замість $\alpha_c = 1.62$ у випадку статичної поляризації.

Також буде досліджено фазовий перехід напівпровідник-ізолятор, що відбувається при перевищенні критичної константи зв'язку. Завдяки скейлінговій інваріантності моделі з кулонівською взаємодією вважалося, що даний перехід має нескінченний порядок [73, 74]. Такі фазові переходи належать до класу так званих конформних фазових переходів [103]. Однак, відповідно до нещодавніх МК симуляцій [58] (див. також [104]), можна зробити висновок, що цей перехід є фазовим переходом другого порядку. Однією з причин такої поведінки може бути ефект скінченних розмірів ґратки [105, 106, 107]. З

іншого боку, відповідно до [88, 89, 92], ефективна теорія квазічастинок в графені має містити, окрім кулонівської взаємодії, ще локальну чотириферміонну взаємодію, як наслідок мікрокопічних взаємодій на ґратці. Така взаємодія описується розмірною константою зв'язку, і тому безпосередньо порушує скейлінгову симетрію в ефективній моделі. З урахуванням таких взаємодій можна очікувати, що реалізуватиметься звичайний фазовий перехід другого порядку.

В цьому розділі ми промоделюємо чотириферміонну взаємодію простою моделлю Гросса-Неве і покажемо, що (1) замість критичної точки з'являється критична лінія в площині електронної та чотириферміонної констант зв'язку, що відділяє фазу з порушенням симетрії; (2) фазовий перехід вздовж цієї лінії при $0 < \alpha < \alpha_c$ є переходом другого роду; (3) критична константа є меншою, ніж у випадку чисто кулонівської взаємодії, а критичні індекси виявляються близькими до отриманих в ґраткових симуляціях [58, 59].

Структура цього розділу наступна. В підрозділі (2.2) ми розв'яжемо рівняння на щілину із врахуванням частотної залежності поляризаційної функції і визначимо критичну константу. Потім для знаходження аналітичних результатів ми повернемось до випадку статичної поляризації і знайдемо асимптотичну поведінку щілини, обчислимо екситонний конденсат, кореляційну довжину та критичні показники біля критичної точки α_c . В підрозділі (2.4) ми розглянемо додаткову чотириферміонну взаємодію, знайдемо критичну лінію в площині кулонівської та чотириферміонної взаємодії, і визначимо критичні показники вздовж цієї лінії. У висновках ми підсумуємо основні результати.

2.2 Генерація щілини та критична константа зв'язку

В цьому розділі ми вивчимо спонтанну генерацію щілини в спектрі квазічастинок у графені. Рівняння Швінгера-Дайсона для пропагатора квазічастинок набуває наступного вигляду:

$$S^{-1}(p_0, \mathbf{p}) = p_0\gamma^0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} - ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} D(p_0 - k_0, \mathbf{p} - \mathbf{k})\gamma^0 S(k_0, \mathbf{k})\gamma^0, \quad (2.2.1)$$

де кулонівський пропагатор $D(q_0, \mathbf{q})$ дається виразом (1.3.39) і в наближенні випадкових фаз поляризація дорівнює (1.3.40). Поправки до вершини є малими [87] і в подальшому ми ними нехтуємо.

Загальна форма пропагатора квазічастинок дається наступною формулою:

$$S^{-1}(p_0, \mathbf{p}) = Z^{-1}p_0\gamma^0 - A\mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} - \Delta, \quad (2.2.2)$$

де Z, A, Δ - функції від p_0, \mathbf{p} . Ми вважаємо, що залежність цих функцій від енергії p_0 є досить слабкою, тому можна апроксимувати ці функції їх значеннями при $p_0 = 0$. В такому наближенні легко побачити, що $Z = 1$. Після віківського повороту $k_0 = i\omega$ ми отримуємо систему рівнянь для $A(\mathbf{p}), \Delta(\mathbf{p})$:

$$A(\mathbf{p}) = 1 + \frac{e^2}{\kappa\mathbf{p}^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} D(\omega, \mathbf{p} - \mathbf{k}) \frac{\mathbf{p}\mathbf{k}A(\mathbf{k})}{\omega^2 + \mathbf{k}^2A^2(\mathbf{k}) + \Delta^2(\mathbf{k})}, \quad (2.2.3)$$

$$\Delta(\mathbf{p}) = \Delta_0 + \frac{e^2}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} D(\omega, \mathbf{p} - \mathbf{k}) \frac{\Delta(\mathbf{k})}{\omega^2 + \mathbf{k}^2A^2(\mathbf{k}) + \Delta^2(\mathbf{k})}, \quad (2.2.4)$$

де Δ_0 - “гола” щілина, введена як додатковий параметр. Ми можемо записати інтеграл по ω як

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega D(\omega, \mathbf{q}) \frac{1}{\omega^2 + \mathbf{k}^2A^2 + \Delta^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx f(x)}{x^2\mathbf{q}^2 + \mathbf{k}^2A^2 + \Delta^2},$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} + g}, \quad g = \frac{\pi N_f \alpha}{4}. \quad (2.2.5)$$

Функція $f(x)$ слабо змінюється від $1/(1+g)$ при $x = 0$ (це відповідає миттєвому наближенню для $D(\omega, \mathbf{q})$) до 1 при $x = \infty$. Інтеграл в рівнянні (2.2.5) може бути обчислений точно

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{|\mathbf{q}| \sqrt{\mathbf{k}^2 A^2 + \Delta^2}} J(d, g), \quad d = \frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 A^2 + \Delta^2}}{|\mathbf{q}|}, \\ J(d, g) &= \frac{(d^2 - 1)(\pi - gc(d)) + dg^2 c(g)}{d^2 + g^2 - 1}, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

де

$$c(x) = \frac{2 \cosh^{-1}(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1, \quad c(x) = \frac{2 \cos^{-1}(x)}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x < 1, \quad c(1) = 2.$$

Для $\Delta = 0$, поклавши $A = 1$ в правій частині рівняння (2.2.3), отримаємо однопетльову поправку [108]. Основний внесок до неї дається областю імпульсів $k \gg p$ в інтегралі (2.2.3),

$$A(p) = 1 + \frac{2}{\pi^2 g N_f} (\pi - 2g + (g^2 - 1)c(g)) \ln \frac{\Lambda}{p} + o(1), \quad (2.2.7)$$

де Λ - ультрафіолетове обрізання, величина якого є порядку оберненої сталої гратки графену. Функція $A(p)$ ренормує швидкість Фермі $v_F^*(p) = v_F A(p)$. Зростання $v_F^*(p)$ в інфрачервоній границі припиняється завдяки ненульовій щілині (див. р-ня (2.2.3)). Вплив перенормування швидкості Фермі на генерацію щілини було досліджено в [109], де було показано, що залежність швидкості від імпульсів збільшує критичне значення константи зв'язку. В подальшому ми будемо вважати, що перенормування швидкості вже виконано, і покладемо $A = 1$ в рівнянні (2.2.4), яке буде мати вигляд:

$$\Delta(\mathbf{p}) = \Delta_0 + \frac{e^2}{\kappa} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{\Delta(\mathbf{k})}{|\mathbf{p} - \mathbf{k}| \sqrt{\mathbf{k}^2 + \Delta^2(\mathbf{k})}} J(d = \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{p} - \mathbf{k}|}, g). \quad (2.2.8)$$

Оскільки функція J слабо залежить від кута між векторами \mathbf{p} та \mathbf{k} , ми можемо апроксимувати $|\mathbf{p} - \mathbf{k}| \rightarrow \max(|\mathbf{p}|, |\mathbf{k}|)$. Таким чином

$$J\left(\frac{k}{\max(k, p)}, g\right) = J(1, g)\theta(k - p) + J\left(\frac{k}{p}, g\right)\theta(p - k). \quad (2.2.9)$$

Припускаючи, що $\Delta(\mathbf{p}) = \Delta(|\mathbf{p}|)$ і інтегруючи по кутам в рівнянні (2.2.8), ми отримаємо

$$\Delta(p) = \Delta_0 + \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{dk}{\sqrt{k^2 + \Delta^2(k)}} k \Delta(k) \mathcal{K}(p, k), \quad (2.2.10)$$

де ядро має вигляд

$$\mathcal{K}(p, k) = \frac{\theta(p - k)}{p} K\left(\frac{k}{p}\right) J\left(\frac{k}{p}, g\right) + \frac{\theta(k - p)}{k} K\left(\frac{p}{k}\right) J(1, g) \quad (2.2.11)$$

та $K(x)$ - повний еліптичний інтеграл першого роду, $\theta(x)$ - функція Хевісайда. У випадку голої щілини $\Delta_0 = 0$ рівняння (2.2.10) допускає нетривіальний розв'язок, котрий біфуркаційним чином залежить від критичної константи зв'язку $\alpha = \alpha_c$. Для того, щоб знайти цю критичну точку, ми знехтуємо квадратичним та вищими порядками по Δ в рівнянні (2.2.10). Треба підкреслити, що це не є наближенням: це точний метод для знаходження критичної точки в теорії біфуркацій [110]. Таким чином біфуркаційне рівняння дозволяє лінеаризацію (2.2.10), що в результаті дає

$$\Delta(p) = \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty dk \Delta(k) \mathcal{K}(p, k). \quad (2.2.12)$$

Ультрафіолетове обрізання Λ в біфуркаційній точці можна покласти рівним нескінченості [110], що робить дане рівняння масштабно інваріантним. Тому підставляючи щілину у формі $\Delta(p) = p^{-\gamma}$, отримаємо трансцендентне

рівняння на γ :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{4g}{\pi^3 N_f} \int_0^\infty dx x^{-\gamma} \left[\theta(1-x)K(x)J(x,g) + J(1,g) \frac{\theta(x-1)}{x} K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ &= \frac{4g}{\pi^3 N_f} \int_0^1 dx \left[x^{-\gamma} J(x,g) + J(1,g)x^{\gamma-1} \right] K(x), \quad 0 < \gamma < 1, \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

де $J(x,g)$ визначено в (2.2.6) і

$$J(1,g) = \begin{cases} \frac{2 \arccos g}{\sqrt{1-g^2}}, & g \leq 1, \\ \frac{\ln(g+\sqrt{g^2-1})}{\sqrt{g^2-1}}, & g \geq 1. \end{cases} \quad (2.2.14)$$

Рівняння (2.2.13) визначає корені γ для будь-якої константи зв'язку g . Біфуркація відбувається, коли два корені на інтервалі $(0, 1)$ стають рівними. Чисельно це відбувається для $\gamma = 1/2$. Відповідне значення критичної константи для фізичної кількості “флейворів” ($N_f = 2$):

$$g_c = 1.445, \quad (2.2.15)$$

що відповідає $\alpha_c = 0.92$. Для значень $g > g_c$ корені стають комплексними, сигналізуючи про осциляційну поведінку щілини. Рівняння (2.2.13) визначає критичну лінію на площині (α, N_f) , котра представлена на Рис. (2.1).

Цю лінію можна порівняти з критичною лінією (1.3.61)

$$\alpha_c = \frac{4\lambda_c}{2 - \pi N_f \lambda_c}, \quad (2.2.16)$$

отриманою в попередньому розділі при врахуванні статичної поляризаційної функції. Зауважимо, що $\lambda_c = 1/4$ для використаної вище апроксимації ядра (1.3.50, 2.3.19), і $\lambda_c = 0.23$ при більш строгому аналізі, викладеному в (1.3.2) та роботі [61].

Найбільша відмінність між цими двома критичними лініями полягає в наявності критичної кількості “флейворів” $N_{crit} = 2/\pi\lambda_c$ для критичної лінії (2.2.16), в якій $\alpha = \infty$. В той же час α ніколи не прямує до нескінченості при скінчених N_f для критичної лінії (2.2.13), представленої на Рис. (2.1)

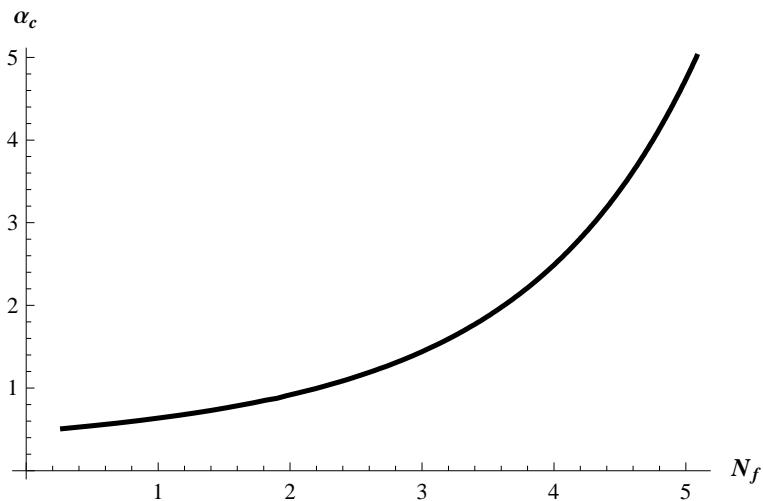


Рис. 2.1 Критична константа в залежності від N_f .

Нещодавно в роботі [109] були проведена спроба врахувати частотну залежність однопетельової поляризації (1.3.40), моделюючи її введенням додаткового $\sqrt{2}$ в знаменнику (1.3.41). В цьому випадку критичне значення стає рівним $\alpha_c = 1.13$. Більш детальний аналіз із використанням біфуркаційної теорії дає значення $\alpha_c = 0.93$, котре є дуже близьким до знайденого нами. Двохпетлеві обчислення в методі ренормалізаційної групи дають значення $\alpha_c = 0.833$ [111].

Динамічна щілина генерується тільки для $\alpha > \alpha_c$. Оскільки для вільного графену “постійна тонкої структури” $\alpha \approx 2.19$ є надкритичною, то згенерована динамічна щілина мусить зробити графен діелектриком. Треба зазначити,

що для графена на підкладці SiO_2 діелектрична константа $\kappa \approx 2.8$ і $\alpha \approx 0.78$, тобто система є в докритичному режимі.

Хоча значення α_c є досить великим для того, щоб застосовувати наближення слабкого зв'язку, порівняння знайдених нами аналітичних результатів з чисельними монте-карлівськими [58], які дають $\alpha_c = 1.08 \pm 0.05$, підтверджує коректність використаного підходу.

2.3 Нелінійне рівняння та критичні показники

Проведений вище аналіз адекватно описує ситуацію при критичній константі, тобто в біфуркаційній точці початкового нелінійного рівняння. Для вивчення залежності від імпульсів розв'язку рівняння (2.2.10) поза критичною точкою ми знову повернемось до статичної поляризації, в якій $J = \pi/(1+g)$. Тоді рівняння на щілину (2.2.10) може бути записано у вигляді

$$\Delta(p) = \Delta_0 + \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^\Lambda \frac{dk k \Delta(k)}{\sqrt{k^2 + \Delta^2(k)}} \mathcal{K}(p, k), \quad \lambda = \frac{\alpha}{2(1 + \pi N_f \alpha / 4)}, \quad (2.3.17)$$

з ядром (порівняйте з динамічним ядром (2.2.11))

$$\mathcal{K}(p, k) = \frac{1}{p+k} K\left(\frac{2\sqrt{pk}}{p+k}\right) = \frac{\theta(p-k)}{p} K\left(\frac{k}{p}\right) + \frac{\theta(k-p)}{k} K\left(\frac{p}{k}\right). \quad (2.3.18)$$

Наше рівняння на щілину суттєво відрізняється від аналогічного в теорії БКШ, в якій щілина не залежить від імпульсів. На Рис. (2.2), представлено результати чисельного розв'язання для (2.3.17) при $\Delta_0 = 0$, $N_f = 2$ і деяких значень λ . Щілина слабо залежить від імпульсу до значень $p \sim \Delta(0)$,

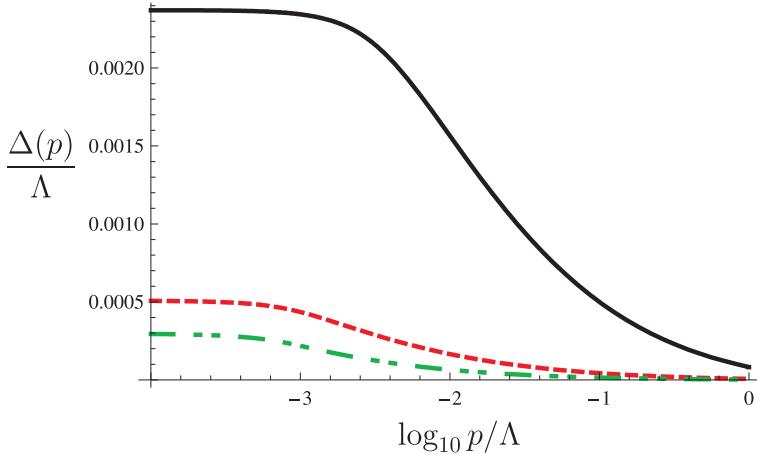


Рис. 2.2 Залежність від імпульсу для розв'язку рівняння (2.3.17) для $\Delta_0 = 0, N_f = 2$: суцільна (чорна) лінія для $\lambda = 0.3$, пунктирна (червона) лінія для $\lambda = 0.27$, і пунктирно-точкова (зелена) лінія для $\lambda = 0.25$.

після чого залежність стає дуже суттєвою. Для оцінки щілини $\Delta(0)$ необхідно знати зонний параметр Λ , який можна отримати прирівнявши інтеграл від хвильового вектора по зоні Брілюєна до інтеграла по двом діраківським точкам з обрізанням k_c . Ми отримуємо $k_c = (\pi/\sqrt{3})^{1/2}(2/a)$, де a - постійна ґратки графена, таким чином, відновлюючи \hbar та $v_F = \sqrt{3}ta/(2\hbar)$, отримуємо $\Lambda = \hbar v_F k_c = \sqrt{\pi\sqrt{3}}t \approx 2.33t$. Для константи перескоку $t = 3\text{ eV}$, маємо $\Lambda \approx 7\text{ eV}$. Максимально можлива $\Delta(0)$ досягається при $\alpha \rightarrow \infty$, що відповідає значенню $\lambda = 1/\pi \approx 0.32$ ($N_f = 2$). Для значень λ , використаних в Рис. (2.2), можна оцінити: $\Delta(0) = 200\text{ K}, 40\text{ K}, 25\text{ K}$ для $\lambda = 0.3, 0.27, 0.25$, відповідно.

Для того, щоб отримати аналітичний опис розв'язків рівняння (2.3.17) ми апроксимуємо еліптичні інтеграли в (2.3.18) їхніми асимптотичними значеннями для $p \ll k$ та $p \gg k$. Тоді для ядра ми отримаємо наступний вираз:

$$\mathcal{K}(p, k) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\theta(p - k)}{p} + \frac{\theta(k - p)}{k} \right). \quad (2.3.19)$$

Це дозволить звести нелінійне інтегральне рівняння (2.3.17) до нелінійного диференціального рівняння другого роду

$$(p^2 \Delta'(p))' + \lambda \frac{p \Delta(p)}{\sqrt{p^2 + \Delta^2(p)}} = 0, \quad (2.3.20)$$

з інфрачервоною та (IR) та ультрафіолетовою (UV) граничними умовами:

$$p^2 \Delta'(p) \Big|_{p=0} = 0, \quad (2.3.21)$$

$$(p \Delta(p))' \Big|_{p=\Lambda} = \Delta_0. \quad (2.3.22)$$

Рівняння (2.3.20) є масштабно інваріантним, тому, якщо $\Delta(p)$ - розв'язок, то і $l\Delta(p/l)$ також є розв'язком. Масштабна інваріантність порушується тільки UV граничною умовою.

Параметром порядку для переходу метал-діелектрик в графені є кіральний конденсат $\langle 0 | \bar{\Psi} \Psi | 0 \rangle$. Він спонтанно порушує початкову $U(2N_f)$ симетрію до $U(N_f) \otimes U(N_f)$, але зберігає інваріантність відносно перетворення парності та обернення часу. Його можна виразити через повний ферміонний пропагатор наступним чином:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\Psi} \Psi | 0 \rangle &= - \lim_{x \rightarrow 0} \langle 0 | T\Psi(x) \bar{\Psi}(0) | 0 \rangle = -i\text{tr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int^{\Lambda} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} G(\omega, \mathbf{p}) = \\ &= -\frac{N_f}{\pi} \int_0^{\Lambda} \frac{dp p \Delta(p)}{\sqrt{p^2 + \Delta^2(p)}} = \frac{N_f}{\pi \lambda} p^2 \Delta'(p) \Big|_{p=\Lambda}, \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

де для отримання останньої рівності ми використали рівняння (2.3.20). Отже, конденсат є ненульовим, коли існує нетривіальний розв'язок рівняння на щілину.

Можна легко знайти розв'язки рівнянь (2.3.20) в асимптотичних областях.

Для $p \ll \Delta(p)$ маємо

$$\Delta(p) = C_1 + \frac{C_2}{p}. \quad (2.3.24)$$

ІR гранична умова (2.3.21) дає $C_2 = 0$, таким чином, $\Delta(p) \simeq C_1$ при $p \ll \Delta(p)$.

Для $p \gg \Delta(p)$:

$$\Delta(p) \simeq C_3 p^{-\gamma_+} + C_4 p^{-\gamma_-}, \quad \gamma_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\lambda - \lambda_c}. \quad (2.3.25)$$

Ясно, що для знаходження розв'язку рівняння (2.2.10) необхідним є існування такого розв'язку нелінійного диференціального рівняння (2.3.20), який пов'язує асимптотики $\Delta(p) \simeq \text{const}$ в інфрачервоній області ($p \rightarrow 0$) з асимптотиками (2.3.25) при великих імпульсах. Для цього визначимо

$$\Delta(p) = e^t u(t + t_0), \quad t = \ln p, \quad (2.3.26)$$

де - функція $u(t)$ задовольняє наступному рівнянню:

$$u'' + 3u' + 2u + \lambda \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = 0. \quad (2.3.27)$$

ІR гранична умова переходить в

$$e^{2t} (u' + u) \Big|_{t=-\infty} = 0. \quad (2.3.28)$$

Ми вимагаємо, щоб $e^t u(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow -\infty$. Всі інші розв'язки для $\Delta(p)$ можуть бути отримані варіацією константи t_0 . В цій нормалізації інфрачервоний масштаб загального розв'язку дається виразом $\Delta(0) = e^{-t_0}$.

Залежність інтегрального рівняння (2.2.10) від голої щілини Δ_0 тепер стає ультрафіолетовою граничною умовою для диференціального рівняння:

$$u'(t_\Lambda + t_0) + 2u(t_\Lambda + t_0) = \Delta_0/\Lambda. \quad (2.3.29)$$

Ця умова визначає параметр $t_0 = -\ln \Delta(0)$ як функцію від константи зв'язку λ , голої щілини Δ_0 та обрізання Λ . Рівняння (2.3.27) можна переписати у формі

$$u'' + 3u' = -\frac{d}{du}V(u), \quad V(u) = u^2 + \lambda\sqrt{1+u^2}, \quad (2.3.30)$$

або, еквівалентно,

$$\left(\frac{1}{2}(u')^2 + V(u)\right)' = -3(u')^2. \quad (2.3.31)$$

Отже, рівняння (2.3.30) описує рух частинки одиничної маси, що рухається в потенціалі V з тертям, пропорційним до швидкості. “Енергія” $\frac{1}{2}(u')^2 + V(u)$ досягає мінімуму при $u = 0$, тому частинка рухається в напрямку $u = 0$ і гальмується тертям. Асимптотична поведінка біля $u = 0$ визначається лінеаризованим рівнянням

$$u'' + 3u' + (2 + \lambda)u = 0, \quad (2.3.32)$$

і може бути різною в різних режимах. Так, при $\lambda > \lambda_c \equiv 1/4$ - надкритичний режим

$$u(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{A}{\sqrt{\lambda - \lambda_c}} e^{-3t/2} \sin \left[\sqrt{\lambda - \lambda_c} (t + \delta) \right], \quad (2.3.33)$$

та $\lambda < \lambda_c$ - докритичний

$$u(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{B}{\sqrt{\lambda_c - \lambda}} e^{-3t/2} \sinh \left[\sqrt{\lambda_c - \lambda} (t + \delta) \right], \quad (2.3.34)$$

де константи A, B і δ є функціями від константи зв'язку λ . Ми навмисно виділили фактор $1/\sqrt{\lambda_c - \lambda}$ перед рівняннями (2.3.34) та (2.3.33), оскільки функція $u(t)$ має бути нетривіальною при $\lambda = \lambda_c$. Очевидно, що $A(\lambda = \lambda_c) = B(\lambda = \lambda_c)$.

Асимптотика (2.3.34) та (2.3.33) означає, що в докритичному режимі частинка при початковій умові $u(-\infty)$ досягне $u = 0$ за нескінченний час. На

противагу до цього, в надкритичному режимі частинка досягне за скінченний час і буде осцилювати в околі $u = 0$ із згасаючою амплітудою.

Легко побачити, що в докритичному режимі немає нетривіальних розв'язків, що задовольняють UV граничну умову при $\Delta_0 = 0$. В надкритичному режимі UV гранична умова (2.3.29) з $\Delta_0 = 0$ допускає нескінченну кількість розв'язків для масштабу щілини $\Delta(0)$, який відповідає різним розв'язкам диференціального рівняння

$$u'(t_\Lambda + t_0) + 2u(t_\Lambda + t_0) \approx \frac{A\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda - \lambda_c}} e^{-3(t_\Lambda + t_0)/2} \sin(\theta + \phi) = 0, \quad (2.3.35)$$

де

$$\begin{aligned} \theta &= \sqrt{\lambda - \lambda_c}(t_\Lambda + t_0 + \delta) = \sqrt{\lambda - \lambda_c} \ln \left(\frac{e^\delta \Lambda}{\Delta(0)} \right), \\ \phi &= \arctan \left(2\sqrt{\lambda - \lambda_c} \right). \end{aligned}$$

Таким чином, розв'язок визначається $\theta = \pi n - \phi$, або

$$\Delta(0) = \Lambda e^\delta \exp \left(-\frac{\pi n - \phi}{\sqrt{\lambda - \lambda_c}} \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3.36)$$

Розв'язок з кількістю вузлів $n = 1$ відповідає основному стану, оскільки він дає найбільшу згенеровану ферміонну масу і має найнижчу енергію. Критична константа зв'язку $\lambda_c = 1/4$ є біфуркаційною точкою інтегрального рівняння (2.2.10) зі статичною поляризацією. Вираз (2.3.36) для щілини означає, що ця біфуркаційна точка відповідає неперевному фазовому переходу нескінченного роду. Як показано в попередньому розділі, критична константа λ_c пов'язана з явищем “падіння на центр” в квантовій механіці. Подібна ситуація має місці в квантовій електродинаміці при сильній константі зв'язку [6], де в драбинному наближенні (і більш загальному вмороженому (quenched)

наближенні без ферміонних петель [94, 95, 96, 97]) було показано, що фазовий перехід є також нескінченного роду. Безрозмірна кореляційна довжина

$$\xi = \frac{\Lambda}{\Delta(0)} \sim \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda - \lambda_c}}\right), \quad (2.3.37)$$

експоненційно зростає при $\lambda \rightarrow \lambda_c$. Така поведінка є типовою для фазового переходу Березинського–Костерліца–Таулесса, або конформного фазового переходу [103] і, очевидно, пов'язана з масштабною інваріантністю задачі. Однак, треба зазначити, що із врахуванням скінчених розмірів графену, цей перехід має перейти в звичайний фазовий перехід другого порядку (як було показано в КЕД в роботі [105]).

Рівняння (2.3.37) означає також, що в непертурбативній фазі існує нетривіальна залежність константи зв'язку α (або швидкості Фермі v_F) від масштабу, хоча пертурбативною залежністю ми знехтували. Визначаючи β -функцію в стандартний спосіб, ми знаходимо

$$\beta(\alpha) \equiv \Lambda \frac{d\alpha}{d\Lambda} = -\frac{\pi}{4}(1 + \pi N_f \alpha / 4)^2 (\lambda - \lambda_c)^{3/2}, \quad \lambda > \lambda_c, \quad (2.3.38)$$

де λ визначена в (2.3.17). β -функція залежить неаналітично від константи зв'язку α і не може бути отримана в пертурбативній теорії. Ми очікуємо, при врахуванні пертурбативної залежності константи α , фазовий перехід стане переходом другого роду і β -функція (2.3.38) не буде містити особливостей при наближенні до критичної точки λ_c .

Параметр порядку $\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle$ в термінах функції $u(t)$ виражається як

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = \frac{N_f}{\pi \lambda} e^{2t_\Lambda} (u'(t_\Lambda + t_0) + u(t_\Lambda + t_0)), \quad (2.3.39)$$

і дорівнює

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = -\frac{N_f A}{\pi \sqrt{\lambda(\lambda - \lambda_c)}} \Lambda^{1/2} \Delta^{3/2}(0) \sin(2\phi) = -\frac{N_f A}{\pi \lambda^{3/2}} \Lambda^{1/2} \Delta^{3/2}(0), \quad (2.3.40)$$

де ми використали спiввiдношення $\theta = \pi - \phi$.

Для ненульвої голої щiлини $\Delta_0 \neq 0$ ми отримаємо наступне рiвняння для масштабу $\Delta(0)$:

$$\Delta_0 = \frac{A\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda - \lambda_c}} \frac{\Delta^{3/2}(0)}{\sqrt{\Lambda}} \sin(\theta + \phi) \quad (2.3.41)$$

та параметр порядку

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = \frac{N_f}{\pi \lambda} \Lambda \left[\Delta_0 - \frac{A}{\sqrt{\lambda - \lambda_c}} \frac{\Delta^{3/2}(0)}{\sqrt{\Lambda}} \sin \theta \right]. \quad (2.3.42)$$

Запишемо $\theta + \phi = \pi - \epsilon$, де ϵ прямує до нуля при $\Delta_0 \rightarrow 0$ і $\lambda \rightarrow \lambda_c$. Цi рiвняння можна переписати як:

$$\Delta_0 = \frac{A\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda - \lambda_c}} \frac{\Delta^{3/2}(0)}{\sqrt{\Lambda}} \sin \epsilon, \quad (2.3.43)$$

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = \frac{N_f \Lambda}{\pi \lambda} \left[\frac{2\lambda - 1}{2\lambda} \Delta_0 - A \frac{\Delta^{3/2}(0) \cos \epsilon}{\sqrt{\Lambda}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right]. \quad (2.3.44)$$

Така форма рiвнянь зручна для знаходження критичних iндексiв бiля точки фазового переходу λ_c [9, 112]. Критичнi iндекси описують наближення до критичної точки таких параметрiв як кореляцiйна довжина

$$\xi = \frac{\Lambda}{\Delta(0)} \sim (\lambda - \lambda_c)^{-\nu}, \quad \lambda \rightarrow \lambda_c,$$

параметр порядку

$$\frac{\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle}{\Lambda^2} \sim (\lambda - \lambda_c)^\beta, \quad \lambda \rightarrow \lambda_c,$$

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle \Big|_{\lambda=\lambda_c} \sim \Delta_0^{1/\delta}, \quad \Delta_0 \rightarrow 0,$$

сприйнятливість

$$\chi = \frac{\partial \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle}{\partial \Delta_0} \Big|_{\Delta_0=0} \sim (\lambda - \lambda_c)^{-\gamma}, \quad \lambda \rightarrow \lambda_c.$$

Якщо можна застосувати теорію фазових переходів другого роду, то індекси мають задовольняти гіперскейлінговим співвідношенням в будь-якій розмірності D :

$$\begin{aligned} 2\beta + \gamma &= D\nu, & 2\beta\delta - \gamma &= D\nu, \\ \frac{\delta - 1}{\delta + 1} &= \frac{2 - \eta}{D}, & \beta &= \nu \frac{D - 2 + \eta}{2}. \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

Індекс η описує поведінку кореляційної функції

$$\langle \bar{\Psi} \Psi(r) \bar{\Psi} \Psi(0) \rangle \Big|_{\lambda=\lambda_c} \propto r^{-D+2-\eta}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.3.46)$$

Використовуючи рівняння (2.3.41) та (2.3.42), ми знайдемо

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle \Big|_{\lambda=\lambda_c} = -\frac{4N_f \Lambda}{\pi} \left[\Delta_0 + \frac{2A\Delta^{3/2}(0)}{\sqrt{\Lambda}} \right], \quad (2.3.47)$$

$$\Delta(0) \sim \left(\frac{\Delta_0}{\ln(\Lambda/\Delta_0)} \right)^{2/3}, \quad \lambda = \lambda_c, \quad (2.3.48)$$

що дає змогу знайти критичний показник $\delta = 1$. Тоді з гіперскейлінгового співвідношення ми отримаємо:

$$\eta = 2, \quad \gamma = 0, \quad \beta = \frac{3\nu}{2}. \quad (2.3.49)$$

Фазовий перехід нескінченного роду з кореляційною довжиною (2.3.37) формально відповідає граници

$$\beta = \frac{3\nu}{2} \rightarrow \infty. \quad (2.3.50)$$

Такий фазовий перехід суттєво відрізняється від фазового переходу дослідженого в ґраткових симуляціях [58], де мав місце фазовий перехід другого порядку з критичними індексами $\delta \sim 2.3, \beta \sim 0.8, \gamma \sim 1$ для $N_f = 2$. Однією з причин такої відмінності можуть ефекти скінченності ґратки. Ефективно, скінчений розмір ґратки можна врахувати введенням інфрачервоного обрізання ($k_0 \sim \pi/L$, де L - лінійний розмір системи) в інтегральних рівняннях (2.2.10) [105, 106]. Іншою причиною можуть бути залишкові ґраткові взаємодії, котрі ми врахуємо в наступному підрозділі, розглянувши чотириферміонну взаємодію.

2.4 Фазова діаграма в моделі з додатковою чотириферміонною взаємодією

Як вже описувалось у вступі до даного розділу, порівнюючи аналітичні результати з моделюванням на ґратці [58, 59, 60], треба мати на увазі, що не-перервну теорію, яка описується лагранжіаном (1.3.36) необхідно доповнити іррелевантними членами, наявність яких випливає з існування ґратки. Зокрема, треба врахувати локальну чотириферміонну взаємодію, яка має входити до (1.3.36) окремим доданком. Величина цієї взаємодії залежить від конкретної ґраткової регуляризації. Більш того, згідно з [88, 89, 92], чотириферміонна взаємодія випливає безпосередньо із початкової ґраткової моделі в наближенні сильного зв'язку (tight-binding model). Хоч ці члени є іррелевантними з точки зору ренормалізаційної групи, вони можуть відігравати суттєву роль

в критичній поведінці. Для того, щоб дослідити, як такі ефекти впливають на генерацію маси, ми додамо до початкового лагранжіану чотириферміонну взаємодію типу Гроса-Неве

$$\mathcal{L}_4 = \frac{G}{2} (\bar{\Psi}_a \Psi_a)^2, \quad (2.4.51)$$

де чотириферміонна константа зв'язку G має порядок постійної ґратки, а “флейворний” індекс $a = 1, 2, \dots, N_f$. При $N_f = 2$ індекс a описує фізичний спін $1/2$ електронів. Взаємодія (2.4.51) порушує початкову симетрію $U(2N_f)$ дії (1.3.36) до симетрії $U(N_f) \times U(N_f) \times Z_2$. Щілина $\Delta \bar{\Psi} \Psi$ інваріантна відносно $U(N_f) \times U(N_f)$, але не відносно дискретної кіральної Z_2 симетрії: $\Psi \rightarrow \gamma_5 \Psi, \bar{\Psi} \rightarrow -\bar{\Psi} \gamma_5$. За відсутності голої щілини Δ_0 Z_2 симетрія забороняє генерацію ферміонної щілини в пертурбативній теорії. Поява енергетичної щілини пов'язана зі спонтанним порушенням дискретної кіральної симетрії, яке призводить до появи нейтрального конденсату $\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle$ ферміон-антиферміонних пар (екситонний конденсат).

Рівняння на щілину (2.2.10) у присутності взаємодії (2.4.51) модифікується наступним чином:

$$\Delta(p) = \Delta_0 - G \left(1 - \frac{1}{4N_f}\right) \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle + \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{dk k \Delta(k)}{\sqrt{k^2 + \Delta^2(k)}} \mathcal{K}(p, k), \quad (2.4.52)$$

де конденсат $\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle$ вносить вклад, як гола ферміонна щілина Δ_0 , і може бути обчислений з власної енергії ферміону. Фактор $1 - 1/4N_f$ в другому члені враховує вклади Хартрі і Фока ($-1/4N_f$). Для простоти ми розглянемо тільки член Хартрі; фоківський вклад за необхідності може бути легко відновлено.

но в кінцевих формулах¹. В наближенні для ядра, що використовувалось вище (2.3.19), конденсат дається виразом (2.3.23). Диференціальне рівняння (2.3.20) залишається незмінним, натомість модифікується ультрафіолетова гранична умова (2.3.22):

$$\left[\left(1 + \frac{\tilde{g}N_f}{\lambda} \right) p\Delta'(p) + \Delta(p) \right] \Big|_{p=\Lambda} = \Delta_0, \quad (2.4.53)$$

де введено позначення $\tilde{g} = G\Lambda/\pi$, а λ визначена в рівнянні (2.3.20). Використовуючи визначення щілини в термінах функції $u(t)$ (2.3.26) та її асимптотичні вирази (2.3.34),(2.3.33), рівняння (2.4.53) можуть бути записані для $\Lambda \gg \Delta(0)$ наступним чином:

$$B \frac{\Delta^{3/2}(0)}{\sqrt{\Lambda}} \left[\left(1 + \frac{\tilde{g}N_f}{\lambda} \right) \cosh \left(\omega \ln \frac{\Lambda e^\delta}{\Delta(0)} \right) + \frac{1 - \tilde{g}N_f/\lambda}{2\omega} \sinh \left(\omega \ln \frac{\Lambda e^\delta}{\Delta(0)} \right) \right] = \Delta_0, \\ \omega = \sqrt{\lambda_c - \lambda}, \quad \lambda < \lambda_c, \quad (2.4.54)$$

$$B \frac{\Delta^{3/2}(0)}{\sqrt{\Lambda}} \left[1 + \frac{\tilde{g}N_f}{\lambda} + \frac{1 - \tilde{g}N_f/\lambda}{2} \ln \frac{\Lambda e^\delta}{\Delta(0)} \right] = \Delta_0, \quad \lambda = \lambda_c, \quad (2.4.55)$$

$$A \frac{\Delta^{3/2}(0)}{\sqrt{\Lambda}} \left[\left(1 + \frac{\tilde{g}N_f}{\lambda} \right) \cos \left(\tilde{\omega} \ln \frac{\Lambda e^\delta}{\Delta(0)} \right) + \frac{1 - \tilde{g}N_f/\lambda}{2\tilde{\omega}} \sin \left(\tilde{\omega} \ln \frac{\Lambda e^\delta}{\Delta(0)} \right) \right] = \Delta_0, \\ \tilde{\omega} = \sqrt{\lambda - \lambda_c}, \quad \lambda > \lambda_c. \quad (2.4.56)$$

В даному наближенні $\lambda_c = 1/4$. Поклавши $\Delta_0 = 0$, визначимо динамічну щілину:

$$\Delta(0) = \Lambda e^\delta \left[\frac{\tilde{g}N_f(1 - 2\omega) - \lambda(1 + 2\omega)}{\tilde{g}N_f(1 + 2\omega) - \lambda(1 - 2\omega)} \right]^{\frac{1}{2\omega}}, \quad \lambda < \lambda_c, \quad (2.4.57)$$

$$\Delta(0) = \Lambda e^\delta \exp \left[-2 \frac{\tilde{g}N_f + 1/4}{\tilde{g}N_f - 1/4} \right], \quad \lambda = \lambda_c = \frac{1}{4}, \quad \tilde{g}N_f > \frac{1}{4}, \quad (2.4.58)$$

¹Внесок фоківського вкладу зводиться до заміни $4N_f$ на $4N_f - 1$ в рівнянні (2.4.60)

$$\Delta(0) = \Lambda e^\delta \exp \left[-\frac{\pi n}{\tilde{\omega}} - \frac{1}{\tilde{\omega}} \arctan \left(2\tilde{\omega} \frac{\tilde{g}N_f + \lambda}{\tilde{g}N_f - \lambda} \right) \right], \quad \lambda > \lambda_c, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4.59)$$

Треба зазначити, що розв'язки рівнянь (2.4.58) та (2.4.59) містять суттєву сингулярність при $\tilde{g} = 1/4N_f$ та $\lambda = \lambda_c$, відповідно.

Поклавши $\Delta(0) = 0$, ми знаходимо критичну лінію, що відділяє фази з порушену та непорушену симетріями:

$$\begin{cases} \tilde{g} = \frac{1}{4N_f} \left(1 + \sqrt{1 - \lambda/\lambda_c} \right)^2, & \lambda \leq \lambda_c = \frac{1}{4}, \\ \tilde{g} < \frac{1}{4N_f}, & \lambda = \lambda_c = \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (2.4.60)$$

Фазова діаграма в площині двох констант зв'язку показана на Рис. (2.3). Над

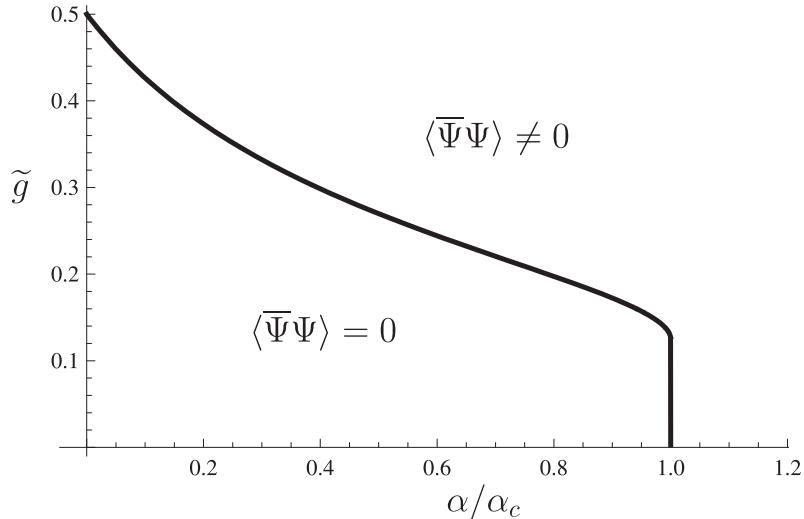


Рис. 2.3 Фазова діаграма при $N_f = 2$.

критичною лінією рівняння для щілини $\Delta(p)$ має нетривіальний розв'язок. Таким чином, кіральна симетрія є динамічно порушену, що означає існування ненульового вакуумного конденсату $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$. Для $\tilde{g} = 0$ умовою для генерації щілини є $\lambda > \lambda_c$. Відповідні критичні константи співпадають із визначеними в рівнянні (1.3.61). З іншому граничному випадку $\alpha = 0$ та $\tilde{g}_c = 1/N_f$ система

описується критичною поведінкою в моделі Гроса-Неве. В частині діаграми над критичною лінією $\lambda < \lambda_c$ короткодіюча чотириферміонна взаємодія відіграє важливу роль в формуванні конденсату, тоді як в області $\lambda > \lambda_c$ за формування конденсату в основному відповідають кулонівські сили.

Ми розглянемо фазовий перехід вздовж верхньої частини критичної лінії і обчислимо критичні індекси. Оскільки ми розглядаємо не біжучу константу зв'язку α (у відсутності перенормування швидкості Фермі v_F), ренормгруповий потік може бути визначений з рівняння (2.4.57) біля критичної точки

$$\frac{\Delta(0)}{\Lambda} \sim \left(\frac{\tilde{g} - \tilde{g}_1}{\tilde{g} - \tilde{g}_2} \right)^{\frac{1}{2\omega}}, \quad \tilde{g}_1 = \frac{(1 + 2\omega)^2}{4N_f}, \quad \tilde{g}_2 = \frac{(1 - 2\omega)^2}{4N_f}, \quad \tilde{g} > \tilde{g}_1 > \tilde{g}_2. \quad (2.4.61)$$

Це означає точну форму β -функції для константи зв'язку \tilde{g} :

$$\beta(\tilde{g}, \alpha) \equiv \Lambda \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \Lambda} \Big|_{\alpha, \Delta(0)} = -N_f(\tilde{g} - \tilde{g}_1)(\tilde{g} - \tilde{g}_2), \quad \tilde{g} > \tilde{g}_1, \quad (2.4.62)$$

яка має нетривіальну фіковану лінію при $\tilde{g} = \tilde{g}_1$ і є лінією фазового переходу. Підкреслимо, що β -функцію (2.4.62) отримано в непертурбативній фазі, де щілина для квазічастинок є спонтанно згенерованою. В пертурбативній фазі β була обрахована в [113] в головному порядку по $1/N_f$ і малій константі зв'язку α . Обивді β функції поводять себе як $\beta \simeq -(g - g_0)$ біля критичної точки $g_0 \sim (1 - \alpha)/N_f$.

Як видно з рівняння (2.4.61), фазовий перехід є переходом другого роду. Позначаючи відхилення від критичної лінії як $\tau \equiv \tilde{g} - \tilde{g}_1$ і враховуючи, що $\Delta(0) \sim \tau^{1/2\omega}$ ($\tau \rightarrow 0$), ми знаходимо індекс

$$\nu = \frac{1}{2\omega}. \quad (2.4.63)$$

Конденсат дається виразом

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = \frac{N_f B}{\pi \lambda} \Delta^{3/2}(0) \Lambda^{1/2} \left[\cosh \left(\omega \ln \frac{\Lambda e^\delta}{\Delta(0)} \right) - \frac{1}{2\omega} \sinh \left(\omega \ln \frac{\Lambda e^\delta}{\Delta(0)} \right) \right]. \quad (2.4.64)$$

На критичній лінії рівняння (2.4.54) призводить до $\Delta(0) \sim \Delta_0^{1/(3/2+\omega)}$. Підставляючи це у вираз для ферміонного конденсату, отримаємо співвідношення

$$\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle \sim \Delta^{\frac{3}{2}-\omega} \sim \Delta_0^{(3/2-\omega)/(3/2+\omega)}. \quad (2.4.65)$$

Таким чином, критичний індекс

$$\delta = \frac{3/2 + \omega}{3/2 - \omega}. \quad (2.4.66)$$

Він дорівнює $\delta = 2$ у випадку моделі Гроса-Неве, коли $\alpha = 0$ і $\delta \rightarrow 1$ при $\alpha \rightarrow \alpha_c$. Легко знайти також індекс β :

$$\beta = \frac{1}{2\omega} \left(\frac{3}{2} - \omega \right). \quad (2.4.67)$$

Нарешті, як випливає з рівнянь (2.4.54) та (2.4.64)

$$\partial_{\Delta_0} \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle \Big|_{\Delta_0=0} \sim \tau^{-1}, \quad \tau \rightarrow 0, \quad (2.4.68)$$

тобто $\gamma = 1$. Знайдені критичні індекси задовольняють гіперскейлінговим співвідношенням (2.3.45). Додатковий критичний індекс η можна обчислити незалежно, або із використанням гіперскейлінгових співвідношень, які дають $\eta = 2 - 2\omega$. За означенням, аномальна розмірність γ_m композитного оператора $\bar{\Psi} \Psi$ дається виразом $\dim(\bar{\Psi} \Psi) = D - 1 - \gamma_m$, тоді корелятор (2.3.46) призводить до співвідношення $\eta = D - 2\gamma_m$. В нашому випадку $D = 3$, ми отримуємо $\gamma_m = 1/2 + \omega$. Динамічна розмірність чотириферміонної взаємодії приблизно

дорівнює $\dim(\bar{\Psi}\Psi)^2 = 2\dim(\bar{\Psi}\Psi) = 4 - 2\gamma_m$. Оскільки $1/2 \leq \gamma_m \leq 1$ вздовж критичної лінії, $\dim(\bar{\Psi}\Psi)^2 \leq 3$, то чотириферміонний оператор $(\bar{\Psi}\Psi)^2$ є перенормовним. В термінології ренормалізаційної групи, $(\bar{\Psi}\Psi)^2$ стає релевантним оператором в скейлінговій області. В той же час він є іррелевантним далеко від критичної лінії, у відповідності зі стандартним ренормгруповим підходом [89], оскільки його ефекти подавлені степенями ультрафіолетового обрізання. З іншого боку, аномальна розмірність γ_m визначає поведінку ампультованої хвильової функції Бете-Соллітера зв'язаних станів (форм-фактора) $\chi^{(amp)}(q) \sim (q/\Delta(0))^{\gamma_m-1}$ при великих імпульсах $\Delta(0) \ll q \ll \Lambda$. Хвильова функція з великими γ_m ($\gamma_m > 1/2$) слабо спадає з імпульсом, що описує сильно зв'язані стани, які релевантні для критичного скейлінгу [114]. Оскільки такі зв'язані стани нагадують точкові частинки, масштабні властивості системи можуть бути описані ефективним лагранжіаном з елементарними скалярними полями (сучасне застосування можна знайти в роботі [115]). Комп'ютерні симуляції ґраткової моделі графену, можливо, виявлять наявність таких зв'язаних станів.

Ми бачимо, що додаткова чотириферміонна взаємодія типу Гроса-Неве грає важливу роль. По-перше, вона змінює порядок фазового переходу з нескінченного до другого. По-друге, критична константа зв'язку стає нижчою, ніж у моделі з чистою кулонівською взаємодією. По-третє, критична константа залишається близькою за значенням до знайдених в ґраткових симуляціях. [58, 59, 60]. Критичні індекси залежать від константи зв'язку α вздовж критичної лінії $0 < \alpha < \alpha_c$ і задовольняють гіперскейлінговим співвідношенням. Також слід відмітити, фазова діаграма (2.4.60) дуже схожа на аналогічну,

отриману в квантовій електродинаміці при сильній константі зв'язку в $(3+1)$ -та $(2+1)$ -вимірному просторах [116, 117, 118].

Частина критичної кривої з $\tilde{g} < 1/4N_f$ є специфічною і пов'язана з конформними фазовими переходами [103]. Вона характеризується, тим, що щілина має суттєву сингулярність в точці переходу. Також слід відмітити різку зміну спектру легких квазичастиник при перетині критичної точки: легкі зв'язані стани відсутні в симетричній фазі, однак присутні у фазі з порушенням симетрією². Відповідний ефективний потенціал для параметра порядку $\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle$, на відміну від відомого потенціалу Гінзбурга-Ландау, має фрактальну структуру в області $\alpha > \alpha_c$, де кулонівська взаємодія в основному відповідає за формування зв'язаних станів [74].

2.5 Висновки

В цьому розділі ми дослідили генерацію щілин в графені за відсутності хімічного потенціалу (в нейтральній точці). Розв'язуючи рівняння Швінгера-Дайсона із врахуванням частотної залежності поляризаційної функції, було аналітично знайдено значення критичної константи $\alpha_c = 0.92$, при якому відбувається генерація щілин. Це значення виявилося близьким до знайденого в чисельних експериментах. Однак на відміну від монте-карлівських симуляцій, в яких фазовий переход із генерацією щілин був фазовим переходом другого роду, переход, що мав місце при α_c , був фазовим переходом нескін-

²Детальний розгляд конформного фазового переходу в квантовій електродинаміці можна знайти в роботах [120, 119].

ченного роду (неперервний фазовий перехід) через специфіку кулонівської взаємодії.

З додатковою чотириферміонною взаємодією типу Гроса-Неве, яку ми додали до початкової дії, було знайдено критичну лінію (2.4.60) в площині кулонівської та чотириферміонної констант зв'язку, яка розділяє щілинну та безщілинну фази. Фазовий перехід вздовж цієї лінії є переходом другого роду при $0 < \alpha < \alpha_c$, при тому, що критична константа зв'язку є меншою, ніж у моделі з чистою кулонівською взаємодією. Критичні показники ν, δ, β вздовж лінії фазового переходу другого роду даються виразами (2.4.63), (2.4.66), (2.4.67), відповідно, а показник $\gamma = 1$. Вони задовольняють гіперскейлінговим співвідношенням і є, взагалі кажучи, функціями від кулонівської константи α та чотириферміонної константи \tilde{g} . Їхні значення близькі до відповідних показників, отриманих в ґраткових симуляціях [58, 59, 60].

Частина критичної лінії при $\tilde{g} < 1/4N_f$ є дуже специфічною і, як і раніше, описує неперервний (конформний) фазовий перехід з характерною суттєво сингулярною поведінкою при наближенні до критичної точки. Однак, форма цієї частини може бути змінена через врахування скінчених розмірів зразка [105]. Крім того, перенормування швидкості Фермі v_F може змінити вертикальну форму критичної лінії. Скоріш за все, за наявності цих ефектів неперервний фазовий перехід стане фазовим переходом другого роду. Ми сподіваємося, що точний вигляд критичної кривої буде визначено в подальших ґраткових симуляціях.

Наші результати мають важливe значення для інтерпретації ґраткових симуляцій низько-енергетичної польової моделі для квазічастинок в графені з

кулонівською взаємодією [58, 59, 60] через те, що ефективна чотириферміонна взаємодія виникає при гратковій регуляризації. Як було продемонстровано, незважаючи на слабкість цієї взаємодії, вона відіграє суттєву роль в критичній поведінці системи. Іншими спорідненими аспектами критичної поведінки є появі композитних електрон-діркових ступенів вільності, чиї форм-фактори слабо спадають з імпульсом, що визначається великою аномальною розмірністю. Їхня динаміка може бути досліджена подібно до того, як це робилось в квантовій електродинаміці при сильній константі зв'язку [121].

РОЗДІЛ 3

ГЕНЕРАЦІЯ ЩИЛИНИ У ЗОВНІШНЬОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

3.1 Вступ

В попередніх розділах було показано, що сильна кулонівська взаємодія між електронами та дірками в графені може привести до екситонної нестабільності з подальшим фазовим переходом в масивну фазу і перетворення графена на діелектрик.

В цьому розділі, базуючись на роботі [64], ми розглянемо вплив на критичну константу електронної взаємодії в графені зовнішнього магнітного поля. Як показано в [100, 101, 102], магнітне поле каталізує формування щілини для безмасових ферміонів в релятивістських системах і, навіть за найменшого притягування, приводить до формування конденсату, який порушує симетрію флейворну унітарну симетрію. Таким чином, система завжди знаходиться в надкритичному режимі, якщо є притягуюча взаємодія. Магнітний каталіз відіграє важливу роль в квантовому ефекті Хола в графені [71, 73, 90, 122, 123, 124], де він відповідає за зняття виродження рівнів Ландау.

Явище магнітного каталізу зумовлює те, що при наявності магнітного поля електрони в графені з кулонівською домішкою будуть знаходитись в надкритичному режимі для будь-якої величини заряду домішки. Рівняння Дірака з кулонівським потенціалом в присутності магнітного поля було розглянуто в

[125], де були знайдені точні розв'язки для деяких значень магнітного поля, однак жодних резонансів не було виявлено і залежність від заряду центру була регулярною.

В $(3+1)$ -вимірній квантовій електродинаміці задача кулонівського центру в магнітному полі була розглянута в [126]. Там було показано, що магнітне поле обмежує поперечний рух електронів і, як наслідок, електрон знаходиться ближче до ядра, ніж у вільному атомі. Таким чином, він сильніше “відчуває” кулонівську взаємодію. Отже, $Z_c\alpha$ зменшується в присутності магнітного поля. Цей результат узгоджується з явищем магнітного каталізу, відповідно до якого магнітне поле призводить до нульової критичної константи зв'язку в $(3+1)$ - та $(2+1)$ -вимірних теоріях внаслідок ефективної редукції розмірності простору $D \rightarrow D - 2$. Така редукція майже повністю нівелює роль кінетичної енергії і тому каталіз має місце для будь-якого притягуючого потенціалу.

В цьому розділі ми розглянемо задачу надкритичного кулонівського центру та радіальної потенціальної ями в однорідному магнітному полі в графені зі скінченою щілиною Δ . Знайдемо критичне значення цих потенціалів, при якому найнижчий позитивний рівень перетинає рівень $E = -\Delta$ і покажемо, що це критичне значення прямує до нуля при $\Delta \rightarrow 0$, що є квантовомеханічним аналогом явища магнітного каталізу.

3.2 Потенціальна яма

Електронні квазічастинкові стані в околі K_{\pm} точок в графені в полі кулонівської домішки та однорідному магнітному полі, перпендикулярному до площини графену, описуються діраківським гамільтоніаном в 2+1 вимірах:

$$H = \hbar v_F \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p} + \xi \Delta \tau_3 + V(r), \quad (3.2.1)$$

де канонічний імпульс $\mathbf{p} = -i\nabla + e\mathbf{A}/c$ містить вектор-потенціал \mathbf{A} , який відповідає зовнішньому магнітному полю \mathbf{B} , τ_i - матриці Паулі і Δ - щілина в спектрі квазічастинок. Двокомпонентний спінор $\Psi_{\xi s}$ несе “К-точковий” ($\xi = \pm$) та спіновий ($s = \pm$) індекси. Ми використовуємо стандартні позначення: $\Psi_{+s}^T = (\psi_A, \psi_B)_{K+s}$ та $\Psi_{-s}^T = (\psi_B, \psi_A)_{K-s}$, і A, B відповідають двом графеновим підграткам. Оскільки взаємодія $V(r)$ не залежить від спіну, в подальшому ми опускаємо спіновий індекс s .

Розглянемо спочатку рівняння Дірака для електрона в потенціальній ямі $V(r) = -V_0 \theta(r_0 - r)$ з $V_0 > 0$ в магнітному полі, перпендикулярному площині графену. Ми отримаємо

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \xi \Delta & \hbar v_F (-iD_x - D_y) \\ \hbar v_F (-iD_x + D_y) & -\xi \Delta \end{pmatrix} \Psi(\mathbf{r}) \\ &= [E - V(r)] \Psi(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

де $D_i = \partial_i + (ie/\hbar c)A_i$, $i = x, y$, є коваріантною похідною в симетричній калібровці $(A_x, A_y) = (B/2)(-y, x)$. Очевидно, що розв’язок біля K_- точки може бути отриманий через розв’язок біля K_+ точки заміною $\Delta \rightarrow -\Delta$ і перестановкою компонент спінора $\psi_A \leftrightarrow \psi_B$.

В полярних координатах

$$\begin{aligned} iD_x + D_y &= e^{-i\phi} \left(i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{ieBr}{2\hbar c} \right), \\ iD_x - D_y &= e^{i\phi} \left(i \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{ieBr}{2\hbar c} \right). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Ми можемо представити $\Psi(\mathbf{r})$ в термінах власних функцій кутового моменту $J_z = L_z + \sigma_z/2 = -i\partial/\partial\phi + \sigma_z/2$ наступним чином:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} e^{i(j-\frac{1}{2})\phi} f(r) \\ ie^{i(j+\frac{1}{2})\phi} g(r) \end{pmatrix}, \quad (3.2.4)$$

з $j = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$. Для функцій $f(r), g(r)$ отримаємо наступні рівняння:

$$f' - \frac{j+1/2}{r}f - \frac{r}{2l^2}f + \frac{E + \xi\Delta - V(r)}{\hbar v_F}g = 0, \quad (3.2.5)$$

$$g' + \frac{j-1/2}{r}g + \frac{r}{2l^2}g - \frac{E - \xi\Delta - V(r)}{\hbar v_F}f = 0, \quad (3.2.6)$$

де $l = \sqrt{\hbar c/|eB|}$ - магнітна довжина. Ці рівняння можуть бути легко розв'язані в областях $r < r_0$ та $r > r_0$ в термінах вироджених гіпергеометричних функцій Φ та Ψ . В області $r < r_0$, виключаючи функцію $g(r)$, ми отримуємо диференціальне рівняння другого порядку для $f(r)$:

$$f'' - \frac{1}{\rho}f' + \left[2p_V^2 - j - \frac{1}{2} - \frac{j^2 - j - 3/4}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{4} \right]f = 0, \quad (3.2.7)$$

де ми ввели безрозмірні величини:

$$p_V^2 = \frac{l^2[(E + V_0)^2 - \Delta^2]}{2(\hbar v_F)^2}, \quad p^2 = \frac{l^2(E^2 - \Delta^2)}{2(\hbar v_F)^2}, \quad (3.2.8)$$

та $\rho = r/l$. Рівняння (3.2.7) в області $r > r_0$ має такий самий вигляд, тільки необхідно покласти $V_0 = 0$.

Розв'язки, регулярні в точці $r = 0$, мають вигляд

$$f_1(\rho) = \rho^{j+\frac{1}{2}} e^{-\rho^2/4} \frac{C_1}{\Gamma(j+1/2)} \Phi \left(j + \frac{1}{2} - p_V^2, j + \frac{1}{2}; \frac{\rho^2}{2} \right), \quad (3.2.9)$$

$$g_1(\rho) = \frac{l(E + V_0 - \xi\Delta)}{\sqrt{2}\hbar v_F} \rho^{j+\frac{3}{2}} e^{-\rho^2/4} \frac{C_1}{\Gamma(j+3/2)} \Phi \left(j + \frac{1}{2} - p_V^2, j + \frac{3}{2}; \frac{\rho^2}{2} \right), \quad (3.2.10)$$

а ті, що спадають на нескінченості,

$$f_2(\rho) = C_2 \rho^{j+\frac{1}{2}} e^{-\rho^2/4} \Psi \left(j + \frac{1}{2} - p^2, j + \frac{1}{2}; \frac{\rho^2}{2} \right), \quad (3.2.11)$$

$$g_2(\rho) = \frac{\sqrt{2}\hbar v_F C_2}{l(E + \xi\Delta)} \rho^{j+\frac{3}{2}} e^{-\rho^2/4} \Psi \left(j + \frac{1}{2} - p^2, j + \frac{3}{2}; \frac{\rho^2}{2} \right), \quad (3.2.12)$$

відповідно (зауважимо, що ці вирази є справедливими при всіх $j = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$).

Потім зшиваючи рівняння при $r = r_0$

$$\frac{f_1(\rho)}{f_2(\rho)} \Big|_{\rho=\rho_0} = \frac{g_1(\rho)}{g_2(\rho)} \Big|_{\rho=\rho_0}, \quad \rho_0 = \frac{r_0}{l}, \quad (3.2.13)$$

ми отримуємо трансцендентне рівняння для енергетичних рівнів з повним моментом j :

$$\begin{aligned} & \frac{2(\hbar v_F)^2 (j + \frac{1}{2}) \Phi \left(j + \frac{1}{2} - p_V^2, j + \frac{1}{2}; \frac{\rho_0^2}{2} \right)}{l^2 (E + V_0 - \xi\Delta) \Phi \left(j + \frac{1}{2} - p_V^2, j + \frac{3}{2}; \frac{\rho_0^2}{2} \right)} = \\ & = (E + \xi\Delta) \frac{\Psi \left(j + \frac{1}{2} - p^2, j + \frac{1}{2}; \frac{\rho_0^2}{2} \right)}{\Psi \left(j + \frac{1}{2} - p^2, j + \frac{3}{2}; \frac{\rho_0^2}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

В наступних підрозділах ми проаналізуємо ці рівняння аналітично та чисельно.

3.2.1 Нестабільність в спектрі за відсутності магнітного поля

В цьому підрозділі ми розглянемо проблему нестабільності в потенціальній ямі за відсутності магнітного поля, котра буде слугувати відправною точкою для вивчення нестабільності, індукованої магнітним полем, яку ми розглянемо в наступному підрозділі. При $B = 0$ енергетичний спектр може бути отриманий прямим розв'язком рівняння Дірака, або як границя $l \rightarrow \infty$ в рівнянні (3.2.14). В останньому випадку можна скористатися формулами [127]

$$\Phi(a, c; z) = e^z \Phi(c - a, c; -z), \quad (3.2.15)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \Phi(a, c; -z/a) = \Gamma(c) z^{\frac{1-c}{2}} J_{c-1}(2\sqrt{z}), \quad (3.2.16)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} [\Gamma(1 + a - c) \Psi(a, c; -z/a)] = -i\pi e^{i\pi c} z^{\frac{1-c}{2}} H_{c-1}^{(1)}(2\sqrt{z}), \quad (3.2.17)$$

і $\operatorname{Im} z > 0$, $|\arg a| < \pi$ в двох останніх тотожностях.

Припускаючи, що $|E| < \Delta$, отримуємо¹

$$\frac{\sqrt{(E + V_0)^2 - \Delta^2}}{E + V_0 - \xi\Delta} \frac{J_{j-1/2}(\beta r_0)}{J_{j+1/2}(\beta r_0)} = \frac{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}{E - \xi\Delta} \frac{H_{j-1/2}^{(1)}(\beta' r_0)}{H_{j+1/2}^{(1)}(\beta' r_0)}, \quad (3.2.18)$$

де $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$ - функції Бесселя та Ганкеля, відповідно, $\beta = \sqrt{(E + V_0)^2 - \Delta^2}/\hbar v_F$, $\beta' = \sqrt{E^2 - \Delta^2}/\hbar v_F$, і квадратні корені визначені як $\operatorname{Im}\beta, \operatorname{Im}\beta' > 0$. В областях з $\operatorname{Im}\beta, \operatorname{Im}\beta' \neq 0$ можна використати співвідношення $H_\nu^{(1)}(iz) = (2/\pi i)e^{-i\pi\nu/2}K_\nu(z)$, $J_\nu(iz) = e^{i\pi\nu/2}I_\nu(z)$. Рівняння (3.2.18) є інваріантним відносно заміни $j \rightarrow -j, \xi \rightarrow -\xi$.

Розглянемо K_- точку ($\xi = -$). Аналізуючи рівняння (3.2.18), можна побачити, що енергетичний спектр є неперервним при $|E| > \Delta$ і дискретним при $|E| < \Delta$. Перший зв'язаний стан $E \lesssim \Delta$ з'являється при як завгодно

¹Для рівняння Дірака в радіальному потенціалі в $3 + 1$ вимірах див. [128]

слабкому потенціалі V_0 . Справді, при $j = -1/2$, що відповідає найменшому значенню відцентрового бар'єру, ми знаходимо

$$E \simeq \Delta \left[1 - 2 \left(\frac{\hbar v_F}{\Delta r_0} \right)^2 \exp \left(-\frac{2(\hbar v_F)^2}{V_0 \Delta r_0} - 2\gamma \right) \right], \quad (3.2.19)$$

де γ - константа Ейлера. Зауважимо, що розв'язки з енергією $E \lesssim \Delta$ та кутовим моментом $j = 1/2$ відсутні в K_- точці, натомість, такий розв'язок існує в K_+ точці, подібно до випадку кулонівського потенціалу. [61].

При зростанні V_0 і досягненні критичного значення

$$V_{0cr} = \Delta \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar v_F}{\Delta r_0} \right)^2 j_{0,1}^2} \right], \quad (3.2.20)$$

($j_{0,1} \approx 2.41$ - перший нуль функції Бесселя $J_0(x)$) найнижчий рівень енергії пірнає в нижній континуум ($E < -\Delta$). Можна помітити, що у випадку нульової щілини ($\Delta = 0$) взагалі немає зв'язаних станів. Натомість при перевищенні критичного значення потенціалу $V_0 > V_{0cr}$, яке при $\Delta = 0$ дорівнює $V_{0cr} = \hbar v_F j_{0,1} / r_0$, з'являються резонанси з комплексними енергіями, котрі призводять до нестабільності системи, подібно тому, як це відбувалось у випадку надкритичного кулонівського центру в Розділі 1. Поява резонансних станів одночасно з "пірнанням" дискретних станів в нижній континуум є типовою в КЕД-подібних системах [13, 14, 79, 81]. Ми покажемо в наступному підрозділі, що присутність магнітного поля суттєво змінює цю властивість.

Біля критичного значення потенціалу енергія резонансу має вигляд

$$\begin{aligned} E &= -\frac{V_0 - V_{0cr}}{\ln(1/\delta)} \exp \left(\frac{i\pi}{2 \ln(1/\delta)} \right), \\ \delta &= \frac{(V_0 - V_{0cr})r_0 e^{\gamma-1}}{2\hbar v_F}, \quad 0 < \delta \ll 1. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Залежність енергії від $V_0 - V_{0cr}$ (відхилення від критичного значення) для потенціальної ями є неаналітичною, але відрізняється від суттєво-сингулярної поведінки, яка має місце у випадку кулонівського центру. Це, звичайно, пов'язано з відсутністю масштабної інваріантності потенціалу $V(r)$.

3.2.2 Нестабільність в спектрі індукована магнітним полем

Перед тим як розглядати нестабільність спектру в потенціальній ямі за наявності однорідного магнітного поля, корисно привести вигляд для рівнів Ландау для електронів в графені. Якщо взаємодія відсутня ($V_0 = 0, r_0 \rightarrow 0$), рівняння (3.2.14) визначає відомий спектр рівнів Ландау:

$$E = -\xi\Delta, \quad j \leq -\frac{1}{2}, \quad (3.2.22)$$

$$E = \pm \sqrt{\Delta^2 + 2n \left(\frac{\hbar v_F}{l} \right)^2}, \quad n = 1, 2, \dots, j + \frac{1}{2} \leq n. \quad (3.2.23)$$

Треба зазначити, що рівень $E = \Delta$ ($E = -\Delta$) присутній тільки в K_- (K_+) точці.

Для ненульового V_0 рівні Ландау перестають бути виродженими. Використовуючи рівняння (3.2.14), можна отримати залежність рівнів від V_0 . Для рівнів Ландау $E = \Delta$ з різними j , їх енергії як функція V_0/Δ (при фіксованому магнітному полі B) зображені на Рис. (3.1) при $l\Delta/(\sqrt{2}\hbar v_F) = 0.1$ та $\rho_0 = r_0/l = 0.02$. Ми бачимо, що при зростанні V_0 все більше рівнів з різними j перетинають енергетичний рівень $E = -\Delta$. У відповідній вторинно квантованій теорії це означало б, що вакуум стає нестабільним відносно формування електрон-діркових пар [79, 81]. Однак, як зазначено у вступі, *резонансні розв'язки* в спектрі гамільтоніану (3.2.1) відсутні через наявність однорідного

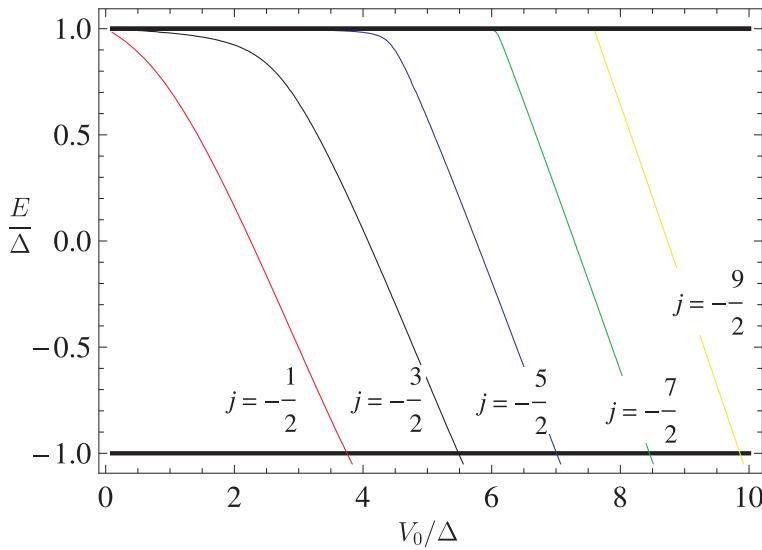


Рис. 3.1 Залежність найнижчих рівнів Ландау в K_- точці від V_0/Δ .

магнітного поля. Причиною цього є поява додатного доданку $r^2/4l^2$ в потенціалі ефективного рівняння Шредінгера для однієї з компонент спінора (див. р-ня. (3.3.33) і Рис. (3.3) в наступному підрозділі), який якісно змінює асимптотику ефективного потенціалу: в ненульовому полі потенціал зростає на нескінченністі, а при для $B = 0$ спадає. Отже, квазічастинки обмежуються потенціалом і не можуть вилетіти на нескінченність, формуючи тільки дискретні рівні.

Ми хотіли б наголосити, що дана ситуація подібна до ситуації з глибинною вакансією в багатоелектронному атомі. Там електронні стани як розв'язки рівняння Дірака в кулонівському потенціалі ядра є стабільними. Однак, із врахуванням взаємодії з вторинно квантованим електромагнітним полем, електрони вищих рівнів стають нестабільними відносно переходу в вакантний стан із випроміненням фотону.

Критичний потенціал V_{0cr} визначається як потенціал, для якого відбуває-

ться перше занурення. Відповідно до Рис. (3.1), таке занурення вперше реалізується для стану з $j = -1/2$ (наявність потенціальної ями знімає виродження рівнів Ландау по квантовому числу моменту імпульсу j). Проаналізуємо в деталях, як цей стан змінюється з V_0 . Для стану з $j = -1/2$ рівняння (3.2.14) набуває вигляду

$$(E + V_0 - \Delta) \frac{\rho_0^2}{2} \frac{\Phi\left(1 - p_V^2, 2; \frac{\rho_0^2}{2}\right)}{\Phi\left(-p_V^2, 1; \frac{\rho_0^2}{2}\right)} = -(E - \Delta) \frac{\Psi\left(-p^2, 0; \frac{\rho_0^2}{2}\right)}{\Psi\left(-p^2, 1; \frac{\rho_0^2}{2}\right)}, \quad (3.2.24)$$

де ми використали співвідношення

$$\lim_{c \rightarrow -m} \frac{\Phi(a, c; x)}{\Gamma(c)} = \frac{\Gamma(a + m + 1)}{\Gamma(a)(m + 1)!} x^{m+1} \Phi(a + m + 1, m + 2; x), \quad m = 0, 1, \dots \quad (3.2.25)$$

При $V_0 \rightarrow 0$ рівняння (3.2.24) дає наступну енергію зв'язаного стану в K_- точці:

$$E = \Delta - V_0 \left(1 - e^{-r_0^2/2l^2}\right), \quad (3.2.26)$$

на противагу неаналітичній поведінці по константі зв'язку V_0 за відсутності магнітного поля, що описується виразом (3.2.19). (В K_+ точці подібний стан існує для кутового моменту $j = +1/2$.)

Із ростом V_0 , енергія цього зв'язаного стану зменшується і згодом перетинає рівень $E = -\Delta$ для деякого критичного значення V_{0cr} . При $E = -\Delta$, $p^2 = 0$, $p_V^2 = l^2(V_0^2 - 2\Delta V_0)/2(\hbar v_F)^2$, використовуючи $\Psi(0, 0; z) = \Psi(0, 1; z) = 1$, ми знайдемо, що рівняння (3.2.24) визначає наступне значення V_{0cr} :

$$V_{0cr} = 2\Delta \left[1 + \frac{2\Phi\left(a, 1, \frac{\rho_0^2}{2}\right)}{\rho_0^2 \Phi\left(1 + a, 2, \frac{\rho_0^2}{2}\right)} \right], \quad (3.2.27)$$

де $a = -l^2 V_{0cr} (V_{0cr} - 2\Delta) / 2(\hbar v_F)^2$. Слід зауважити, що при нульовому магнітному полі ($l = \infty$) рівняння (3.2.27) зводиться до (3.2.20) для V_{0cr} , яке прямує до скінченного значення в безмасовій границі. Критична сила потенціалу V_{0cr} як функція Δ зображена на Рис. (3.2) при різних значеннях параметра ρ_0 , який визначає відношення глибини потенціалу до магнітної довжини. Аналітично не важко побачити, що при $\rho_0 \ll 1$ рівняння (3.2.27)

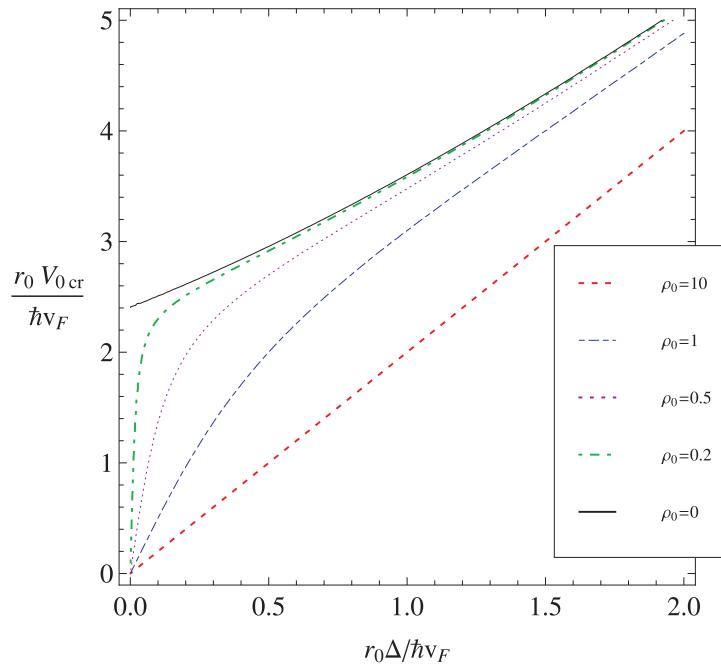


Рис. 3.2 Критичний потенціал V_{0cr} як функція щілини для різних значень ρ_0 . Випадок нульового магнітного поля відповідає $\rho_0 = 0$.

дає

$$V_{0cr} = 2\Delta(1 + 2l^2/r_0^2). \quad (3.2.28)$$

Як видно з Рис. (3.2) та рівняння (3.2.28), критична сила потенціалу V_{0cr} зменшується з ростом магнітного поля (зменшенням l) при фіксованому r_0 та Δ . Фізична причина цього полягає в тому, що магнітне поле робить орбіти

електронів близчими до зарядженого центру, роблячи притягання сильнішим, і тому ефективно знижує критичну константу.

Цікавим є те, що V_{0cr} прямує до нуля при $\Delta \rightarrow 0$. Таким чином, присутність однорідного магнітного поля призводить до нестабільності безмасових квазічастинок у вторинно квантованій теорії для будь-якого значення потенціалу V_0 . Цей результат показує, що кулонівський центр в магнітному полі стає нестабільним при будь-якому значенні Ze , що буде детально досліджено в наступному підрозділі.

Проаналізуємо також стани з енергіями біля $\pm\Delta$ і великих по модулю негативних j . Існує нескінчена серія рівнів енергій, що асимптотично наближаються до $\pm\Delta$ при великих $|j + 1/2|$. Таким чином, для достатньо великих j ефектом потенціалу V_0 можна знехтувати, тоді спектр відтворює рівні Ландау. При $V_0 \rightarrow 0$ вони поводять себе як

$$E \simeq -\xi\Delta - \frac{V_0 e^{-\rho_0^2/2}}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{\rho_0^2}{2}\right)^{k+1}, \quad k = -(j + \frac{1}{2}) \gg 1. \quad (3.2.29)$$

Це можна знайти безпосередньо, розв'язуючи рівняння (3.2.14). Для цього треба взяти границю $j + 1/2 \rightarrow -k$ у сенсі (3.2.25), а потім проаналізувати випадок слабого зв'язку та великих k . Альтернативно, рівняння (3.2.29) можна отримати як перший порядок теорії збурень, обчислюючи поправку до рівнів $\pm\Delta$ в K_\pm точках в магнітному полі. Зауважимо, що рівні (3.2.29) лежать під Δ для K_- точки та під $-\Delta$ для K_+ точки.

3.3 Кулонівський центр

Рівняння для функцій $f(r)$ та $g(r)$ у випадку кулонівського центру випливає безпосередньо з рівнянь (3.2.5) і (3.2.6), якщо покласти

$$V(r) = -Ze^2/r \theta(r - R) - Ze^2/R \theta(R - r)$$

(тут діелектрична константа $\kappa = 1$). Виключаючи функцію $f(r)$, ми отримуємо диференціальне рівняння другого порядку для функції $g(r)$. Далі, вводячи функцію $\chi(r)$ через співвідношення

$$[E - \xi\Delta - V(r)]^{1/2}\chi(r) = \frac{g(r)}{\sqrt{r}}, \quad (3.3.30)$$

ми отримуємо для неї рівняння Шредінгера,

$$-\chi''(r) + U(r)\chi(r) = \mathcal{E}\chi(r), \quad (3.3.31)$$

де

$$\mathcal{E} = E^2 - \Delta^2, \quad (3.3.32)$$

і ефективний потенціал $U = U_1 + U_2$,

$$U_1 = \frac{V(2E - V)}{(\hbar v_F)^2} + \frac{j(j+1)}{r^2} + \frac{r^2}{4l^4} + \frac{j-1/2}{l^2}, \quad (3.3.33)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{V''}{E - \xi\Delta - V} + \frac{3}{2} \left(\frac{V'}{E - \xi\Delta - V} \right)^2 - \left(\frac{j}{r} + \frac{r}{2l^2} \right) \frac{2V'}{E - \xi\Delta - V} \right]. \quad (3.3.34)$$

Ми зобразили ефективний потенціал $U(r)$ біля точки K_- для $E = -\Delta$ та $j = -1/2$ на Рис. (3.3). Легко побачити енергетичний бар'єр для магнітного

поля, який призводить до появи резонансів для достатньо великих зарядів. Присутність ненульового магнітного поля змінює асимптотику ефективного потенціалу на нескінченності і, таким чином, перешкоджає появи резонансних станів. Ця особливість якісно відрізняє задачу кулонівського центру (або потенціальної ями) в магнітному полі від аналогічної при $B = 0$.

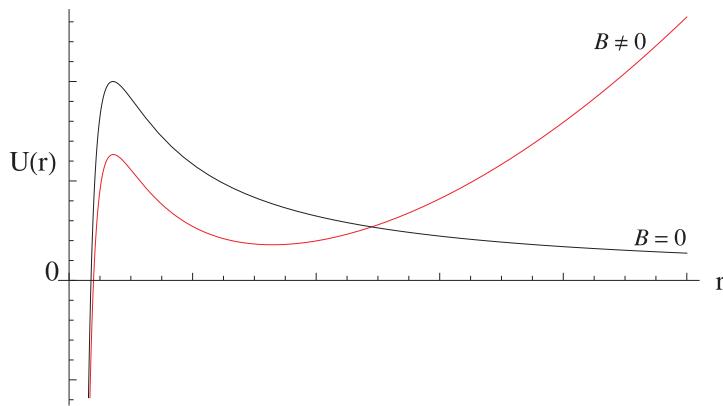


Рис. 3.3 Потенціал $U(r)$ залежно від відстані до кулонівського центру при нульовому та ненульовому магнітному полі для стану з $E = -\Delta$ та $j = -1/2$.

Нажаль, рівняння (3.3.31) належить до класу рівнянь з двома регулярними та однією нерегулярною (при $r = \infty$) сингулярностями, і, тому, розв'язки не можуть бути отримані у формі відомих спеціальних функцій.

Оскільки нас цікавлять розв'язки рівнянь (3.2.5) та (3.2.6) з кулонівським потенціалом в режимі $Z\alpha \rightarrow 0$ ($\alpha = e^2/\hbar v_F$), ми можемо їх знайти, використовуючи теорію збурень. При $Z\alpha = 0$, розв'язки рівнянь (3.2.5) та (3.2.6) даються рівнями Ландау, які є виродженими з повним кутовим моментом j . Для рівнів $E^{(0)} = \Delta$ відповідні нормовані хвильові функції (3.2.4) мають

форму (в K_- точці)

$$\Psi_k(r, \phi) = \frac{(-1)^k}{l\sqrt{2\pi k!}} e^{-r^2/4l^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\frac{r^2}{2l^2}\right)^{k/2} e^{-ik\phi} \end{pmatrix}, \quad (3.3.35)$$

де $k = -(j + 1/2) = 0, 1, 2, \dots$. Кулонівський потенціал знімає виродження по j . Поправки до енергії збурених станів рівня Ландау $E^{(0)} = \Delta$ можуть бути знайдені із секулярного рівняння

$$|E^{(1)} - V_{k_1 k_2}| = 0.$$

Оскільки $V_{k_1 k_2}$ є діагональною матрицею, ми легко отримуємо

$$E_k^{(1)} = V_{kk} = -\frac{Ze^2}{k!2^k l} \int_0^\infty d\rho \rho^{2k} e^{-\rho^2/2} = -\frac{Ze^2 \Gamma(k + \frac{1}{2})}{l\sqrt{2} \Gamma(k + 1)}. \quad (3.3.36)$$

Таким чином, при великих k енергетичні рівні згущуються біля $E = \Delta$:

$$E_k \simeq \Delta - \frac{Ze^2}{l\sqrt{2k}}. \quad (3.3.37)$$

Так само як і у випадку потенціальної ями, найбільша за модулем поправка $E_0^{(1)} = -Z\alpha\hbar v_F\sqrt{\pi}/l\sqrt{2}$ відповідає стану з $j = -1/2$ ($k = 0$). Критичний заряд визначається з умови $E = E^{(0)} + E_0^{(1)} = -\Delta$, тобто коли рівень E перетинає заповнені рівні. Це дає

$$Z_c \alpha = \frac{2\sqrt{2}\Delta l}{\sqrt{\pi}\hbar v_F}. \quad (3.3.38)$$

Подібно до випадку потенціальної ями в магнітному полі, критичний заряд (3.3.38) прямує до нуля при $\Delta \rightarrow 0$. Це означає, що магнітне поле суттєво впливає на задачу кулонівського центру в графені, роблячи будь-який заряд

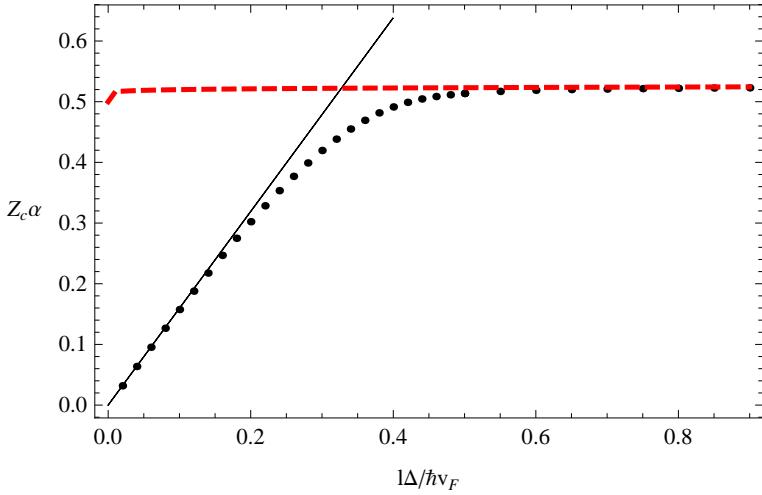


Рис. 3.4 Критична кулонівська константа зв'язку $Z_c\alpha$ як функція щілини для нульового (пунктирна червона лінія) та ненульового магнітного поля (точкова чорна лінія) для стану з $j = -1/2$. Пряма чорна лінія відповідає критичній кулонівській константі в першому наближенні теорії збурень (3.3.38).

надкритичним. Рівняння (3.3.38) дає вираз для критичної кулонівської константи зв'язку при $Z\alpha \rightarrow 0$ в першому порядку теорії збурень. Для довільних значень $Z\alpha$ ми розрахували залежність критичної константи від щілини чисельно. Відповідні результати представлені на Рис. (3.4), де параметр регуляризації кулонівського потенціалу ми поклали рівним $R = 10^{-3}l$. Пунктирна червона лінія на Рис. (3.4) є критичною кулонівською константою зв'язку $Z_c\alpha = 1/2 + \pi^2 / \log^2(c\Delta R / \hbar v_F)$ у відсутності магнітного поля (порівняйте з Рис. (1.2) в першому розділі). Таким чином, для слабкого магнітного поля ($l \rightarrow \infty$) критичний заряд прямує до $1/2$, тоді як при $l\Delta \rightarrow 0$ для безмасових збуджень або в сильних магнітних полях $Z_c\alpha \rightarrow 0$.

3.4 Висновки

В цьому розділі ми показали, що зовнішнє магнітне поле знижує до нуля значення критичної константи, при якій відбувається зародження нестабільності системи $2 + 1$ -вимірних діраківських електронів в полі зарядженого центру (зарядженої домішки). Цей результат є квантовомеханічним аналогом явища магнітного каталізу в графені. Ми розглянули випадок радіально симетричної ями та кулонівського центру.

Важливим інгредієнтом нестабільності для безщілинних частинок в магнітному полі є наявність нескінченно виродженого рівня з нульовою енергією. В цьому випадку як завгодно малий притягуючий потенціал призводить до появи незаповнених станів в морі Дірака, що і призводить до нестабільності системи.

Треба підкреслити якісну відмінність в явищі нестабільності між масивними та безмасовими частинками. Для масивних частинок існує *скінченне* критичне значення величини потенціалу, при якій найнижчий незаповнений рівень перетинається з першим заповненим, формуючи дірку в морі заповнених станів. При зростанні потенціалу все більше рівнів перетинають цей рівень. Ясно, що система буде намагатися перебудуватись, заповнюючи не зайняті стани. Важливою відмінністю у випадку безмасових станів, окрім нульової критичної величини потенціалу, є те, що вакантною стає одразу нескінчена кількість станів.

Отже, присутність зовнішнього магнітного поля суттєво впливає на проблему атомного колапсу в графені в сильному кулонівському полі [13]. Ясно,

що задача стає багаточастинковою і має бути розглянута за допомогою методів теорії поля. Можна очікувати, що генерація щілини в графені за наявності магнітного поля буде мати місце і при слабкому зв'язку [73].

РОЗДІЛ 4

ДИНАМІЧНА ПОЛЯРИЗАЦІЯ ДВОШАРОВОГО ГРАФЕНУ

4.1 Вступ

Як було показано в попередніх розділах, динамічна поляризація відіграє значну роль в рівнянні для щілини, яке визначає екситонний конденсат. Також вона визначає плазмонні збудження, а її статична границя - ефективне екранування в матеріалі. В цьому розділі ми наведемо розрахунки і проаналізуємо однопетлеву поляризацію двошарового графену.

На відміну від випадку одношарового графену, низькоенергетичні збудження в двошаровому графені мають параболічний спектр, зберігаючи при цьому псевдоспінову залежність від підграток. Вони описуються двозонною моделлю, гамільтоніан якої є кіральним (як і у випадку моношару графену), що значно впливає на електронні властивості системи [49, 50]. Однак, параболічна форма спектру низькоенергетичних збуджень в двошаровому графені справедлива тільки при незначному допуванні зразку $n < 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, в той же час експериментально допування може бути досягнуто в 10 разів більше. Для таких значних допувань, треба використовувати чотирьохзонну модель [129] замість ефективної низькоенергетичної двохзонної.

В літературі ефекти екранування в двошаровому графені вивчалися переважно тільки в двозонній теорії з магнітним полем [130, 131] та без нього [132, 133]. Деякі спроби отримання аналітичних результатів в 4-зонній мо-

делі були здійснені в [134, 135, 136]. Точний вираз для поляризаційної функції в чотирьохзонній моделі цікавий також з чисто теоретичної точки зору, оскільки беручи від нього відповідну границю, можна отримати поляризацію одношарового графену [137, 138] та 2-зонного двошарового [139].

Нешодавно багато уваги було прикуто до дослідження властивостей поляризаційного оператора в [140, 141, 142, 143, 144]. Найбільш загальний вираз для динамічної поляризації в одношаровому графені при скінченній температурі, хімічному потенціалі, постійній константі розсіяння, щілині та магнітному полі було отримано в роботі [145].

В цьому розділі ми обчислимо динамічну поляризацію в 4-зонній моделі в наближенні випадкових фаз (однопетлевому наближенні) для довільного хвильового вектора, частоти та допування. Наші результати можна розглядати як розширення результатів отриманих в [135], хоча методи, що застосовуються, є різними. В підрозділі 4.2 ми опишемо модель і представимо основний результат для поляризаційної функції. Ми розглянемо статичну поляризаційну функцію та порівняємо її з відповідними результатами для одношарового та двошарового графену у 2-зонній моделі. В підрозділі 4.3.2 ми розглянемо довгохвильову границю поляризації та дослідимо плазмонні збудження.

4.2 Розрахунок в наближенні випадкових фаз

Будемо моделювати двошаровий графен, впорядковуючи по Берналу дві паралельні графенівські площини [129], таким чином, що одна трикутна під-

гратка гексагональної гратки верхнього шару є найближчою до протилежної підгратки нижнього шару. В наближенні сильного зв'язку, гамільтоніан має наступний вигляд:

$$H = \sum_{k,\sigma} \psi_k^{\sigma,+} H_k \psi_k^\sigma + \frac{1}{2} \sum_k \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \rho_k^\alpha V_{\alpha\beta}(k) \rho_{-k}^\beta, \quad (4.2.1)$$

де $\psi_k^\sigma = (a_1^\sigma(k), b_1^\sigma(k), a_2^\sigma(k), b_2^\sigma(k))^T$, $a^{\alpha\sigma}(k)$ та $b^{\alpha\sigma}(k)$ – оператори знищення блохівських станів на двох трикутних підгратках в графенових шарах $\alpha = 1, 2$ з додатковим “флайворним” індексом σ , що відповідає спіну та К-точкам (долинам), ρ_q^α - електронна густина на шарі α . Кулонівська взаємодія електронів в одному шарі $V_{11}(k) = V_{22}(k) = 2\pi e^2/(\kappa k)$, в той час як електрони на різних шарах взаємодіють через потенціал $V_{12}(k) = V_{21}(k) = V_{11}(k)e^{-kd}$, де d - відстань між шарами і κ - діелектрична проникність підкладки.

Одночастинковий гамільтоніан має вигляд:

$$H_k = \begin{pmatrix} 0 & \xi\epsilon(k) & 0 & t_\perp \\ \xi\epsilon^*(k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi\epsilon(k) \\ t_\perp & 0 & \xi\epsilon^*(k) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.2)$$

де $t_\perp \sim 0.4eV$ - амплітуда перескоку між шарами, $\epsilon(k) = \hbar v_F(k_x + ik_y)$, а вектор $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ описує відхилення від K ($\xi = 1$) та K' ($\xi = -1$) точок в зоні Брілюєна [146]. Нижче ми розглянемо долину тільки однієї K -точки. Одночастинковий гамільтоніан може бути діагоналізований за допомогою унітарної матриці U . Відповідний чотирьохзонний спектр має вигляд:

$$H_k = U_k^{-1} \text{diag}(E_k^+, -E_k^+, E_k^-, -E_k^-) U_k, \quad (4.2.3)$$

$$E_q^\pm = \sqrt{(\hbar v_F k)^2 + t_\perp^2/4} \pm t_\perp/2. \quad (4.2.4)$$

Для спрощення позначення в подальшому ми покладемо $t_{\perp} = t$ та пересмасштабуємо всі імпульси $k \rightarrow k/\hbar v_f$. Тоді імпульс Фермі дорівнює $k_F = \sqrt{\mu(\mu + t)}$ і густина заряду при нульовій температурі дається виразом $n \approx k_F^2/t^2 10^{13} \text{ cm}^{-2}$. Густина $n = 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ відповідає $\mu/t = 0.1$, в той же час більша густина $n = 10^{13} \text{ cm}^{-2}$ відповідає $k_F = t$ та $\mu/t \approx 0.6$. Тут μ - хімічний потенціал (енергія Фермі). В звичайних одиницях $k_F = t$ відповідає $k_F \approx 0.06 \text{ A}^{-1}$.

Якщо ми позначимо поляризаційну матрицю як:

$$-i\langle\rho_{\alpha}(\omega, \mathbf{k})\rho_{\beta}(-\tilde{\omega}, \tilde{\mathbf{k}})\rangle = \delta^{(3)}(k - \tilde{k})2\Pi_{\alpha\beta}(k),$$

тоді потенціал взаємодії в однопетлевому наближенні дається наступним виразом:

$$V_{11}^{\text{eff}}(k) = \frac{k - \alpha(1 - e^{-2kd})\Pi_{11}}{k\epsilon(\omega, k)(k - \alpha(1 - e^{-kd})(\Pi_{11} - \Pi_{12}))}, \quad (4.2.5)$$

$$V_{12}^{\text{eff}}(k) = \frac{ke^{-kd} + \alpha(1 - e^{-2kd})\Pi_{12}}{k\epsilon(\omega, k)(k - \alpha(1 - e^{-kd})(\Pi_{11} - \Pi_{12}))}, \quad (4.2.6)$$

$$\epsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\alpha(1 + e^{-kd})}{k}(\Pi_{11} + \Pi_{12}), \quad (4.2.7)$$

де $\alpha = e^2/(\hbar v_F \kappa)$ - ефективна константа зв'язку та $d \approx 3A$ - відстань між шарами в графені, котра є порівняно малою, так що в усіх експонентах ми можемо покласти $d = 0$ (навіть для найбільших значень імпульсу $e^{-k_F d} \approx 0.85$). Тоді ми отримуємо $V_{11}^{\text{eff}} = V_{12}^{\text{eff}} = 1/k\epsilon(\omega, k)$, де діелектрична проникність дорівнює $\epsilon(\omega, k) = 1 - \alpha\Pi(\omega, k)/k$ з $\Pi \equiv 2(\Pi_{11} + \Pi_{12})$. Система є виродженою по спінам та долинам, отже ми будемо розглядати поляризацію на одну флейворну ступінь вільності: $\Pi \rightarrow \Pi/N_f$, $N_f = 4$. Тоді однопетльова поляризація

має вигляд:

$$\Pi(\omega, k) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^2 q}{2\pi} \text{Tr} G(i\Omega_n, q) G(i\Omega_n + i\omega_m, q + k). \quad (4.2.8)$$

Суму по мацубарівським частотам можна легко обчислити. Дійсно,

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\Omega_n - \mu + a} \frac{1}{i\Omega_n - \mu + b} = \frac{n_F(a) - n_F(b)}{a - b},$$

де $n_F(x) = (1 + \exp((x - \mu)/T))^{-1}$. Після аналітичного продовження із заміною $i\omega_m \rightarrow \omega + i0$ запізнювальна поляризаційна функція дорівнює:

$$\begin{aligned} & \Pi(\omega, k) = \\ & = \int \frac{d^2 q}{2\pi} \sum_{\alpha, \alpha'=\pm 1} \sum_{\lambda, \lambda'=1,2} \frac{n_F((-1)^\lambda E_q^\alpha) - n_F((-1)^{\lambda'} E_{q+k}^{\alpha'})}{(-1)^\lambda E_q^\alpha - (-1)^{\lambda'} E_{q+k}^{\alpha'} - \omega - i0} F_{\lambda+1-\alpha, \lambda'+1-\alpha'}(q, q+k), \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

де індекси λ та α позначають зони та F_{ij} є матрицею 4×4 , що відповідає за кіральну структуру. Вона визначається наступним чином:

$$F_{ij}(q, p) = \text{Tr} (Z^{-1} \Delta_i Z \Delta_j), \quad Z = U_q^{-1} U_p, \quad (4.2.10)$$

і Δ_j - діагональна матриця з усіма нульовими елементами, окрім одного рівного 1 в позиції j . Можна знайти, що

$$F(q, p) = \begin{pmatrix} U^{++} & V^{--} & V^{-+} & U^{+-} \\ V^{--} & U^{++} & U^{+-} & V^{-+} \\ V^{-+} & U^{+-} & U^{--} & V^{++} \\ U^{+-} & V^{+-} & V^{++} & U^{--} \end{pmatrix}, \quad (4.2.11)$$

де

$$U^{su} = \frac{E_q^{(s)} E_p^{(u)}}{4E_q^{(0)} E_p^{(0)}} \left(1 + su \frac{qp \cos \theta_{qp}}{E_q^{(s)} E_p^{(u)}} \right)^2, \quad (4.2.12)$$

$$V^{su} = \frac{E_q^{(s)} E_p^{(u)}}{4E_q^{(0)} E_p^{(0)}} \sin^2 \theta_{qp}, \quad (4.2.13)$$

$E_q^{(s)} = \sqrt{q^2 + t^2/4} + st/2$, та θ_{qp} - кут між векторами \mathbf{p} та \mathbf{q} . Діагональні елементи матриці F описують переходи в одній зоні, в той час як недіагональні відповідають переходам між зонами. При нульовій температурі функції Фермі в рівнянні (4.2.9) зводяться до звичайних сходинкових функцій. Тоді запізнювальна поляризація може бути представлена у формі:

$$\Pi(\omega, k) = \Pi^0(\omega, k) + \Pi^+(\omega, k) + \Pi^-(\omega, k), \quad (4.2.14)$$

де

$$\begin{aligned} \Pi^0(\omega, k) = \int \frac{d^2 q}{\pi} \sum_{s=\pm} \left(\frac{E_{q+k}^{(s)} + E_q^{(-s)}}{\omega^2 - (E_{q+k}^{(s)} + E_q^{(-s)})^2} U^{-s,s} + \right. \\ \left. + \frac{E_{q+k}^{(-s)} + E_q^{(-s)}}{\omega^2 - (E_{q+k}^{(-s)} + E_q^{(-s)})^2} V^{s,s} \right), \quad (4.2.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi^\pm(\omega, k) = \int_{E_q^{(\pm)} < \mu} \frac{d^2 q}{\pi} \sum_{s=\pm} \left(\frac{\pm s E_{q+k}^{(s)} - E_q^{(\pm)}}{\omega^2 - (\pm s E_{q+k}^{(s)} - E_q^{(\pm)})^2} U^{\pm,s} + \right. \\ \left. + \frac{\pm s E_{q+k}^{(-s)} - E_q^{(\pm)}}{\omega^2 - (\pm s E_{q+k}^{(-s)} - E_q^{(\pm)})^2} V^{\mp,s} \right). \quad (4.2.16) \end{aligned}$$

Ясно, що Π^0 не залежить від хімічного потенціалу і характеризує поляризацію при нульовому допуванні. Вона дає основний внесок в екранивання. Функції Π^+ та Π^- включають ефекти від допування зразка і в основному відповідають за плазмонні моди. Очевидно, що Π^+ може бути одразу знайдена, тільки-но знайдено Π^- для довільних значень μ та t . Дійсно, $\Pi_{\mu,t}^+ = \theta(\mu - t)\Pi_{\mu-t,-t}^-$.

Доцільно прокоментувати властивості кіральної матриці (4.2.11). В двох граничних випадках слабкого ($t \rightarrow 0$) та сильного ($t \rightarrow \infty$) зв'язку, коли

спектр зводиться до $E_q = q$ та $E_q = q^2/t$, відповідно, кіральна матриця F значно спрощується і залежить тільки від одного параметру u_q . Тоді поляризаційна функція на одну ступінь вільності¹ має вигляд

$$\begin{aligned} \Pi(\omega, k) = & \int_{E_q > \mu} \frac{d^2 q}{\pi} \frac{1 - u_{q,k}}{2} \frac{E_q + E_{q+k}}{\omega^2 - (E_q + E_{q+k})^2} \\ & + \int_{E_q < \mu} \frac{d^2 q}{\pi} \frac{1 + u_{q,k}}{2} \frac{E_{q+k} - E_q}{\omega^2 - (E_q - E_{q+k})^2}, \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

де $u_{q,k} = (\text{Tr} H_q H_{q+k})/(2E_q E_{q+k})$, яка дорівнює $\cos \theta_{q,q+k}$ та $\cos 2\theta_{q,q+k}$ для режимів слабкої та сильної константи зв'язку, відповідно. Слід зазначити, що для слабкої константи зв'язку $\Pi^+ = \Pi^-$, в той же час $\Pi^+ = 0$ - для сильної.

Надалі ми розглянемо випадок для $\mu < t$ (саме такий режим може бути досягнутий на експерименті). В цьому випадку, $\Pi^+ = 0$. Обчислення Π^0 та Π^- можуть бути легко зроблені.

4.2.1 Обчислення $\Pi^0(\omega, k)$

Для того, щоб обчислити $\Pi^0(\omega, k)$ представлена виразом (4.2.15), зручно ввести наступні змінні:

$$y = E_q + E_{q+k}, \quad z = 4E_q E_{q+k}. \quad (4.2.18)$$

Тоді міра інтегрування перетворюється наступним чином:

$$\int q d q d \theta = 2 \int d q^2 \int_0^{\pi/2} d \theta = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{k^2+t^2}} dy \int_Q^{y^2} \frac{z dz}{\sqrt{y^2 - k^2} \sqrt{y^2 - z} \sqrt{z - Q}}, \quad (4.2.19)$$

¹У випадку слабкої константи зв'язку, число “флейворів” ефективно подвоюється.

$$Q = \frac{(y^2 - k^2)^2 + t^2 k^2}{y^2 - k^2}. \quad (4.2.20)$$

Виконуючи інтегрування по z , ми отримуємо

$$\begin{aligned} \Pi^0(\omega, k) = & \int_{\sqrt{k^2+t^2}} \frac{dy}{2} \left(\frac{\sqrt{y^2 - k^2}(y - t)}{\omega^2 - (y - t)^2} + \frac{\sqrt{y^2 - k^2}(t + y)}{\omega^2 - (t + y)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{y(3k^4 - k^2(t^2 + 5y^2) + 2y^4)}{(y^2 - k^2)^{3/2}(\omega^2 - y^2)} \right) + \delta\Pi^0(\omega, k), \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

де $\delta\Pi^0(\omega, k)$ отримана відповідною заміною в змінної інтегрування

$$\delta\Pi^0(\omega, k) = \left(\int_{\sqrt{t^2+k^2}}^{\sqrt{t^2/4+k^2}-t/2} + \int_{\sqrt{t^2+k^2}-t}^{\sqrt{t^2/4+k^2}-t/2} - \int_{-t/2-\sqrt{t^2/4+k^2}}^{-\sqrt{t^2+k^2}-t} - \int_{-t/2-\sqrt{t^2/4+k^2}}^{-\sqrt{t^2+k^2}} \right) \frac{dy}{2} \frac{\omega^2 + yt - k^2}{\omega^2 - y^2}. \quad (4.2.22)$$

Тепер можна легко обчислити уявну частину для $\omega > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Im}\Pi^0(\omega, k)}{\pi} = & \theta(\omega + t - \sqrt{t^2 + k^2}) \left(\frac{|k^2 - \omega(\omega + t)|}{4\omega} - \frac{\sqrt{(\omega + t)^2 - k^2}}{4} \right) + (t \rightarrow -t) \\ & \left(\frac{3k^4 - k^2(t^2 + 5w^2) + 2w^4}{4(w^2 - k^2)^{3/2}} - \frac{|k^2 - \omega(\omega - t)| + |k^2 - \omega(\omega + t)|}{4\omega} \right) \theta(\omega - \sqrt{t^2 + k^2}) \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Дійсна частина може бути легко обчислена, при цьому необхідно трактувати можливі розбіжності в сенсі основного значення. Після деяких алгебраїчних перетворень ми отримаємо:

$$\text{Re}\Pi^0(\omega, k) = \frac{(k^2 - \omega(\omega - t))}{4\omega} \ln \left| \frac{(k^2 + (2t - \omega)\omega)(k^2 + t^2 - \omega^2)}{(k^2 + (t - \omega)\omega)^2} \right| + (\omega \rightarrow -\omega)$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{Re} \left[\frac{\sqrt{k^2 - (t - \omega)^2}}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{k^2 - (t - \omega)^2}}{t} \right) + (\omega \rightarrow -\omega) \right] \\
& + \frac{k^2 t}{2(\omega^2 - k^2)} - \operatorname{Re} \left[\frac{3k^4 - k^2(t^2 + 5\omega^2) + 2\omega^4}{2(k^2 - \omega^2)^{3/2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{k^2 - \omega^2}}{t} \right]. \quad (4.2.24)
\end{aligned}$$

В границі $t \rightarrow 0$, ми отримуємо:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Pi^0(\omega, k) = -\frac{\pi}{4} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 - \omega^2 - i0}}, \quad (4.2.25)$$

де зсув $\omega^2 \rightarrow \omega^2 + i0$ був проведений для того, що одночасно відтворити правильну уявну частину.

Для великих t треба утримувати величини порядку $k^2/t = E_k$. Тоді t буде входити тільки, як загальний фактор

$$\begin{aligned}
\frac{\Pi^0(\omega, k)}{t/2} &= \ln \left| \frac{E_k^2 - 4\omega^2}{4E_k^2 - 4\omega^2} \right| + \frac{E_k}{2\omega} \ln \left| \frac{(E_k - \omega)^2}{(E_k + \omega)^2} \frac{E_k + 2\omega}{E_k - 2\omega} \right| \\
&+ i\pi \left(\left(1 - \frac{E_k}{\omega} \right) \theta[\omega - E_k] - \left(1 - \frac{E_k}{2\omega} \right) \theta[2\omega - E_k] \right). \quad (4.2.26)
\end{aligned}$$

4.2.2 Обчислення $\Pi^-(\omega, k)$

Для того, що порахувати $\Pi^-(\omega, k)$ визначене в (4.2.16), ми вводимо нові змінні $r = E_q - t/2$. Тоді після алгебраїчних перетворень маємо:

$$\Pi^-(\omega, k) = \int_0^\mu \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{16\pi} \left(\frac{g(\omega)}{r + \omega} + \frac{g(-\omega)}{r - \omega} - 8r - 4t \right), \quad (4.2.27)$$

де

$$\begin{aligned}
g(\omega) &= \frac{k^4 - 2k^2(2r^2 + 2r\omega + \omega(\omega - t)) + (2r + \omega)^2(t - \omega)^2}{k^2 + 2k\sqrt{r(r + t)} \cos \phi + (2r + \omega)(t - \omega)} \\
&- \frac{(k^2 - (2r + \omega)(2r + t + \omega))^2}{k^2 + 2k\sqrt{r(r + t)} \cos \phi - \omega(2r + t + \omega)}. \quad (4.2.28)
\end{aligned}$$

Для можливих розбіжностей ми використовуємо правило $\omega \rightarrow \omega + i0$. Тоді можна легко провести інтегрування по кутам, використовуючи наступний інтеграл:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{a + i\epsilon 0 + \cos \phi} = \frac{\operatorname{sgn}[a]\theta(a^2 - 1)}{\sqrt{a^2 - 1}} - i \frac{\operatorname{sgn}[\epsilon]\theta(1 - a^2)}{\sqrt{1 - a^2}}. \quad (4.2.29)$$

Після чого отримаємо дійсну та уявну частину поляризаційної функції у формі:

$$\operatorname{Re}\Pi^-(\omega, k) = \int_0^\mu \frac{dr}{2r} \left(\frac{\operatorname{Re}[g_R(\omega)]}{4(r + \omega)} + \frac{\operatorname{Re}[g_R(-\omega)]}{4(r - \omega)} - 2r - t \right), \quad (4.2.30)$$

$$\operatorname{Im}\Pi^-(\omega, k) = - \int_0^\mu \frac{dr}{8r} \left(\frac{\operatorname{Re}[g_I(\omega)]}{r + \omega} - \frac{\operatorname{Re}[g_I(-\omega)]}{r - \omega} \right), \quad (4.2.31)$$

$$g_R(\omega) = \sqrt{(k^2 + (2r + \omega)(t - \omega))^2 - 4k^2r(r + t)} \operatorname{sgn}(k^2 + (2r + \omega)(t - \omega)) \\ - \frac{(k^2 - (2r + \omega)(2r + t + \omega))^2 \operatorname{sgn}(k^2 - \omega(2r + t + \omega))}{\sqrt{(k^2 - \omega(2r + t + \omega))^2 - 4k^2r(r + t)}}, \quad (4.2.32)$$

$$g_I(\omega) = \sqrt{4k^2r(r + t) - (k^2 + (2r + \omega)(t - \omega))^2} \operatorname{sgn}\left(r - \frac{t}{2} + \omega\right) \\ + \frac{(k^2 - (2r + \omega)(2r + t + \omega))^2 \operatorname{sgn}(r + \frac{t}{2} + \omega)}{\sqrt{4k^2r(r + t) - (k^2 - \omega(2r + t + \omega))^2}}. \quad (4.2.33)$$

Ми можемо обчислити всі інтеграли окремо утримуючи скінчену регуляризацію ϵ для можливих розбіжностей при $r = 0$. Для того, що записати відповідь в компактній формі, ми введемо наступні позначення: для кожної функції

$f(x)$, сконструюємо нову функцію $\widehat{f}(x) \Big|_a^b$ наступним чином²:

$$\widehat{f}(x) \Big|_a^b \equiv \operatorname{sgn}(b-x)(f(b)-f(r)) - \operatorname{sgn}(a-x)(f(a)-f(x)) \quad (4.2.34)$$

Тоді легко представити поляризацію в наступній формі:

$$\begin{aligned} \Pi_\epsilon^-(\omega, k) = & -\mu - \frac{t}{2} \ln \frac{2\mu}{\epsilon} + \frac{\operatorname{Re}(R_\omega + R_{-\omega}) + i\operatorname{Re}(I_\omega - I_{-\omega})}{2} \\ & - i\pi \frac{|k^2 - (t+\omega)\omega|}{4\omega} \theta(\mu - \omega) (\theta(\rho_{t+\omega}^2) - \theta(-\rho_\omega^2)), \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

де $R_\omega = R_\omega^\epsilon + \tilde{R}_\omega$, $I_\omega = I_\omega^\epsilon + \tilde{I}_\omega$, та

$$\begin{aligned} R_\omega^\epsilon = & i \frac{|k^2 + (t-\omega)\omega|}{2\omega} \left(\widehat{f_{t-\omega}^\omega} \left(\frac{-k^2}{\omega} \right) \Big|_{t-\omega+\epsilon}^{2\tilde{\mu}-\omega} + \widehat{f_{\omega}^{t-\omega}} \left(\frac{k^2}{\omega-t} \right) \Big|_{\omega+\epsilon}^{2\mu+\omega} + \right. \\ & \left. - \widehat{f_{t-\omega}^\omega} \left(\frac{k^2}{\omega} \right) \Big|_{t+\omega}^{2\tilde{\mu}+\omega} - \widehat{f_{-\omega}^{t-\omega}} \left(\frac{k^2}{\omega-t} \right) \Big|_\omega^{2\mu+\omega} \right), \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\omega = & \widehat{v_\omega} \left(\frac{-k^2}{\omega} \right) \Big|_{t-\omega}^{2\tilde{\mu}-\omega} - \frac{3k^4 - k^2 t^2 - 5k^2 \omega^2 + 2\omega^4}{2(\omega^2 - k^2)} \widehat{u_\omega} \left(\frac{-k^2}{\omega} \right) \Big|_{t-\omega}^{2\tilde{\mu}-\omega} + \\ & + ((\omega-t)^2 - k^2) \widehat{u_{t-\omega}} \left(\frac{k^2}{\omega-t} \right) \Big|_\omega^{2\mu+\omega}, \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

$$\begin{aligned} I_\omega^\epsilon = & \frac{|k^2 + (t-\omega)\omega|}{2\omega} \left(\widehat{f_{t-\omega}^\omega}(-\omega) \Big|_{t+\omega}^{2\tilde{\mu}+\omega} - \widehat{f_{-\omega}^{t-\omega}}(t-\omega) \Big|_\omega^{2\mu+\omega} - \right. \\ & \left. - \widehat{f_{t-\omega}^\omega}(\omega) \Big|_{t-\omega+\epsilon}^{2\tilde{\mu}-\omega} + \widehat{f_{\omega}^{t-\omega}}(t-\omega) \Big|_{\omega+\epsilon}^{2\mu+\omega} \right), \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_\omega = & \widehat{v_\omega}(\omega) \Big|_{t-\omega}^{2\tilde{\mu}-\omega} - \frac{3k^4 - k^2 t^2 - 5k^2 \omega^2 + 2\omega^4}{2(\omega^2 - k^2)} \widehat{u_\omega}(\omega) \Big|_{t-\omega}^{2\tilde{\mu}-\omega} - ((\omega-t)^2 - k^2) \widehat{u_{t-\omega}}(t-\omega) \Big|_\omega^{2\mu+\omega}. \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

Тут

$$\rho_\omega = \sqrt{k^2 \frac{\omega^2 - k^2 - t^2}{\omega^2 - k^2}}, \quad \tilde{\mu} = \mu + t/2, \quad (4.2.40)$$

²Легко помітити, що $\widehat{f}(x) \Big|_a^b = \int_a^b dr f'(r) \operatorname{sgn}(r-x)$.

$$f_\Omega^\omega(r) = \tan^{-1} \left(\frac{e^{i \sin^{-1}(r/\rho_\omega)} - i\Omega/\rho_\omega}{\sqrt{\Omega^2/\rho_\omega^2 - 1}} \right), \quad \tilde{f}_\Omega^\omega(r) = \operatorname{sgn}(\omega(\omega^2 - k^2 - t^2)) f_\Omega^\omega(r) \quad (4.2.41)$$

та

$$v_\omega(x) = \frac{x\sqrt{\rho_\omega^2 - x^2}}{4\sqrt{k^2 - \omega^2}}, \quad \tilde{v}_\omega(x) = \operatorname{sgn}(\omega(k^2 - \omega^2)) v_\omega(x), \quad (4.2.42)$$

$$u_\omega(x) = \frac{\sin^{-1}(x/\rho_\omega)}{4\sqrt{k^2 - \omega^2}}, \quad \tilde{u}_\omega(x) = \operatorname{sgn}(\omega(k^2 - \omega^2)) u_\omega(x). \quad (4.2.43)$$

Вираз (4.2.35) дорівнює поляризаційній функції в границі $\epsilon \rightarrow 0$. Обчислюючи цю границю точно, ми знаходимо:

$$\begin{aligned} \Pi^-(\omega, k) = & -\mu + \frac{\operatorname{Re}(R_\omega^{\text{reg}} + R_{-\omega}^{\text{reg}} + \tilde{R}_\omega + \tilde{R}_{-\omega})}{2} + i \frac{\operatorname{Re}(I_\omega^{\text{reg}} - I_{-\omega}^{\text{reg}} + \tilde{I}_\omega - \tilde{I}_{-\omega})}{2} \\ & -i\pi \frac{|k^2 - (t + \omega)\omega|}{4\omega} \left(\theta(\mu - \omega)(\theta(\rho_{t+\omega}^2 - \theta(-\rho_\omega^2)) - \frac{\pi}{2}\theta(\omega^2 - k^2 - t^2)) \right) \\ & -i\pi \frac{|k^2 - (t - \omega)\omega|}{4\omega} \theta((\omega - t)^2 - \omega^2 - k^2), \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

де

$$R_\omega^{\text{reg}} = i \frac{|k^2 + (t - \omega)\omega|}{2\omega} \left(\tilde{G}_{\omega,t-\omega}^{2\tilde{\mu}-\omega,-k^2/\omega} - \tilde{G}_{\omega,t-\omega}^{2\tilde{\mu}+\omega,k^2/\omega} + \tilde{G}_{\omega,t-\omega}^{t+\omega,k^2/\omega} \right. \quad (4.2.45)$$

$$\left. + \tilde{G}_{t-\omega,\omega}^{2\mu+\omega,k^2/(\omega-t)} - \tilde{G}_{t-\omega,-\omega}^{2\mu+\omega,k^2/(\omega-t)} + \tilde{G}_{t-\omega,-\omega}^{\omega,k^2/(\omega-t)} \right) +$$

$$\frac{k^2 + (t - \omega)\omega}{2\omega} \left(i\operatorname{sgn}(\omega) \tilde{f}_{t-\omega}^\omega \left(\frac{-k^2}{\omega} \right) - \frac{1}{2} \ln \mu \frac{\sqrt{\rho_\omega^2 - (t - \omega)^2} + i(t - \omega)}{\rho_\omega^2 - (t - \omega)^2} + (\omega \rightarrow t - \omega) \right)$$

$$\begin{aligned} I_\omega^{\text{reg}} = & \frac{|k^2 + (t - \omega)\omega|}{2\omega} \left(G_{\omega,t-\omega}^{2\tilde{\mu}+\omega,-\omega} - G_{\omega,t-\omega}^{t+\omega,-\omega} - G_{t-\omega,-\omega}^{2\mu+\omega,t-\omega} + G_{t-\omega,-\omega}^{\omega,t-\omega} - G_{\omega,t-\omega}^{2\tilde{\mu}-\omega,\omega} + G_{t-\omega,\omega}^{2\mu+\omega,t-\omega} \right. \\ & \left. + \frac{|k^2 + (t - \omega)\omega|}{2\omega} \left(\theta(k^2 - \omega^2) \cos^{-1} \left(\frac{t - \omega}{\rho_\omega} \right) - \frac{\pi}{2} \theta(-\rho_\omega^2) - f_{t-\omega}^\omega(\omega) + (\omega \rightarrow t - \omega) \right) \right), \end{aligned} \quad (4.2.46)$$

та

$$G_{\omega,\Omega}^{a,b} = \operatorname{sgn}(b-a) (f_\Omega^\omega(b) - f_\Omega^\omega(a)), \quad \tilde{G}_{\omega,\Omega}^{a,b} = \operatorname{sgn}(b-a) \left(\tilde{f}_\Omega^\omega(b) - \tilde{f}_\Omega^\omega(a) \right). \quad (4.2.47)$$

В наближенні слабкого зв'язку $t \rightarrow 0$, ми маємо наступний вираз:

$$\Pi^-(\omega, k) = -\mu + \frac{\operatorname{Re}(R_\omega^{t=0} + R_{-\omega}^{t=0}) + i\operatorname{Re}(I_\omega^{t=0} - I_{-\omega}^{t=0})}{2}, \quad (4.2.48)$$

$$R_\omega^{t=0} = \frac{\operatorname{sgn}((k^2 - \omega^2)(k^2 - \omega^2 + 2\omega\mu))}{4\sqrt{k^2 - \omega^2}} \left((2\mu - \omega)\sqrt{k^2 - (2\mu - \omega)^2} + k^2 (\sin^{-1}(k/\omega) - \sin^{-1}((\omega - 2\mu)/k)) \right), \quad (4.2.49)$$

$$I_\omega^{t=0} = \operatorname{sgn}(\mu - \omega) \left(\frac{(2\mu - \omega)\sqrt{k^2 - (2\mu - \omega)^2}}{4\sqrt{k^2 - \omega^2}} - \frac{k^2 (\sin^{-1}((\omega - 2\mu)/k) + \sin^{-1}(\omega/k))}{4\sqrt{k^2 - \omega^2}} - \frac{\omega}{4} \right). \quad (4.2.50)$$

Об'єднуючи дійсну та уявну частину в один вираз, можна записати вираз для загальної поляризації у компактній формі:

$$\Pi(\omega, k) = -\frac{2\mu + t}{2} - \frac{k^2 t}{4(k^2 - \omega^2)} + \frac{P_\omega + \overline{P_{-\omega}}}{4} - c_\omega \bar{g}_\omega + \bar{g}_{t-\omega} + \bar{g}_{t+\omega}, \quad (4.2.51)$$

де

$$P_\omega = \frac{Q_{-, \omega}^{\mu_*} - Q_{+, -\omega-t}^{\omega-2\mu} + Q_{-, -\omega-t}^{2\mu-\omega} - Q_{-, -\omega}^{\mu_*}}{2\omega} + i\frac{\mu_*}{2} \sqrt{\frac{\rho_\omega^2 - \mu_*^2}{\omega^2 - k^2} + i0} \frac{k^2 + \omega\mu_*}{\omega^2 - k^2}$$

$$+ G_{\omega+t} - c_\omega G_\omega + \frac{k^2 - \omega(t + \omega)}{2\omega} \ln \frac{\rho_\omega^{-2} k^4 \mu^2}{|(k^2 - \omega^2)(k^2 - \omega(2t + \omega))|} \quad (4.2.52)$$

$$- \frac{i\pi |k^2 - \omega(t + \omega)|}{2\omega} (\theta[\omega^2 - k^2 - t^2] - \theta[\omega(\omega + 2t) - k^2]),$$

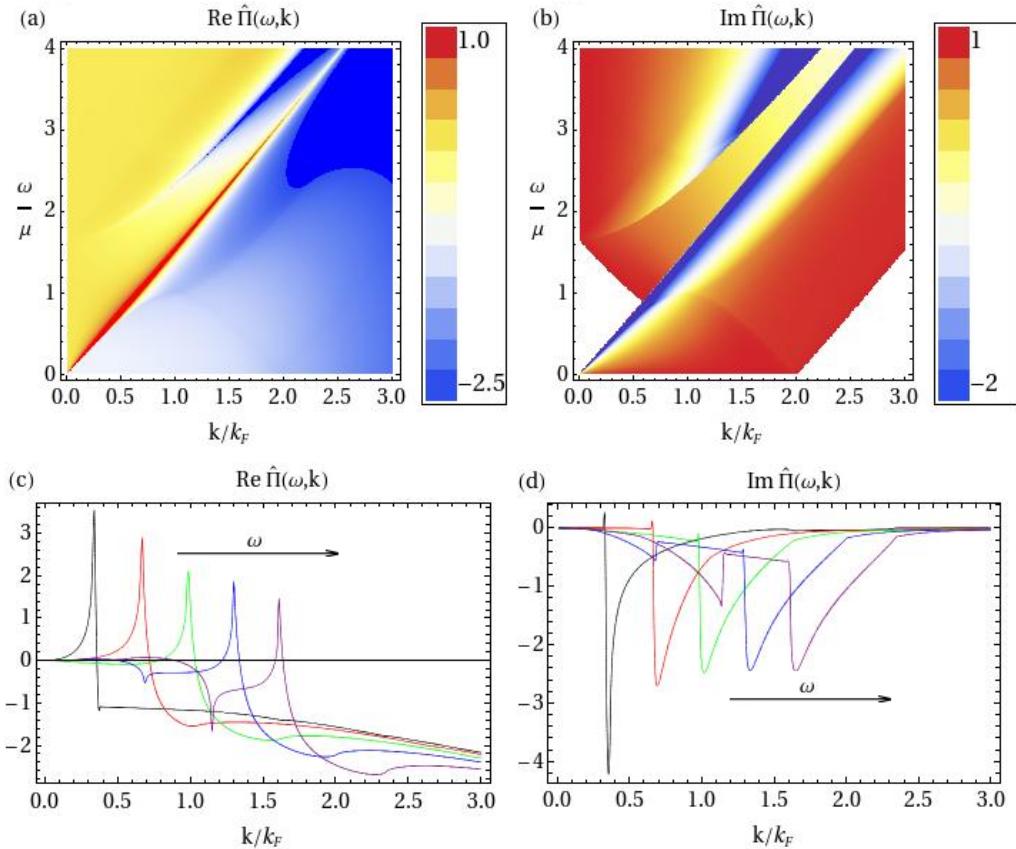


Рис. 4.1 Нормована поляризаційна функція для $\mu/t = 0.6$. На графіках (а) та (б) зображене густину дійсної та уявної частини нормованої поляризації, визначеної виразом (4.2.51), відповідно. Графіки (с) та (д) є зрізи постійної частоти для $\omega/\mu = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$.

де

$$c_\omega = \frac{3k^4 - k^2(t^2 + 5\omega^2) + 2\omega^4}{2(\omega^2 - k^2)^2}, \quad \rho_\omega = k\sqrt{\frac{\omega^2 - k^2 - t^2}{\omega^2 - k^2}}, \quad \mu_\star = 2\mu + t - \omega, \quad (4.2.53)$$

$$\frac{G_\omega}{\sqrt{\omega^2 - k^2}} = \ln \left(\mu_\star \operatorname{sgn}(k^2 - \omega^2) + \sqrt{k^2 - \omega^2} \sqrt{\frac{\rho_\omega^2 - \mu_\star^2}{\omega^2 - k^2} + i0} \frac{k^2 + \omega\mu_\star}{\omega^2 - k^2} \right) + (\mu \rightarrow 0), \quad (4.2.54)$$

$$Q_{\pm,\omega}^r = |k^2 - \omega(t + \omega)| \ln \left(y + i\sqrt{\operatorname{sgn}\rho_\omega^2 - y^2 + i0} \frac{k^2 \pm \omega r}{\omega^2 - k^2} \right), \quad (4.2.55)$$

$$g_\omega = \frac{\sqrt{k^2 - \omega^2}}{2} \tan^{-1} \frac{\sqrt{k^2 - \omega^2}}{t}, \quad y = \frac{\rho_\omega^2 - r(\omega + t)}{|\rho_\omega(r - \omega - t)|}, \quad (4.2.56)$$

і вирази $i0(\dots)$ відповідають за вибір гілки розрізу. Квадратний корінь та логарифм мають розрізи в комплексній площині, які йдуть по дійсній осі від $-\infty$ до 0. Рівняння (4.2.51)-(4.2.56) є основними результатами даного розділу. Деталі обчислень і вирази для дійсної та від'ємної частини приведені в додатках (4.2.1) та (4.2.2). За слабкої константи зв'язку $t \rightarrow 0$ відтворюються результати отримані в [137], з точністю до загального множника 2, що виникає завдяки наявності двох шарів (в цьому випадку ми маємо розгляднути випадок $\mu > t$ і взяти до уваги $\Pi^+(\omega, k)$). У випадку сильної константи зв'язку $t \gg \mu, k, \omega$, для того, щоб відтворити результати, отримані в [139], треба утримати члени порядку $E_k = k^2/t$.

Зручно нормувати поляризаційну функцію на густину станів на рівні Фермі $D(\mu) = N_f(t + 2\mu)/4\pi$. Тому ми введемо нормовану поляризацію:

$$\hat{\Pi}(\omega, k) \equiv -2 \frac{\Pi^0(\omega, k) + \Pi^-(\omega, k)}{t + 2\mu}. \quad (4.2.57)$$

Нарешті, діелектрична проникність в термінах нормованої поляризації має вигляд:

$$\epsilon(\omega, k) = \kappa \left(1 + 2\pi\alpha D(\mu) \frac{\hat{\Pi}(\omega, k)}{k} \right), \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar v_F \kappa}. \quad (4.2.58)$$

На Рис. (4.1) представлено графік $\hat{\Pi}(\omega, k)$ для $\mu/t = 0.6$. Можна побачити, що дані графіки є дуже схожими на відповідні, представлені в [49]. Статичний випадок $\omega = 0$ та довгохвильова границя $k \rightarrow 0$ розглянуті в наступному підрозділі.

4.3 Аналіз часткових випадків

4.3.1 Статичне екранування

Статична границя $\omega \rightarrow 0$ визначає екранування заряджених домішок. Виконуючи деякі математичні перетворення можна знайти з рівнянь (4.2.51)-(4.2.56)

$$\begin{aligned} \Pi(\omega = 0, k) = & \frac{t}{2} \log \frac{\sqrt{k^2 + t^2}}{\mu} - \frac{t}{4} - \mu - \frac{3k^2 - t^2}{4k} \tan^{-1} \frac{k}{t} - \sqrt{t^2 - k^2} \tanh^{-1} \frac{\sqrt{t^2 - k^2}}{t} \\ & + \left(\sqrt{k^2 - 4\mu(t + \mu)} \left(\frac{t + 2\mu}{2k} + \frac{k}{2\mu} \right) - \frac{3k^2 - t^2}{2k} \cos^{-1} \frac{t + 2\mu}{\sqrt{k^2 + t^2}} - \right. \\ & \left. - t \tanh^{-1} \frac{k\sqrt{k^2 - 4\mu(t + \mu)}}{k^2 - 2t\mu} \right) \frac{\theta[k^2 - 4\mu(t + \mu)]}{2} \\ & + \left(\sqrt{t^2 - k^2} \sinh^{-1} \frac{2\mu\sqrt{t^2 - k^2}}{k^2} - \sqrt{\frac{k^4}{4\mu^2} - k^2 + t^2} \right) \frac{\theta[k^4 - 4k^2\mu^2 + 4t^2\mu^2]}{2}. \end{aligned} \quad (4.3.59)$$

Поведінка нормованої статичної поляризації $\Pi(k) \equiv -2\hat{\Pi}(\omega = 0, k)/(t + 2\mu)$, а також відповідної поляризації для моношару графену [137] і двошарового графену в 2-зонному наближенні [139] зображене на Рис. (4.2a-4.2c) як функція нормалізованого імпульсу k/k_F . Ми бачимо, що поляризаційна функція, обчислена в 4-зонній моделі, має розрив при $k = 2k_F$ подібно до того, як це було в 2-зонній моделі (див Рис. 4.2e), однак, вона не прямує до постійного значення при великих імпульсах. Натомість вона зростає лінійно, як і у випадку моношару графену (див. Рис. 4.2f). Для $\mu/t \rightarrow 0$, поляризаційна функція подібна до поляризаційної функції в 2-зонній моделі [139] і прямує до поляризації моношару при $\mu/t \gg 1$. Діелектрична проникність при великих k для двошарового графену в 4-зонній моделі рівна $\epsilon(k) = 1 + \pi\alpha N_f/4$, тоді як $\epsilon(k) = 1$ в двохзонній моделі. Треба зазначити, що для моношару графену $\epsilon(k) = 1 + \pi\alpha N_f/8$, таким чином, проникність для двошарового графену в 4-зонній моделі і проникність моношару співпадають при заміні $N_f \rightarrow 2N_f$ завдяки подвоєнню шарів.

Оскільки статична поляризація залежить тільки від абсолютноного значення імпульсу, то модифікація кулонівського потенціалу в наближенні випадкових фаз визначається наступною формулою:

$$V(r) = \int_0^\infty dk \frac{k J_0(kr)}{k + 2\pi\alpha D(\mu)\Pi(k)}. \quad (4.3.60)$$

При скінченному допуванні поляризація має розрив при $k = 2k_F$, отже, на великих відстанях потенціал поводить себе як

$$V(r) \sim \frac{1}{r} \frac{\sin(rk_F)}{rk_F}, \quad rk_F \rightarrow \infty. \quad (4.3.61)$$

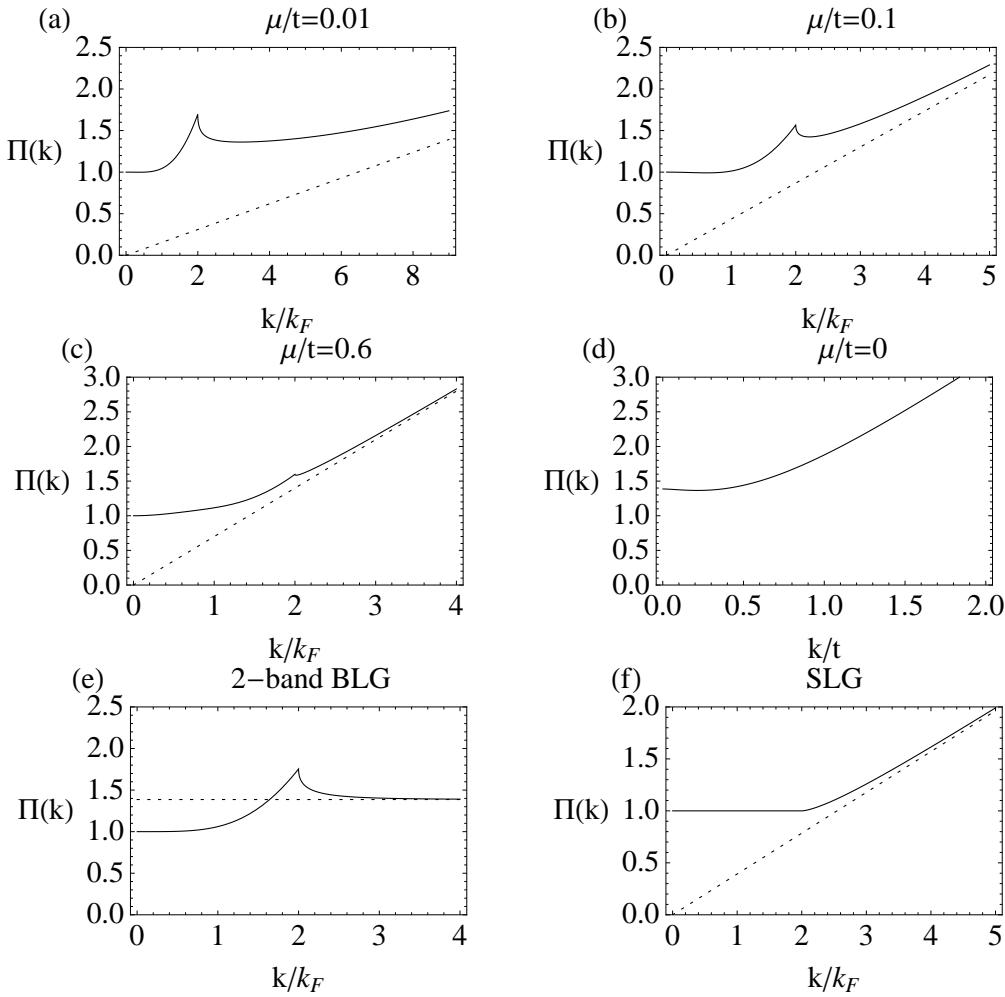


Рис. 4.2 Статична поляризація. На графіках (а), (б) і (с) зображене нормовану статичну поляризацію (4.3.59) при $\mu/t = 0.01, 0.1$ і 0.6 , відповідно. Точкові лінії відповідають асимптотичним значенням $\Pi(k) = \pi k/2(t + 2\mu)$. На графіках (е) та (ф) зображенено, відповідно, статичну границю для поляризаційної функції для двошарового графену в 2-зонному наближенні [139] та моношару графену, обчислену в діраківському наближенні в [49, 73, 137]. Точкові лінії на графіку (е) відповідають асимптотичним значенням $\Pi(k) = \log 4$; асимптотика на графіку (ф) є $\Pi(k) = \pi k/8\mu$.

При нульовому допуванні розрив відсутній і основна асимптотика визначається довгохвильовою асимптотикою поляризаційної функції. Маємо

$$V(r) \sim \frac{1}{r} \frac{1}{(rt)^2}, \quad rt \rightarrow \infty. \quad (4.3.62)$$

Модифікація кулонівського потенціалу показана на Рис. (4.3).

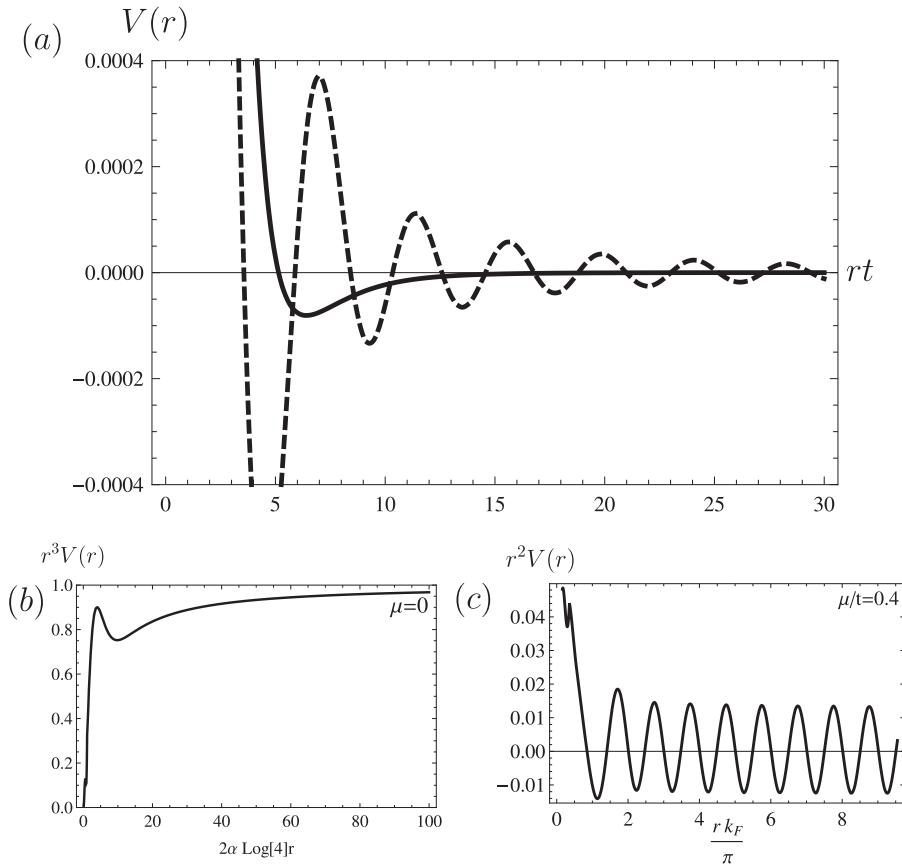


Рис. 4.3 Модифікований кулонівський потенціал при скінченному та нульовому допуваннях. На графіках (а) пунктирна лінія відповідає потенціалу при $\mu = 0.4t$, а суцільна лінія нульовому μ . Графіки (б) і (с) показують асимптотики модифікованого потенціалу при нульовому та скінченному допуванні, відповідно.

4.3.2 Плазмони

Поляризаційна функція в довгохвильовій границі $k \ll t$ виражається наступною формулою:

$$\begin{aligned} \Pi(\omega, k) = & \frac{k^2}{2\omega^2} \left(\mu + t + \frac{t^2}{4\omega} \log \frac{2\mu + t - \omega}{2\mu + t + \omega} + \frac{t^2}{4\omega} \log \frac{\omega - t}{t + \omega} \right. \\ & \left. + \frac{\omega(\omega + 2t)}{4(t + \omega)} \log \frac{2\mu - \omega}{2t + \omega} - \frac{\omega(\omega - 2t)}{4(t - \omega)} \log \frac{2t - \omega}{2\mu + \omega} \right). \end{aligned} \quad (4.3.63)$$

Якщо ω мала, то

$$\Pi(\omega, k) = \frac{k^2 \mu(\mu + t)}{\omega^2(t + 2\mu)}. \quad (4.3.64)$$

Дисперсія плазмона визначається з рівняння $\epsilon(k, \omega(k)) = 0$ яке дає:

$$\omega(k) = \sqrt{k \frac{e^2 N_f \mu(\mu + t)}{\kappa \mu + 2t}} \quad (4.3.65)$$

Це загальний вираз для плазмонної моди в двовимірних системах, що для загального спектру квазічастинок можуть бути записані як [139]:

$$\omega(k) = \sqrt{k \frac{e^2 N_f}{2\kappa} q \frac{\partial E_q}{\partial q} \Big|_{q=q_F}}. \quad (4.3.66)$$

Еквівалентно ця формула може бути записана як:

$$\omega(k) = 2\pi \sqrt{k \frac{e^2 N_f}{\kappa} \frac{n}{D(\mu)}}, \quad (4.3.67)$$

де $n = N_f k_F^2 / 4\pi$ - наявна двовимірна густина електронів, а $D(\mu)$ - густина станів на поверхні Фермі. Для моношару графену $D(\mu) \sim \sqrt{n}$, а значить $\omega(k) \sim k^{1/2} n^{1/4}$.

Ми розв'язуємо рівняння $\text{Re}[\epsilon(k, \omega(k))] = 0$ чисельно для вільного графену (тобто $\kappa = 1$). Результати приведені на Рис. (4.4). Можна побачити, що окрім “класичних” плазмонів з низькоенергетичною поведінкою (4.3.66) ми маємо

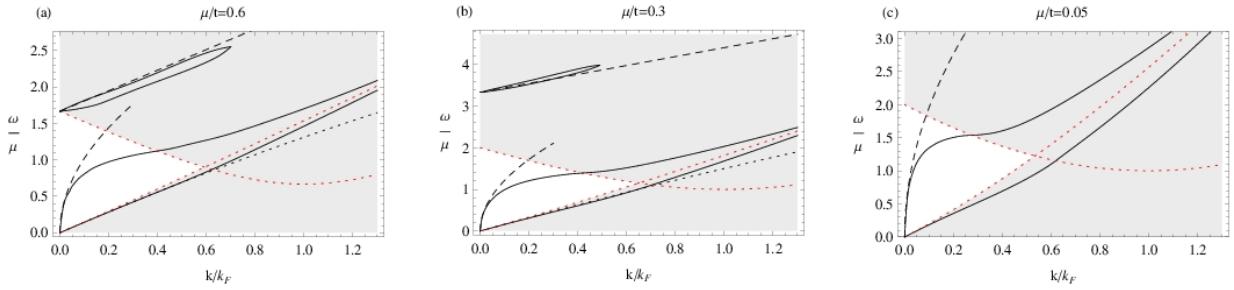


Рис. 4.4 На графіках (а), (б), (с) представлено дисперсійні співвідношення (чорні суцільні лінії) для плазмонів у вільному графені для значень електронної густини $\mu/t = 0.6$, $\mu/t = 0.3$ і $\mu/t = 0.05$ відповідно. Чорні пунктирні лінії описують класичний плазмон (4.3.66) та високоенергетичний плазмон (4.3.69). Чорні точковані лінії відповідають додатковим низькоенергетичним плазмонам (4.3.68). Заповнені області показують зони з ненульовою уявною частиною поляризації, границі яких (червоні точкові лінії) визначаються рівняннями (4.3.70).

також моди з лінійною поведінкою та високоенергетичні моди, подібні до π -плазмонів [147]. Відповідні дисперсійні співвідношення для малих імпульсів мають вигляд:

$$\omega(k) = \frac{2k(t + \mu)}{t + 2\mu} - \frac{k^2 t^2 \mu(t + \mu)^2}{(t + 2\mu)^3}, \quad (4.3.68)$$

$$\omega(k) = t + \frac{e^2 N_f}{2\kappa} k \log \left(1 + \frac{2\mu}{t} \right). \quad (4.3.69)$$

Однак на відміну від “класичних” плазмонів, ці моди не можна повністю вважати когерентними колективними збудженнями, оскільки вони лежать в областях з сильним поглинанням, що відповідає сірим областям на графіку. Границі цих зон визначаються з рівняння $\text{Im}\Pi(k, \omega(k)) = 0$, яке легко

розв'язується, і ми отримуємо

$$\omega_{\pm}(k) = \sqrt{\frac{t^2}{4} + (k \pm k_F)^2} - \left| \frac{t}{2} \pm \mu \right|, \quad (4.3.70)$$

що описує границі континууму одночастинкових збуджень (затухання Ландau). Слід зауважити, що на відміну від звичайного 2D електронного газу, плазмони починають затухати за менших імпульсів завдяки міжзонним переходам.

Всі описані плазмони зникають за нульового хімічного потенціалу, що гарно співвідноситься з класичною картиною, в якій плазмові осциляції відсутні при відсутності матерії. Однак, у квантовому випадку це напряму випливає з форми спектру елементарних збуджень. Якщо взяти до уваги ефекти “тригонального обгортання” низько енергетичний спектр переходить в:

$$E_k = \frac{\hbar^2 v_F^2 k^2}{t} \rightarrow \frac{\hbar^2 v_F^2 k \sqrt{k^2 + k_0^2 - 2kk_0 \cos 3\phi}}{t}, \quad (4.3.71)$$

де $k_0 \approx 5.7 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ [129]. В цьому випадку, як показано в роботі [148], існують плазмони із слабких затуханням. Можна приблизно знайти їхню форму дисперсійного співвідношення:

$$\omega \approx E_0 \sqrt{\frac{N_f e^2}{\hbar v_0} \frac{k}{k_0}} \approx 12.5 E_0 \sqrt{\frac{k}{k_0}}, \quad (4.3.72)$$

де $E_0 = \hbar^2 v_F^2 k_0^2 / t \approx 3.9 \text{ meV}$ і $v_0 = E_0 / (\hbar k_0) = 10^5 \text{ m/s}$. Легко побачити, що ці плазмони зникають при $k_0 \rightarrow 0$.

4.4 Висновки

В цьому розділі ми отримали компактний аналітичний вираз для динамічної поляризації в двошаровому графені в чотирьохзонній моделі в однопетлевому наближенні. Наші результати справедливі при довільних значеннях хвильового вектора, частоти та рівня допування. Аналізуючи поляризацію, як функцію константи перескоку між графеновими шарами, ми відтворили для слабкозв'язаних шарів вираз для поляризації одношарового графену, а для сильного зв'язку вираз для поляризації двошарового графену в двохзонній моделі. Також було досліджено статичну та довгохвильову границі для загального виразу для поляризації, що дало змогу знайти вигляд екранованого қулонівського заряду та дисперсійні співвідношення для плазмонів.

ВИСНОВКИ

На завершення сформулюємо основні результати дисертаційної роботи:

1. Досліджено вільні квазічастниківі збудження в графені в полі кулонівського центру. Знайдено критичний заряд центру, при перевищенні якого система стає нестабільною. Ця нестабільність, відома також від назвою “падіння на центр”, полягає в появі квазістаціонарних рівнів з комплексними значеннями енергії. Енергії квазістаціонарних рівнів у випадку безмасових збуджень характеризуються суттєво-сингулярним типом залежності від константи зв’язку, що є наслідком масштабної інваріантності кулонівського потенціалу. Показано, що наявність щілини в спектрі квазічастинок стабілізує систему, зменшуючи уявну частину енергії квазістаціонарних рівнів, збільшуючи таким чином їх час життя. Цей результат вказує на те, що кулонівська взаємодія може привести до формування щілини в спектрі квазічастинок, навіть, якщо вона була спочатку відсутня.
2. Для квазічастинкових збуджень, що взаємодіють за законом Кулона, досліджено нестабільність в екситонному каналі. Знайдено критичну константу зв’язку, при якій в системі з’являється тахіонне збудження. Тахіонні стани грають роль квазістаціонарних станів в задачі надкритичного кулонівського центру і приводять до перебудови основного стану та формування екситонного конденсату. Тахіонна нестабільність є польо-

вим аналогом “падіння на центр”, а критична константа зв’язку - аналогом критичного кулонівського заряду.

3. Детально досліджено генерацію щілини в графені. Зокрема, враховано ефекти динамічної поляризації, що приводить до зниження критичної константи від $\alpha_c = 1.62$ в статичному випадку до $\alpha_c = 0.92$. Показано, що врахування локальної чотирьохферміонної взаємодії дозволяє правильно описати фазовий перехід у фазу зі щілиною. Знайдено фазову діаграму та розраховано критичні індекси екситонного фазового переходу, які виявились близькими до відповідних значень, отриманих в квантових монте-карлівських симуляціях.
4. Досліджено вплив магнітного поля на генерацію щілини. Розглядалися невзаємодіючі електрони в полі радіальних потенціалів. Так, для потенціалу радіальної ями аналітично, а для кулонівського центру чисельно було показано, що зовнішнє магнітне поле знижує до нуля значення критичної константи, при якому відбувається зародження нестабільності. Цей результат є квантовомеханічним аналогом явища магнітного каталізу в графені.
5. Знайдено аналітичний вираз однопетлевої поляризації в двошаровому графені в загальній чотирьохзонній моделі при довільних значеннях частоти, імпульсу та рівня допування. Проаналізовано статичну та довгогхильову границі поляризації, що дозволило знайти екранизований кулонівський потенціал та дисперсію плазмонів, відповідно.

Автор щиро вдячний:

- науковому керівнику Валерію Павловичу Гусиніну та постійному співавтору Едуарду Володимировичу Горбару за постановку цікавих задач та плідну співпрацю.
- Артуру Слободенюку та Олександру Кашубі за обговорення наукових проблем, що, без сумніву, було важливим для отримання низки результатів дисертації.
- Віталію Миколайовичу Шадурі та Колі Йоргову за можливість отримання освіти в сучасній теоретичній фізиці.
- Юлі Безвершенко за постійне натхнення та допомогу при редагуванні цієї дисертації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films / K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov et al. // Science. - 2004. - Vol. 306, No. 5696. - P. 666-669.
2. Geim, A. K. Graphene: Status and Prospects / A. K. Geim // Science. - 2009. - Vol. 324, No. 5934. - P. 1530-1534.
3. Katsnelson M. I. Graphene: New Bridge Between Condensed Matter Physics and Quantum Electrodynamics // M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov // Solid State Commun. - 2007. - Vol. 143. - P. 3-13.
4. The Electronic Properties of Graphene / A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres et al. // Rev. Mod. Phys. - 2009. - Vol. 81. - P. 109-162.
5. Fomin P.I. Vacuum Instability Of Massless Electrodynamics And The Gell-mann-Low Eigenvalue Condition For The Bare Coupling Constant / P. I. Fomin, V. P. Gusynin, and V. A. Miransky// Phys. Lett. B. - 1978. - Vol. 78. - P. 136.
6. Fomin P.I. Dynamical Symmetry Breaking and Particle Mass Generation in Gauge Field Theories / P. I. Fomin, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, Yu. A. Sitenko // Rivista del Nuovo Cimento. - 1983. - Vol. 6. - P. 1-90.
7. Bardeen W.A. Dilaton and Chiral-Symmetry Breaking / W.A. Bardeen, C.N. Leung, S.T. Love // Phys. Rev. Lett. - 1986. - Vol. 56. - P. 1230.

8. Kogut J. On the Existence of Quantum Electrodynamics/ J. Kogut, E. Dagotto, A. Kocic // Phys. Rev. Lett. - 1988. - Vol. 61. - P. 2416.
9. Miransky V.A. Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theories / V. A. Miransky, - Singapore : World Scientific, 1993.
10. Katsnelson M.I. Zitterbewegung, chirality, and minimal conductivity in graphene /M.I. Katsnelson // Eur. Phys. J. B. - 2006. - Vol. 51. - P. 157-160.
11. Katsnelson, M. I. Chiral Tunneling and the Klein paradox in Graphene / M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, A. K. Geim // Nature Physics. - 2006. - Vol. 2. - P. 620-625.
12. Allor D. Schwinger mechanism and graphene / D. Allor, T. D. Cohen, D. A. McGady // Phys. Rev. D. - 2008. - Vol. 78. - P. 096009.
13. Shytov A. V. Vacuum Polarization and Screening of Supercritical Impurities in Graphene / A.V. Shytov, M.I. Katsnelson, L.S. Levitov // Phys. Rev. Lett. - 2007. - Vol. 99. - P. 236801.
14. Shytov A. V. Atomic Collapse and Quasi-Rydberg States in Graphene / A.V. Shytov, M.I. Katsnelson, L.S. Levitov // Phys. Rev. Lett. - 2007. - Vol. 99. - P. 246802.
15. Fogler M.M. Screening of a hypercritical charge in graphene / M.M. Fogler, D.S. Novikov, B.I. Shklovskii // Phys. Rev. B. - 2007. - Vol. 76. - P. 233402.

16. Young A. Quantum interference and carrier collimation in graphene heterojunctions / A. Young, P. Kim // Nature Physics. - 2009. - Vol. 5. - P. 222.
17. Wallace P. R. The Band Theory of Graphite / P. R. Wallace // Phys. Rev. - 1947. - Vol. 71, No.9. - P. 622-634.
18. Semenoff G. Condensed-Matter Simulation of a Three-Dimensional Anomaly / G. Semenoff // Phys. Rev. Lett. - 1984. - Vol. 53, No.26. - P. 2449-2452.
19. Two-Dimensional Gas of Massless Dirac Fermions in Graphene / K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov et al. // Nature. - 2005. - Vol. 438. - P. 197-200.
20. Zhang Y. Experimental Observation of Quantum Hall Effect and Berry's Phase in Graphene / Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormer, P. Kim // Nature. - 2005. - Vol. 438. - P. 201-204.
21. Room-Temperature Quantum Hall Effect in Graphene / K. S. Novoselov, Z. Jiang, Y. Zhang et al. // Science. - 2007. - Vol. 315. - P. 1379-1381.
22. von Klitzing K. New Method for High-Accuracy Determination of the Fine Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance / K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper // Phys. Rev. Lett. - 1980. - Vol. 45, No.6. - P. 494-497.
23. Криве И. В. Дробный заряд в кватновой теории поля и в физике твердого тела. / И. В. Криве, А. С. Рожавский // УФН. - 1987. - Т. 152, № 1. - С. 33-74.

24. Андо Т. Электронные свойства двумерных систем / Т. Андо, А. Фаулер, Ф. Стерн. - Москва : Мир, 1986.
25. Ishikawa K. Axial Anomaly in Three Dimensions and Planar Fermions / K. Ishikawa // Phys. Rev. D. - 1985. - Vol. 31, No.6. - P. 1432-1442.
26. Widom A. Implications of the Chiral Anomaly for Quantum-Hall Effect Devices / A. Widom, M. H. Friedman, Y. N. Srivastava // Phys. Rev. B. - 1985. - Vol. 31, No.10. - P. 6588-6591.
27. Abouelsaood A. Relation Between the Chiral Anomaly and the Quantized Hall Effect / A. Abouelsaood // Phys. Rev. Lett. - 1985. - Vol. 54, No.18. - P. 1973-1975.
28. Frohlich J. Gauge invariance and current algebra in nonrelativistic many-body theory / J. Frohlic, U. M. Studer // Rev. Mod. Phys. - 1993. - Vol. 65. - P. 733.
29. Zheng Y. Hall Conductivity of a Two-Dimensional Graphite System / Y. Zheng, T. Ando // Phys. Rev. B. - 2002. - Vol. 65, No.24. - P. 245420.
30. Gusynin, V. P. Transport of Dirac quasiparticles in graphene: Hall and optical conductivities / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov // Phys. Rev. B. — 2006. — Vol. 73. — P. 245411.
31. Gusynin V. P. Unconventional Integer Quantum Hall Effect in Graphene / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov // Phys. Rev. Lett. - 2005. - Vol. 95, No.14. - P. 146801.

32. Peres N. M. R. Electronic Properties of Disordered Two-Dimensional Carbon / N. M. R. Peres, F. Guinea, A. H. Castro Neto // Phys. Rev. B. - 2006. - Vol. 73, No.12. - P. 125411.
33. Unconventional Quantum Hall Effect and Berry's Phase 2π in Bilayer Graphene / K. S. Novoselov, E. McCann, S. V. Morozov et al. // Nature Phys. - 2006. - Vol. 2. - P. 177-180.
34. Gate-Variable Optical Transitions in Graphene / F. Wang, Y. Zhang, C. Tian et al. // Science. - 2008. - Vol. 320, No. 5873. - P. 206?209.
35. Universal dynamic conductivity and quantized visible opacity of suspended graphene / R. R. Nair, P. Blake, A. N. Grigorenko et al. // Science. - 2008. - Vol. 320, No. 5881. - P. 1308.
36. Dirac charge dynamics in graphene by infrared spectroscopy / Z. Q. Li, E. A. Henriksen, Z. Jiang et al. // Nature Phys. - 2008. - Vol. 4. - P. 532?535.
37. Measurement of the optical conductivity of graphene / K. F. Mak, Y. Sfeir, Matthew Y.and Wu, C. H. Lui et al. // Phys. Rev. Lett. - 2008. - Vol. 101, No. 19. - P. 196405.
38. Gusynin, V. P. Unusual Microwave Response of Dirac Quasiparticles in Graphene / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, J. P. Carbotte // Phys. Rev. Lett. - 2006. - Vol. 96, No. 25. - P. 256802.
39. Gusynin, V. P. On the universal AC optical background in graphene / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, J. P. Carbotte // New J. Phys. - 2009. - Vol. 11. - P. 095013.

40. Kuzmenko, A. B. Universal dynamical conductance in graphite / A. B. Kuzmenko, E. van Heumen, F. Carbone, D. van der Marel // Phys. Rev. Lett. - 2008. - Vol. 100. - P. 117401.
41. Cyclotron resonance study of the electron and hole velocity in graphene monolayers / R. S. Deacon, K.-C. Chuang, R. J. Nicholas et al. // Phys. Rev. B. - 2007. - Vol. 76. - P. 081406.
42. Infrared Spectroscopy of Landau Levels of Graphene / Z. Jiang, E. A. Henriksen, L. C. Tung et al. // Phys. Rev. Lett. - 2007. - Vol. 98. - P. 197403.
43. Landau-level splitting in graphene in high magnetic fields / Y. Zhang, Z. Jiang, J. P. Small et al. // Phys. Rev. Lett. - 2006. - Vol. 96. - P. 136806.
44. Dissipative Quantum Hall Effect in Graphene near the Dirac Point / D. A. Abanin, K. S. Novoselov, U. Zeitler et al. // Phys. Rev. Lett. - 2007. - Vol. 98. - P. 196806
45. Checkelsky, J. G. Zero-Energy State in Graphene in a High Magnetic Field / J. G. Checkelsky, L. Li, N. P. Ong // Phys. Rev. Lett. - 2008. - Vol. 100. - P. 206801.
46. Checkelsky, J. G. Divergence of the resistance of graphene at the Dirac point to $40 \text{ M}\Omega$ in a strong magnetic field / J. G. Checkelsky, L. Li, N. P. Ong // Phys. Rev. B. - 2009. - Vol. 79. - P. 115434.
47. Fractional quantum hall effect and insulating phase of dirac electrons in graphene / X. Du, I. Skachko, A. Duerr, Fabian Luican, E. Y. Andrei // Nature. - 2009. - Vol 462. - P. 192-195.

48. Observation of the Fractional Quantum Hall Effect in Graphene / K. I. Bolotin, F. Ghahari, M. D. Shulman et al. // Nature. - 2009. - Vol. 462. - P. 196?199.
49. Kotov V. N. Electron-Electron Interactions in Graphene: Current Status and Perspectives / V. N. Kotov, B. Uchoa, V. M. Pereira, et al.// Cornel University Library. - Режим доступу: <http://arxiv.org/pdf/1012.3484>. - Дата доступу: 15.12.2010. - Cornel University Library.
50. Das Sarma S. Electronic transport in two dimensional graphene/ S. Das Sarma, S. Adam, E.H. Hwang, E. Rossi // Rev. Mod. Phys. - 2011. - Vol. 83. - P. 407-476.
51. Experimental review of graphene / D. R. Cooper, B. D'Anjou, N. Ghattamaneni et al.// Cornel University Library. - Режим доступу: arxiv.org/pdf/1110.6557v1. - Дата доступу: 29.10.2011. - Cornel University Library.
52. Manifestation of electron-electron interaction in the magnetoresistance of graphene / J. Jobst, D. Waldmann, I. V. Gornyi et al.// Cornel University Library. - Режим доступу: arxiv.org/pdf/1110.5893v1. - Дата доступу: 26.10.2011. - Cornel University Library.
53. Transport Spectroscopy of Symmetry-Broken Insulating States in Bilayer Graphene / J. Velasco Jr., L. Jing, W. Bao et al.// Cornel University Library. - Режим доступу: arxiv.org/pdf/1108.1609v1. - Дата доступу: 8.08.2011. - Cornel University Library.

54. Many-body interactions in quasi-freestanding graphene / D. A. Siegel and Ch.-H. Park, Ch. Hwang et al. // PNAS. - 2011. - Vol. 108, No. 28. - P. 11365-11369.
55. Zou K. Electron-electron interaction and electron-hole asymmetry in bilayer graphene / K. Zou, X. Hong, J. Zhu // Phys. Rev. B. - 2011. - Vol. 84. - P. 085408.
56. Dirac cones reshaped by interaction effects in suspended graphene / D. C. Elias, R. V. Gorbachev, A. S. Mayorov et al. // Nature Phys. - 2011. - Vol. 7. - P. 701-704.
57. Shylau A. A. Interacting electrons in graphene nanoribbons in the lowest Landau level / A. A. Shylau, I. V. Zozoulenko // Cornel University Library. - Режим доступу: arxiv.org/pdf/1104.5193v1. - Дата доступу: 27.04.2011. - Cornel University Library.
58. Drut J.E. Lattice field theory simulations of graphene / J. E. Drut, T. A. Lande // Phys. Rev. B. - 2009. - Vol. 79. - P. 165425.
59. Drut J.E. Is graphene in vacuum an insulator? / J. E. Drut, T. A. Lande // Phys. Rev. Lett. - 2009. - Vol. 102. - P. 026802.
60. Drut J.E. Critical exponents of the semimetal-insulator transition in graphene: A Monte Carlo study / J. E. Drut, T. A. Lande // Phys. Rev. B. - 2009. - Vol. 79. - P. 241405(R).

61. Gamayun O. V. Supercritical Coulomb Center and Excitonic Instability / O. V. Gamayun, E. V. Gorbar, V. P. Gusynin // Phys. Rev. B. - 2009. - Vol. 80. - P. 165429.
62. Gamayun O. V. Excitonic Instability and Gap Generation in Monolayer Graphene / O. V. Gamayun, E. V. Gorbar, V. P. Gusynin // Ukrainian Journal of Physics. - 2010. - Vol. 55, No. 1, - P. 95-103.
63. Gamayun O. V. Gap generation and semimetal-insulator phase transition in graphene / O. V. Gamayun, E. V. Gorbar, V. P. Gusynin // Phys. Rev. B. - 2010. - Vol. 81. - P. 075429.
64. Gamayun O. V. Magnetic field driven instability of charged center in graphene / O. V. Gamayun, E. V. Gorbar, V. P. Gusynin // Phys. Rev. B. - 2011. - Vol. 83. - P. 235104.
65. Gamayun O. V. Dirac Electrons in a Planar Potential Well in a Magnetic Field / O. V. Gamayun, E. V. Gorbar, V. P. Gusynin // Ukrainian Journal of Physics. - 2011. - Vol. 56, No. 7, - P. 688-693.
66. Gamayun O. V. Dynamical screening in bilayer graphene / O. V. Gamayun // Phys. Rev. B. - 2011. - Vol. 84. - P. 085112.
67. Gamayun O. V. Supercritical Coulomb center, excitonic instability and gap generation in graphene / O. V. Gamayun, E. V. Gorbar, V. P. Gusynin // Сучасні проблеми теоретичної фізики, 24-26 грудня 2009: Програма та тези доповідей конференції молодих вчених. - Україна, Київ, 2009. - С. 45.

68. Гамаюн О. В. Нестабільність надкритичного кулонівського центру індукована магнітним полем в графені / О. В. Гамаюн, Е. В. Горбар, В. П. Гусинін // 11-а Всеукраїнська школа-семінар та конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, 1-3 червня 2011: збірка тез. - Україна, Львів, 2011. - С. 53.
69. Gamayun O. V. Dynamical screening in bilayer graphene / O. V. Gamayun // Low temperature physics: 2nd International Conference for Young Scientists, 6-10 June: Conference programme and Abstract book. - Ukraine, Kharkov, 2011. - P. 136.
70. Dillenschneider R. Exciton formation in graphene bilayer / R. Dillenschneider, J. H. Han // Phys. Rev. B. - 2008. - Vol. 78. - P. 045401.
71. Khveshchenko D. V. Ghost excitonic insulator transition in layered graphite / D.V. Khveshchenko// Phys. Rev. Lett. - 2001. Vol. 87. - P. 246802.
72. Khveshchenko D. V. Excitonic instability in two-dimensional degenerate semimetals / D. V. Khveshchenko, H. Leal // Nucl. Phys. B. - 2004. - Vol. 687. - P. 323.
73. Gorbar E. V. Magnetic field driven metal-insulator phase transition in planar systems / E.V. Gorbar, V.P. Gusynin, V.A. Miransky, I.A. Shovkovy // Phys. Rev. B. - 2002. - Vol. 66. - P. 045108.
74. Gorbar E. V. Fractal structure of the effective action in (quasi-) planar models with long-range interactions / E.V. Gorbar, V.P. Gusynin, V.A. Miransky, I.A. Shovkovy //Phys. Lett. A. - 2003. - Vol. 313. - P. 472.

75. Khalilov V. R. Dirac electron in a Coulomb Field in 2+1 Dimensions / V.R. Khalilov, C.L. Ho // Mod. Phys. Lett. A. - 1998. - Vol. 13. - P. 615.
76. Novikov D. S. Elastic scattering theory and transport in graphene / D. S. Novikov // Phys. Rev. B. - 2007. - Vol. 76. - P. 245435.
77. Pomeranchuk I. On energy levels in systems with $Z > 137$. / I. Ya. Pomeranchuk, Ya. A. Smorodinsky // J. Phys. USSR. - 1945. - Vol. 9. - P. 97.
78. Popov V.S. Creation of the positrons by Coulomb field at $Z > 137$ / V. S. Popov // Sov. Phys. JETP. - 1971. - Vol. 32.- P. 526.
79. Zeldovich Ya. B. Electronic structure of superheavy atoms / Ya. B. Zeldovich, V.S. Popov // Sov. Phys. Usp. - 1972. - Vol. 14. - P. 673?694.
80. Fomin P.I. On the Dynamical Vacuum Rearrangement and the Problem of Fermion Mass Generation / P.I. Fomin, V.A. Miransky // Phys. Lett. B. - 1976. - Vol. 64. - P. 166-168.
81. Greiner W. Quantum Electrodynamics of Strong Fields / W. Greiner, B. Muller, J. Rafelski, - Berlin : Springer-Verlag, 1985.
82. Pereira V. The Coulomb impurity problem in graphene / V. Pereira, J. Nilsson, A. H. Castro Neto // Phys. Rev. Lett. - 2007. - Vol. 99. - P. 166802.
83. Pereira V. Supercritical Coulomb Impurities in Gapped Graphene / V. Pereira, V.N. Kotov A. H. Castro Neto // Phys. Rev. B. - 2008. - Vol. 78. - P. 085101.

84. Terekhov I. S. Screening of Coulomb Impurities in Graphene / I.S. Terekhov, A.I. Milstein, V.N. Kotov, O.P. Sushkov // Phys. Rev. Lett. - 2008. - Vol. 100. - P. 076803.
85. Adatoms in Graphene / A.H. Castro Neto, V.N. Kotov, V.M. Pereira, et al // Solid State Communications. -2009. - Vol. 149. - P. 1094.
86. Schrieffer J. R. Theory of Superconductivity /J.R. Schrieffer, - New York : Benjamin Inc. Publisher, 1964.
87. Gonzalez J. Non-Fermi liquid behaviour of electrons in the half-filled honeycomb lattice (A renormalization group approach) / J. Gonzalez, F. Guinea, and M. A. H. Vozmediano// Nucl. Phys. B. - 1994. - Vol. 424. - P. 595.
88. Alicea J. Graphene integer quantum Hall effect in the ferromagnetic and paramagnetic regimes / J. Alicea, M. P. A. Fisher // Phys. Rev. B. - 2006. - Vol. 74. - P. 075422.
89. Herbut I. F. Interactions and phase transitions on graphene's honeycomb lattice /I. F. Herbut // Phys. Rev. Lett. - 2006. - Vol. 97. - P. 146401.
90. Herbut I. F. Theory of integer quantum Hall effect in graphene / I. F. Herbut // Phys. Rev. B. - 2007. - Vol. 75. - P. 165411.
91. Herbut I. F. SO(3) symmetry between Neel and ferromagnetic order parameters for graphene in a magnetic field / I. F. Herbut // Phys. Rev. B. - 2007. - Vol. 76. - P. 085432.

92. Aleiner I. L. Spontaneous symmetry breakings in graphene subjected to in-plane magnetic field / I. L. Aleiner, D. E. Kharzeev, A. M. Tsvelik // Phys. Rev. B. - 2007. - Vol. 76. - P. 195415.
93. Gradsteyn I. S. Tables of Integrals, Series, and Products/ I.S. Gradsteyn, I.M. Ryzhik. - New York : Academic Press, 1965.
94. Holdom B. Raising Condensates Beyond The Ladder / B. Holdom // Phys. Lett. B. -1988. - Vol. 213. - P. 365.
95. Holdom B. Continuum limit of quenched theories / B. Holdom // Phys. Rev. Lett. - 1989.- Vol. 62. - P. 997.
96. Mahanta U. Walking technicolor beyond the ladder approximation / U. Matahanha// Phys. Rev. Lett. - 1989. - Vol. 62. - P. 2349.
97. Mahanta U. Critical Behavior In Quenched QED To All Orders In The Coupling / U. Mahanta // Phys. Lett. B/ - 1989. - Vol. 225. - P. 181.
98. Прудников А. П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. - Москва : Наука, 1981. - С. 800.
99. Salmhofer M. Proof of chiral symmetry breaking in strongly coupled lattice gauge theory / M. Salmhofer, E. Seiler // Commun. Math. Phys. - 1991. - Vol. 139. - P. 395.
100. Gusynin V. P. Catalysis of Dynamical Flavor Symmetry Breaking by a Magnetic Field in 2 + 1 Dimensions / V.P. Gusynin, V.A. Miransky, I.A.Shovkovy // Phys. Rev. Lett. - 1994. - Vol. 73. - P. 3499-3502.

101. Gusynin V. P. Dynamical Flavor Symmetry Breaking by a Magnetic Field in $2+1$ Dimensions / V.P. Gusynin, V.A. Miransky, I.A. Shovkovy // Phys. Rev. D. - 1995. - Vol. 52. - P. 4718-4735.
102. Gusynin V. P. Dynamical Chiral Symmetry Breaking by a Magnetic Field in QED / V.P. Gusynin, V.A. Miransky, I.A. Shovkovy // Phys. Rev. D. - 1995. - Vol. 52. - P. 4747-4751.
103. Miransky V. A. Conformal phase transition in gauge theories / V.A. Miransky, K. Yamawaki // Phys. Rev. D. - 1997. - Vol. 55. - P. 5051.
104. Hands S. Quantum Critical Behaviour in a Graphene-like Model / S. Hands, C. Strouthos // Phys. Rev. B. - 2008. - Vol. 78. - P. 165423.
105. Gusynin V. P. Infrared cutoff dependence of the critical flavor number in three-dimensional QED / V.P. Gusynin, M. Reenders // Phys. Rev. D. - 2003. - Vol. 68. - P. 025017.
106. Goecke T. Finite volume effects and dynamical chiral symmetry breaking in QED3 / T. Goecke, C. S. Fischer, R. Williams // Phys. Rev. B. - 2009. - Vol. 79. - P. 064513.
107. Liu G.-Z. Interaction and excitonic insulating transition in graphene / G.-Z. Liu, W. Li, G. Cheng // Phys. Rev. B. - 2009. - Vol. 79. - P. 205429.
108. González J. Marginal-Fermi-liquid behavior from two-dimensional Coulomb interaction / J. González, F. Guinea, M. A. H. Vozmediano // Phys. Rev. B. - 1999. - Vol. 59. - P. 2474.

109. Khveshchenko D. V. Massive Dirac fermions in single-layer graphene / D. V. Khveshchenko // J. Phys.: Condens. Matter. -2009. - Vol. 21.-P. 075303.
110. Strong QED with weak gauge dependence: Critical coupling and anomalous dimension / D. Atkinson, J. C. R. Bloch, V. P. Gusynin, et al // Phys. Lett. B. - 1994. - Vol. 329. - P. 117.
111. Vafek O. Renormalization group approach to two-dimensional Coulomb interacting Dirac fermions with random gauge potential / O. Vafek, M. J. Case // Phys. Rev. B. - 2008. - Vol. 77. P. - 033410.
112. Ma S.-K. Modern theory of critical phenomena / S.-K. Ma. - San Diego : University of California, 1976.
113. Juričić V. Coulomb interaction at the metal-insulator critical point in graphene / V. Juričić, I.F. Herbut, and G. W. Semenoff // Phys. Rev. B. - 2009. - Vol. 80. - P. 081405(R).
114. Miransky V. A. Dynamical symmetry breaking and tight bound states in quantum field theory / V.A. Miransky // Phys. Lett. B. - 1990. - Vol. 248. - P. 151.
115. Herbut I. F. Relativistic Mott criticality in graphene / I. F. Herbut, V. Juričić, O. Vafek // Phys. Rev. B. - 2009. - Vol. 80. - P. 075432.
116. Kondo. K. I. Critical line and dilaton in scale-invariant QED / K.-I. Kondo, H. Mino, K. Yamawaki // Phys. Rev. D. - 1989. - Vol. 39. - P. 2430.

117. Appelquist T. Critical Behavior in (2+1)-Dimensional QED / T. Appelquist, D. Nash, L. C. R. Wijewardhana // Phys. Rev. Lett. - 1988. - Vol. 60. - P. 2575.
118. Carena M. The Phase structure of QED in three-dimensions with fermion selfcoupling / M. Carena, T. E. Clark, C. E. M. Wagner // Nucl. Phys. B. - 1991. - Vol. 356. - P. 117-153.
119. Appelquist T. (2 + 1)-Dimensional QED and a Novel Phase Transition / T. Appelquist, J. Terning, L. C. R. Wijewardhan // Phys. Rev. Lett. - 1995. - Vol. 75. - P. 2081.
120. Gusynin V. P. Effective Action and Conformal Phase Transition in Three-Dimensional QED / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, A. V. Shpigin // Phys. Rev.D. -1998, - Vol. 58. - P. 085023.
121. Bardeen W. A. On the scaling properties of quenched QED / W. A. Bardeen, S. T. Love, V. A. Miransky // Phys. Rev. D. - 1990. - Vol. 42. - P. 3514-3519.
122. Gusynin V. P. Excitonic gap, phase transition, and quantum Hall effect in graphene / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, S. G. Sharapov, I. A. Shovkovy // Phys. Rev. B. - 2006. - Vol. 74. - P. 195429.
123. Fuchs J.-N. Spontaneous Parity Breaking of Graphene in the Quantum Hall Regime / J.-N. Fuchs, P. Lederer // Phys. Rev. Lett. -2007. - Vol. 98. - P. 016803.
124. Ezawa M. Intrinsic Zeeman Effect in Graphene / M. Ezawa // J. Phys. Soc. Jpn. - 2007. - Vol. 76. - P. 094701.

125. Ho Ch.-L. Planar Dirac Electron in Coulomb and Magnetic Fields / Ch.-L. Ho and V.R. Khalilov // Phys. Rev. A. - 2000. - Vol. 61. - P. 032104.
126. Oraevskii V. N. Spontaneous production of positrons by a Coulomb center in a homogeneous magnetic field / V.N. Oraevskii, A.I. Rex, V.B. Semikoz // Sov. Phys. JETP. - 1977. - Vol. 45. - P. 428.
127. Bateman H. Higher Transcendental Functions, Vol. I / H. Bateman, A. Erdelyi. - New York : McGraw-Hill, 1953.
128. Akhiezer A. I. Quantum Electrodynamics / A. I. Akhiezer, V. B. Berestetsky, - Moscow : Nauka, 1969.
129. McCann Ed. Landau level degeneracy and quantum Hall effect in a graphite bilayer / Ed. McCann, V.I.Fal'ko // Phys. Rev. Lett. - 2006. - Vol. 96. - P. 086805.
130. Gorbar E. V. Energy gaps at neutrality point in bilayer graphene in a magnetic field / E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky // JETP Letters. - 2010. - Vol. 91, No. 6. - P. 314-318.
131. Gorbar E. V. Dynamics and phase diagram of the $\nu = 0$ quantum Hall state in bilayer graphene / E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky // Phys. Rev. B. - 2010. - Vol. 81. - P. 155451.
132. Hwang E. H. Screening, Kohn anomaly, Friedel oscillation, and RKKY interaction in bilayer graphene / E. H. Hwang, S. Das Sarma Phys // Phys. Rev. Lett. -2008. - Vol. 101. -P. 156802.

133. Nandkishore R. Dynamical Screening and Ferroelectric-type Excitonic Instability in Bilayer Graphene / R. Nandkishore, L. Levitov // Phys. Rev. Lett. - 2010. - Vol. 104. - P. 156803.
134. Borghi G. Fermi Velocity Enhancement in Monolayer and Bilayer Graphene / G. Borghi, M. Polini, R. Asgari, A. H. MacDonald // Solid State Commun. -2009. - Vol. 149. - P. 1117.
135. Borghi G. Dynamical response functions and collective modes of bilayer graphene / G. Borghi, M. Polini, R. Asgari, A. H. MacDonald // Phys. Rev. B. -2009. - Vol. 80. - P. 241402.
136. Kusminskiy S. V. Electron-electron interactions in graphene bilayers / S. V. Kusminskiy, J. Nilsson, D. K. Campbell, A. H. Castro Neto // Europhys. Lett. - 2009. - Vol. 85. - P. 58005.
137. Wunsch B. Dynamical polarization of graphene at finite doping / B. Wunsch, T. Stauber, F. Sols, F. Guinea // New. J. Phys. - 2006. - Vol. 8. -P. 318.
138. Hwang E. H. Dielectric function, screening, and plasmons in 2D graphene / E. H. Hwang, S. Das Sarma Phys // Phys. Rev. B. - 2007. - Vol. 75. - P. 205418.
139. Sensarma R. Dynamic Screening and Low Energy Collective Modes in Bilayer Graphene / R. Sensarma, E. H. Hwang, S. D. Sarma // Phys. Rev. B. - 2010. - Vol. 82. - P. 195428.

140. Pyatkovskiy P. K. Dynamical polarization, screening, and plasmons in gapped graphene / P. K. Pyatkovskiy // J. Phys.: Condens. Matter. - 2009. - Vol. 21. - P. 025506.
141. Qaiumzadeh A. Ground-state properties of gapped graphene using the random phase approximation / A. Qaiumzadeh, R. Asgari // Phys. Rev. B. - 2009. - Vol. 79. - P. 075414.
142. Shizuya K. Static structure factor for graphene in a magnetic field / K. Shizuya // Phys. Rev. B. - 2007. - Vol. 75. - P. 245417.
143. Roldan R. Collective modes of doped graphene and a standard 2DEG in a strong magnetic field: linear magneto-plasmons versus magneto-excitons / R. Roldan, J.-N. Fuchs, M. O. Goerbig // Phys. Rev. B. - 2009. - Vol. 80. - P. 085408.
144. Roldan R. The magnetic field particle-hole excitation spectrum in doped graphene and in a standard two-dimensional electron gas / R. Roldan, J.-N. Fuchs, M. O. Goerbig // Semicond. Sci. Technol. - 2010. - Vol. 25. - P. 034005.
145. Pyatkovskiy P. K. Dynamical polarization of monolayer graphene in a magnetic field / P. K. Pyatkovskiy and V. P. Gusynin // Phys. Rev. B. - 2011. - Vol. 83. - P. 075422.
146. Gusynin V. P. AC conductivity of graphene: from tight-binding model to 2+1-dimensional quantum electrodynamics / V.P. Gusynin, S.G. Sharapov, J.P. Carbotte // Int. J. Mod. Phys. B. - 2007. - Vol. 21. - P. 4611.

147. Yuan S. Excitation spectrum and high energy plasmons in single- and multi-layer graphene / S. Yuan, R. Roldan, M. I. Katsnelson // Phys. Rev. B. - 2011. - Vol. 84. - P. 035439.
148. Wang X. F. Coulomb screening and collective excitations in a graphene bilayer / X. F. Wang, T. Chakraborty // Phys. Rev. B. - 2007. - Vol. 75. - P. 041404(R).