

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

Левківський Іван Петрович

УДК 538.9

Крайові стани в системах з квантовим ефектом Хола

Спеціальність 01.04.02 – “теоретична фізика”

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Науковий керівник:
Гусинін В. П.,
доктор фіз.-мат. наук,
професор

Київ – 2010

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1 Огляд літератури	9
1.1. Низькоенергетичний опис крайових станів квантового ефекта Хола	9
1.1.1. Теорія Черна-Саймонса та калібровочна аномалія.	12
1.1.2. Гідродинаміка нестисливих крайових деформацій.	13
1.1.3. Квантування крайових збуджень.	16
1.1.4. Колібровочно-інваріантне формулювання.	18
1.2. Експериментальне дослідження крайових станів у електронних інтерферометрах	20
1.2.1. Потенціал прикладено тільки до одного крайового каналу.	23
1.2.2. Потенціал прикладено до двох крайових каналів.	25
РОЗДІЛ 2 Дефазинг у електронному інтерферометрі Маха-Цендера при факторі заповнення $\nu = 2$	27
2.1. Модель Мах-Цендер інтерферометру	27
2.1.1. Поля та гамільтоніан.	28
2.1.2. Бозонізація.	30
2.1.3. Границя сильної взаємодії та універсальність.	32
2.2. Контрастність та зсув фаз Ааронов-Бомівських осциляцій	35
2.3. Обговорення експериментів	40
2.3.1. Потенціал прикладено тільки до одного крайового каналу.	42
2.3.2. Напругу прикладено до двох крайових каналів.	45
2.3.3. Ефекти скінченної температури.	49
РОЗДІЛ 3 Мах-Цендер інтерферометрія дробових квантових хольних крайових станів	53
3.1. Багатоканальні крайові моделі	53

	3
3.1.1. Кінематика крайових моделей.	54
3.1.2. Локальні збудження.	58
3.1.3. Масштабні розмірності локальних збуджень.	59
3.2. Мінімальні моделі для $\nu = 2/m$ та масштабні розмірності їх квазічастинкових полів	60
3.3. Роль кулонівської взаємодії	64
3.4. Експериментальне визначення зарядів та масштабних розмірностей квазічастинок	67
ВИСНОВКИ	75
ДОДАТКИ	77
A Кореляційна функція при скінченній температурі та асимптоти тунельного струму	77
B Самоузгодженність теорії при $\nu = 2$	79
C Обчислення масштабних розмірностей.	81
D Тунельний гамільтоніан	83
E Теорія Черна-Саймонса та голографічний принцип	95
F Математичні аспекти теорії КХ ґраток	99
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	105

ВСТУП

Актуальність теми. Цілий квантовий ефект Хола (відкритий К. Клітцингом, Ж. Дорда та М. Пеппером у 1980 р.) та дробовий ефект Хола (відкритий Д. Цуї і Х. Штормером і А. Госсардом у 1982 р.) являють собою одні з найцікавіших явищ у фізиці конденсованого стану. Унікальність цих ефектів полягає в тому, що вони є проявом квантових закономірностей на макроскопічному рівні. Квантовий ефект Хола полягає у надзвичайно точному квантуванні провідності двовимірного електронного газу у сильному магнітному полі. Точність цього квантування настільки висока, що квантово-хольний стандарт опору, будучи суттєво макроскопічним приладом, є одним з найточніших джерел вимірювання константи тонкої структури $\alpha = e^2/hc$. Крім того, елементарні збудження електронного газу у режимі дробового квантового ефекта Хола мають *дробовий заряд* у одиницях заряду електрона та екзотичну *аніонну* статистику. За останні десятиліття був досягнутий значний прогрес як в теоретичному розумінні КЕХ так і в техніці експериментів. Побудовано ефективно-польову і мікроскопічну теорію цих ефектів. За роботи по квантовому ефекту Хола було присуджено дві Нобелівські премії. Тим не менше, експерименти на електронних інтерферометрах, що були проведені у 2000-2008 рр. свідчать про зовсім недостатній рівень розуміння квантового ефекта Хола на *мезоскопічному* рівні. Крім того, так і не існує єдиного теоретичного передбачення щодо можливості детектування дробового заряду у когерентному режимі. В останні роки була усвідомлена необхідність дослідження крайових станів також і у КЕХ у графені. Все це обумовлює актуальність задач, які були розв'язані у даній дисертаційній роботі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота є частиною досліджень кафедри квантової теорії поля фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка у рамках Комплексної наукової програми “Конденсований стан

– фізичні основи новітніх технологій”.

Мета і завдання дослідження. *Мета* дослідження полягає у побудові моделі електронного інтерферометра на базі крайових станів ефекта Хола, та знаходження методу ідентифікації ефективних низькоенергетичних моделей дробового квантового ефекту Хола за допомогою такого інтерферометра.

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити такі *задачі*:

- модифікувати гамільтоніан кіральної рідини Латінжера \mathcal{H}_0 на випадок, коли має місце сильна кулонівська взаємодія між крайовими каналами;
- розрахувати кореляційну функцію електронів $\langle \psi^\dagger(x, t)\psi(0, 0) \rangle$ в моделі з модифікованим гамільтоніаном для випадку двох крайових каналів при нульовій та скінченній температурі;
- розрахувати диференційну провідність електронного інтерферометра Маха-Цендера $\mathcal{G}(\Delta\mu)$ в режимі цілого та дробового квантового ефекту Хола при нульовій та скінченній температурі;
- розрахувати залежність контрастності інтерференційної картини V_{AB} осциляцій Ааронова-Бома у провідності інтерферометра та фазовий зсув $\delta\varphi_{AB}$ як функцію прикладеної різниці потенціалів $\Delta\mu$ та температури T ;
- побудувати класифікацію ефективних низькоенергетичних польових моделей крайових станів дробового квантового ефекту Хола;
- дослідити можливість експериментально відрізнити нееквівалентні ефективні польові моделі шляхом вимірювання спектрів зарядів та масштабних розмірностей квазічастинок за допомогою електронного інтерферометра Маха-Цендера.

Об’єкт дослідження – когерентні ефекти в крайових збудженнях електронного газу в режимі квантового ефекту Хола; осциляції Ааронова-Бома.

Предмет дослідження – властивості сильновзаємодіючого просторово

обмеженого двовимірного електронного газу в сильному поперечному магнітному полі при низьких температурах.

Методами дослідження є методи квантової теорії поля в теорії конденсованого стану, методи бозонізації, методи теорії решіток та наближені методи квантової механіки і математичної фізики.

Наукова новизна одержаних результатів у дисертації полягає в тому, що в роботі було вперше:

- модифіковано гамільтоніан кіральної рідини Латінжера \mathcal{H}_0 на випадок коли має місце сильна кулонівська взаємодія між крайовими каналами [1];
- розрахована кореляційна функцію електронів $\langle \psi^\dagger(x, t)\psi(0, 0) \rangle$ в моделі з модифікованим гамільтоніаном для випадку двох крайових каналів при нульовій та скінченній температурі для різних значень фактора заповнення рівнів Ландау [1, 3];
- отримано теоретичний вираз, який визначає диференціальну провідність електронного інтерферометра Маха-Цендера $\mathcal{G}(\Delta\mu)$ в режимі цілого та дробового квантового ефекта Хола при нульовій та скінченній температурі, й чисельно розраховано залежність провідності від прикладеної різниці потенціалів і температури [1, 2];
- проведено чисельні розрахунки контрастності інтерференційної картини V_{AB} осциляцій Ааронова-Бома у провідності інтерферометра та фазового зсуву $\delta\varphi_{\text{AB}}$ як функцію прикладеної різниці потенціалів $\Delta\mu$ та температури T для різних схем прикладення потенціалів до інтерферометра [1, 2];
- побудовано класифікацію ефективних низькоенергетичних польових моделей крайових станів дробового квантового ефекту Хола на основі класифікації інваріантів цілочисельних решіток [2];
- продемонстрована принципова можливість експериментально відрізнити нееквівалентні ефективні польові моделі шляхом вимірювання спектрів зарядів та масштабних розмірностей квазічастинок за допомогою

електронного інтерферометра Маха-Цендера у лінійному та нелінійному режимах [2].

Практичне значення одержаних результатів полягає у тому, що отримані в дисертації результати узагальнюють та розвивають теорію кіральної рідини Латінжера, пояснюють на основі механізму плазмонного розсіяння явище немонотонного дефазингу у електронних інтерферометрах, запропоновано експериментальну методику визначення параметрів ефективних польових моделей краю. Крім того запропонований у роботі теоретичний підхід може бути застосований до крайових станів у графені.

Особистий внесок здобувача. Всі основні результати, що винесені на захист, отримані здобувачем особисто. У роботах, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належать всі основні розрахунки, написання текстів статей.

У роботі [1] дисертантом знайдено кореляційні функції електронів, диференційну провідність інтерферометра та залежність контрастності інтерференційної картини від різниці потенціалів прикладеної до інтерферометра. У роботі [2] здобувачем знайдено класифікацію ефективних польових теорій на основі інваріантів решіток, розраховано кореляційні функції квазічастинок, знайдено струм через інтерферометр в лінійному та нелінійному режимах. У роботі [3] дисертантом отримано вираз для кореляційної функції електронів в термінах повної статистики шуму в квантовому точковому контакті, отримано теоретичний вираз для контрастності осциляцій Ааронова-Бома, проведено чисельні розрахунки контрастності для різних значень прозорості точкового контакту та прикладеної різниці потенціалів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались на Міжнародній конференції “Moriond 2008: Quantum Transport and Nanophysics” (Італія, ЛяТуїль, 8-15 березня 2008 р.); на міжнародній конференції молодих вчених “ВІТР-2008” (Київ, 24-26 грудня 2008 р.); на міжнародній конференції “EPQHS-3” (Італія, Піза, 25-28 червня 2009

p.); на міжнародній школі “Summer College on Nonequilibrium Physics from Classical to Quantum Low Dimensional Systems” (Італія, Трієста, 6-24 липня 2009 р.); на міжнародній конференції “АВ50” (Ізраїль, Тель-Авів, 11-14 жовтня 2009 р.); робота також обговорювалася на наукових семінарах відділу теоретичної фізики Женевського університету, Швейцарія, на семінарах фізичного інституту університету Регенсбурга, Німеччина, на семінарах кафедри теоретичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка та на семінарах Інституту теоретичної фізики НАН України імені М.М. Боголюбова.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 3 статтях [1, 2, 3] у наукових фахових виданнях та додатково висвітлено у матеріалах міжнародних конференцій і шкіл.

Структура дисертаційної роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 78 найменувань. Робота написана на 114 сторінках машинописного тексту, містить 20 рисунків і 1 таблицю.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

1.1. Низькоенергетичний опис крайових станів квантового ефекта Хола

Квантовий ефект Хола [4, 5] (КЕХ) є важливим прикладом макроскопічного квантового ефекту і продовжує привертати значну увагу фізиків як у теоретичному так і в експериментальному аспектах. Його низькоенергетична фізика визначається жорсткою вимогою скорочення аномалії та ілюструє так званий “голографічний принцип”, [41, 42] який означає, що фізика системи у певній області закодована у фізиці границі цієї області (див. рис. 1.1). Таким чином, розуміння фізики дробових квантово-хольних (КХ) крайових станів дуже важливе для розуміння КЕХ взагалі. Більше того, аналіз того, як “голографічний принцип” реалізується у конкретних фізичних системах, дасть більш глибоке розуміння сутності того, як він реалізується у більш складних системах.

У випадку КЕХ голографічний принцип проявляє себе у присутності *кіральних* крайових каналів у низькоенергетичній ефективній теорії. [4] Вважається, що ці крайові канали описуються кіральною конформною теорією поля. [44, 32, 33] Для кожного фактору заповнення структура теорії сильно обмежена вимогами локальності, калібровочної інваріантності (збереження заряду) та присутністю збуджень, що описують електрони (тобто збуджень, що мають відповідні квантові числа) у спектрі ефективної теорії. Ці обмеження дозволяють побудувати повну класифікацію можливих ефективних

низькоенергетичних моделей для всіх факторів заповнення. [45, 31] Однак якщо не брати до уваги мікроскопічні властивості конкретного квантово-хольного стану, зазначені вище обмеження не фіксують крайову модель для кожного фактору заповнення однозначно. Наприклад, для таких факторів заповнення як $\nu = 2/3, 2/5$ і т. д. є кілька нееквівалентних моделей, що задовольняють всі вимоги навіть якщо обмежитися тільки мінімальними моделями (тобто моделями з мінімально можливою кількістю каналів). Ця ситуація потребує експериментальної перевірки теорії.

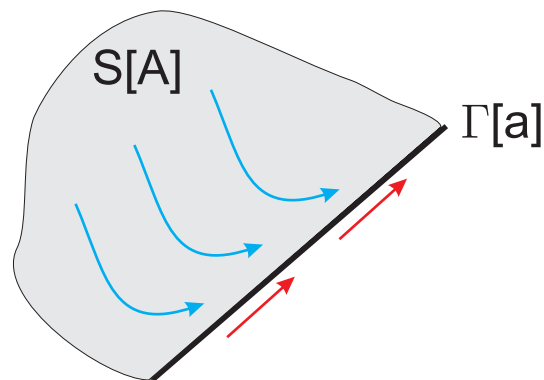


Рис. 1.1. Ілюстрація голографії U квантовохольній системі. Холівський струм в об'ємі має аномалію на краю (тобто не зберігається). Ця аномалія має скорочуватися аномалією крайового струму.[43] Іншими словами, існує аномальна крайова дія $\Gamma[a]$, яка обмежена об'ємною ефективною дією $S[A]$ та вимогою скорочення аномалії.

Існує кілька пропозицій для перевірки фізики КХ краю. Спроби були зроблені у трьох головних напрямках: вимір заряду, статистичної фази та *масштабних розмірностей* збуджень (квазічастинок та електронів). Масштабні розмірності кореляційної функції можуть бути перевірені за допомогою вольт-амперної характеристики тунельного переходу .[46] Ця ідея була експериментально реалізована у роботах [47, 48]. Несподівані результати експериментів спричинили активну дискусію навколо відомої “2.6 проблеми”. [6] Інтерпретація експериментів, описаних у [47, 48] не є тривіальною - може бути необхідним взяти до уваги існування стисливих смуг [22] на краю, безпорядок [35, 49] та електрон-фононну взаємодію. [50] За-

ряд квазічастинок можна визначити вимірюючи Фано-фактор тунельного струму. [51] Наразі у кількох експериментах [52, 53, 54] для різних факторів заповнення спостерігався дробовий заряд. Вже було зроблено кілька пропозицій використати електронні інтерферометри Фабрі-Перо [55] (ФП) та Маха-Цендера [7] (МЦ) для вимірювання дробового заряду та аніонної статистики квазічастинок. [56]–[37] Однак у цих пропозиціях не розглядається питання про те, як розрізнити різні ефективні моделі.

Важливою властивістю стану $\nu = 2/3$ є те, що мінімальні моделі містять два крайові канали. Схожа ситуація з'являється при $\nu = 2$, де було показано, що *далекодіюча* кулонівська взаємодія між каналами приводить до ряду універсальностей. [1] Можна продемонструвати що кулонівська взаємодія фіксує свободу у виборі крайового гамільтоніану так, що масштабні розмірності повністю визначаються статистичними фазами електронів (обговорення див. у параграфі 3.3.).

Ефективна теорія, викладена у цьому розділі, описує фізику низьких енергій КХ краю. Правильна модель крайових станів може залежати від мікроскопічних деталей двомірного електронного газу, проте є загальні фізичні вимоги, що сильно зменшують число релевантних моделей. [44, 32, 33] Ці вимоги такі:

- *Скорочення аномалії.* Добре відомо, що теорія Черна-Саймонса нестисливого квантовохольного стану є аномальною, тобто у присутності краю її калібровочна варіація задається незникаючим крайовим членом. Ефективна модель крайових станів має бути обрана так, щоб скорочувалася аномалія об'ємної дії - це необхідно, для того щоб повна теорія була калібровочно інваріантною.
- *Існування електронного оператора.* Двомірний електронний газ складається з електронів. Відтак на мікроскопічному рівні квантово-хольний стан описується електронною хвильовою функцією. З цього слідує, що в ефективній крайовій теорії має бути як мінімум один локальний опе-

ратор, що описує народження або знищення електрону, тобто збудження з зарядом e та статистикою Фермі.

- *Однозначність положень електронів.* Аналогічно, у зв'язку з тим, що КХ стан описує електрони, його хвильова функція має бути однозначною по відношенню до координат електронів, незалежно від того, чи присутні квазічастинки. Як наслідок, в ефективній теорії взаємна статистична фаза квазічастинки та електрона має бути кратною π .¹

Нижче ці вимоги використовуються, щоб побудувати найпростіші ефективні моделі КХ крайових станів та прокласифікувати різні багатопольові моделі у параграфі 3.1.

1.1.1. Теорія Черна-Саймонса та калібровочна аномалія. Перш за все, у нестисливій квантовохольній рідині густина електричного струму \mathbf{j} в об'ємі системи [45] пов'язана з електромагнітним потенціалом \mathbf{A} законом Хола

$$j^\mu = \sigma_H \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda, \quad (1.1)$$

де константа $\sigma_H = \nu/2\pi$ - це холівська провідність, а раціональне число ν - це фактор заповнення (тут і далі використовується система одиниці у якій $e = \hbar = 1$ та дотримується Ейнштейнівське правило підсумовування, якщо не зазначено іншого). Ефективна дія, що приводить до закону Хола (1.1) через $j^\mu = \delta S_{cs}/\delta A_\mu$, є трьохвимірною дією Черна-Саймонса

$$S_{cs} = \frac{\sigma_H}{2} \int_D d^3r \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda, \quad (1.2)$$

де D декартів добуток часової вісі та певної просторової області.

Дія (1.2) є *аномальною*, тобто вона має незникаючу калібровочну варіацію на границі. І дійсно, виконуючи калібровочне перетворення потенціалу

¹Статистична фаза θ_{12} двох операторів ψ_1 та ψ_2 визначається через співвідношення $\psi_1(x)\psi_2(x') = e^{i\theta_{12}}\psi_2(x')\psi_1(x)$. Мікроскопічна конструкція [77] показує, що статистична фаза визначена таким чином дійсно приймає цілі значення для однозначних збуджень лафлінівського стану. [61]

$A_\lambda \rightarrow A_\lambda + \partial_\lambda f$ у рівнянні (1.2) з довільною калібровочною функцією $f(r)$ та інтегруючи по частинах, отримуємо варіацію дії:

$$\delta S_{\text{cs}} = \frac{\sigma_H}{2} \int_{\partial D} d^2 r \epsilon^{\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda f. \quad (1.3)$$

Ця аномалія виникає через те, що струм (1.1) не зберігається на границі: $\partial_\mu j^\mu \neq 0$, для $r \in \partial D$. Насправді, якщо взяти похідну від рівняння (1.1), знаходимо, що

$$\partial_\mu j^\mu = \sigma_H \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda \partial_\mu \theta_D, \quad (1.4)$$

де функція θ_D приймає значення $\theta_D = 1$ та $\theta_D = 0$ всередині та зовні області D відповідно.

Аномалія має бути скомпенсована ступенями вільності границі, які взаємодіють з електромагнітним полем. Тобто повна ефективна дія, після того як крайові поля проінтегровані, дається сумою двох доданків

$$S_{\text{tot}}[\mathbf{A}] = S_{\text{cs}}[\mathbf{A}] + \Gamma[\mathbf{a}], \quad (1.5)$$

де \mathbf{a} - електромагнітне поле на границі, $\mathbf{a} = \mathbf{A}|_{\partial D}$ та $\Gamma[\mathbf{a}]$ - аномальна дія на краю. [59] Аномалія у Γ має бути такою, що при калібровочному перетворенні $a_\lambda \rightarrow a_\lambda + \partial_\lambda f$, ця дія набуває варіації, що в точності скорочує варіацію об'ємної дії, див. (1.3): $\delta\Gamma = -\delta S_{\text{cs}}$. За цієї умови $S_{\text{tot}}[\mathbf{A}]$ є калібровочно інваріантною. Таким чином, крайовий струм \mathbf{J} , визначений як $J^\mu = \delta(S_{\text{cs}} + \Gamma)/\delta a_\mu$, є аномальним з дивергенцією, що дається

$$\partial_\mu J^\mu = \sigma_H \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu a_\nu \quad (1.6)$$

Ця дивергенція скорочує дивергенцію (1.4) струму в об'ємі. Нижче розглядаються різні моделі, що поєднують ці загальні ідеї, починаючи з простої гідродинамічної моделі.

1.1.2. Гідродинаміка нестисливих крайових деформацій. Приведемо аргументи зазначені у роботі [23] з модифікаціями, що беруть до

уваги фізику, пов'язану з кулонівською взаємодією. Крайові збудження можна розглядати як деформації границі нестисливої КХ рідини, викликані струмом у об'ємі, що тече у напрямку краю (див. рис. 1.2). Ці деформації параметризуються функцією $y = h(x, t)$ та розглядаємо низькоенергетичну границю так, що $h \ll \ell_h$, де ℓ_h - характерна довжина хвилі деформацій. Ввівши допоміжну границю на відстані y_0 від краю, з $\ell_h \gg y_0 \gg h$, представимо крайовий струм $J \equiv J_x$ як інтеграл $J = \int_{-y_0}^h dy j_x$, та накопичену густину заряду на краю $\rho \equiv J_t$, запишемо як $\rho = n_0 h$, де $n_0 = \nu B / 2\pi c$ - густина КХ рідини, а B - величина магнітного поля.

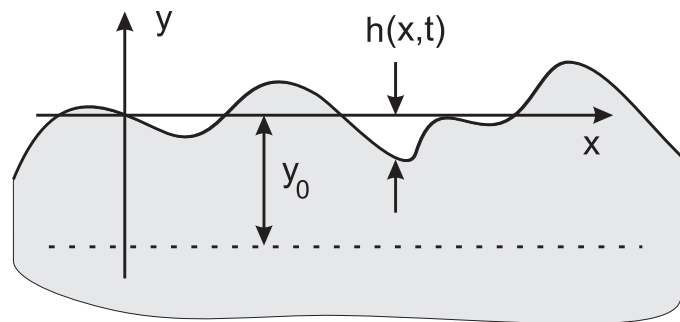


Рис. 1.2. Деформації границі (товста лінія) нестисливої КХ рідини (показано сірим) параметризовано функцією $y = h(x, t)$. Допоміжна границя, де зшиваються об'ємний на крайовий струми, позначена штриховою лінією $y = -y_0$.

Негативний аспект такого підходу полягає у тому, що крайовий струм явним чином залежить від допоміжного обрізання у $y = -y_0$. Проте можна показати, що кінцеве рівняння руху для крайових деформацій $h(x, t)$ не містить це обрізання, відтак крайовий струм можна переозначити так, щоб він залежав тільки від h . Насправді, збереження заряду означає, що $\partial_t \rho + \partial_x J = j_y$, де густина струму в об'ємі j_y береться на границі $y = -y_0$. Використовуючи рівняння (1.1) та фіксуючи калібровку $a_x = 0$, можна записати $J = \sigma_H [\varphi(x, h) - \varphi(x, -y_0)]$, де $\varphi(x, y)$ - це повний електростатичний потенціал у площині КХ рідини. Підставляючи цей вираз для струму у рівняння неперервності, можна помітити, що члени, що містять y_0 , скорочуються, і рівняння руху набуває вигляду $\partial_t \rho + \sigma_H \partial_x \varphi = 0$. Нарешті,

можна розділити потенціал φ на дві частини та записати $\partial_x \varphi = \partial_x \varphi_h - \tilde{E}_x$, де φ_h - потенціал на краю, спричинений його деформацією, а \tilde{E}_x - зовнішнє електричне поле розраховане у $y = h$. У загальному випадку \tilde{E}_x залежить від h , у низькоенергетичній границі його можна взяти при $y = 0$ у лідируючому порядку h . Тоді рівняння руху набуває вигляду

$$\partial_t \rho + \sigma_H \partial_x \varphi_h = \sigma_H \tilde{E}_x. \quad (1.7)$$

Після переозначення крайового струму $J = \sigma_H \varphi_h$ параметр обрізання y_0 зникає.

Щоб замкнуті рівняння руху, необхідно знати як пов'язані між собою деформація h та потенціал φ_h . У довгохвильовій границі можна просто записати $\varphi_h = -\partial_\rho H = -(1/n_0) \partial_h H$, де H - густина електростатичної енергії на краю. Це призводить до того, що рівняння в загальному випадку нелінійне по ρ . Якщо перейти до низькоенергетичної границі, це рівняння може бути лінеаризоване, і тоді одержимо:

$$\partial_t \rho - v \partial_x \rho = \sigma_H \tilde{E}_x, \quad (1.8)$$

де $v = (\sigma_H/n_0^2) \partial_h^2 H(0)$ - групова швидкість крайових збуджень. Для стійкої КХ рідини $\partial_h^2 H(0)$ має додатне значення, і це рівняння описує поширення кіральних збуджень.

Є два вклади в електростатичну енергію: перший пов'язаний з обмежувачим потенціалом на краю, і другий пов'язаний з кулонівською взаємодією. Відповідно до цього групова швидкість крайових збуджень може бути записана як сума двох доданків

$$v = cE/B + \sigma_H V, \quad (1.9)$$

де перший доданок - це швидкість дрейфу в електричному полі E на краю КХ рідини, а другий доданок пропорційний інтегралу $V = \int dx' U_C(x - x')$ від потенціалу кулонівської взаємодії U_C на краю. Цей інтеграл розбігається логарифмічно і має бути обрізаний на відстані d до металевого затвору та на мікроскопічній ширині краю a так, що $V \sim \ln(d/a)$.

Тут варто зробити важливе зауваження. Перший доданок у рівнянні (1.9) можна інтерпретувати як “гола” швидкість збуджень v_0 . Відновлюючи розмірні одиниці, її можна оцінити як $v_0 \sim (eE/\hbar)l_B^2$, де l_B - магнітна довжина. Відношення $\alpha := \sigma_H/v_0 \sim e^2/\hbar v_0$ грає роль безрозмірної константи взаємодії. Залежна від обмежуючого потенціалу на краю, вона завжди більше 1, а в типовому експерименті [7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15] $\alpha \geq 10$, що може підтверджувати розглянуту тут гідродинамічну модель. Більше того, далекодійний характер кулонівської взаємодії та той факт, що $d \gg a$ призводять до більшого параметру V . Як наслідок, гідродинамічна заряджена мода завжди присутня у спектрі та визначає масштабні розмірності у некіральных моделях, як показано у параграфі 3.3..

1.1.3. Квантування крайових збуджень. Для того, щоб проквантувати крайові збудження, розглядається густина повної електростатичної енергії $H(\rho) = (v/2\sigma_H)\rho^2$ як гамільтоніан який породжує однорідну версію рівнянь руху (1.8), див. роботу [23]. Це рівняння діагональне у просторі Фур’є $\partial_t \rho_k - ivk\rho_k = 0$. Тому записуємо гамільтоніан як

$$H_k = \frac{v}{\sigma_H} \rho_k \rho_{-k}, \quad (1.10)$$

де $k > 0$. Визначимо “імпульс” як $P_k = \rho_k$ а “координату” як $X_k = i\rho_{-k}/\sigma_H k$, так що рівняння руху набувають вигляду $\partial_t X_k = \partial H_k / \partial P_k$ та $\partial_t P_k = -\partial H_k / \partial X_k$. Тоді канонічне комутаційне співвідношення $[X_k, P_{k'}] = i\delta_{kk'}$ призводить до комутатору $[\rho(x), \rho(x')] = i\sigma_H \partial_x \delta(x - x')$ у дійсному просторі.

Наступним кроком можна сконструювати електронний оператор. Для цього зручно виразити густина заряду через поле $\phi(x)$

$$\rho(x) = \frac{\sqrt{V}}{2\pi} \partial_x \phi(x), \quad (1.11)$$

з комутаційними співвідношеннями

$$[\phi(x'), \phi(x)] = i\pi \operatorname{sgn}(x - x'). \quad (1.12)$$

Тут і далі використовуються терміни “фактор заповнення” ν та “Холівська провідність” σ_H як синоніми, але завжди мається на увазі останній. Тоді електронний оператор набуває вигляду

$$\psi = e^{iq\phi} \quad (1.13)$$

локального вертексного оператора; див. ,наприклад, роботу [60]. Для того, щоб цей оператор описував народження та знищення електрона, необхідно щоб

$$[Q_{\text{em}}, e^{iq\phi}] = e^{iq\phi}, \quad (1.14)$$

де $Q_{\text{em}} = \int dx \rho = (\sqrt{\nu}/2\pi) \int dx \partial_x \phi$ - повний електричний заряд на краю. Ця вимога означає, що заряд електрону рівний -1 . Використовуючи комутаційні співвідношення (1.12) знаходимо, що

$$q = 1/\sqrt{\nu}. \quad (1.15)$$

Крім того електронний оператор (1.13) повинен задовольняти ферміонні комутаційні співвідношення. Використовуючи формулу Бейкера-Кембела-Хаусдорфа, знаходимо, що $e^{iq\phi(x)}e^{iq\phi(x')} = e^{i\pi q^2}e^{iq\phi(x')}e^{iq\phi(x)}$. Використовуючи рівняння (1.15) та враховуючи статистику Фермі, робимо висновок, що

$$e^{i\pi/\nu} = -1. \quad (1.16)$$

Це означає, що фактор заповнення дорівнює $\nu = 1/m$, де m - непарне ціле число. У параграфі 3.1. показано, що це обмеження можна зняти побудувавши багатоканальну крайову модель.

Згідно з третім принципом, сформульованим на початку цього розділу, теорія може описувати квазічастинки з вертексними операторами $e^{ip\phi}$, що мають бути локальними по відношенню до електронного оператора $e^{iq\phi}$. Так статистична фаза θ таких квазічастинок по відношенню до електронів має бути рівною π помноженому на ціле число. Знову використовуючи (1.12) можна отримати такий результат

$$\theta = \pi r \cdot q = \pi n,$$

а квазічастинковий оператор набуває форми

$$\psi_n = e^{in\sqrt{\nu}\phi(x)}, \quad (1.17)$$

де n - ціле число. Такі оператори описують лафлінівські квазічастинки [61]. Кореляційні функції квазічастинкових операторів можуть бути легко розраховані, і результат буде $\langle 0|\psi_n^\dagger(x,t)\psi_n(0,0)|0\rangle = (x+vt)^{-\nu n^2}$, де $|0\rangle$ позначає основний стан квантовохольної рідини з фактором заповнення ν . Беручи до уваги те, що $\nu = 1/m$, властивості операторів (1.17) наступні: вони переносять заряд $q(n) = n/m$ та мають масштабні розмірності $\Delta(n) = n^2/m$. Так для елементарної квазічастинки з зарядом $1/m$ маємо $\Delta_{\min} = 1/m$, а для електрону $\Delta_{\text{el}} = m$.

1.1.4. Колібровочно-інваріантне формулювання. У цьому параграфі вище запропонована теорія крайових збуджень переформулюється у калібровочно інваріантній формі, що підходить для узагальнення до багатоканальних рідин, які розглядаються у параграфі 3.1. Спочатку перепишемо дію $S = \int dt \sum_{k>0} [P_k \partial_t X_k - H_k]$ у лінійному наближенні як

$$S[\phi] = \frac{1}{4\pi} \int dt dx [\partial_t \phi \partial_x \phi - v(\partial_x \phi)^2 + 2\sqrt{\nu} \phi \tilde{E}_x], \quad (1.18)$$

тут додано доданок, що описує взаємодію з електричним полем \tilde{E}_x . Ця дія може бути легко узагальнена до нелінійних крайових моделей, якщо замінити доданок $(v/4\pi)(\partial_x \phi)^2$ повним гамільтоніаном $H(\rho)$.

Далі заміняємо похідні $\partial_\mu \phi$ у дії (1.18) на їхню калібровочно інваріантну форму

$$D_\mu \phi \equiv \partial_\mu \phi + \sqrt{\nu} a_\mu, \quad (1.19)$$

та інтегруємо останній доданок по частинах, використовуючи відношення $\tilde{E}_x = \epsilon^{\mu\lambda} \partial_\mu a_\lambda$. Тоді отримаємо таку дію:

$$S[\phi] = \frac{1}{4\pi} \int dt dx [D_t \phi D_x \phi - v(D_x \phi)^2] + \frac{\sqrt{\nu}}{4\pi} \int dt dx \epsilon^{\mu\lambda} a_\mu \partial_\lambda \phi. \quad (1.20)$$

Легко перевірити, що фіксуєючи калібровку $a_x = 0$, можна прийти до дії (1.18).

Перший доданок у дії (1.20) інваріантний по відношенню до калібровочного перетворення $a_\mu \rightarrow a_\mu + \partial_\mu f$, $\phi \rightarrow \phi - \sqrt{\nu}f$. Другий доданок має наступну калібровочну варіацію $\delta S[\phi] = -(\nu/4\pi) \int dt dx \epsilon^{\mu\lambda} \partial_\mu a_\lambda f$, тобто дія на краю має потрібну аномалію: вона точно скорочує аномалію (1.3) об'ємної дії. Таким чином, ефективна теорія, що описується повною дією $S_{\text{tot}} = S_{\text{cs}}[\mathbf{A}] + S[\phi]$ калібровочно інваріантна. Ефективну крайову дію $\Gamma[\mathbf{a}]$ у рівнянні (1.5) можна отримати відінтегруючи поле ϕ .

Можна перевірити, що калібровочно інваріантний крайовий струм має правильну аномальну дивергенцію (1.6). Щоб переконатися у цьому, беремо варіаційну похідну повної дії по крайовому потенціалу \mathbf{a} . Це дає наступний вираз для крайового струму:

$$J_t = \frac{\sqrt{\nu}}{2\pi} D_x \phi, \quad J_x = -\frac{\sqrt{\nu}}{2\pi} v D_x \phi. \quad (1.21)$$

У калібровці, де $a_x = 0$, цей вираз відтворює визначення (1.11) густини заряду а також визначення електронного оператора (1.13). Насправді, вираз (1.21) для крайового струму впливає з оператора $\psi^\dagger \psi$ у присутності електромагнітного поля. Варто зауважити, що струм задовольняє співвідношення $J_x = -v J_t$, яке показує його кіральну природу. І нарешті, варіюючи дію (1.20) по ϕ , можна отримати рівняння руху для ϕ , яке використовується для того, щоб оцінити дивергенцію струму (1.21). Тоді отримуємо рівняння (1.6), тобто крайовий струм має потрібну аномальну дивергенцію.

Можна зробити висновок, що гідродинамічна модель, коли її застосовувати до КХ станів з $\nu = 1/m$, де m - непарне ціле число, задовольняє усі вимоги, сформульовані на початку розділу. У параграфі 3.1., показано, що розглядаючи більше ніж одну бозонну моду на краю КХ рідини, можна побудувати ефективні крайові моделі для будь-яких факторів заповнення.

1.2. Експериментальне дослідження крайових станів у електронних інтерферометрах

Квантовий ефект Хола (КЕХ) [4] - одна з центральних тем сучасної мезоскопічної фізики [5] - продовжує привертати увагу як експериментаторів, так і теоретиків. Добре відомо, що низькоенергетична фізика КЕХ на холівському плато визначається крайовими збудженнями тому, що при сильних магнітних полях в об'ємі двомірного газу (ДЕГ) є щілина у спектрі збуджень. Властивості квантовохольних крайових збуджень були досліджені у ряді експериментальних та теоретичних робіт.[6] Однак, тільки зовсім недавно прогрес у виготовленні нових мезоскопічних систем дозволив зосередитися на електронних властивостях квантовохольного краю, які раніше не були до кінця зрозумілими. Особливо експерименти по квантовій інтерференції та процесам дефазингу у електронних Мах-Цендер інтерферометрах (МЦІ) [7] принесли визначні результати, які пролили світло на фізику квантовохольних крайових станів.

Ідея електронного МЦІ однакова в усіх недавніх експериментах. [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15] Область зразка, де присутній двомірний електронний газ (ДЕГ), топологічно еквівалентна так званому *диску Корбіно* (див. рис. 1.3). Є як мінімум два омічних контакти: один заземлений, а іншого прикладено потенціал $\Delta\mu$. Струм I вимірюється на одному з омічних контактів. Насправді у згаданих вище експериментах для зручності вимірювання використовувалося кілька омічних контактів, проте для реалізації МЦІ достатньо всього двох контактів. Два КТК грають роль напівпрозорих дзеркал, що змішують зовнішні крайові канали (жирна лінія на рис. 1.3). Внутрішні канали *завжди* відбиваються від КТК.

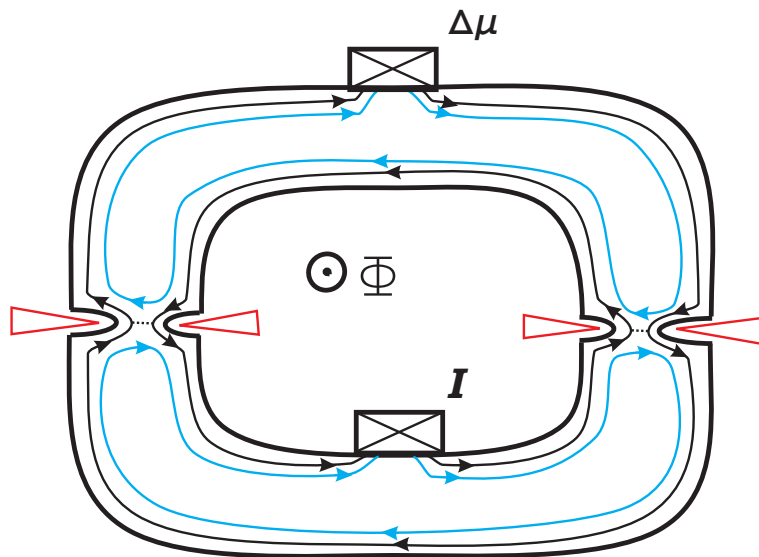


Рис. 1.3. Інтерферометр Маха-Цендера схематично зображено як диск Корбіно, що містить двомірний електронний газ (ДЕГ). У сильному магнітному полі при факторі заповнення $\nu = 2$ формуються два кіральні одномірні канали що поширюються вздовж краю ДЕГ. Внутрішні канали *завжди* відбиваються від обох квантових точкових контактів (КТК), тоді як інші канали змішуються КТК. Потенціал $\Delta\mu$, прикладений до верхнього омічного контакту, спричиняє струм I у нижньому омічному контакті. Цей струм спричинений розсіянням у КТК та містить інтерференційний вклад, чутливий до магнітного потоку Φ , що призводить до Аарон-Бомівських осциляцій.

Зазвичай прозорості двох КТК варіювалися між $T_\ell = 0$ та $T_\ell = 1$, $\ell = L, R$. Однак найбільш цікава фізика спостерігалася при двох границях: у режимі слабого тунелювання $T_\ell \rightarrow 0$ та слабого відбиття назад $T_\ell \rightarrow 1$. У першому режимі до одного з зовнішніх каналів прикладено потенціал (верхній канал на рис. 1.3), цей канал майже повністю відбивається у першому КТК. Потім він поширюється у тій самій (верхній) частині Корбіно диску. Канал, що виходить з другого (нижнього) омічного контакту заземлений. У другому режимі (як приклад показано на рис. 1.3) канали, до яких прикладено потенціал, майже повністю пропускаються у першому КТК на протилежну (нижню) частину диску Корбіно. Фізичні наслідки відмінностей цих двох режимів будуть обговорюватися пізніше у параграфі 2.3.

Два омічні контакти пов'язані тільки через розсіяння у двох КТК. Як

наслідок, існує два шляхи між омічними контактами, які вносять вклад до загального струму I . Перший шлях відбивається у правому КТК та пропускається у лівому, а другий шлях - навпаки - відбивається у лівому КТК та пропускається у правому. Легко бачити, що два канали утворюють петлю з ненульовим магнітним потоком. Пов'язану з ним Аарон-Бомівську (АБ) фазу можна варіювати дещо змінюючи силу магнітного поля або змінюючи довжину одного з шляхів за допомогою модулюючого затвору, розміщеного біля відповідного плеча інтерферометра.

Згідно з поширеною одночастинковою картиною, [5] електронні крайові стани поширюються як плоскі хвилі з груповою швидкістю v_F на рівні Фермі. Вони пропускаються крізь МЦІ (див. рис. 1.3) у лівому та правому КТК з амплітудами t_L та t_R відповідно. У випадку слабого пропускання дві амплітуди додаються так, що загальний коефіцієнт проходження осцилює як функція від АБ фази φ_{AB} та потенціалу $\Delta\mu$. Контрастність осциляцій диференційної провідності $\mathcal{G} \equiv dI/d\Delta\mu$ визначається як

$$V_{\mathcal{G}} = \frac{\mathcal{G}_{\max} - \mathcal{G}_{\min}}{\mathcal{G}_{\max} + \mathcal{G}_{\min}}. \quad (1.22)$$

Тоді формула Ландауера-Бютікера [16], застосована до диференціальної провідності, дає наступний результат для контрастності та зсуву АБ фази:

$$V_{\mathcal{G}} = \frac{2|t_L t_R|}{|t_L|^2 + |t_R|^2}, \quad \Delta\varphi_{AB} = \frac{\Delta L}{v_F} \Delta\mu, \quad (1.23)$$

де ΔL - різниця довжин двох шляхів МЦІ. Тобто приходимо до результату, що за відсутності взаємодії контрастність не залежить від потенціалу, тоді як зсув фази пропорційний потенціалу.

Найбільш значне спостереження, отримане в експериментах [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15], полягає у тому, що проста одночастинкова картина крайових станів не може коректно описати АБ ефект у МЦІ. По суті, результати можна підсумувати наступним чином. Контрастність АБ осциляцій не постійна, а сильно залежить від потенціалу $\Delta\mu$. Вона осцилює, проявляючи

новий енергетичний масштаб, та може зникати при певних значеннях потенціалу. Хоча така поведінка спостерігається в усіх експериментах, деталі різні та дуже важливі для розуміння фізики ефекту. Тому варто розбити експериментальні спостереження на дві групи, відповідно до важливих особливостей експериментальних зразків.

1.2.1. Потенціал прикладено тільки до одного крайового каналу. Перша експериментальна ситуація, яку необхідно описати, реалізована у роботі [8]. У цьому експерименті потенціал прикладено тільки до зовнішнього каналу. Така ситуація досягається розділенням внутрішнього та зовнішнього входних каналів за допомогою додаткового КТК так, що фактично канали приходять з різних омичних контактів. Це дозволяє незалежно прикладати різні потенціали до двох каналів на тому самому краю.

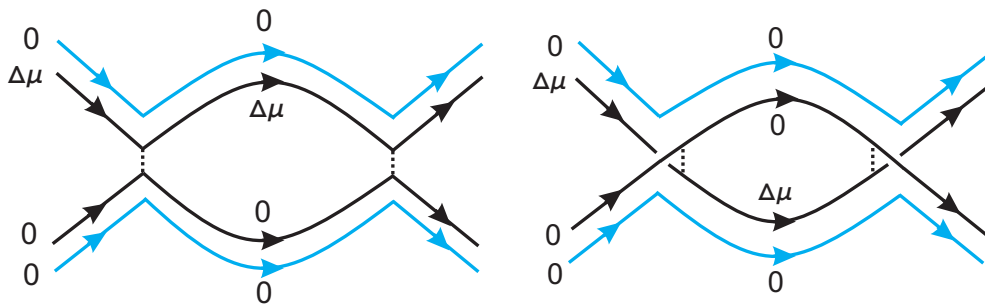


Рис. 1.4. Схематичне зображення експериментального зразку у роботі [8]. Потенціал прикладено тільки до одного крайового каналу МЦІ. Ліва сторона зображує режим *слабкого тунелювання*: зовнішні крайові канали, що поширюються у різних плечах МЦІ, слабо взаємодіють один з одним у двох КТК. Права сторона зображує режим *слабкого відбиття назад*: зовнішні крайові канали майже повністю поширюються крізь КТК на протилежні плечі МЦІ та тільки слабо взаємодіють через розсіяння назад.

У цій ситуації МЦІ схематично зображено на рис. 1.4 для режимів слабого тунелювання $T_\ell \rightarrow 0$ (ліва частина) та для слабого розсіяння назад $T_\ell \rightarrow 1$ (права частина). Ця схема отримана з рис. 1.3 умовним розділенням на дві частини кожного омичного контакту, під'єднаного до диску Корбіно,

та деформуванням двох інтерферуючих шляхів так, щоб вони йшли з ліва на право. Після цієї процедури симетрія між двома режимами відбиття стає очевидною: для того, щоб перейти від зразка у лівій частині рис. 1.4 до зразка у правій частині, треба просто відобразити інтерферометр відносно горизонтальної осі. Ця симетрія є важливою, і, як буде показано у параграфі 2.3., призводить до симетрії між режимом слабого тунелювання та режимом слабого розсіяння назад.

У роботі [8] було відкрито несподіваний АБ ефект, несумісний з одночастинковою картиною крайових каналів. В експерименті спостерігалось наступне:

- Пелюсткова структура в залежності контрастності АБ осциляцій від постійного потенціалу з майже однаковою шириною пелюсток. Контрастність зникає при певних значеннях потенціалу. Ця поведінка зберігається для різних фіксованих значень магнітного поля та для різних значень прозорості КТК;
- Стабільна поведінка АБ фази чергується з різкими стрибками на π у точках, де контрастність зануляється;
- Стабільність обох зазначених ефектів по відношенню до змін довжини одного з шляхів інтерферометра.

Експеримент [8] проаналізовано з теоретичного боку у кількох недавніх роботах: [17, 18, 19, 20]. У роботі [17] увага зосереджується на випадку $\nu = 1$, та пропонується, що подавлення контрастності спричинене резонансною взаємодією з крайовими каналами, що поширюються у зворотному напрямку та знаходяться біля одного з плечів інтерферометра.² Зараз ця ідея здається розсудливою, поки розглядається дефазинг при $\nu = 1$. Проте

²На рис. 1 роботи [8] стан, що поширюється у зворотньому напрямку, іде від джерела S3 до QPC0 та під повітряним мостом підходить дуже близько до верхнього плеча інтерферометра, що є частиною каналу між КТК1 та КТК2.

експерименти [8, 9] та [10, 11] зосереджуються на режимі $\nu = 2$, коли співіснують два крайові канали. Ці та нові експерименти [12, 13, 14, 15], у яких було прибрано крайовий канал, що поширюється у зворотному напрямку, потребують нового теоретичного аналізу. Автори роботи [18] розглядають на краю далекодіючу кулонівську взаємодію та роблять цікаве передбачення стосовно температурної залежності контрастності. Однак вони не можуть запропонувати пояснення пелюстковоподібної поведінки контрастності. У роботах [19, 20] пропонується, що дефазинг у МЦІ пов'язаний з дробовим шумом, що генерується розділенням крайового каналу у першому КТК. В той час як ця ідея може коректно описати частину фізичної картини при $\nu = 1$, недолік цього пояснення полягає у тому, що дробовий шум зникає у режимі слабкого тунелювання та у режимі слабкого відбивання назад, тоді як експерименти свідчать про сильний дефазинг. Більше того, експеримент, який обговорюється нижче, пояснює особливе для дефазингу значення другого внутрішнього крайового каналу при $\nu = 2$.

1.2.2. Потенціал прикладено до двох крайових каналів. На відміну від робіт [8, 9] експериментальний зразок у роботах [10, 11] не містить додаткового КТК, що дозволяв би розділяти два крайові канали при $\nu = 2$ та прикладати потенціал окремо до кожного з них. Тому у роботах [10, 11] до двох крайових каналів, що починаються з того самого омічного контакту, прикладено однаковий потенціал $\Delta\mu$. Для зручності подальшого аналізу знову розгортаємо МЦІ на рис. 1.3 та схематично представляємо як показано на рис. 1.5.

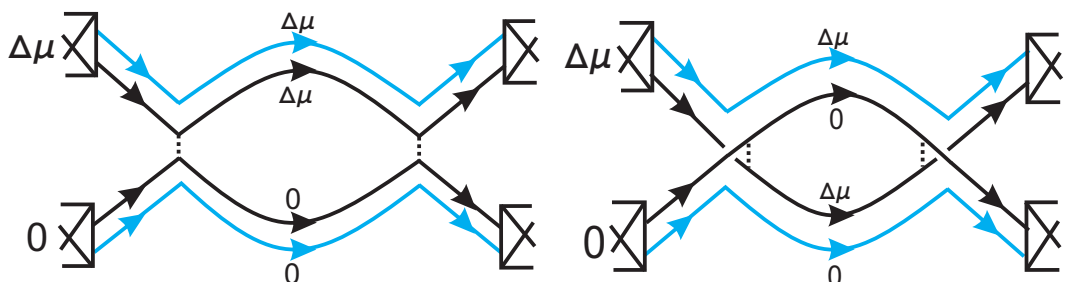


Рис. 1.5. Схематичне зображення експериментального зразку у роботі [11]. До двох вхідних крайових каналів МЦІ прикладено однаковий потенціал $\Delta\mu$, а інші канали заземлено. Ліва сторона зображує режим *слабкого тунелювання*, а права сторона зображує режим *слабкого відбиття назад*.

Тепер легко бачити асиметрію між режимом слабкого тунелювання та режимом слабкого розсіяння назад. У першому режимі (ліва сторона) до двох каналів на зовнішньому плечі інтерферометру прикладено однаковий потенціал $\Delta\mu$. У другому режимі ситуація інша (права сторона): на верхньому плечі інтерферометру внутрішній канал має потенціал $\Delta\mu$, в той час як на нижньому плечі потенціал $\Delta\mu$ має зовнішній канал. Імовірно, що ця асиметрія відповідає за зовсім іншу поведінку контрастності АБ осциляцій у експериментах [10, 11]:

- Пелюсткова структура з контрастністю, що зникає при певних значеннях потенціалу, спостерігається тільки у режимі слабкого тунелювання. Центральна пелюстка приблизно у два рази ширша за бокові. У режимі слабкого відбиття назад контрастність осцилює та спадає як функція від потенціалу;
- При всіх прозоростях КТК фаза не постійна;
- Спостерігається асиметрія контрастності як функції прозорості першого КТК. А саме, контрастність завжди спадає як функція потенціалу у режимах слабкого тунелювання. На відміну від цього режиму, у режимі слабкого відбиття назад контрастність спершу росте при малих напругах і тільки потім спадає.

Останнє зауваження дуже важливе. Воно показує, що ефекти зарядки, наведені різними потенціалами крайових каналів, можуть відповідати за відмінності результатів експериментів [8, 9] та [10, 11]. Ця ідея в цілому узгоджується з висновками авторів [21] експерименту [12].

РОЗДІЛ 2

Дефазинг у електронному інтерферометрі Маха-Цендера при факторі заповнення $\nu = 2$

У цьому розділі пропонується проста фізична модель, що описує дефазинг у електронному інтерферометрі Маха-Цендера при факторі заповнення $\nu = 2$. Ця модель пояснює результати недавніх експериментів: нетипову пелюсткову структуру контрастності Аарон-Бомівських осциляцій, стійкість фази та асиметрію видимості як функції прозоростей квантових точкових контактів. Згідно з моделлю що пропонується в цьому розділі, дефазинг виникає в інтерферометрі через сильну кулонівську взаємодію на краю двомірного електронного газу. Далекодіючий характер взаємодії призводить до розділення спектру крайових збуджень на повільні та швидкі моди. Ці моди збуджуються тунелюванням електронів та уносять фазову інформацію. Новий масштаб енергії, пов'язаний з повільною модою визначає температурну залежність видимості та період осциляцій її як функції напруги. Більше того, відмінність пелюсткової структури у різних експериментах пояснюється специфічними зарядовими ефектами, які відрізняються у всіх експериментах. Для спектроскопії квантовохольних крайових станів пропонується використовувати сильно асиметричний інтерферометр Маха-Цендера, у якого одне плече набагато коротше за інше.

2.1. Модель Мах-Цендер інтерферометру

Перед тим як почати математичне формулювання моделі, варто підкреслити наступні моменти. Знайдений експериментально, новий енерге-

тичний масштаб [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15] дуже малий. Для порівняння, ширина пелюсток у контрастності приблизно дорівнює $20\mu V$. Нижче показано, що ця енергія обернено пропорційна до розміру МЦІ, який зазвичай рівний кільком мікрометрам. Таким чином вона на багато менша за будь-яких інший енергетичний масштаб, пов'язаний, наприклад, з утворенням стисливих смуг.[22] Тому можна використати ефективну модель [23], що підходить для опису низькоенергетичної фізики квантовохольних крайових збуджень. А саме, можна розглянути внутрішній та зовнішній крайові канали при $\nu = 2$ як два кіральних бозонних поля та ввести гамільтоніан Латтінжерівського типу [6, 24], щоб описати стан рівноваги. Далі вводимо взаємодію типу густина-густина, яка, як відомо, нерелевантна у низькоенергетичній границі.[44] Цей факт не впливає на фізику, що обговорюється нижче тому, що розглядаються процеси при скінченній енергії та масштабі довжини, що мають місце у МЦІ.

2.1.1. Поля та гамільтоніан. При факторі заповнення $\nu = 2$ є два крайових канали на кожному краю квантовохольної системи та два, пов'язаних з ними, кіральних ферміона, позначені як: $\psi_{\alpha j}(x)$, $\alpha = 1, 2$ та $j = U, D$. Тут індекс 1 відповідає ферміону у зовнішньому каналі, а 2 - ферміону у внутрішньому каналі (див. рис. 2.1), тоді як індекс j позначає верхнє та нижнє плече інтерферометру. Повний гамільтоніан інтерферометру

$$\mathcal{H}_{\text{tot}} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}} + \mathcal{H}_T \quad (2.1)$$

містить одночастинковий член \mathcal{H}_0 , доданок, що описує взаємодію \mathcal{H}_{int} та тунельний гамільтоніан \mathcal{H}_T .

Одночастинковий гамільтоніан описує вільні кіральні ферміони[44]:

$$\mathcal{H}_0 = -iv_F \sum_{\alpha, j} \int dx \psi_{\alpha j}^\dagger \partial_x \psi_{\alpha j}, \quad (2.2)$$

де v_F - швидкість Фермі, яка припускається однаковою для кожного крайового каналу. Це припущення не принципове тому, що, як показано далі, швидкість Фермі сильно перенормується взаємодією.

Не на довго відкладемо детальне обговорення взаємодії, а зараз запишемо гамільтоніан взаємодії за допомогою локальних густин $\rho_{\alpha j}$ у наступній загальній формі:

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = (1/2) \sum_{\alpha, \beta, j} \iint dx dy U_{\alpha\beta}(x - y) \rho_{\alpha j}(x) \rho_{\beta j}(y). \quad (2.3)$$

Треба зазначити, що ефективний гамільтоніан не виводиться з мікроскопічної моделі. Однак експеримент показує [21], що взаємодія має кулонівський далекодіючий характер та призводить до ефектів зарядки на краю. Нижче продемонстровано, що це припущення веде за собою появу універсальностей у фізиці МЦІ та коректно описує більшість експериментальних спостережень.

Вже зазначалося, що інтерференція у МЦІ походить від процесу розсіювання у КТК. У випадку, коли взаємодія сильна, розсіювання треба вважати слабким та розглядати його пертурбативно. На щастя, це обмеження не обмежує запропонованого теоретичного підходу тому що ні інтерференція, ні її подавлення не обов'язково є слабкими у випадку слабого розсіювання. Більше того, необхідно знову підкреслити те, що найбільш цікава фізика має відбуватися у режимах слабого тунелювання та слабого відбиття назад.

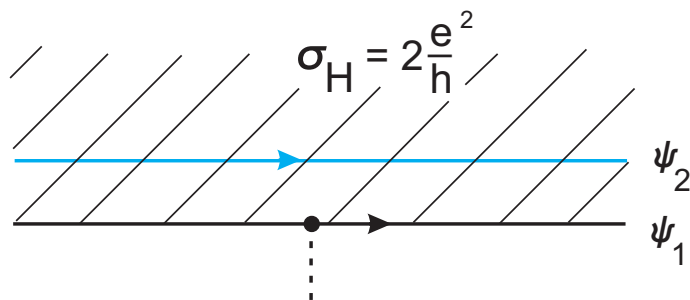


Рис. 2.1. Структура квантовохольного краю при $\nu = 2$. Два кіральних електрона ψ_{1j} та ψ_{2j} поширюються вздовж краю. Тунелювання можливе тільки з та до зовнішнього каналу (ψ_{1j}).

Обидва режими можна описати тунельним гамільтоніаном:

$$\mathcal{H}_T = A + A^\dagger \equiv \sum_{\ell} (A_{\ell} + A_{\ell}^\dagger), \quad \ell = L, R, \quad (2.4)$$

де амплітуда тунелювання

$$A_{\ell} = t_{\ell} \psi_{1D}^\dagger(x_{\ell}) \psi_{1U}(x_{\ell}) \quad (2.5)$$

пов'язує зовнішні крайові канали та переносить електрон з нижнього плеча МЦІ до верхнього. Вже тут варто зазначити, що при низьких енергіях тунелювання електронів релевантне та фактично призводить до омічної поведінки КТК, що узгоджується з експериментами[8, 9, 10, 11]. АБ фази можна включити до тунельних амплітуд за допомогою співвідношення $t_R^* t_L = |t_R t_L| e^{i\varphi_{AB}}$.

2.1.2. Бозонізація. Для того, щоб врахувати сильну взаємодію на краю, скористаємося загально прийнятою технікою бозонізації[24], та представимо ферміонні оператори за допомогою кіральних бозонних полів $\phi_{\alpha j}$:

$$\psi_{\alpha j} \propto e^{i\phi_{\alpha j}}, \quad (2.6)$$

що задовольняють комутаційні співвідношення $[\phi_{\alpha j}(x), \phi_{\alpha j}(y)] = i\pi \text{sgn}(x - y)$. Локальна густина одержується шляхом регуляризації

$$\rho_{\alpha j}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_{\alpha j}^\dagger(x + \varepsilon) \psi_{\alpha j}(x),$$

що дає наступний вираз:

$$\rho_{\alpha j}(x) = (1/2\pi) \partial_x \phi_{\alpha j}(x). \quad (2.7)$$

Застосовуючи процедуру регуляризації до одночастинкового гамільтоніану (2.2), отримуємо

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}} = \sum_{\alpha, \beta, j} \iint \frac{dx dy}{8\pi^2} V_{\alpha\beta}(x - y) \partial_x \phi_{\alpha j}(x) \partial_y \phi_{\beta j}(y), \quad (2.8)$$

де потенціал взаємодії просто зсувається швидкістю Фермі

$$V_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta} + 2\pi v_F \delta_{\alpha\beta} \delta(x - y). \quad (2.9)$$

Важливим моментом є те, що зараз гамільтоніан (2.8) для квантовохольного краю є квадратичним у бозонних полях.

Далі можна квантувати поля, виражаючи їх за допомогою бозонних операторів народження та знищення $a_{\alpha j}^\dagger(k)$ and $a_{\alpha j}(k)$,

$$\phi_{\alpha j}(x) = \varphi_{\alpha j} + 2\pi p_{\alpha j} x + \sum_{k>0} \sqrt{\frac{2\pi}{Wk}} [a_{\alpha j}(k)e^{ikx} + a_{\alpha j}^\dagger(k)e^{-ikx}], \quad (2.10)$$

де нульові моди $\varphi_{\alpha j}$ and $p_{\alpha j}$ задовольняють комутаційні співвідношення $[p_{\alpha j}, \varphi_{\alpha j}] = i/W$, а W - повний розмір системи. Наприкінці розрахунків беремо термодинамічну границю $W \rightarrow \infty$ так, що W випадає з кінцевого результату. Тоді крайовий гамільтоніан набуває наступної форми:

$$\mathcal{H} = (1/2\pi) \sum_{\alpha, \beta, j, k} k V_{\alpha\beta}(k) a_{\alpha j}^\dagger(k) a_{\beta j}(k) + (W/2) \sum_{\alpha, \beta, j} V_{\alpha\beta}(0) p_{\alpha j} p_{\beta j} \quad (2.11)$$

Вакуум колективних збуджень визначається як $a_{\alpha j}(k)|0\rangle = 0$. Треба звернути особливу увагу на нульові моди тому, що, як показано у параграфі 2.3., нульові моди означають зарядові ефекти та зсуви фаз, які не є малими. З визначень (2.7) та (2.10) видно, що нульова мода $p_{\alpha j}$ має значення однорідної густини на крайовому каналі (α, j) . Тому визначаємо “вакуумні заряди” $Q_{\alpha j}$

$$p_{\alpha j}|0\rangle = Q_{\alpha j}|0\rangle, \quad (2.12)$$

які, насправді, являють собою густини заряду на крайових каналах, викликані напругою. Тоді енергія E_0 основного стану, означена як $\mathcal{H}|0\rangle = E_0|0\rangle$ дається

$$E_0 = (W/2) \sum_{\alpha, \beta, j} V_{\alpha\beta}(0) Q_{\alpha j} Q_{\beta j}. \quad (2.13)$$

Так як крайові збудження поширюються вздовж еквіпотенціальних ліній, крайові канали можна розглядати як металічну поверхню. Тому можна

застосувати добре відоме співвідношення з електростатики [26] для потенціалів $\Delta\mu_{\alpha j}$ прикладених до крайових каналів:

$$\Delta\mu_{\alpha j} \equiv (1/W)\delta E_0/\delta Q_{\alpha j} = \sum_{\beta} V_{\alpha\beta}(0)Q_{\beta j}. \quad (2.14)$$

Таким чином величина $V_{\alpha\beta}(0)$ - обернена матриця ємностей.³ Тепер, використовуючи рівняння (2.11), (2.12) та комутаційні співвідношення для нульвих мод, приходимо до наступного важливого результату для часової еволюції нульових мод

$$Q_{\alpha j}(t) = \sum_{\beta} V_{\alpha\beta}^{-1}(0)\Delta\mu_{\beta j}, \quad \varphi_{\alpha j}(t) = -\Delta\mu_{\alpha j} t. \quad (2.15)$$

Нарешті, зауважимо, що сформульована тут модель МЦІ узгоджується з ефективною теорією квантовохольного стану [44] при $\nu = 2$. Це показано у додатку В, де перевіряється локальність електронних операторів, їхні ферміонні комутаційні співвідношення та калібровочна інваріантність теорії.

2.1.3. Границя сильної взаємодії та універсальність. Природно припустити, що крайові канали взаємодіють через кулонівський потенціал. Він має далекодіючий характер та логарифмічний закон дисперсії $V_{\alpha\beta}(k) \propto \log(ka)$. Тут a - це найкоротший важливий масштаб довжини, наприклад, ширина стисливих смуг [22] або відстань між каналами. Дисперсія важлива у випадку $\nu = 1$ тому, що вона породжує дефазинг на однорідному краю.[18] Однак, сама по собі дисперсія не може пояснити пелюсткову поведінку контрастності. Більш важливо те, що логарифм може стати відносно великим, якщо він обрізається на відносно великих відстанях.

Тому далі припускаємо, що кулонівська взаємодія екранується на відстані D такій, що $L_U, L_D \gg D \gg a$, де L_U та L_D - довжини плечів МЦІ.

³Зауважимо, що $\Delta\mu_{\alpha j}$ це електрохімічний потенціал, так як означення (2.9) містить одночастинковий вклад.

Насправді, деяке екранування може мати місце у МЦІ. Наприклад, в експериментах [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15] довжина обрізання D може бути відстанню до регулюючого затвору чи до масивного металічного повітряного мосту. Є кілька наслідків екранування на проміжних відстанях D . Перш за все, це дозволяє нехтувати взаємодією між двома плечима інтерферометру (однак див. обговорення у параграфі 2.3.). По-друге, при всіх енергіях можна знехтувати логарифмічною дисперсією та записати

$$V_{\alpha\beta}(x - y) = V_{\alpha\beta}\delta(x - y), \quad (2.16)$$

так що для перетворення Фур'є отримуємо: $V_{\alpha\beta}(k) = V_{\alpha\beta}(0) \equiv V_{\alpha\beta}$. І нарешті, міжканальна взаємодія між внутрішнім та зовнішнім крайовими каналами, розміщених на відстані порядку $a \ll D$ один від одного, сильно зменшується.

Тому матрицю взаємодії можна параметризувати наступним чином

$$V_{\alpha\beta} = \pi \begin{pmatrix} u + v & u - v \\ u - v & u + v \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

де

$$u/v = \log(D/a) \gg 1, \quad (2.18)$$

новий великий параметр - найбільш важливий наслідок далекодіючого характеру кульнівської взаємодії.

Насправді, діагоналізуючи взаємодію $V = S^\dagger \Lambda S$ отримуємо результат

$$\Lambda = 2\pi \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Тобто знаходимо, що кулонівська взаємодія на краю при $\nu = 2$ призводить до розділення спектру на швидку (зарядову) моду зі швидкістю u та повільну (дипольну) моду зі швидкістю v . У параграфі 2.3. показано, що пелюсткова структура контрастності визначається повільною модою, тоді як швидка мода не збуджується при відносно низьких енергіях. Ось чому

при $\nu = 2$ логарифмічна дисперсія кулонівської взаємодії не важлива для пояснення пелюсток.

Більше того, кулонівський характер взаємодії призводить до наступної універсальності. Далі покажемо, що коефіцієнт пропорційності електронів у зовнішньому каналі до швидкої та повільної моди визначається параметрами $s_\alpha = |S_{1\alpha}|^2$, що задовольняють правило сум

$$\sum_{\alpha} s_{\alpha} = \sum_{\alpha} |S_{1\alpha}|^2 = 1, \quad (2.20)$$

що слідує з унітарності матриці S . Для спеціального вибору (2.17) матриці взаємодії коефіцієнти взаємодії дорівнюють

$$s_1 = s_2 = 1/2, \quad (2.21)$$

що має важливий наслідок, як показано у параграфі 2.2.. Треба зазначити, що у границі сильної далекодіючої взаємодії $u \gg v_F$ результат (2.21) стабільний по відношенню до змін затравочної швидкості Фермі v_F та не є чутливим до фізики крайових каналів на відстані порядку a , що веде до універсальності дефазингу у МЦІ.

Нарешті, можна діагоналізувати гамільтоніан, застосовуючи нові бозонні оператори $a_{\alpha j}(k) = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} b_{\beta j}(k)$. Використовуючи рівняння (2.11), (2.17) та (2.19), отримуємо новий гамільтоніан для квантовохольного краю

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{j,k} [uk b_{1j}^{\dagger}(k)b_{1j}(k) + vk b_{2j}^{\dagger}(k)b_{2j}(k)] \\ & + (W/2) \sum_{\alpha,\beta,j} V_{\alpha\beta} p_{\alpha j} p_{\beta j}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

що завершує обговорення моделі. У додатку А використовуються рівняння (2.6), (2.10), (2.15) та (2.22), щоб вивести електронні кореляційні функції.

2.2. Контрастність та зсув фаз Ааронов-Бомівських осциляцій

У цьому параграфі розглянемо транспорт через показаний на малюнках 1.3-1.5 МЦІ та обчислимо контрастності АБ осциляцій. Обидва режими - слабкого тунелювання та слабкого розсіювання назад - можна розглядати в рамках однієї моделі, застосовуючи підхід тунельного гамільтоніану[25]. У наведених нижче випадках слідуємо за роботою [17]. Введемо оператор тунельного струму $\hat{I} = \dot{N}_D = i[\mathcal{H}_T, N_D]$, який відрізняється для двох режимів тільки знаком. Тут $N_D = \int dx \psi_{1D}^\dagger \psi_{1D}$ - число електронів на зовнішньому крайовому каналі нижнього плеча інтерферометру. Потім використовуємо рівняння (2.4) та (2.5) щоб записати

$$\hat{I} = i(A^\dagger - A). \quad (2.23)$$

Обчислюємо середній струм у нижньому порядку по тунелюванню та отримуємо

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle [A^\dagger(t), A(0)] \rangle, \quad (2.24)$$

де усереднення береться по відношенню до основного стану у квантовохольних краях. Ефекти скінченної температури будуть розглянені окремо у параграфі 2.3.3..

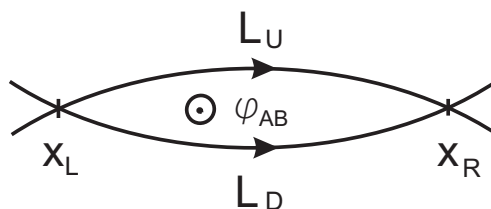


Рис. 2.2. Схема інтерферометру з введеними позначеннями: L_U та L_D довжини верхнього та нижнього шляхів в інтерферометрі відповідно. Координати лівого та правого КТК позначено x_L та x_R відповідно. Магнітний потік, що проходить через інтерферометр призводить до АБ фази φ_{AB} .

Легко бачити, що середній струм можна записати як суму чотирьох доданків:

$$I = \sum_{\ell, \ell'} I_{\ell\ell'}, \quad I_{\ell\ell'} \equiv \int dt \langle [A_{\ell}^{\dagger}(t), A_{\ell'}(0)] \rangle, \quad (2.25)$$

де I_{LL} та I_{RR} - струми безпосередньо у правому та лівому КТК відповідно, а $I_{LR} + I_{RL}$ - інтерференційний вклад. У розглядуваній моделі немає взаємодії між верхнім та нижнім плечима МЦІ, тому кореляційна функція у (2.25) розбивається на добуток двох одночастинкових кореляторів:

$$I_{\ell\ell'} = t_{\ell}^* t_{\ell'} \int dt \left[\langle \psi_{1U}^{\dagger}(x_{\ell}, t) \psi_{1U}(x_{\ell'}, 0) \rangle \langle \psi_{1D}(x_{\ell}, t) \psi_{1D}^{\dagger}(x_{\ell'}, 0) \rangle - \langle \psi_{1U}(x_{\ell'}, 0) \psi_{1U}^{\dagger}(x_{\ell}, t) \rangle \langle \psi_{1D}^{\dagger}(x_{\ell'}, 0) \psi_{1D}(x_{\ell}, t) \rangle \right] \quad (2.26)$$

Треба відмітити, що оператор ψ_{1j}^{\dagger} , застосований до основного стану створює квазічастинку над рівнем Фермі (з додатною енергією), тоді як оператор ψ_{1j} створює дірку нижче рівня Фермі (з від'ємною енергією). Це тягне за собою те, що у першому доданку у (2.26) усі сингулярності зміщуються у верхню напівплощину комплексної змінної t , а у другому доданку сингулярності зміщуються у нижню напівплощину. Це означає, що тільки один доданок дає вклад, в залежності від знаку напруги $\Delta\mu$, що визначає напрямок струму. Окрім цього між доданками немає різниці. Тому можна обирати, наприклад, перший доданок, змістити контур інтегрування C у нижню напівплощину та переписати вираз (2.26) таким чином:

$$I_{\ell\ell'} = t_{\ell}^* t_{\ell'} \int_C dt \langle \psi_{1U}^{\dagger}(x_{\ell}, t) \psi_{1U}(x_{\ell'}, 0) \rangle \langle \psi_{1D}^{\dagger}(x_{\ell}, t) \psi_{1D}(x_{\ell'}, 0) \rangle^*, \quad (2.27)$$

де корелятори визначено таким чином, що вони мають сингулярності на дійсній осі t .

Корелятори розраховано у додатку А, використовуючи техніку бозонізації, одержаний результат:

$$i \langle \psi_{1j}^{\dagger}(x_{\ell}, t) \psi_{1j}(x_{\ell'}, 0) \rangle = \frac{\exp[i\Delta\mu_{1j}t - 2\pi i Q_{1j}(x_{\ell} - x_{\ell'})]}{(x_{\ell} - x_{\ell'} - ut)^{s_1} (x_{\ell} - x_{\ell'} - vt)^{s_2}} \quad (2.28)$$

Один з важливих фактів, який доводиться нижче, полягає у тому, що для $x_\ell = x_{\ell'}$ єдина роль взаємодії - перенормувати густину станів на рівні Фермі $n_F = 1/(u^{s_1}v^{s_2})$. Це безпосередньо впливає з правила суми (2.20). Тому для струму безпосередньо у КТК відразу отримуємо

$$I_{\ell\ell} = 2\pi n_F^2 |t_\ell|^2 \Delta\mu, \quad (2.29)$$

тобто КТК знаходяться у омічному режимі, що узгоджується з експериментальними спостереженнями.

Для того, щоб представити контрастності у компактній формі, вводимо електронні кореляційні функції ізольованого краю, перенормовані до густини станів:

$$G_j(t) = \frac{\exp[2\pi i Q_{1j} L_j]}{(t - L_j/u)^{s_1} (t - L_j/v)^{s_2}}, \quad j = U, D. \quad (2.30)$$

Ці функції містять усю важливу інформацію про ефекти зарядки (зсув фази, викликаний нульовими модами) та дефазинг, що визначається сингулярностями. Далі додаючи усі доданки $I = \sum I_{\ell\ell'}$ знаходимо диференціальну провідність $\mathcal{G} = dI/d\Delta\mu$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = & 2\pi n_F^2 (|t_L|^2 + |t_R|^2) + \\ & + 2n_F^2 |t_L t_R| \operatorname{Im} \left\{ e^{i\varphi_{AB}} \int_C dt e^{i\Delta\mu t} (t - \Delta t) G_U^*(t) G_D(t) \right\}, \quad (2.31) \end{aligned}$$

де зсув часу Δt - ефект зарядки,

$$\Delta t = 2\pi \partial_{\Delta\mu} (Q_{1U} L_U - Q_{1D} L_D), \quad (2.32)$$

який залежить від схеми прикладення потенціалу, він обчислюється у параграфі 2.3. для певних ситуацій в експерименті. Важливо зауважити, що у режимі слабкого розсіяння назад (див. рис. 1.4 та 1.5) тунелювання відбувається з нижнього плеча інтерферометру, тому треба поміняти індекси U та D .

Перший доданок у рівнянні (2.31) - вклад безпосередніх некогерентних струмів у КТК, тоді як другий доданок - інтерференційний вклад, що осцилює з магнітним полем. Тому контрастність АБ осциляцій (1.22) у диференційній провідності \mathcal{G} та АБ зсув фаз набувають наступної форми

$$V_{\mathcal{G}}(\Delta\mu) = V_{\mathcal{G}}(0)|\mathcal{I}_{\text{AB}}|, \quad \Delta\varphi_{\text{AB}} = \arg(\mathcal{I}_{\text{AB}}), \quad (2.33)$$

де контрастність при нульовій напрузі $V_{\mathcal{G}}(0)$ для невзаємодіючої системи дається рівнянням (1.23), тоді як усі ефекти взаємодії входять через безрозмірний інтеграл Фур'є

$$\mathcal{I}_{\text{AB}}(\Delta\mu) = \int_C \frac{dt}{2\pi i} \exp(i\Delta\mu t)(t - \Delta t)G_U^*(t)G_D(t), \quad (2.34)$$

з контуром C , зміщеним у нижню напівплощину змінної t . Ця формула разом з рівняннями (2.30) та (2.32) - один з головних результатів та буде відправною точкою аналізу експериментів. Однак перед тим, як продовжити більш детальними поясненнями експериментів, варто стисло розглянути два приклади.

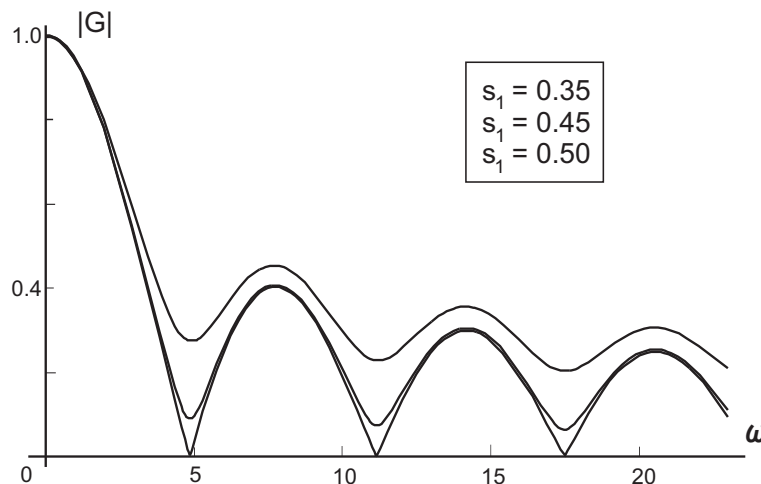


Рис. 2.3. Модуль перетворення Фур'є електронної кореляційної функції $G_D(t)$ зображений як функція безрозмірної напруги $\Delta\mu L_D/v$ для різних значень коефіцієнту пропорційності s_1 .

Перший приклад - невзаємодіючу систему - можна розглядати просто як перевірку запропонованої теорії. У цьому випадку, використовуючи реле-

вантні параметри, вакуумні заряди $Q_{1U} = \Delta\mu/v_F$, $Q_{1D} = 0$, групові швидкості $u = v = v_F$, коефіцієнти пропорційності $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, отримуємо корелятори $G_U(t) = (t - L_U/v_F)^{-1} \exp(i\Delta\mu L_U/v_F)$ and $G_D(t) = (t - L_D/v_F)^{-1}$. Зсув часу $\Delta t = L_U/v_F$ слідує з рівняння (2.32). Підставляємо всі ці результати у рівняння (2.34) і нарешті отримуємо:

$$\mathcal{I}_{AB} = \int_C \frac{dt}{2\pi i} \frac{e^{i\Delta\mu(t-L_U/v_F)}}{t - L_D/v_F} = e^{i\Delta\mu\Delta L/v_F}, \quad (2.35)$$

так що контрастність $|\mathcal{I}_{AB}| = 1$ та зсув фази - $\Delta\varphi_{AB} = \Delta\mu\Delta L/v_F$ узгоджуються з рівнянням (1.23).

Далі розглянемо більш цікавий випадок, коли інтерферометр працює у режимі слабого тунелювання (див. параграф 1.2.), та одне з його плечей, наприклад, верхнє набагато коротше за інше $L_U \ll L_D$. Тоді властивості функції \mathcal{I}_{AB} визначаються збудженнями у нижньому плечі МЦІ при енергіях порядку v/L_D . При цих енергіях електронний корелятор у верхньому плечі поводить себе як корелятор вільних ферміонів: $G_U(t) = 1/t$. Тому для контрастності отримуємо

$$\mathcal{I}_{AB} = \int_C \frac{dt}{2\pi i} e^{i\Delta\mu t} G_D(t), \quad (2.36)$$

тобто вона просто дається перетворенням Фур'є електронної кореляційної функції на краю. Це приводить до цікавої ідеї використати сильно асиметричний МЦІ для *спектроскопії збуджень* на краю квантовохольної системи.

Тепер використаємо можливість проаналізувати роль коефіцієнтів пропорційності s_α у простій ситуації. Модуль перетворення Фур'є функції G_D зображено на рис. (2.3). Легко бачити, що $s_1 = s_2 = 1/2$ це особливий випадок. У цьому випадку, якщо взяти границю $u \rightarrow \infty$, перетворення Фур'є дає $|\mathcal{I}_{AB}| = |J_0(\Delta\mu L_D/2v)|$, де J_0 - функція Бесселя нульового порядку. Так пелюстки контрастності АБ осциляцій добре розділяються тільки у границі сильної далекодіючої взаємодії. Тому асиметричний МЦІ можна

використовувати, щоб перевірити характер взаємодії. Зараз і далі припускається, що $s_1 = s_2 = 1/2$.

2.3. Обговорення експериментів

У цьому параграфі пропонується детальний аналіз описаних у вступі експериментів. Для зручності перепишемо рівняння (2.34) у трохи іншій формі, використовуючи рівняння (2.30) з $s_1 = s_2 = 1/2$ та зсуваючи інтеграл по часу:

$$\mathcal{I}_{AB}(\Delta\mu) = \oint_C \frac{dt}{2\pi i} \frac{t \exp(i\Delta\mu t)}{\prod_{j,\alpha} \sqrt{(t + \Delta t - L_j/v_\alpha)}}, \quad (2.37)$$

де $v_1 = u$, $v_2 = v$, а контур інтегрування C іде навколо розрізів (див. наприклад, рис. 2.4). Ці розрізи, що заміщують одностинкові полюси кореляційних функцій для вільних електронів, викликані взаємодією. На математичному рівні вони є головним джерелом подавлення когерентності тому, що при великому аргументі $\Delta\mu$ перетворення Фур'є (2.34) відносно гладкої функції швидко затухає. На фізичному рівні, коли електрон тунелює, існує дві колективні моди, пов'язані з двома крайовими каналами, і вони уносять частину фазової інформації.

З іншого боку, зарядові ефекти, відображені у параметрі Δt , призводять до зсуву АБ фази $\Delta\phi_{AB}$, що залежить від прикладеного потенціалу. З рівняння (2.33) випливає, що фаза змінюється на π у точці, де контрастність зникає. У віддаленні від цих точок, особливо при нульовій напрузі, зсув фази - гладка функція напруги. Тому цікаво розглянути значення $\partial_{\Delta\mu}\Delta\phi_{AB}$ при $\Delta\mu = 0$, де $|\mathcal{I}_{AB}| = 1$, що можна знайти з розкладу $\mathcal{I}_{AB} = |\mathcal{I}_{AB}|e^{i\Delta\phi_{AB}} = 1 + i(\partial_{\Delta\mu}\Delta\phi_{AB})\Delta\mu$ у правій частині рівняння (2.37). Знаходимо його точно:

$$\frac{\partial\Delta\phi_{AB}}{\partial\Delta\mu} = t_0 - 2\Delta t, \quad t_0 = \frac{u+v}{2uv}(L_U + L_D), \quad (2.38)$$

де перший доданок t_0 - вклад до квантовомеханічної фази, набраної при поширенні електрону вздовж МЦІ. Другий доданок, знайдений з рівняння (2.32), - вклад заряду, що накопичується на плечах МЦІ через кулонівську взаємодію між крайовими каналами. Часткове гасіння двох ефектів призводить до стійкості фази, що можна знайти у роботах [8, 9]. Цей ефект обговорюється нижче.

Нарешті, в усіх експериментах було виявлено, що контрастність V_G осцилює як функція від прикладеного потенціалу $\Delta\mu$. Розглянута модель відображає ці осциляції та допомагає зрозуміти їхнє походження. Насправді, дві добре визначені колективні моди зі швидкостями u та v призводять до утворення чотирьох точок галуження в інтегралі (2.37), що дають відносно слабо затухаючі вклади. Ці вклади мають різні залежні від напруги фазові множники, тому функція $\mathcal{I}_{AB}(\Delta\mu)$ осцилює. Період осциляцій визначається найменшим енергетичним масштабом ϵ , що дається загальним розміром розрізу та може бути оцінений як

$$\epsilon = \frac{2uv}{(u-v)(L_U + L_D)}. \quad (2.39)$$

У випадку $u \gg v$ параметр u скорочується так, що період осциляцій визначається найповільнішою модою та розміром інтерферометру.

Варто підкреслити, що осциляції контрастності з'являються тільки коли як мінімум дві моди відносно добре розділяються. Запропонована модель передбачає степеневий закон затухання контрастності. В експериментах [8, 9, 10, 11] контрастність, скоріше за все, затухає швидше. На це може бути кілька причин, наприклад, низькочастотні флуктуації в електричному контурі [27, 28] або електромагнітне випромінювання.[29, 30] Внутрішні причини дефазингу потребують окремого розгляду. Вже зазначалося, що дисперсія кулонівської взаємодії, якою тут знехтувано, може призвести до сильного дефазингу.[18] Однак вона впливає тільки на швидку моду, тоді як повільна мода, яка дає внесок до інтегралу (2.37), зберігає фазову когерентність. Тому сама по собі дисперсія кулонівської взаємодії не може

пояснити сильний дефазинг при $\nu = 2$. Експерименти, скоріше за все, свідчать про те, що повільна мода теж дисперсійна, що може бути наслідком сильного безпорядку на краю, чи, що більш цікаве, наслідком внутрішньої структури кожного крайового каналу.[31]

Підкресливши ці моменти, зараз зосередимося тільки на зсуві фази та осциляціях контрастності. Використовуючи той факт, що $u \gg v$ спростуємо інтеграл (2.37) нехтуючи доданками, що містять $1/u$:

$$\mathcal{I}_{\text{AB}} = \oint_C \frac{dt}{2\pi i} \frac{t \exp(i\Delta\mu t)}{(t + \Delta t) \prod_j \sqrt{(t + \Delta t - L_j/v)}}. \quad (2.40)$$

Цей вираз містить один полюс та один розріз (див. рис. 2.4). Тому його можна виразити за допомогою функцій Бесселя нульового порядку J_0 . Після елементарних перетворень знаходимо:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\text{AB}} &= e^{-i\Delta\mu\Delta t} \left[F(\Delta\mu) - i\Delta t \int_{-\infty}^{\Delta\mu} d\Delta\mu' F(\Delta\mu') \right] \\ F &\equiv e^{i\Delta\mu t_0} J_0(\Delta\mu\Delta L/2v), \end{aligned} \quad (2.41)$$

де $t_0 = (L_U + L_D)/2v$ та $\Delta L = L_D - L_U$. Проаналізуємо окремо експерименти, що обговорювалися на початку.

2.3.1. Потенціал прикладено тільки до одного крайового каналу. Почнемо з експерименту [8]. Використовуючи рівняння (2.15) та (2.17) знаходимо

$$\begin{pmatrix} Q_{1j} \\ Q_{2j} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi uv} \begin{pmatrix} v+u & v-u \\ v-u & v+u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mu_{1j} \\ \Delta\mu_{2j} \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

У режимі слабого тунелювання, показаного у лівій частині рис. 1.4, тільки до зовнішнього каналу верхнього плеча інтерферометру прикладено потенціал $\Delta\mu_{1U} = \Delta\mu$ and $\Delta\mu_{2U} = \Delta\mu_{\alpha D} = 0$. Тому одержуємо

$$Q_{1U} = \frac{u+v}{4\pi uv} \Delta\mu, \quad Q_{1D} = 0 \quad (2.43)$$

Тоді рівняння (2.32) дає $\Delta t = L_U(u + v)/2uv$. Підставляючи Δt у рівняння (2.38), можна знайти, що при нульовому потенціалі

$$\frac{\partial \Delta \phi_{AB}}{\partial \Delta \mu} = \frac{u + v}{2uv} \Delta L. \quad (2.44)$$

Тому для симетричного інтерферометру $\Delta L = 0$ зсув фази не залежить від потенціалу, у точках, що віддалені від точок, де фаза різко змінюється, у яких контрастність рівна нулю. Це може пояснити явище стійкості фази, що спостерігалось у роботах [8, 9], якщо припустити, що у цьому експерименті інтерферометр майже симетричний. Насправді, період осциляцій контрастності дається масштабом енергії (2.39). Тому загальний зсув фази між нулями контрастності можна оцінити як $\Delta L/(L_U + L_D) \ll 1$.

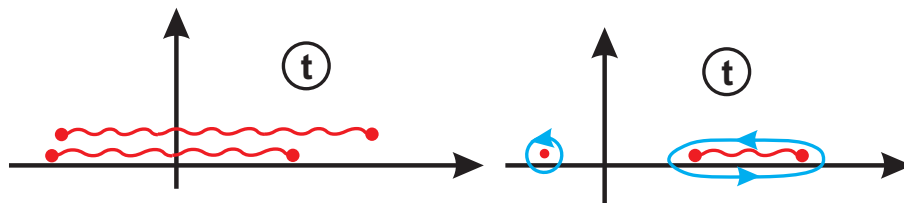


Рис. 2.4. Аналітична структура інтегралу Фур'є (2.37) у випадку одного каналу, до якого прикладено потенціал.[8, 9] *Ліва частина:* Два розрізи (для зручності показано окремо) підінтегрального виразу з'являються від добутку двох одночастинкових кореляційних функцій. *Права частина:* у гарніці $u \gg v$ дві точки галуження, що відповідають швидкій моді, зтягуються до одного полюсу у $t = -L_U/2v$, а повільна мода породжує розріз, що йде від $t = L_U/2v$ до $t = L_D/v - L_U/2v$. Лінія зі стрілкою показує контур інтегрування C .

Значення чисельно обчисленого інтегралу (2.40) зображено на рис. 2.5 для двох значень асиметрії $L_D/L_U = 1.15$ та 1.35 . Головну увагу зосередимо на кількох перших осциляціях контрастності (верхня частина), які розкривають ефекти зарядки. Необхідно наголосити на деяких моментах. По-перше, ширина центральної пелюстки дорівнює ширині бокових пелюсток. Це пов'язано з тим, що у випадку симетричного інтерферометру $L_U = L_D = L$ розріз зменшується до полюсу (див. рис. 2.4) так, що є два

полюси при $t = \pm L/2v$. Потім рівняння (2.40) дає $|\mathcal{I}_{AB}| = |\cos(\Delta\mu L/2v)|$. По-друге, невелика варіація довжини L_D нижнього плеча має тільки малий вплив на положення пелюсток, тоді як амплітуда осциляцій суттєво подавлюється. І нарешті, нижня частина рис. 2.5 ілюструє явище стійкості фази для майже симетричного інтерферометру $L_D = 1.15L_U$. Зсув АБ фази змінюється повільно всередині пелюстки та змінюється на π у нулях контрастності. Усі ці міркування узгоджуються з експериментом [8].

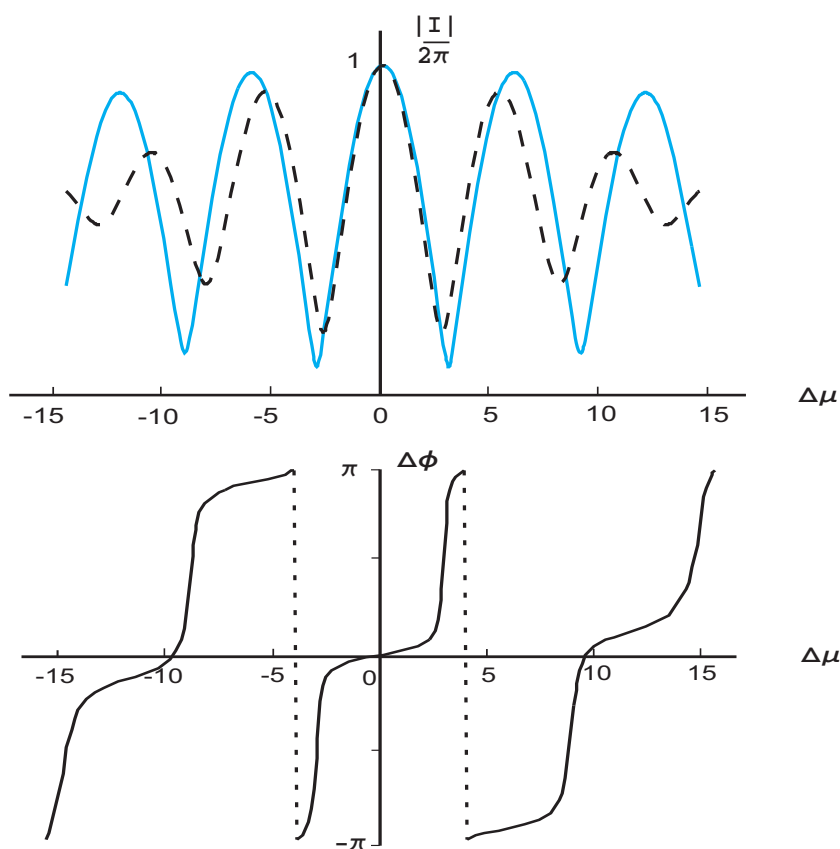


Рис. 2.5. Власна контрастність АБ осциляцій $|\mathcal{I}_{AB}|$ та АБ зсув фази $\arg(\mathcal{I}_{AB})$ у випадку, коли тільки один канал знаходиться під напругою.[8, 9] *Верхня частина:* контрастність як функція від напруги в одиницях v/L_U для $L_D = 1.15L_U$ (суцільна лінія) та для $L_D = 1.35L_U$ (пунктирна лінія). *Нижня частина:* Зсув фази для $L_D = 1.15L_U$.

Підводячи підсумки цього параграфу, зауважимо, що у режимі слабого відбиття назад контрастність (див. ліву частину рис. 1.4) можна одержати просто замінюючи L_U та L_D . Це впливає з того, що у розглянутій моделі ефекти зарядки важливі тільки у тій частині МЦІ між двома КТК,

де вони призводять до зсувів фази. З тієї ж причини прозорість другого КТК не впливає на контрастність.[10, 11] У наступному параграфі показано, що симетрія між слабким тунелюванням та слабким відбиттям назад порушується, якщо напругу прикладено до двох крайових каналів.

2.3.2. Напругу прикладено до двох крайових каналів. Далі аналізуємо експерименти [10, 11]. Деталі цих експериментів обговорювалися вище. У режимі слабого тунелювання (див. ліву частину рис. 1.5) напругу прикладено до двох крайових каналів, вони майже повністю відбиваються у першому КТК. Тому рівняння (2.42) дає

$$Q_{1U} = \frac{\Delta\mu}{2\pi u}, \quad Q_{1D} = 0, \quad (2.45)$$

а з рівняння (2.32) знаходимо $\Delta t = L_U/u$.

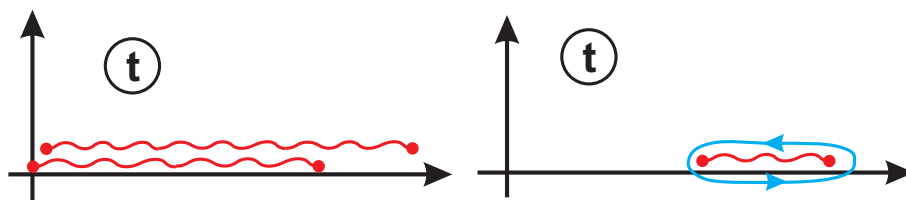


Рис. 2.6. Аналітична структура інтегралу Фур'є (2.37) для випадку, коли до двох крайових каналів прикладено потенціал [10, 11] та у режимі слабого тунелювання (див. рис. 1.5). Ліва частина показує розрізи двох одночастинкових кореляційних функцій, а правій частині береться границя $u \gg v$. Розріз тягнеться від $t = L_U/v$ до $t = L_D/v$.

У границі сильної взаємодії $u \gg v$ знаходимо, що $\Delta t \rightarrow 0$. Таким чином в інтегралі (2.40) полюс, що відповідає швидкій моді скорочується (аналітична структура інтегралу зображено на рис. 2.6), так що контрастність можна розрахувати точно:

$$\mathcal{I}_{AB} = \exp[i\Delta\mu(L_D + L_U)/2v] J_0(\Delta\mu\Delta L/2v), \quad (2.46)$$

де $\Delta L = L_D - L_U$. Контрастність АБ осциляцій, що дається модулем інтегралу (2.46), зображено на рис. 2.8. Можна бачити, що на відміну від

того випадку, коли тільки до одного каналу прикладено потенціал, [8, 9] центральна пелюстка майже у двічі ширша за бокові, що узгоджується з експериментальними спостереженнями. [10, 11] Більше того, ширина пелюсток визначається новим енергетичним масштабом $\epsilon' = v/\Delta L$. І нарешті, всередині пелюсток зсув фази $\Delta\phi_{AB} = \Delta\mu(L_D + L_U)/2v$ завжди росте лінійно в залежності від напруги, тому не повинна спостерігатися стійкість фази.

Тепер переключимося у режим слабого відбиття назад (див. праву частину рис. 1.5). У верхньому плечі інтерферометру тільки до внутрішнього каналу прикладено напругу, а у нижньому плечі - тільки до зовнішнього каналу. Знову використовуючи рівняння (2.42), можна отримати

$$Q_{1U} = -\frac{u-v}{4\pi uv}\Delta\mu, \quad Q_{1D} = \frac{u+v}{4\pi uv}\Delta\mu. \quad (2.47)$$

Потім з рівняння (2.32) знаходимо, що $\Delta t = (L_D + L_U)/2v + (L_U - L_D)/2u$.

Аналітичну структуру інтегралу (2.40) показано на рис. 2.7. Для випадку, коли тільки до одного каналу прикладено потенціал, вона виглядає дещо схожою на структуру, зображену на рис. 2.4. Однак головна відміна між цими двома випадками полягає у тому, що сингулярності на рис. 2.7 сильно асиметричні по відношенню до заміни $t \rightarrow -t$. Для того, щоб побачити наслідки цього факту, беремо границю $u \gg v$ та записуємо $\Delta t = (L_U + L_D)/2v$. Для зсуву фази (2.38) при малій нарузі отримаємо $\partial\Delta\phi_{AB}/\partial\Delta\mu = -(L_U + L_D)/2v$. Тому у режимі слабого відбиття назад та коли до двох каналів прикладено напругу стійкість фази не спостерігається.

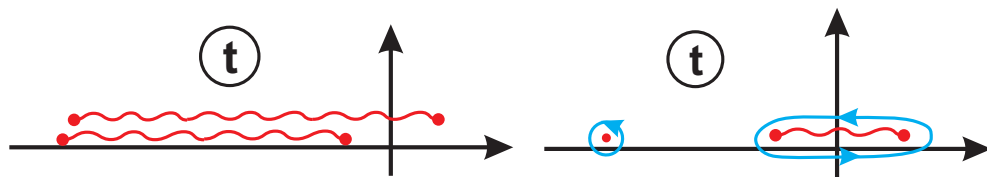


Рис. 2.7. Аналітична структура інтегралу (2.37) така сама як на рис. 2.6, але у режимі слабого відбиття назад. Права сторона зображує полюс у $t = -(L_U + L_D)/2v$

та розріз, що тягнеться від $t = -(L_D - L_U)/2v$ до $t = (L_D - L_U)/2v$.

Найбільш важлива особливість контрастності (див. рис. 2.8) полягає у тому, що на відміну від випадку, який було розглянуто вище, вона росте як функція від напруги навколо $\Delta\mu = 0$, що повністю узгоджується з експериментами [10, 11]. Вона може навіть стати більшою за 1, якщо два КТК мають приблизно однакові прозорості, так що $V_G(0)$ близьке до 1. Ця поведінка може виглядати несподіваною тому, що очікується, що дефазинг має подавляти контрастність АБ осциляцій нижче свого максимального значення (1.23) у невзаємодіючій когерентній системі. Проте треба пам'ятати, що згідно з запропонованою моделлю осциляції контрастності як функція від напруги походять від ефектів зарядки, що викликані кулонівською взаємодією між каналами. Тому не застосовуються прості аргументи, що ґрунтуються на формулі Ландауера для провідності.

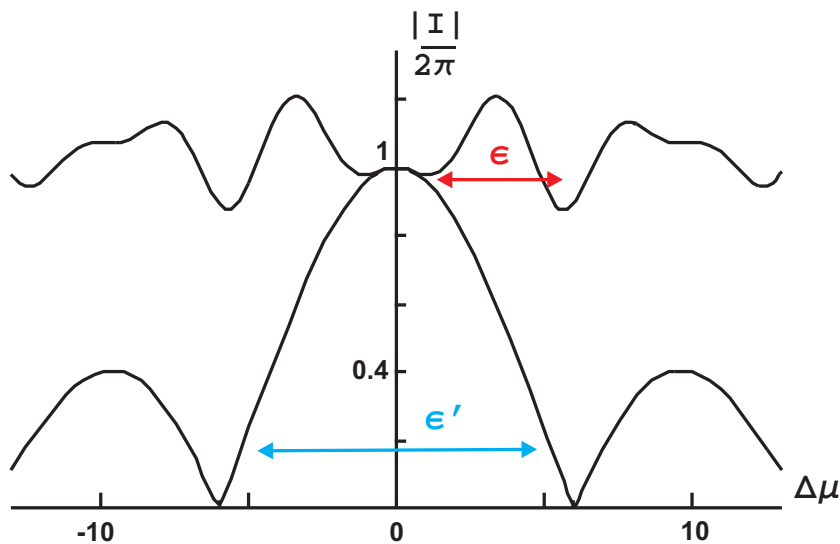


Рис. 2.8. Власна контрастність АБ осциляцій $|I_{AB}|$ для випадку, коли до двох крайових каналів прикладено потенціал [10, 11] та для сильно асиметричного інтерферометру $L_D = 1.8L_U$. Її зображено як функцію від напруги $\Delta\mu$ в одиницях v/L_U для режиму слабого тунелювання (верхня крива) та для режиму слабого відбиття назад (нижня крива).

Таким чином в експериментальному зразку, де до двох крайових каналів прикладено потенціал [10, 11] є сильна симетрія між режимом слабкого тунелювання та режимом слабкого відбиття назад, що гарно видно на рис. 2.8. Для того, щоб прояснити фізичне походження цього ефекту, оцінимо інтеграл (2.40) у границі сильної взаємодії $u \gg v$ та для симетричного МЦІ $L_U = L_D = L$. Тоді розріз стягується у полюс, і отримуємо наступний простий результат:

$$\mathcal{I}_{AB} = \Delta t/t_0 + (1 - \Delta t/t_0)e^{i\Delta\mu t_0}, \quad (2.48)$$

де $t_0 = L/v$ - час поширення повільної моди між двома КТК. Тобто знаходимо, що як і у результаті для зсуву фази (2.38), тут теж має місце конкуренція двох доданків: Δt , що дається рівнянням (2.32), та часом прольоту t_0 . Контрастність буде рости або спадати в залежності від знаку другого доданку у рівнянні (2.48).

В експериментах [8, 9] $\Delta t = L/2v = t_0/2$, так що контрастність завжди спадає. З іншого боку експерименти [10, 11] показують цікавий випадок. У режимі слабкого тунелювання маємо $\Delta t = 0$, тоді як у режимі слабкого відбиття назад $\Delta t = t_0$, так що в обох режимах контрастність постійна для симетричного МЦІ. Тому на рис. 2.8 приведені результати для сильно асиметричного інтерферометра з $L_D = 1.8L_U$. Однак треба зазначити, що коли Δt трохи перевищує t_0 , контрастність легко стає функцією, що росте при малому потенціалі. Це саме те, що відбувається, якщо послабити зроблене припущення про гарне екранування взаємодії та дозволити взаємодіяти протилежним плечам інтерферометру. Насправді, для того, щоб залишатися електронейтральною, система компенсує таку взаємодію зменшуючи у подальшому заряд Q_{1U} так, що він стає меншим за значення, що дається рівнянням (2.47), так що зараз $\Delta t > t_0$. Чисельно перевірено, що одне це припущення приводить до гарного узгодження з експериментами [10, 11] навіть для випадку симетричного інтерферометру.

2.3.3. Ефекти скінченної температури. Нещодавно у роботі [13] було виміряно температурну залежність контрастності АБ осциляцій в МЦІ. Найбільш цікаве те, що контрастність експоненційно залежить від розміру інтерферометру $V_G \propto e^{-L/l_\varphi}$. Це на пряму суперечить передбаченню $V_G \propto e^{-\Delta L/l_\varphi}$ для вільних електронів, [34] де дефазинг пов'язаний з усередненням по енергії. Більше того, довжина когерентності залежить від температури як $l_\varphi \propto 1/T$, що не узгоджується з передбаченням, яке ґрунтується на моделі Латтідженівської рідини для $\nu = 1$. [18] Покажемо, що виявлену в експерименті температурну залежність контрастності можна пояснити у рамках запропонованої моделі.

Насправді, згідно з результатами параграфу 2.2., при високих температурах, нехтуючи ефектами зарядки, які впливають тільки на префактор, контрастність можна оцінити як $V_G \propto \int dt G_D^*(t) G_U(t)$. Тут корелятори даються асимптоту при високій температурі (3.48), де X_α треба замінити на $L_j - v_\alpha t$. Тоді у випадку відсутності взаємодії (тобто для $s_1 = 1, s_2 = 0$ та $v_1 = v_F$) отримуємо результат

$$V_G \propto \int dt e^{-\pi T \sum_j |t - L_j/v_F|} \propto e^{-\pi T \Delta L/v_F}, \quad (2.49)$$

що узгоджується з передбаченням у роботі [34]. З іншого боку, у розглядуваній моделі $s_1 = s_2 = 1/2$, тому одержуємо

$$V_G \propto \int dt e^{-\pi T \sum_{\alpha,j} |t - L_j/v_\alpha|} \propto e^{-(L_U + L_D)/2l_\varphi}, \quad (2.50)$$

де довжина дефазингу

$$l_\varphi = \frac{uv}{\pi T(u - v)}. \quad (2.51)$$

Тобто одержуємо те, що контрастність експоненційно залежить від повного розміру інтерферометру, а довжина дефазингу масштабується як $l_\varphi \propto 1/T$, що повністю узгоджується з експериментом [13].

Варто зробити два зауваження. По-перше, згідно з рівняннями (2.50), (2.51) та результатами параграфу 2.2., температурна залежність та період осциляцій контрастності визначаються тим самим масштабом енергії ϵ ,

що дається рівнянням (2.39). З іншого боку, спадання контрастності як функції від напруги $\Delta\mu$ при нульовій температурі визначається більшим масштабом енергії ϵ' . Він рівний $\epsilon' = v/\Delta L$, або, у випадку симетричного інтерферометру, він залежить від дисперсії повільної моди. Існування двох окремих масштабів енергії, які походять від розділення спектра крайових збуджень на повільні та швидкі моди, є одним з найбільш важливих передбачень теорії.

По-друге, зауважимо, що v та u - групові швидкості колективних дипольних та зарядових збуджень відповідно. Грубо кажучи, вони визначаються просторовим розділенням крайових мод a та відстанню до регулюючого затвору D . На $\nu = 2$ холівському плато розділення a росте з магнітним полем тому, що внутрішній крайовий канал рухається у напрямку від краю двомірного електронного газу доки він не зникає у кінці плато. Тому на відміну від "голої" швидкості Фермі, швидкість повільної моди зростає з магнітним полем. Це може пояснити немонотонну поведінку l_φ , що спостерігалася у роботі [13]. Насправді, згідно з рівнянням (2.51) спочатку довжина декогерентизації зростає з магнітним полем, починаючи зі значення $l_\varphi = v/\pi T$. Потім вона досягає максимального значення при $v \approx u$ та спадає до значення $l_\varphi \approx u/\pi T$ на плато $\nu = 1$.

Висновки до розділу 2

Попередні теоретичні роботи [28, 29, 30, 34] на тему дефазингу в МЦІ передбачають гладкий спад контрастності АБ осциляцій як функції від температури та прикладеної напруги. Тому, коли у роботі [8] було повідомлено про несподівані осциляції та пелюстки контрастності АБ осциляцій як функції від напруги, це розглядалося як велика загадка та привертало значну увагу теоретиків. У роботі [17] було запропоноване перше пояснення, яке ґрунтується на далекодіючій кулонівській взаємодії між протилежно ру-

хаючимися крайовими станами, що призводить до резонансного розсіяння плазмонів. Незважаючи на те, що це явище можна зустріти у ряді експериментальних ситуацій, нові експерименти [10, 11, 12, 13, 14, 15] однозначно вказують на фізику, пов'язану з внутрішньою структурою квантовохольного краю.

У цьому розділі розглядаються внутрішні властивості краю та пропонується проста модель, яка здатна описати майже всі деталі існуючих експериментальних даних. Ключовим моментом запропонованої теорії є припущення про те, що два кіральних канали на краю електронної системи з $\nu = 2$ взаємодіють завдяки далекодіючому кулонівському потенціалу. Це призводить до ряду універсальностей, зокрема, до розділення спектру крайових збуджень на повільну та швидку моди (плазмони) та до однакових констант пропорційності до обох мод. Коли електрони розсіюються на КТК, що грають роль напівпрозорих дзеркал в електронному МЦІ, вони збуджують плазмони, залежні від енергії, що надається різницею потенціалів. Плазмони уносять електронну фазову інформацію, що призводить до спаду контрастності АБ осциляцій як функції від напруги.

Важливою рисою розглянутої моделі є те, що при нульовій температурі фазова інформація, яка втрачається у першому КТК, може бути частково відновлена у другому КТК. Це призводить до осциляцій та пелюсткоподібної структури контрастності, що можна інтерпретувати як розмірний ефект. Новий масштаб енергії у цих осциляціях, пов'язаний із повним розміром МЦІ та з повільною модою, також визначає температурну залежність контрастності.

Важливо, що у рамках однієї й тієї ж самої простої моделі можна пояснити багато явищ, у яких ефекти взаємодії проявляють себе у різних експериментах [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]. Це стосується пелюсткоподібної структури, що спостерігалася у роботах [8, 9, 10, 11]; стійкості фази, яку виявили тільки у роботах [8, 9]; росту контрастності та асиметрії АБ

ефекту, відкритих у роботах [10, 11]. Всі ці явища можна інтерпретувати як ефекти зарядки. Насправді, крайові канали у квантовохольній системі рухаються вздовж еквіпотенціальних ліній, і їх можна розглядати як одномірні метали. Тому вони накопичують вакуумні заряди, які призводять до зсувів фази, що залежать від схеми подачі напруги (див. рис. 1.4 та 1.5). Ці залежні від напруги фази визначають загальний зсув АБ фази та характерну поведінку контрастності як функції напруги.

І нарешті, експериментально спостережений спад контрастності як функції від напруги здається більш сильним ніж той, що передбачає запропонована модель. Можна припустити, що цей ефект не можна пояснити тільки за допомогою далекодіючої кулонівської взаємодії - він може виникати через дисперсію повільної моди у зв'язку з безпорядком, або через внутрішню структуру кожного крайового каналу.[31] Цей пункт потребує обережного, ретельного експериментального та теоретичного дослідження. Більше того, цікаво дізнатися, як обговорені тут ефекти зарядки та розміру можуть вплинути на інтерферометрію при інших факторах заповнення, коли мають місце досить схожі процеси.[35] Незважаючи на те, що вже зроблено перші кроки у теорії, [36, 37, 38, 39, 40] експеримент, як зазвичай буває, може принести нові сюрпризи.

РОЗДІЛ 3

Мах-Цендер інтерферометрія дробових квантово-хольних крайових станів

У цьому розділі пропонується пряма експериментальна перевірка ефективної теорії дробових квантовохольних крайових станів. Спочатку розглядається класифікація ефективних моделей, що задовольняють умові скорочення аномалій. Ця класифікація ілюструється прикладом з фактором заповнення $\nu = 2/3$. У цьому випадку *неможливо* побудувати крайову модель з менш ніж двома кіральними каналами та є кілька нееквівалентних крайових моделей, що включають два поля. Розглядаються чотири найпростіші моделі для цього фактору заповнення та приводяться заряди та масштабні розмірності квазічастинок. Досліджується транспорт у електронному інтерферометрі Маха-Цендера та показано, що масштабні властивості компонент Фур'є осциляцій Аарона-Бома у струмі дають інформацію про заряди та масштабні розмірності квазічастинок. Таким чином, інтерферометр Маха-Цендера може бути використаний для розрізнення допустимих ефективних моделей з однаковим фактором заповнення. Важливою частиною теоретичної моделі є тунельний гамільтоніан квазічастинок, форма якого обговорюється в деталях.

3.1. Багатоканальні крайові моделі

Як було показано у параграфі 1.1.3., одноканальна гідродинамічна модель КХ краю не може описати усі спостережені фактори заповнення. Тому

розглянемо загальні багатоканальні крайові моделі. Природне узагальнення однопольова дії (1.20) до багатьох полів дається

$$S[\phi_i] = \frac{1}{4\pi} \sum_i \int dt dx [\sigma_i D_t \phi_i D_x \phi_i - v_i (D_x \phi_i)^2] + \frac{1}{4\pi} \sum_i \int dt dx [Q_i \epsilon^{\mu\lambda} a_\mu \partial_\lambda \phi_i], \quad (3.1)$$

де $\sigma_i = \pm 1$ описує кіральність каналу з номером i , v_i - швидкість поширення, а Q_i - константа електромагнітної взаємодії з полем ϕ_i . Коваріантні похідні означені як $D_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i + \sigma_i Q_i a_\mu$. Варто підкреслити, що будь-яка квадратична калібровочно інваріантна дія для кіральних бозонів може бути приведена до єдиної форми (3.1) шляхом переозначення полів. Розглядається загальний випадок з різними швидкостями поширення v_i для різних крайових моделей тому, що недавні експерименти [8, 9, 10, 11, 12, 14, 15] показали, що таке може траплятися.

Вимога скорочення аномалії для крайової дії (3.1) призводить до

$$\sum_i \sigma_i Q_i^2 = \nu. \quad (3.2)$$

Видно, що на відміну від одноканального краю, де останній доданок у дії (1.20) однозначно зафіксований холівською провідністю, у ситуації з багатьма каналами тільки “довжина” вектору Q_i зафіксована і становить $\sqrt{\nu}$, тоді як його напрямок поки довільний.

3.1.1. Кінематика крайових моделей. Для того, щоб перевірити другу фізичну вимогу, існування збуджень з квантовими числом електрону, розглянемо загальний вертексний оператор

$$\psi = \exp \left(i \sum_j q_j \phi_j \right), \quad (3.3)$$

де q_j - деякі константи. Беручи до уваги комутаційні співвідношення

$$[\partial_x \phi_i(x, t), \phi_j(x', t)] = -2\pi i \sigma_i \delta_{ij} \delta(x - x'), \quad (3.4)$$

які впливають з рівняння (3.1), знаходимо, що статистична фаза оператора (3.3) дається:

$$\theta = \pi \sum_i \sigma_i q_i q_i. \quad (3.5)$$

Оператор електричного заряду дається $Q_{\text{em}} = (1/2\pi) \sum_i Q_i \int dx \partial_x \phi_i$ у відповідності з рівнянням (3.1). Таким чином, з використанням рівняння (3.4) видно, що заряд польового оператора (3.3) дається

$$Q_{\text{em}} = \sum_i \sigma_i Q_i q_i. \quad (3.6)$$

Тут, як у цілому КЕХ, можна мати кілька електронних операторів, що відрізняються один від одного деякими квантовими числами. Походження квантових чисел обговорюється у додатку Е. Різні електронні оператори позначаються додатковим індексом α

$$\psi_\alpha = \exp\left(i \sum_j q_{\alpha j} \phi_j\right), \quad (3.7)$$

та робимо припущення, що число електронів співпадає з числом каналів.⁴ Всі електронні поля повинні мати одиничний заряд, це тягне за собою

$$\sum_i \sigma_i Q_i q_{\alpha i} = 1, \quad (3.8)$$

та необхідні відносні статистичні фази $\pi K_{\alpha\beta}$, сумісні з відносною локальністю та статистикою Фермі. Це приводить до того, що числа

$$K_{\alpha\beta} = \sum_i \sigma_i q_{\alpha i} q_{\beta i} \quad (3.9)$$

⁴Насправді введена матриця $q_{\alpha i}$ є аналогом добре відомої матриці Кабібо-Кабаяші-Маскава у фізиці частинок.

мають бути цілими, та для $\alpha = \beta$ ці числа мають бути непарними.

На рис. 3.1 схематично проілюстровано умови (3.8) та (3.9) для простого випадку двох каналів з однаковими кіральностями. Видно, що на відміну від одноканального випадку, у мультिकанальних моделях є свобода у виборі електронних операторів, навіть якщо константи зв'язку Q_i зафіксовані. З цієї свободи випливає, що у низькоенергетичній границі різні мікроскопічні КХ хвильові функції можуть привести до тієї самої дії. У цьому випадку низькоенергетичні проекції електронних операторів в принципі можуть відрізнятися. Насправді багатоканальні моделі повністю визначаються числами q_α^i , тоді як значення константи зв'язку Q_i можна отримати розв'язуючи рівняння (3.8):

$$Q_i = \sigma_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha}^{-1}. \quad (3.10)$$

Тому фізичні вимоги до ефективної теорії можуть бути сформульовані як обмеження на матрицю q . А саме, вимога того, що елементи матриці K , які даються рівнянням (3.9), є цілими числами, має бути доповненою такою умовою:

$$\sum_{\alpha, \beta} K_{\alpha\beta}^{-1} = \nu, \quad (3.11)$$

що слідує з вимоги скорочення аномалії (3.2) та рівняння (3.10).

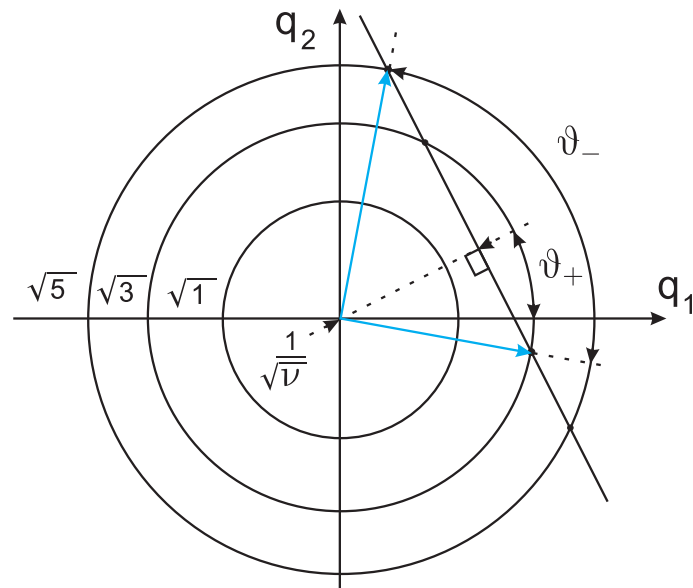


Рис. 3.1. Схематична ілюстрація умов для електронних операторів у кіральній двопольовій моделі. Вимога до статистичної фази електронного оператора бути ферміонною: $q_{\alpha 1}^2 + q_{\alpha 2}^2 = 2k + 1$. Це означає, що кінцеві точки векторів $\mathbf{q}_{\alpha} \equiv \{q_{\alpha i}\}$ лежать на колі радіусу $\sqrt{2k + 1}$. Умова одиничного заряду $Q_1 q_{\alpha 1} + Q_2 q_{\alpha 2} = 1$ тягне за собою те, що кінцеві точки векторів \mathbf{q}_{α} лежать на лінії, перпендикулярній до вектора $\mathbf{Q} \equiv \{Q_i\}$. Довжина цього вектора зафіксована умовою скорочення аномалії (3.2), а саме $|\mathbf{Q}| = \sqrt{\nu}$. Тому відстань від лінії, що проходить через кінцеві точки векторів \mathbf{q}_{α} до початку зафіксована і становить $1/\sqrt{\nu}$. Кут між напрямками \mathbf{Q} та q_1 позначено як ϑ_+ , а кут між електронними векторами як ϑ_- .

Треба зауважити, що обмеження на матрицю q тепер переформульовані як обмеження на матрицю K . У параграфі 3.1.2. показано, що *кінематична* інформація про ефективну модель закладена у матриці K . Більш точно - спектри статистичних фаз та заряди квазічастинок повністю визначаються K . Для кожного фактору заповнення ця матриця приймає значення з дискретного набору. Наприклад, у двоканальних моделях це відповідає дискретному набору виборів довжин електронних векторів \mathbf{q}_{α} та їх відносного кута ϑ_- (див. рис. 3.1). З відношення (3.9) випливає, що свобода, яка залишається у матриці q для даної матриці K є кутом ϑ_+ одночасного обертання векторів \mathbf{q}_{α} . У параграфі 3.1.2. показано, що *динамічні* властивості моделі, такі як кореляційні функції, не визначаються тільки матрицею K , а

залежать від усієї матриці q , наприклад, від кута ϑ_+ у випадку двох полів.

3.1.2. Локальні збудження. Далі визначимо всі квазічастинкові оператори у відповідності до вимоги того, що вони мають цілі статистичні фази відносно всіх електронних полів (3.7). Квазічастинкові оператори є вертексними операторами такої форми

$$\psi = \exp\left(i \sum_j p_j \phi_j\right). \quad (3.12)$$

Їхні статистичні фази відносно електронних полів даються відношенням

$$\theta_{pq_\alpha} = \pi \sum_i \sigma_i p_i q_{\alpha i} = \pi n_\alpha. \quad (3.13)$$

Числа n_α мають бути цілими. Розв'язок рівняння (3.13)

$$p_i = \sigma_i \sum_\beta q_{i\beta}^{-1} n_\beta, \quad (3.14)$$

лінійна комбінація з цілочисельними коефіцієнтами. Тому повний набір дозволених квазічастинкових операторів утворюють решітку, що є дуальною по відношенню до решітки, натягнутої на електронні вектори $q_{\alpha i}$ (більш детальний опис цього моменту див. додаток F та роботу [45]).

Цікаво зауважити, що статистична фаза та заряд квазічастинкового оператора, позначені числом n_α , можуть бути виражені тільки у термінах матриці K . Для статистичної фази маємо, що

$$\frac{\theta}{\pi} = \sum_i \sigma_i p_i p_i = \sum_{\alpha, \beta} n_\alpha K_{\alpha\beta}^{-1} n_\beta. \quad (3.15)$$

З рівнянь (3.10) та (3.14) також випливає, що заряд оператора у (3.12) дається

$$Q_{\text{em}} = \sum_i \sigma_i Q_i p_i = \sum_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}^{-1} n_\beta. \quad (3.16)$$

Треба зауважити, що у цьому рівнянні підсумовування по індексу α можна розглядати як множення на вектор $(1, 1, \dots, 1)$.

Може статися, що різні матриці K породжують однаковий набір квазічастинок. Це випадок, коли відповідні електронні вектори $q_{\alpha i}$ утворюють різні базиси тієї самої ґратки (див. обговорення у додатку F). Приклад такої ситуації зображено на рис. 3.2. На мові матриць q співпадіння є наслідком того, що цілочисельне перетворення $q'_{\alpha i} = \sum_{\beta} T_{\alpha\beta} q_{\beta i}$ (тобто перетворення з елементами $T_{\alpha\beta}$ та $T_{\alpha\beta}^{-1}$, що є цілими числами) є ні чим іншим як автоморфізмом цілочисельної ґратки, породжений зміною базису. Використовуючи визначення (3.9) ця рівність може бути записана як

$$K \leftrightarrow K' = TKT^T, \quad (3.17)$$

Оскільки матриця T трансформує електронні базиси, вона зберігає заряд електрону. Беручи до уваги рівняння (3.16), ця важлива умова означає, що матриця T має зберігати вектор $(1, 1, \dots, 1)$.

Підсумовуючи, пропонується наступна стратегія для знаходження нееквівалентних моделей з даним фактором заповнення. Перш за все, треба знайти усі розв'язки K рівняння (3.11) для даного ν з точністю до еквівалентності, визначеної відповідними цілочисельними перетвореннями (3.17). Ця процедура фіксує кінематичну частину теорії.⁵ Потім треба зафіксувати параметри, що не обмежені загальними умовами, сформульованими на початку параграфу 1.1.. До цих параметрів відносяться швидкості поширення v_i кіральних крайових моделей. І останнє - треба обрати конкретний базис \mathbf{q}_{α} векторів, що нумерують оператори електронних полів та є сумісними з обраною матрицею K .

3.1.3. Масштабні розмірності локальних збуджень. Завершуємо формулювання теорії розглядаючи кореляційні функції квазічастинкових операторів (3.12). Детальне обчислення цих функцій міститься у дода-

⁵Варто зауважити, що вводячи нові поля $\chi_{\alpha} = \sum_i q_{\alpha i} \phi_i$, приходимо до дії $S = \int dt dx [K_{\alpha\beta}^{-1} \partial_t \chi_{\alpha} \partial_x \chi_{\beta} + V_{\alpha\beta} \partial_x \chi_{\alpha} \partial_x \chi_{\beta}]$, яку часто використовують у літературі. Однак, ця форма дії не є зручною для класифікації ефективних моделей і може призвести до ряду непорозумінь.

тку A і приводить до

$$\langle 0|\psi^\dagger(x,t)\psi(0,0)|0\rangle \propto e^{i\varphi_0(\mathbf{n})} \prod_i (x + \sigma_i v_i t)^{-\delta_i(\mathbf{n})}, \quad (3.18)$$

де експоненти задаються

$$\delta_i(\mathbf{n}) = p_i^2 = \left[\sum_\alpha q_{\alpha i}^{-1} n_\alpha \right]^2. \quad (3.19)$$

Тут $\mathbf{n} \equiv \{n_\alpha\}$ та φ_0 - фаза, точне значення якої обговорюється у параграфі 3.4..

Масштабна розмірність кореляційної функції, означена через її поведінку при великих часах, дається

$$\Delta(\mathbf{n}) = \sum_i \delta_i(\mathbf{n}). \quad (3.20)$$

А виражена у термінах матриці q набуває вигляду

$$\Delta(\mathbf{n}) = \sum_i p_i^2 = \sum_{\alpha,\beta} n_\alpha (qq^T)_{\alpha\beta}^{-1} n_\beta. \quad (3.21)$$

Детальний розрахунок Δ у некіральному випадку з двома полями дається у додатку С. Масштабні розмірності Δ визначаються матрицею K не повністю, тоді як згідно з рівнянням (3.15) статистичні фази

$$\frac{\theta}{\pi} = \sum_i \delta_i \sigma_i \quad (3.22)$$

даються матрицею K . Порівнюючи рівняння (3.20) з (3.22) робимо висновок, що $\Delta \geq \theta/\pi$, причому рівність має місце у повністю кіральному випадку.

3.2. Мінімальні моделі для $\nu = 2/m$ та масштабні розмірності їх квазічастинкових полів

У цьому параграфі застосовуються вище обговорені ідеї до конкретного випадку з фактором заповнення $\nu = 2/m$. У роботі [49] було показано, що

моделі з великим числом крайових каналів можуть бути нестійкими під впливом безпорядку. Щоб уникнути таких ускладнень, обмежимо аналіз моделями з найменшим можливим числом полів (див. також обговорення у кінці додатку Е). Більше того, можна розглянути моделі з мінімальними статистичними фазами операторів електронних полів тому, що вони найбільш фізично адекватні.⁶

Прямий розв'язок рівняння (3.11) складний. На щастя, у роботі [45] були доведені загальні результати для випадку, коли статистичні фази електронних операторів менше ніж 7π : усі двопольові моделі для $\nu = 2/m$ описуються матрицею K наступної форми:

$$K_a = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Тоді рівняння (3.11) накладає наступне обмеження на матрицю (3.23):

$$\nu = \frac{2a - 2b}{a^2 - b^2} = \frac{2}{a + b}. \quad (3.24)$$

Так для $\nu = 2/m$ параметри a та b пов'язані рівнянням $a + b = m$, де непарне число a нумерує моделі.

Для чисто кіральних моделей масштабні розмірності кореляційних функцій (3.21) даються статистичними фазами. Тому для матриці K форми (3.23) вони даються виразом

$$\Delta(\mathbf{n}) = \frac{1}{a^2 - b^2} [a(n_1^2 + n_2^2) - 2bn_1n_2], \quad (3.25)$$

а заряд збуджень можна записати як

$$Q_{\text{em}} = \frac{n_1 + n_2}{m}. \quad (3.26)$$

Для некіральних моделей вираз для зарядів квазічастинок залишається таким самим, а масштабні розмірності (3.21) залежать від додаткового параметру ϑ_+ (див. додаток С). У параграфі 3.3. показано, що у границі сильної кулонівської взаємодії цей параметр набуває універсального значення

⁶Чисельні симуляції [78] проказують, що для великих значень статистичних фаз КХ стан не є стійким, і електрони утворюють вігнерівський кристал. [4]

$\vartheta_+ = 0$. Тоді масштабні розмірності даються

$$\Delta(\mathbf{n}) = \frac{1}{b^2 - a^2} [b(n_1^2 + n_2^2) - 2an_1n_2]. \quad (3.27)$$

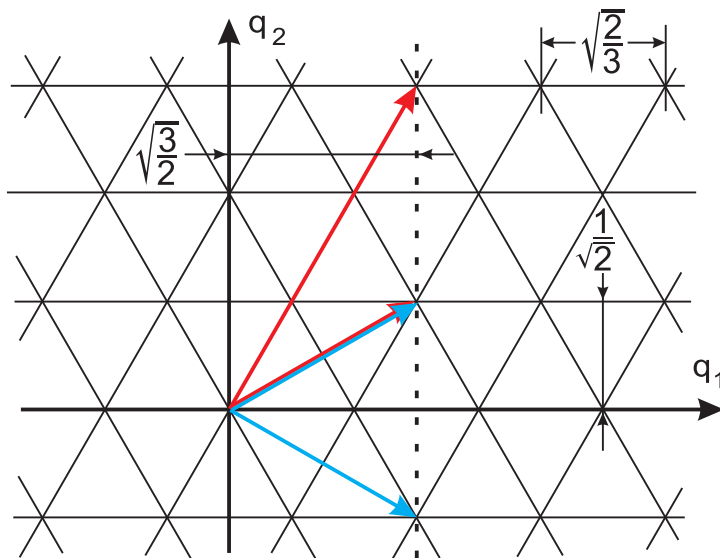


Рис. 3.2. (Ілюстрація еквівалентності двох КХ ґраток. Для двох каналів з різними кіральностями, статистична фаза задовольняє $\theta/\pi = q_1^2 - q_2^2$. Використовуючи цей факт можна легко побачити, що верхня пара векторів відповідає матриці K (3.28), а нижня відповідає матриці K (3.29). Треба зауважити, що ці пари векторів є лише різними базисами тієї самої ґратки (яка є дуальною до показаної на рисунку). Тому спектри статистичних фаз у моделях (3.28) та (3.29) однакові. І нарешті, штрихова лінія обмежує заряд електронів рівним 1. Той факт, що усі електронні вектори лежать на тій самій лінії тягне за собою те, що Q_i однакові для обох моделей. Це означає, що заряди $Q_{em} = \sum q_i Q_i$ збуджень в одній моделі співпадають з зарядами в іншій. Тут можна обрати кут $\vartheta_+ = 0$ відповідно до висновків параграфу 3.3..

Вже зазначалося, що усі двопольові розв'язки рівняння (3.11) відповідають одній з матриць (3.23) з точністю до рівності, що описується перетворенням (3.17). Важливим прикладом є запропонована матриця K , наприклад у роботах [62, 63, 64]:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Ця матриця описує некіральну модель зі станом $\nu = 2/3$, отриманим частинково-дірковим спряженням стану $\nu = 1/3$. У цьому стані густина на краю спочатку зростає до $\nu = 1$, а потім падає до нуля, це означає, що є два крайові канали з протилежними кіральностями. Інша матриця K для станів $\nu = 2/3$ з'являється у контексті підходу композитних ферміонів: [65]

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Виявляється, що модель (3.28) еквівалентна до (3.29) у сенсі (3.17). Дійсно, можна застосувати цілочисельну заміну змінних, що перетворить одну матрицю K на іншу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Це перетворення типу (3.17) тому, що воно має властивість

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

і воно залишає вектор $(1, 1)$ інваріантним. Еквівалентність цих двох моделей ілюструється на рис. 3.2.

Для $\nu = 2/3$ матриці (3.23) з найменшими діагональними елементами (тобто з найменшими статистичними фазами електронних операторів) є наступними:

$$K_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad K_5 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

та

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Треба відзначити, що матриці (3.31) мають від'ємні детермінанти, а відтак, на відміну від матриць (3.30), вони описують некіральні стани. Значення масштабних розмірностей збуджень у моделях (3.30) та (3.31) зведені у таблиці 1.

K_a	$\Delta(\mathbf{n})$	$\Delta_0, \Delta_{\frac{1}{3}}, \Delta_{\frac{2}{3}}, \Delta_1, \Delta_{\text{el}}$
K_5	$\frac{1}{21}(5(n_1^2 + n_2^2) + 4n_1n_2)$	$\frac{6}{21}, \frac{5}{21}, \frac{2}{3}, \frac{11}{7}, 5$
K_3	$\frac{1}{3}(n_1^2 + n_2^2)$	$\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 3$
K_1	$\frac{2}{3}(n_1^2 + n_2^2 - n_1n_2)$	$2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2, 2$
K_{-1}	$\frac{2}{15}(2(n_1^2 + n_2^2) + n_1n_2)$	$\frac{6}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{3}, \frac{8}{5}, 4$

Табл. 1: Масштабні розмірності збуджень у моделях зі станом $\nu = 2/3$. Для кожної моделі, описаної матрицею K_a , приведено загальний вираз для масштабних розмірностей $\Delta(\mathbf{n})$ квазічастинкових операторів, що нумеруються парами цілих чисел (n_1, n_2) . Мінімальні значення Δ_q для збуджень заряду q , так як і масштабні розмірності електронних операторів перераховано у правій колонці.

Важливо зауважити, що для кожної моделі мінімальна масштабна розмірність становить $\Delta_{\min} = \Delta_{1/3}$, тобто оператор лафлінівської квазічастинки найбільш релевантний. Серед чотирьох моделей модель K_1 є, мабуть, найбільш стійкою по відношенню до безпорядку тому, що вона має найбільшу масштабну розмірність Δ_0 . Більш того, у цій моделі електронний оператор найбільш релевантний серед операторів з одиничним зарядом. До того ж чисельні моделювання [66] та деякі мікроскопічні міркування [62, 63, 64] підтверджують, що модель з матрицею K_1 , найбільш імовірно, описує стан $\nu = 2/3$. Однак, деякі деякі ознаки фазового переходу у стані $\nu = 2/3$ спостерігалися у роботах [67, 68]. Це означає, що за певних умов інші моделі теж можуть реалізуватися; див. роботу [45].

3.3. Роль кулонівської взаємодії

У параграфі 3.1.3. показано (див. також додаток С) що, у некіральному випадку масштабні розмірності збуджень залежать не тільки від “кінемати-

чної” структури теорії, відображеної у матриці K , а й від кута ϑ_+ . Цей кут параметризує відношення між модами, що поширюються, та електронними операторами. Однак, є важливий клас систем, у яких цей параметр виявляється однозначно та універсально зафіксованим. Це, наприклад, випадок системи з двома крайовими модами та сильною кулонівською взаємодією. Цей факт обговорювався у роботі [1]. Суттєво, що результати аналізу у роботі [1] ідеально узгоджуються з експериментальними даними у роботах [8, 9, 10, 11, 12, 14, 15]. Не зважаючи на те, що у роботі [1] розглядається тільки випадок $\nu = 2$, нижче показано, що висновки цього аналізу можна без суттєвих змін поширити і на дробові рідини.

Будемо вважати, що ефектами безпорядку можна нехтувати. Це може бути справедливим припущенням для електронного МЦ інтерферометру, типовий розмір якого лише кілька мікрон. У цьому випадку загальний вигляд гамільтоніану дається сумою вільного гамільтоніану, доданку, що відповідає за кулонівську взаємодію та доданку, що описує взаємодію із зовнішнім електромагнітним полем a_μ :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_C + \mathcal{H}_{\text{int}}[\mathbf{a}]. \quad (3.32)$$

Нижче показано, що конкретна форма вільного гамільтоніану \mathcal{H}_0 не важлива.

Вважаючи, що відстань a між крайовими каналами порядку величини їх товщини l , або менша (позначення див. на рис. 3.3), доданок, що відповідає за кулонівську взаємодію, можна записати як:

$$\mathcal{H}_C = (1/2) \int dx dx' \rho_{\text{em}}(x) U_C(x - x') \rho_{\text{em}}(x'), \quad (3.33)$$

де $\rho_{\text{em}}(x)$ - повна одновимірна густина заряду у точці x , а $U_C(x - x')$ - кулонівський потенціал. Далі можна припустити, що взаємодія екранується на відстані d такій що $L \gg d \gg a$, де L - розмір інтерферометру. Це екранування може відбуватися через присутність регулюючого затвору, або через масивний повітряний міст (для більш детального опису див. роботу [1]). Як

наслідок, можемо нехтувати дисперсією кулонівської взаємодії та записати $U_C(x-y) = V\delta(x-y)$, де константа взаємодії $V \sim \ln(d/a)$ велика. І нарешті, взаємодія із зовнішнім електромагнітним полем описується гамільтоніаном

$$\mathcal{H}_{\text{int}}[\mathbf{a}] = - \int dx \rho_{\text{em}}(x) a_t(x), \quad (3.34)$$

у калібровці $a_x = 0$.

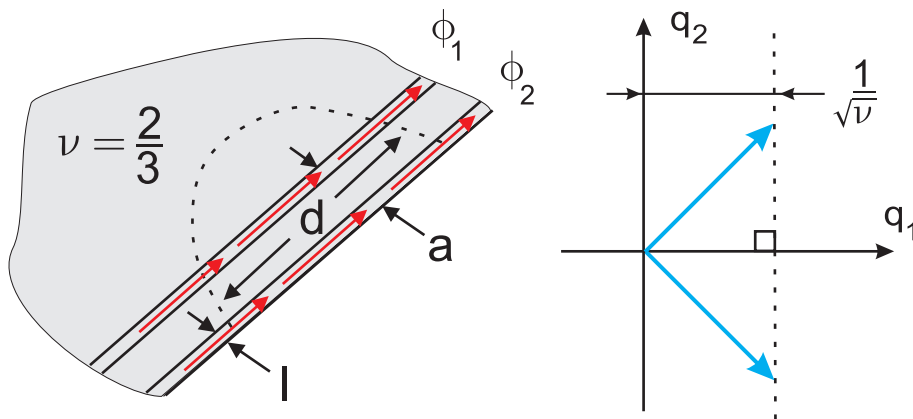


Рис. 3.3. Ілюстрація ефектів сильної далекодіючої кулонівської взаємодії. *Ліва сторона:* показано важливі просторові масштаби на КХ краю: ширина каналів l , відстань між двома каналами a та довжина екранування кулонівської взаємодії d . Універсальна границя досягається, коли $d \gg a, l$. *Права сторона:* можливі конфігурації електронних збуджень в універсальній границі сильної взаємодії. Саме така ситуація має місце при $\nu = 2$, як показано у роботі [1].

У границі, коли $\ln(d/a) \gg 1$, кулонівська взаємодія перевищує кореляційну енергію. Одним з найбільш важливих наслідків цього факту є те, що незалежно від форми вільного гамільтоніану повний гамільтоніан діагональний у базисі, де одна мода ϕ_1 заряджена $Q_1/2\pi\partial_x\phi_1 = \rho_{\text{em}}$, а інша ϕ_2 є дипольною модою із повним зарядом нуль. Так можемо записати

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\pi} \sum_i \int v_i (\partial_x \phi_i)^2 - \frac{1}{2\pi} Q_1 \int a_t \partial_x \phi_1, \quad (3.35)$$

де швидкість зарядженої моди $v_1 = \sigma_H V$ набагато більша за швидкість v_2 дипольної моди, що визначається вільним гамільтоніаном (див. обговорення у кінці параграфу 1.1.2.). Порівнюючи рівняння (3.35) з (3.1), можна

зробити висновок, що $Q_2 = 0$, це означає, що дипольна мода не взаємодіє із зовнішнім електромагнітним полем. Тому умова скорочення аномалії (3.2) тягне за собою те, що $Q_1 = \sqrt{\nu}$. Так кут між вектором Q та віссю q_1 зафіксований і приймає універсальне значення $\vartheta_+ = 0$. Це проілюстровано на рис. 3.3.

3.4. Експериментальне визначення зарядів та масштабних розмірностей квазічастинок

У параграфі 3.2. показано, що для фактору заповнення $\nu = 2/3$ є кілька можливих моделей, що задовольняють усі фізичні вимоги, сформульовані у параграфі 1.1. Варто зазначити, що всі ці моделі мають однаковий мінімальний дробовий заряд $1/3$, але різний спектр масштабних розмірностей. Експеримент, запропонований у цьому параграфі, може дозволити визначити масштабні розмірності та, як результат, встановити фізично релевантну модель КХ краю. Цей експеримент ґрунтується на ідеї використання електронного МЦ інтерферометру.

Електронні МЦ інтерферометри були побудовані та експериментально досліджені у роботах [8, 9, 10, 11, 12, 14, 15]. Експериментальний зразок складається з двомірного електронного газу, що знаходиться в області, яка має форму так званого *диску Корбіно* (див. рис. 1.3). У режимі КЕХ на краю утворюється кілька ефективно одномірних провідних каналів. У МЦ інтерферометрі моди у цих крайових каналах використовуються як промені, а два КТК - як напівпрозорі дзеркала. Два омічні контакти під'єднані до диску Корбіно випромінюють та поглинають електрони. До одного контакту прикладено потенціал $\Delta\mu > 0$, а інший заземлений та слугує стоком для току I .

Для квазічастинок є два шляхи, якими вони можуть пройти від верхнього омічного контакту до нижнього. Перша можливість - пройти лівий

КТК та відбитися від правого. Друга можливість - відбитися від лівого КТК, а потім пройти правий. Легко бачити, що ці два контури обмежують ненульовий магнітний потік. Як наслідок, струм I осцилює як функція від магнітного потоку крізь інтерферометр. Потік АБ можна варіювати за допомогою модулюючого затвору біля одного з плечів інтерферометру, який може трохи змінювати довжину цього плеча (див. також обговорення у додатку 3.5).

Можна припустити, що є кілька типів збуджень, які можуть тунелювати між плечима у КТК, нумеруємо їх цілими числами n_α . Вони створюються операторами

$$\psi_{\mathbf{n}} = \exp\left(i \sum_j p_j(\mathbf{n}) \phi_j\right), \quad p_j(\mathbf{n}) = \sigma_j \sum_\alpha q_{\alpha j}^{-1} n_\alpha. \quad (3.36)$$

Так тунельний гамільтоніан дається

$$\mathcal{H}_T = \sum_{\ell, \mathbf{n}} t_{\ell, \mathbf{n}} \psi_{U, \mathbf{n}}^\dagger(x_\ell) \psi_{D, \mathbf{n}}(x_\ell) + \text{h.c.} \equiv \sum_{\ell, \mathbf{n}} \left(A_{\ell, \mathbf{n}} + A_{\ell, \mathbf{n}}^\dagger \right), \quad (3.37)$$

де індекси U, D означають, що квазічастинки народжуються та зникають на верхньому та на нижньому плечі інтерферометру (див. рис. 2.2), тобто на зовнішньому краю та на внутрішньому краю диску Корбіно. Більше того, $t_{\ell, \mathbf{n}}$ - тунельні амплітуди частинок типу \mathbf{n} на лівому та правому КТК $\ell = L, R$. Ці амплітуди включають АБ зсув фаз:

$$\arg \frac{t_{R, \mathbf{n}}}{t_{L, \mathbf{n}}} = 2\pi i Q_{\text{em}}(\mathbf{n}) \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (3.38)$$

де Φ - потік крізь інтерферометр, а $\Phi_0 = hc/e$ - квант потоку. Вибір тунельного гамільтоніану вимагає пояснення, яке розміщено та детально обговорюється у додатку D.

Струм крізь МЦІ визначається як швидкість зміни електромагнітного заряду $Q_{\text{em}} = \sum_i (Q_i/2\pi) \int dx \partial_x \phi_i$ в одному з плечів інтерферометра (позначення див. на рис. 2.2):

$$\hat{I} = i[\mathcal{H}, Q_{\text{em}}] = i[\mathcal{H}_T, Q_{\text{em}}]. \quad (3.39)$$

Обчислюючи комутатор у рівнянні (3.39) з \mathcal{H}_T як у рівнянні (3.37), отримуємо наступний вираз для оператора струму:

$$\hat{I} = \sum_{\ell, \mathbf{n}} iQ_{\text{em}}(\mathbf{n})(A_{\ell, \mathbf{n}} - A_{\ell, \mathbf{n}}^\dagger). \quad (3.40)$$

Обчислюємо середній струм $I = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{I})$ у лідируючому порядку по тунельним амплітудам t_ℓ

$$I = \sum_{\ell, \ell', \mathbf{n}} Q_{\text{em}}(\mathbf{n}) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle [A_{\ell, \mathbf{n}}^\dagger(t), A_{\ell', \mathbf{n}}(0)] \rangle, \quad (3.41)$$

де оператори $A_{\ell, \mathbf{n}}^\dagger$, $A_{\ell, \mathbf{n}}$ взяті у представленні взаємодії, а усереднення визначається як $\langle \dots \rangle := \text{Tr} \hat{\rho}_0(\dots)$, де $\hat{\rho}_0$ - матриця густини незалежних плечей. У рівнянні (3.41) взято до уваги, що $\langle \psi_{\mathbf{n}}^\dagger \psi_{\mathbf{m}} \rangle \propto \delta_{\mathbf{n}, \mathbf{m}}$, що є наслідком дії нульових мод.

Легко бачити, що вираз (3.41) для струму являє собою суму чотирьох доданків: $I = \sum_{\ell \ell'} I_{\ell \ell'}$, де $\ell, \ell' = L, R$. Перші два доданки

$$I_{\ell \ell} = \sum_{\mathbf{n}} Q_{\text{em}}(\mathbf{n}) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle [A_{\ell, \mathbf{n}}^\dagger(t), A_{\ell, \mathbf{n}}(0)] \rangle, \quad (3.42)$$

відповідають некогерентному тунелюванню в одному з двох КТК. Два інші доданки залежать від магнітного потоку Φ та призводять до інтерференції:

$$I_\Phi \equiv I_{LR} + I_{RL} = 2 \sum_{\mathbf{n}} Q_{\text{em}}(\mathbf{n}) \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle [A_{R, \mathbf{n}}^\dagger(t), A_{L, \mathbf{n}}(0)] \rangle. \quad (3.43)$$

Можна зосередитися на інтерференційному доданку, оскільки він дозволяє розрізнити вклади від різних збуджень. Використовуючи рівняння (3.37), запишемо:

$$I_\Phi = 2 \sum_{\mathbf{n}} Q_{\text{em}}(\mathbf{n}) \text{Re} t_{L, \mathbf{n}} t_{R, \mathbf{n}}^* \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left\{ \langle \psi_{D, \mathbf{n}}(x_R, t) \psi_{D, \mathbf{n}}^\dagger(x_L, 0) \rangle \langle \psi_{U, \mathbf{n}}^\dagger(x_R, t) \psi_{U, \mathbf{n}}(x_L, 0) \rangle \right. \\ \left. - \langle \psi_{D, \mathbf{n}}^\dagger(x_L, 0) \psi_{D, \mathbf{n}}(x_R, t) \rangle \langle \psi_{U, \mathbf{n}}(x_L, 0) \psi_{U, \mathbf{n}}^\dagger(x_R, t) \rangle \right\}. \quad (3.44)$$

Кореляційні функції обчислені у додатку А, результат такий:

$$i\langle\psi_{\mathbf{n}}^{\dagger}(x,t)\psi_{\mathbf{n}}(0,0)\rangle \propto \exp[i\varphi_0(\mathbf{n})] \prod_i \left\{ \frac{v_i}{\pi T} \sinh\left[\pi T\left(t + \sigma_i \frac{x}{v_i}\right)\right] \right\}^{-\delta_i(\mathbf{n})}. \quad (3.45)$$

У цьому рівнянні Фаза $\varphi_0(\mathbf{n})$ визначається структурою нульових мод та вимагає окремого розгляду. Вводячи нульові моди ϕ_i та π_i через $\phi_i(x) = \phi_i + 2\pi x\pi_i + osc.$, записуємо відповідний доданок у рівнянні (3.35) як $\mathcal{H}_0 = \pi W \sum_i v_i \pi_i^2$, де W - повний розмір системи. Повний заряд на краю дається $Q_{em} = W\langle\pi_1\rangle$. Середні значення нульових мод можна пов'язати з прикладеною напругою $\Delta\mu$ використовуючи загально відому в електростатиці формулу $\Delta\mu = \delta\langle\mathcal{H}_0\rangle/\delta Q_{em}$. З цього рівняння випливає, що $\langle\pi_1\rangle = \Delta\mu/v_1$, тоді як для дипольної моди $\langle\pi_2\rangle = 0$ тому, що до неї не прикладено напругу.⁷ Можна припустити, що флуктуації заряду нехтовно малі через великі ємності крайових каналів, підєднаних до омичних контактів. Таким чином, вклад нульових мод дається $\langle e^{2\pi i p_j \pi_j (x + \sigma_j v_j t)} \rangle = e^{2\pi i p_j \langle\pi_j\rangle (x + \sigma_j v_j t)}$. Підставляючи середні значення нульових мод, занходимо фазу кореляційної функції (3.45):

$$\varphi_0(\mathbf{n}) \equiv \sum_i p_i \langle\pi_i\rangle (x + \sigma_i v_i t) = \Delta\mu \left(t + \sigma_i \frac{x}{v_1}\right) \sum_{\alpha} q_{\alpha 1}^{-1} n_{\alpha}. \quad (3.46)$$

Треба зазначити, що ця фаза лінійна по напрузі $\Delta\mu$.

У наближенні низької температури $T = 0$ кореляційні функції даються формулою (3.18). Тоді інтеграл по часу у рівнянні (3.44) при малих напругах $\Delta\mu \ll v_i/L_{\alpha}$, $\alpha = U, D$ дає

$$I_{\Phi} = \sum_{\mathbf{n}} C_{\mathbf{n}} (\Delta\mu)^{2\Delta(\mathbf{n})-1} \cos \left[2\pi Q_{em}(\mathbf{n}) \frac{\Phi}{\Phi_0} \right], \quad (3.47)$$

де $C_{\mathbf{n}}$ - деякі (несуттєві) константи. У наближенні високої температури

⁷Припускається, що обидва КТК знаходяться одночасно або в режимі слабкого тунелювання, або в режимі слабкого відбиття назад. Більш того можна припустити, що всі канали на кожному краю що виходять з певного омичного контакту мають однаковий електрохімічний потенціал.

кореляційна функція (3.45) веде себе як

$$i\langle\psi_{\mathbf{n}}^{\dagger}(x,t)\psi_{\mathbf{n}}(0,0)\rangle\propto\exp\left[-\sum_i\pi T\delta_i(\mathbf{n})\left|t+\sigma_i\frac{x}{v_i}\right|\right].\quad(3.48)$$

Тоді при малих напругах осцилююча складова струму набуває наступної форми (див. додаток А):

$$I_{\Phi}=\Delta\mu\sum_{\mathbf{n}}C'_{\mathbf{n}}T^{2\Delta(\mathbf{n})-1}e^{-\pi T/T_0(\mathbf{n})}\cos\left[2\pi Q_{\text{em}}(\mathbf{n})\frac{\Phi}{\Phi_0}\right],\quad(3.49)$$

де $C'_{\mathbf{n}}$ - константи, а характерний масштаб енергії дається

$$\frac{1}{T_0(\mathbf{n})}=\min_{\alpha',i'}\sum_{\alpha,i}\delta_i(\mathbf{n})\left|\frac{\sigma_i L_{\alpha}}{v_i}-\frac{\sigma_{i'} L_{\alpha'}}{v_{i'}}\right|.\quad(3.50)$$

Для симетричного інтерферометру у границі $v_1\gg v_2$ цей вираз спрощується до

$$T_0^{-1}(\mathbf{n})=\min(\delta_1(\mathbf{n}),\delta_2(\mathbf{n}))\frac{L}{v_2}.\quad(3.51)$$

Область застосовності результату (3.47) обмежена умовами $\Delta\mu\ll v_i/L_{\alpha}$, $\alpha=U,D$. За межами цієї області залежність видимості від прикладеної напруги немонотонна через зарядові ефекти, як спостерігалось в експериментах [8]-[15]. Більше того, поведінка (3.47) має місце тільки коли $\Delta\mu>T$. Для типових експериментів [8, 9, 10, 11, 12, 14, 15] це означає, що $1\mu V<\Delta\mu<10\mu V$. Тому робимо висновок, що буде нелегко, проте в принципі можливо визначити показники степеневі поведінки у рівнянні (3.47).

Підбиваючи підсумок, на відміну від теоретичних робіт, у яких *ad-hoc* використовуються Кляйнівські фактори [36], передбачається, що періоди АБ осциляцій більші ніж Φ_0 ; (обговорення Кляйнівських факторів див. у додатку D). Найлегший спосіб зафіксувати великі періоди експериментально - це порівняти періодичності у режимі слабого тунелювання та у режимі слабого відбиття назад. Рівняння (3.47) та (3.49) являють собою головний результат цього параграфу. Їх можна використати, щоб розрізнити різні ефективні моделі. А саме, моделі можна визначити, вимірюючи струм

крізь МЦ інтерферометр як функцію магнітного потоку Φ та напруги $\Delta\mu$. Виконуючи перетворення Фур'є по відношенню до Φ , можна дослідити поведінку по $\Delta\mu$ різних гармонік, що відповідають вкладам найбільш релевантних збуджень для всіх значень заряду Q_{em} . Для того, щоб визначити вірну модель, треба порівняти експериментально визначенні масштабні розмірності Δ із тими, що наведено у таблиці у параграфі 3.2.. Коли вірну модель (тобто її матрицю K) визначено, можна використати температурну залежність (3.49) як незалежну перевірку теорії.

Висновки до розділу 3

В останнє десятиріччя було запропоновано кілька способів експериментальної перевірки фізики КХ краю. Вони ґрунтуються на вимірах електричного заряду, статистичних фаз та масштабних розмірностей квазічастинок. Деякі з них були реалізовані та пролили світло на властивості дробових КХ країв. Однак деякі експерименти поставили нові питання. Наприклад, в експерименті [48] вольт-амперна характеристика виявилася степеневою з високою точністю. Проте виміряні показники, які вважалися пропорційними масштабним розмірностям квазічастинкових операторів, виявилися на такихи як передбачала теорія. Так МЦ інтерферометри, які вже показали декілька цікавих результатів, можна розглядати як багатобіцяючі інструменти у дослідженні властивостей дробового КХ краю.

У цьому розділі розглянуто побудову низькоенергетичної теорії [45, 31] дробових КХ країв, що ґрунтується на скороченні аномалії. Показано, що для $\nu = 1/m$, де m - непарне число, вона може бути описана гідродинамічною моделлю, тоді як інші фактори заповнення потребують введення кількох крайових каналів (3.1). Було знайдено, що у кожній моделі квазічастинкові оператори нумеруються векторами в решітці, дуальній до певної непарної цілочисельної решітки [45]. Їхні заряди та статистичні фази

даються рівняннями (3.15) та (3.16). Проілюстровано класифікацію ефективних моделей прикладом рідин з фактором заповнення $\nu = 2/m$, та, зокрема, з $\nu = 2/3$. Показано, що для $\nu = 2/3$ існує як мінімум чотири нееквівалентні моделі, що задовольняють усі фізичні умови та мають мінімально можливу кількість полів. Важливо зауважити, що в кожній ефективній моделі мінімальний дробовий заряд становить $1/3$.

Для моделей з двома полями показано, що кулонівська взаємодія призводить до універсальних значень електромагнітних констант взаємодії. Ця універсальність дозволяє обчислити масштабні розмірності квазічастинок, див. (3.21), і результат дається рівнянням (3.27). Обчислено АБ-осцилюючий вклад у струм крізь МЦ інтерферометр при низьких та високих температурах - рівняння (3.47) та (3.49), та показано, що Фур'є спектр струму як функція від потоку може бути використаний для визначення масштабних розмірностей квазічастинкових операторів. Що у свою чергу призводить до можливості розрізнити ефективні моделі.

Запропонований метод визначення вірної моделі може бути застосований до рідин з довільними факторами заповнення та зводиться до наступного:

- По-перше, для даного фактору заповнення ν треба знайти розв'язок рівняння (3.11) для матриць K з точністю до еквівалентності, як описано у рівнянні (3.17). Найцікавішими розв'язками є ті, що мають найменше можливе число полів та мінімальні статистичні фази операторів електронного поля.
- По-друге, використовуючи рівняння (3.16) та (3.21), треба обчислити спектр зарядів та масштабних розмірностей для кожної моделі.
- І нарешті, треба спробувати виміряти поведінку Фур'є компонент по $\Delta\mu$ струму крізь МЦ інтерферометр та порівняти її з теоретично передбаченною для того, щоб визначити вірну модель.

Важливим аспектом розглянутої теорії є те, що вона передбачає АБ осциляції з квазічастинковою періодичністю по магнітному потоку, що модулюється затвором, тобто з періодами, рівними кільком електронним періодам. Ця періодичність дозволяє розділити вклади різних збуджень струму. У контексті запропонованої теорії квазічастинкова періодичність пов'язана із вибором тунельного гамільтоніану, який відрізняється від вибору у роботах [36] та [37], та призводить до некомутативності тунельних гамільтоніанів у різних просторових точках. Ця некомутативність походить від топологічного характеру квазічастинкових збуджень у дробовому КХ стані та є наслідком відкритих граничних умов, характерних для МЦ інтерферометра.

Некомутативність тунельних гамільтоніанів потребує додаткового теоретичного аналізу та, можливо, експериментальної перевірки. Теоретичний аналіз цієї проблеми має включати конкретну модель омічних контактів, яка може впливати на фізику процесів у МЦ інтерферометрі. Також є цікавим узагальнити цей аналіз на дроби, такі як $\nu = 5/2$, які, можливо, описуються неабелевими КХ станами, та на випадок ФП інтерферометрів, де може з'явитися нова фізика.

ВИСНОВКИ

1. В роботі модифіковано гамільтоніан кіральної рідини Латінжера на випадок, коли має місце сильна кулонівська взаємодія в кожному крайовому каналі електронного газу в режимі квантового ефекта Хола та між цими каналами [1]. Показано, що така модифікація призводить до результатів, що узгоджуються з останніми експериментами на електронних інтерферометрах Маха-Цендера.
2. В моделі з модифікованим гамільтоніаном розрахована функція Гріна на електронних збуджень для випадку присутності двох крайових каналів на краю області заповненої електронним газом при нульовій та скінченній температурі для різних цілих та дробових значень фактора заповнення рівнів Ландау [1, 3].
3. Отримано теоретичний вираз, який визначає диференційну провідність електронного інтерферометра Маха-Цендера в режимі цілого та дробового квантового ефекта Хола при нульовій та скінченній температурі через знайдені в попередньому пункті функції Гріна. Чисельно розраховано залежність провідності від прикладеної різниці потенціалів і температури [1, 2] для відповідних випадків.
4. Проведено чисельні розрахунки контрастності інтерференційної картини осциляцій Ааронова-Бома у провідності інтерферометра та фазового зсуву як функцію прикладеної різниці потенціалів та температури для різних схем прикладення потенціалів до інтерферометра [1, 2]. Продемонстровано, що отримані результати повністю узгоджуються з даними експериментів проведених на електронних інтерферометрах.
5. В рамках підходу Вена-Фрьоліха побудовано класифікацію ефективних низькоенергетичних польових моделей крайових станів дробового квантового ефекта Хола дозволених принципами локальності та ка-

лібровочної інваріантності на основі класифікації інваріантів цілочисельних решіток [2]. Дана класифікація застосована до станів з фактором заповнення рівнів Ландау.

6. Використовуючи класифікацію, запропоновану у попередньому пункті, продемонстрована принципова можливість експериментально відрізнити нееквівалентні ефективні польові моделі шляхом вимірювання спектрів зарядів та масштабних розмірностей квазічастинок за допомогою електронного інтерферометра Маха-Цендера у лінійному та нелінійному режимах та порівняння їх зі знайденими в роботі значеннями [2].
7. Важливим результатом розглянутої теорії є те, що вона передбачає АБ осциляції з квазічастинковою періодичністю по магнітному потоку, тобто з періодами, рівними кільком електронним періодам. Ця періодичність дозволяє розділити внески різних збуджень струму. У контексті запропонованої теорії квазічастинкова періодичність пов'язана із вибором тунельного гамільтоніану, який відрізняється від вибору у попередніх роботах, та призводить до некомутативності тунельних гамільтоніанів у різних просторових точках.

ДОДАТКИ

А Кореляційна функція при скінченній температурі та асимптоти тунельного струму

Використовуючи гаусів характер крайових полів ϕ_i , кореляційну функцію для операторів $\psi_{\mathbf{n}} = \exp(i \sum_j p_j(\mathbf{n}) \phi_j)$ можна записати у наступній формі:

$$i \langle \psi_{\mathbf{n}}^\dagger(x, t) \psi_{\mathbf{n}}(0, 0) \rangle = e^{i\varphi_0} K_{\mathbf{n}}(x, t), \quad (\text{A.1})$$

де перший множник - це вклад нульової моди, що дається, наприклад, рівнянням (3.46), а функція $K_{\mathbf{n}}$ - флуктуаційна частина:

$$\ln[K_{\mathbf{n}}(x, t)] = \sum_{ij} p_i(\mathbf{n}) p_j(\mathbf{n}) \langle [\phi_i(x, t) - \phi_i(0, 0)] \phi_j(0, 0) \rangle. \quad (\text{A.2})$$

Вводячи позначення $X_j \equiv x + \sigma_j v_j t$, виражаємо поля у термінах операторів породження та знищення

$$\phi_j(x, t) = i \sum_k \sqrt{\frac{2\pi}{Wk}} [a_j(k) e^{ikX_j} + a_j^\dagger(k) e^{-ikX_j}], \quad (\text{A.3})$$

де W - розмір системи. Підставляючи цей вираз у рівняння (A.2), можна отримати

$$\begin{aligned} \ln[K_{\mathbf{n}}] = \sum_j p_j^2(\mathbf{n}) \int_0^\Lambda \frac{dk}{k} \{ f_j(k) (e^{-ikX_j} - 1) \\ + [1 + f_j(k)] (e^{ikX_j} - 1) \}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

де $f_j(k) = [\exp(\beta v_j k) - 1]^{-1}$ - бозонні числа заповнення, а Λ - ультрафіолетове обрізання.

Найкращій варіант продовжити - це розкласти числа заповнення по Больцманівським факторам $f_j(k) = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\beta v_j m k)$ та проінтегрувати кожен доданок окремо. Це дає

$$\ln[K_{\mathbf{n}}] = - \sum_j p_j^2(\mathbf{n}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln[\Lambda(i\beta v_j m - X_j)]. \quad (\text{A.5})$$

Комбінуючи цей результат з рівнянням (A.1), нарешті приходимо до наступного результату:

$$i \langle \psi_{\mathbf{n}}^{\dagger}(x, t) \psi_{\mathbf{n}}(0, 0) \rangle \propto e^{i\varphi_0} \prod_i \left[\frac{v_i}{\pi T} \sinh \left(\pi \frac{T X_i}{v_i} \right) \right]^{-\delta_i(\mathbf{n})}. \quad (\text{A.6})$$

Масштабні розмірності δ_i обчислено у додатку С.

Далі використовуємо високотемпературну границю (3.48) кореляційної функції (A.6), щоб обчислити високотемпературні асимптоти тунельного струму тунельного струму. Підставляючи кореляційну функцію (3.48) у рівняння (3.44), отримуємо наступне рівняння:

$$I_{\Phi} \propto \mathbf{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\Delta\mu t} T^{2\Delta(\mathbf{n})} e^{-\pi T \sum_{i,\alpha} |t + \sigma_i L_{\alpha}/v_i| \delta_i(\mathbf{n})} \quad (\text{A.7})$$

У границі $T \gg \Delta\mu$ можна апроксимувати $e^{i\Delta\mu t} \simeq 1 + i\Delta\mu t$, де тільки другий доданок має ненульовий вклад:

$$I_{\Phi} \propto \Delta\mu T^{2\Delta(\mathbf{n})} \int_{-\infty}^{+\infty} dt t \cdot e^{-\pi T \sum_{i,\alpha} |t + \sigma_i L_{\alpha}/v_i| \delta_i(\mathbf{n})} \quad (\text{A.8})$$

У високотемпературній границі найбільший вклад до цього інтегралу приходиться від невеликої області навколо однієї з точок $t = -\sigma_i L_{\alpha}/v_i$, де аргумент експоненти набуває найменшого абсолютного значення. Тоді часовий інтеграл можна оцінити як

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt t \cdot e^{-\pi T \sum_{i,\alpha} |t + \sigma_i L_{\alpha}/v_i| \delta_i(\mathbf{n})} \propto T^{-1} e^{-\pi T/T_0(\mathbf{n})}, \quad (\text{A.9})$$

де масштаб енергії $T_0(\mathbf{n})$ дається рівнянням (3.50). Використовуючи цей результат, нарешті отримуємо асимптоту (3.49) осцилюючої складової струму.

В Самоузгодженність теорії при $\nu = 2$

Будь-яка модель квантовохольного краю має задовольняти наступним фізичним вимогам:[32, 33] існування локального електронного оператора, правильні заряд та статистика електронних операторів, скорочення калібровочної аномалії з калібровочною аномалією у об'ємній теорії. Виконання майже всіх цих вимог є очевидним, але важливо переконатися у тому, що у теорії немає внутрішніх суперечностей та несумісності з фізикою об'єму. У представленому далі аналізі можна спростити позначення, опускаючи деякі індекси, при цьому мається на увазі, що підсумовування відбувається по повторюваних індексах.

Перевірка локальності електронного оператора (2.6) є очевидною

$$[\rho_\alpha(x), e^{i\phi_\beta(x')}] = (1/2\pi)[\partial_x\phi_\alpha(x), e^{i\phi_\beta(x')}] = -\delta_{\alpha\beta}\delta(x-x')e^{i\phi_\beta(x')} \quad (\text{B.1})$$

та слідує з комутаційного правила для операторів фази. Статистична фаза θ оператора ψ_α визначається як:

$$\psi_\alpha(x')\psi_\alpha(x) = e^{i\theta}\psi_\alpha(x)\psi_\alpha(x'). \quad (\text{B.2})$$

Використовуючи просте співвідношення

$$e^{i\phi_\alpha(x')}e^{i\phi_\alpha(x)} = e^{-[\phi_\alpha(x'),\phi_\alpha(x)]}e^{i\phi_\alpha(x)}e^{i\phi_\alpha(x')}$$

та комутаційне співвідношення для бозонних фазових операторів, знаходимо, що електронні оператори (2.6) є ферміонами з фазою $\theta = \pi$. І нарешті, повний заряд квантовохольного краю становить

$$q = \sum_\beta \int dx \rho_\beta(x) = (1/2\pi) \sum_\beta \int dx \partial_x\phi_\beta(x)$$

Таким чином, використовуючи співвідношення (B.1) можна знайти

$$[q, \psi_\alpha(x)] = -\psi_\alpha(x), \quad (\text{B.3})$$

що означає, що ферміон (2.6) у запропонованій моделі має електронний заряд $e = 1$.

Єдине нетривіальне питання полягає у тому, чи накладає умова скорочення притоку аномалії які-небудь обмеження на матрицю взаємодії $V_{\alpha\beta}$. Відповідь на це питання - ні. Щоб показати це, використовуємо дію Черна-Саймонса для калібровочного поля a_μ в ефективному низькоенергетичному описі квантовохольної фізики об'єму [32, 33] при $\nu = 2$:

$$S_{\text{CS}} = \int dt \int_{\Omega} d^2x \varepsilon_{\mu\nu\lambda} a_{\alpha\mu} \partial_\nu a_{\alpha\lambda}. \quad (\text{B.4})$$

Тут Ω - це регіон з двомірного електронного газу, де присутня квантовохольна рідина. Після калібровочного перетворення $a_{\alpha\mu} \rightarrow a_{\alpha\mu} + \partial_\mu \lambda_\alpha$ калібровочно аномалія (повний заряд дії) набуває наступної форми:

$$\delta S_{\text{CS}} = \int dt \int_{\partial\Omega} dx \lambda_\alpha (\partial_t a_{\alpha x} - \partial_x a_{\alpha t}) \quad (\text{B.5})$$

У розглядуваній моделі дію для крайових збуджень можна записати

$$S = \int dt \int_{\partial\Omega} dx (\partial_x \phi_\alpha \partial_t \phi_\alpha - V_{\alpha\beta} \partial_x \phi_\alpha \partial_x \phi_\beta)$$

Справа у тому, що для *будь-якої* матриці взаємодії $V_{\alpha\beta}$ взаємодію крайових мод з полем a_μ можна записати у калібровочно інваріантній формі:

$$S(a) = \iint_{\partial\Omega} dx dt (D_x \phi_\alpha D_t \phi_\alpha - V_{\alpha\beta} D_x \phi_\alpha D_x \phi_\beta - \epsilon_{\mu\nu} a_{\alpha\mu} \partial_\nu \phi_\alpha) \quad (\text{B.6})$$

де $D_\mu \phi_\alpha = \partial_\mu \phi_\alpha - a_{\alpha\mu}$. Після калібровочного перетворення у крайовій дії, $\phi_\alpha \rightarrow \phi_\alpha + \lambda_\alpha$, аномалія (B.5) скорочується у повній дії $S_{\text{CS}} + S(a)$.

С Обчислення масштабних розмірностей.

Використовуючи вираз (3.19) для δ_i , можна обчислити повну масштабну розмірність Δ . Як вже було зазначено раніше, у загальному (некіральному) випадку масштабна розмірність є функцією повної матриці q . Таким чином, окрім матриць K вона залежить тільки від додаткової змінної, яку можна зафіксувати вибором гамільтоніану. Нас цікавлять матриці K наступної форми:

$$K = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

У некіральному випадку зв'язок між матрицями K та q $K = q\sigma q^T$. Тому можна ввести наступну параметризацію матриці q :

$$q/\sqrt{a} = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta_1 & \sinh \vartheta_1 \\ \cosh \vartheta_2 & \sinh \vartheta_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

де $\cosh(\vartheta_2 - \vartheta_1) = b/a$. Незважаючи на те, що випадок $a < 0$ потребує іншої параметризації, результат буде таким самим.

Обчислення масштабної розмірності $\Delta(\mathbf{n}) = \mathbf{n}(qq^T)^{-1}\mathbf{n}$ потребує обернення матриці:

$$qq^T = a \begin{pmatrix} \cosh 2\vartheta_1 & \cosh(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ \cosh(\vartheta_1 + \vartheta_2) & \cosh 2\vartheta_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Для зручності вводимо кут $\vartheta_+ = \vartheta_1 + \vartheta_2$, який набуває довільних значень, та кут $\vartheta_- = \vartheta_1 - \vartheta_2$, який зафіксовано умовою

$$\cosh \vartheta_- = b/a. \quad (\text{C.4})$$

Обертаючи матрицю qq^T (див. рівняння (C.3)), знаходимо наступний вираз для масштабних розмірностей:

$$\Delta(\mathbf{n}) = \frac{1}{b^2 - a^2} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_- & B \\ B & A_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

де

$$\begin{aligned} A_{\pm} &= b \cosh \vartheta_+ \pm \sqrt{b^2 - a^2} \sinh \vartheta_+, \\ B &= -a \cosh \vartheta_+. \end{aligned}$$

Легко бачити, що Δ насправді залежить від додаткового вільного параметру - кута ϑ_+ .

Якщо припустити, що сильна далекодіюча кулонівська взаємодія дає головний вклад до гамільтоніану, то можна апроксимувати $q_{11} = q_{12}$ або $\vartheta_2 = -\vartheta_1$. Ця умова призводить до $\cosh \vartheta_+ = 1$ та $\sinh \vartheta_+ = 0$, так що вираз для масштабних розмірностей спрощується:

$$\Delta(\mathbf{n}) = \frac{1}{b^2 - a^2} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b & -a \\ -a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Обчислюючи добуток приходимо до кінцевого результату (3.27).

Далі обчислюємо експоненти δ_1 та δ_2 . У киральному вирадку, який розглядається як приклад, $K = qq^T$, потрібна наступна параметризація

$$q/\sqrt{a} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_1 & \sin \vartheta_1 \\ \cos \vartheta_2 & \sin \vartheta_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

за умови, що $\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) = b/a$. Потім, використовуючи означення (3.19), знаходимо

$$\delta_1(\mathbf{n}) = \frac{a}{a^2 - b^2} (n_1 \cos \vartheta_1 - n_2 \cos \vartheta_2)^2, \quad (\text{C.8})$$

$$\delta_2(\mathbf{n}) = \frac{a}{a^2 - b^2} (n_1 \sin \vartheta_1 - n_2 \sin \vartheta_2)^2. \quad (\text{C.9})$$

Таким чином, легко бачити, що вимірюючи експоненти δ_1 та δ_2 впринципі можна визначити параметр ϑ_+ . Однак варто знову наголосити, що для сильної кулонівської взаємодії $\vartheta_+ = 0$. У цьому вирадку вирази для експонент спрощуються. А саме, беручи до уваги, що $a + b = 2/\nu$, можна знайти, що

$$\delta_1(\mathbf{n}) = \frac{(n_1 - n_2)^2}{2(a - b)}, \quad \delta_2(\mathbf{n}) = \frac{\nu}{4}(n_1 + n_2)^2. \quad (\text{C.10})$$

У некіральному вирадку аналогічні розрахунки приводять до схожих виразів

$$\delta_1(\mathbf{n}) = \frac{(n_1 - n_2)^2}{2(b - a)}, \quad \delta_2(\mathbf{n}) = \frac{\nu}{4}(n_1 + n_2)^2. \quad (\text{C.11})$$

Д Тунельний гамільтоніан

У цьому додатку обговорюються два важливих питання, що стосуються форми тунельних гамільтоніанів. Перше питання полягає у тому, чи потрібно вводити Кляйнівські фактори [56] для того, щоб переконатися у комутативності тунельних гамільтоніанів у просторово розділених точках. Отримано, що правильний вибір тунельного гамільтоніану як правило приводить до АБ-осциляцій у квазічастинковому струмі. Друге питання стосується значення зсуву АБ фази, яке треба включити до тунельних амплітуд.

Некомутативність та Кляйнівські фактори. Для простоти розглянемо випадок, коли фактор заповнення $\nu = 1/m$, де присутній тільки один канал на кожному краю МЦ інтерферометра. Тунелювання лафліновських квазічастинок описується гамільтоніаном $\mathcal{H}_L + \mathcal{H}_R$, де

$$\mathcal{H}_\ell = t_\ell \psi_U^\dagger(x_\ell) \psi_D(x_\ell) + t_\ell^* \psi_D^\dagger(x_\ell) \psi_U(x_\ell), \quad \ell = L, R, \quad (\text{D.1})$$

є вклади у двох просторово позділених точках x_L and x_R . Цікаво порахувати комутатор \mathcal{H}_L та \mathcal{H}_R . Для цього спочатку потрібно знайти комутаційні співвідношення для квазічастинкових операторів у системі з двома краями.

Нагадаємо, що тільки локальні збудження можуть тунелювати у КТК. Одна з умов локальності має вигляд:

$$[\partial_x \phi_U, \psi_D] = 0, \quad [\partial_x \phi_D, \psi_U] = 0, \quad (\text{D.2})$$

що означає, що квазічастинка на одному краю не створює густину заряду на іншому краю. З цієї умови слідує, що $[\psi_U, \psi_D] = 0$. З іншого боку, для квазічастинкових операторів на тому самому краю, у випадку відкритих граничних умов маємо

$$\psi_\alpha(x)\psi_\alpha(x') = e^{(i\pi/m)\text{sign}(x'-x)}\psi_\alpha(x')\psi_\alpha(x), \quad (\text{D.3})$$

де $\alpha = U, D$, а координата x починається на омічному контакті та збільшується у напрямку кіральності відповідного каналу.

Знак статистичної фази у цьому виразі визначається знаком правої частини рівняння (1.12) та залежить від кіральності каналу. Припускаючи, що $x_R > x_L$ (див. рис. 2.2), приходимо до наступного результату:

$$\psi_U^\dagger(x_L)\psi_D(x_L)\psi_U^\dagger(x_R)\psi_D(x_R) = e^{2\pi i/m}\psi_U^\dagger(x_R)\psi_D(x_R)\psi_U^\dagger(x_L)\psi_D(x_L). \quad (\text{D.4})$$

Тобто приходимо до висновку, що для тулельного гамільтоніану, визначеного у рівнянні (D.1), $[\mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R] \neq 0$. Зауважимо, що це не так у випадку інтерферометру типу Фабрі-Перо, у якому порядок точок тунелювання по відношенню до кіральності є різним на різних плечах. Тому вклади до статистичної фази від внутрішнього та зовнішнього крайових каналів скорочуються, і гамільтоніани \mathcal{H}_L та \mathcal{H}_R комутують.

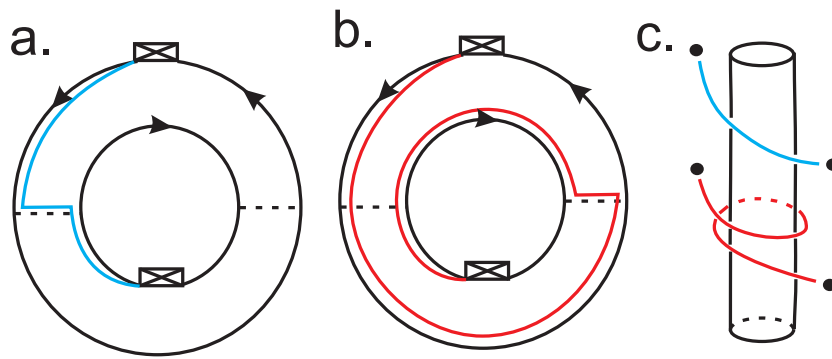


Рис. 3.4. Схематично зображено МЦ інтерферометр та Вільсонівські лінії. Тунельні гамільтоніани можна представити як інтеграли вздовж ліній між омічними контактами, див. рівняння (D.5). *Зображення А*: Вільсонівська лінія відповідає тунелюванню у лівому КТК, що описується гамільтоніаном \mathcal{H}_L . *Зображення В*: Вільсонівська лінія для гамільтоніану \mathcal{H}_R . *Зображення С*: розгорнуте у часі представлення добутку $\mathcal{H}_R\mathcal{H}_L$. Легко бачити, що дві лінії не можна поміняти місцями, що означає, що два гамільтоніани \mathcal{H}_L та \mathcal{H}_R не комутують.

Існує корисна геометрична ілюстрація описаних вище комутаційних співвідношень. Добре відомо, що в ефективній теорії Черна-Саймонса квазічастинковий оператор можна представити як Вільсонівську лінію. [69] Згідно з крайовими умовами для збуджень у МЦ інтерферометрі, можна вибрати омічні контакти як кінцеві точки Вільсонівських ліній (див. обговорення у додатку Е). Таким чином тунельні гамільтоніани даються Вільсонівськими лініями, що йдуть від одного омічного контакту до іншого:

$$\mathcal{H}_\ell = t_\ell \exp \left[\frac{i}{\sqrt{m}} \int_{\gamma_\ell} dr^\mu b_\mu \right] + t_\ell^* \exp \left[\frac{i}{\sqrt{m}} \int_{-\gamma_\ell} dr^\mu b_\mu \right], \quad (\text{D.5})$$

де b_μ - поле Черна-Саймонса, а γ_ℓ - лінія, що йде від верхнього омічного контакту до нижнього через ℓ -у КТК, див. рис. 3.4а та 3.4б.⁸ Добуток цих

⁸Вираз (D.5) означає, що, строго кажучи, амплітуди t_ℓ у тунельному гамільтоніані (D.1) містять Вільсонівські лінії, що пов'язують тунельні точки на протилежних краях у лівому та правому КТК. Їх треба брати до уваги при обчисленні повного зсуву АБ фази у тунельних амплітудах (3.38).

операторів $\mathcal{H}_R\mathcal{H}_L$ представляється конфігурацією вільсонівських ліній, схематично зображених на рис. 3.4с. З іншого боку, перестановку $\mathcal{H}_L\mathcal{H}_R$ цих операторів можна представити лініями, що впорядковані у часі у зворотньому порядку. Згідно з теорією Черна-Саймонса відповідні зачеплення знову дають результат (D.4). Цікаво, що для інтерферометру Фабрі-Перо відповідні зачеплення є тривіальними (див. рис. 3.5); тому тунельні гамільтоніани комутують.

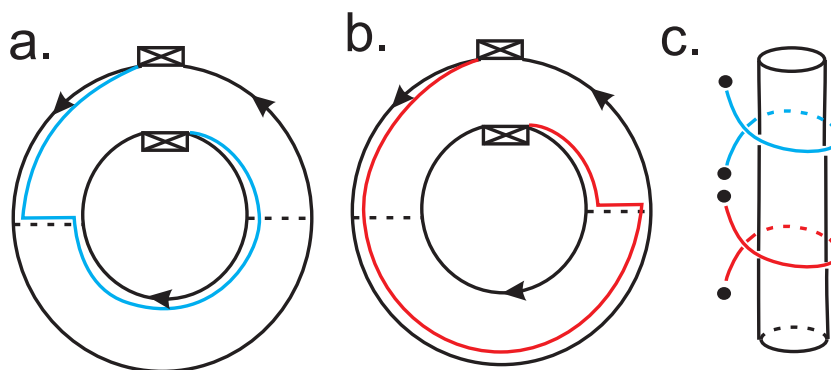


Рис. 3.5. Схематично зображено ФП інтерферометр та Вільсонівські лінії. *Зображення А*: Вільсонівська лінія, що зображує гамільтоніан \mathcal{H}_L відрізняється від лінії для МЦ інтерферометру. *Зображення В*: Вільсонівська лінія для гамільтоніану \mathcal{H}_R . *Зображення С*: розгорнуте у часі представлення двох Вільсонівських ліній. Можна бачити, що лінії топологічно ідентичні, тому гамільтоніани \mathcal{H}_L та \mathcal{H}_R комутують.

У літературі некомутативність тунельних гамільтоніанів часто називають нефізичною. Тому було запропоновано використовувати Кляйнівські фактори для того, щоб забезпечити їх комутативність. Для того, щоб прояснити природу Кляйнівських факторів, розглянемо спочатку крайові умови, що відповідають замкненій геометрії. У цьому випадку квазічастинкові оператори $\psi_\alpha = e^{(i/\sqrt{m})\phi_\alpha(x)}$ є m -значні оператори. Це пов'язано із тим, що поле $\phi_\alpha(x)$ є по суті інтегралом густини ρ_α по замкненому контуру, що

може мати різні числа намотки, $\kappa = 0, 1, \dots, m - 1$. Отже можна записати

$$\phi_\alpha(x) = \phi_\alpha + 2\pi(x + \kappa W_\alpha)\pi_\alpha + osc., \quad \alpha = U, D, \quad (D.6)$$

де ϕ_α та π_α - нульові моди, а W_α - довжина границі α .

Необхідно наголосити, що тільки *різниця* номерів гілок є фізично спостережуваною. Насправді, дві нульові моди π_α , де $\alpha = U, D$, квантуються як $W_\alpha\pi_\alpha = N_\alpha/\sqrt{m}$. Однак, будь-яка замкнута електронна система містить ціле число електронів N , що накладає наступне обмеження на оператор повного заряду: $(W_U\pi_U + W_D\pi_D)/\sqrt{m} = N$. Це обмеження на власні значення операторів π_α , яке має задовольняти будь-який фізично дозволений стан, призводить до того, що

$$F \equiv e^{(2\pi i/\sqrt{m})W_U\pi_U} = e^{-(2\pi i/\sqrt{m})W_D\pi_D}. \quad (D.7)$$

Число намотки κ тут використовується як додатковий індекс, що позначає квазічастинкову гілку $\psi_{\alpha,\kappa} = \psi_\alpha F^\kappa$. Тут ψ_α відповідає виразу, коли $\kappa = 0$, тобто для гілки, що починається від одного з омічних контактів. На мові Вільсонівських ліній кожна гілка дається лінією з відповідним числом намотки.

Якщо є кілька гілок, то потрібно враховувати усі можливі процеси у тунельному гамільтоніані, враховуючи ті, що змінюють номер квазічастинкової гілки. Тому у загальному виразі тунельний гамільтоніан можна записати як

$$\mathcal{H}_\ell = \sum_{\kappa'} t_{\ell,\kappa'} \psi_{D,\kappa}^\dagger(x_\ell) \psi_{U,\kappa+\kappa'}(x_\ell) + \text{h.c.} \quad (D.8)$$

Комутаційні співвідношення для квазічастинкових операторів (D.3) просто узагальнити:

$$\psi_\kappa(x) \psi_{\kappa'}(x') = e^{(2i\pi/m)(\kappa-\kappa')} e^{(i\pi/m)\text{sign}(x'-x)} \psi_{\kappa'}(x') \psi_\kappa(x), \quad (D.9)$$

і приходимо до важливого висновку, що у загальному випадку гамільтоніани (D.8), взяті у різних просторових точках, не комутують.

Для того, щоб повернути обговорення у русло наших попередніх розрахунків, запишемо гамільтоніан (D.8) у трохи іншій формі:

$$\mathcal{H}_\ell = \sum_{\kappa} t_{\ell,\kappa} F^\kappa \psi_D^\dagger(x_\ell) \psi_U(x_\ell) + \text{h.c.}, \quad (\text{D.10})$$

де оператор F , представлений раніше, очевидно грає роль Кляйнівського фактору. Цікаво, що у випадку, коли тільки амплітуди $t_{L,1}$ та $t_{R,0}$ є ненульовими, тунельні гамільтоніани (D.10) все-таки комутують у різних просторових точках. Більше того, у термінах вільсонівських ліній добуток тунельних гамільтоніанів та Кляйнівських факторів F еквівалентний додаванню петлі до відповідної Вільсонівської лінії, причому вона має обходити навколо усього інтерферометру. Легко бачити, що додавання такої петлі до блакитної лінії на рис. 3.4 робить її топологічно еквівалентною до червоної лінії. Тому гамільтоніани після такого добутку справді комутують.

Тут варто зазначити, що Кляйнівські фактори, представлені раніше у літературі, зазвичай мають комутувати з квазічастинковими операторами ψ_α (див. наприклад, роботи [56] та [58]). Іншими словами, вони діють на деякий додатковий Гільбертовий простір. Однак така ситуація не є задовільною, оскільки вона суперечить відомій точці зору на квантовий ефект Холу про те, що існує щілина для збуджень в об'ємі, і єдиними доступними ступенями вільності крайові збудження $\phi_\alpha(x)$, включаючи нульові моди ϕ_α та π_α . Тому Кляйнівські фактори слід виражати у термінах тих самих мод, як оператори ψ_α (див. наприклад, роботу [70]). З іншого боку, вибір специфічних гамільтоніанів, що комутують, не виглядає фізичним та потребує додаткової перевірки. Більше того, важливо, що Кляйнівські фактори можна ввести тільки у системі із замкненою геометрією, де можуть існувати багатозначні збудження. Сильна взаємодія з омічними контактами, як у випадку МЦ інтерферометру, який власне і розглядається, потребує

відкритих граничних умов. Тому запропонована форма (D.1) тунельного гамільтоніану є правильною і використовується у параграфі 3.4. для розрахунків.

Наступне зауваження стосується твердження, яке з'являлося у літературі [36, 37, 71, 72, 73], про те, що неможливо спостерігати когерентну частину квазічастинкового струму. Стверджується, що у системі є кілька вироджень, що призводить до сильного дефазингу через два механізми. У запропонованому підході перший механізм [36] можна проінтерпретувати як такий, що базується на факті існування набору квазівироджених станів, що відповідає зсуву обох країв.[44] Їх можна параметризувати наступним чином:

$$\frac{W_U \pi_U}{\sqrt{m}} = N + \frac{l}{m}, \quad \frac{W_D \pi_D}{\sqrt{m}} = N - \frac{l}{m}, \quad (\text{D.11})$$

де $l = 0, \dots, m-1$. Позначимо ці стани $|l\rangle$ та запишемо $|l+1\rangle = e^{i(\phi_U + \phi_D)/\sqrt{m}}|l\rangle$. Матрицю густини для інтерферометру з КХ краями у стані рівноваги можна записати так:

$$\rho_0 = \sum_{l=0}^{m-1} r_l |l\rangle \langle l|. \quad (\text{D.12})$$

Когерентна частина струму, що генерується тунельним гамільтоніаном (D.8) та усереднена с матрицею густини (D.12)

$$I_{LR} \propto \sum_l \sum_{\kappa, \kappa'} r_l t_{L, \kappa} t_{R, \kappa'}^* \langle l | F^{\kappa - \kappa'} | l \rangle. \quad (\text{D.13})$$

У цій роботі використовується тунельний гамільтоніан (D.1) з $\kappa = \kappa'$. Тому сумування по квантовому числу l є тривіальним $\sum_l r_l = 1$ і не призводить ні до якого фізичного ефекту. На відміну від цього, використання додаткових Кляйнівських факторів [36] означає, що $\kappa - \kappa' = 1$. Так у рівнянні (D.13) вклад від кожного зміщеного стану $|l\rangle$ набуває фазового множника $\langle l | F | l \rangle = e^{2\pi i l / m}$. Лоу та інші [36] далі припускають рівне заселення

$r_l = 1/m$, так що після підсумовування по l когерентна частина квазічастинкового струму зникає.

Серед наведених вище аргументів у додаток до особливого вибору $\kappa - \kappa' = 1$, що описувався раніше, припущення про виродження станів $|l\rangle$ або, що є еквівалентним, високотемпературна границя $r_l = 1/m$, є критично важливим. Однак зазначимо, що зсув (D.11) призводить до зарядки країв, і відповідна енергія не мала. Експерименти [8]-[15] виконувалися у режимі, коли температура та напруга менші за цю енергію заряджання, і в принципі немає ніяких труднощів у досягненні такого режиму у випадку дробового КЕХ.

Другий можливий механізм дефазингу описано у роботі [71]. Додатковий зсув фази Бері між двома шляхами тунелювання може з'явитися, якщо деяке число l локалізованих квазічастинок присутнє в об'ємі. У цьому випадку когерентний вклад до тунельного струму набуває фазового множника $e^{2\pi il/m}$, що є схожим на той, що зустрівся у першому механізмі дефазингу, який обговорювався вище. Якщо число квазічастинок l флюктує, тоді когерентна частина квазічастинкового струму може зникнути

$$I_{LR} \propto \sum_l e^{2\pi il/m} \rightarrow 0$$

у результаті усереднення по цих флюктуаціях. Варто підкреслити, що цього механізму можна уникнути знижуючи температуру так, що активація спонтанних стрибків фази є повільною, або використовуючи зразок високої якості. Наприклад, у випадку цілого КЕХ такі телеграфні процеси дійсно спостерігалися в експериментах [14, 15] та були зменшені при зміні параметрів системи.

Щоб продовжити, нагадаємо, що МЦ інтерферометр, як система, що сильно взаємодіє з омичними контактами, потребує відкритих граничних умов. Це призводить до некомутативності тунельних гамільтоніанів, що беруться у різних точках. Некомутативність просторово розділених опе-

раторів природньо впливає з топологічного характеру ефективної теорії, згідно з якою квазічастинки не є повністю локальними об'єктами, бо вони мають “хвости” у формі Вільсонівських ліній. Більше того, нелокальність ефективної теорії не суперечить локальному характеру мікроскопічної теорії, що покладена в основу та не обов'язково проявляє себе у низькоенергетичній границі. Кляйнівські фактори, запропоновані у попередніх роботах для того, щоб забезпечити комутативність тунельних гамільтоніанів, потребують закритих крайових умов, і тому їх не можна застосовувати до МЦ інтерферометрів. Більше того, показано, що навіть тоді, коли Кляйнівські фактори можна використовувати, у загальному випадку вони не можуть забезпечити комутативність тунельних гамільтоніанів, а специфічних вибір, запропонований у роботах [56] та [36] потребує подальшої перевірки. І нарешті необхідно зауважити, що сильне подавлення фазової когерентності, запропоноване у роботах [36] та [71] не є фундаментальною властивістю дробового КЕХ, і його можна уникнути у майбутніх експериментах при достатньо низьких температурах.

Періодичність по магнітному потоку та по напрузі модулюючого затвору. Ціль цього обговорення - прояснити походження квазічастинкової періодичності у фізичних спостережуваних. Спочатку проаналізуємо залежність енергій власних станів нульових мод $|l\rangle$ (див. додаток D) КХ рідини при $\nu = 1/m$ від сингулярного магнітного потоку Φ , що пронизує Корбіно диск. Ця задача розглядалася Таулесом та Гефеном у [74]. Слідуючи їх аргументам, зауважимо, що головний вклад до енергії іде від кулонівської взаємодії. Тому при зміні потоку Φ , енергії власних станів нульових мод КХ рідини, ізольованої у Корбіно диску, слідує гілки з фіксованим набором електронів. Однак, Корбіно диск слабо зв'язаний з металічними резервуарами, число електронів у КХ рідини не зберігається. Тому якщо енергія основного стану спочатку росте з потоком Φ , потім вона переключу-

часться на іншу гілку, змінюючи число електронів на 1, та починає спадати з потоком. Ця поведінка (позначено червоною лінією на рис. 3.6) повторюється періодично з періодом, що дорівнює $m\Phi_0$.

Електронна періодичність поновлюється, якщо взяти до уваги можливість тунелювання квазічастинок між внутрішнім та зовнішнім краями Корбіно диску. Таке збурення перемішує стани $|l\rangle$ з $l = 0, \dots, m - 1$ та відкриває щілину у вироджених точках (див. рис. 3.6). У результаті при адіабатній зміні магнітного потоку КХ рідина буде слідувати найнижчому енергетичному рівню з електронним періодом Φ_0 .

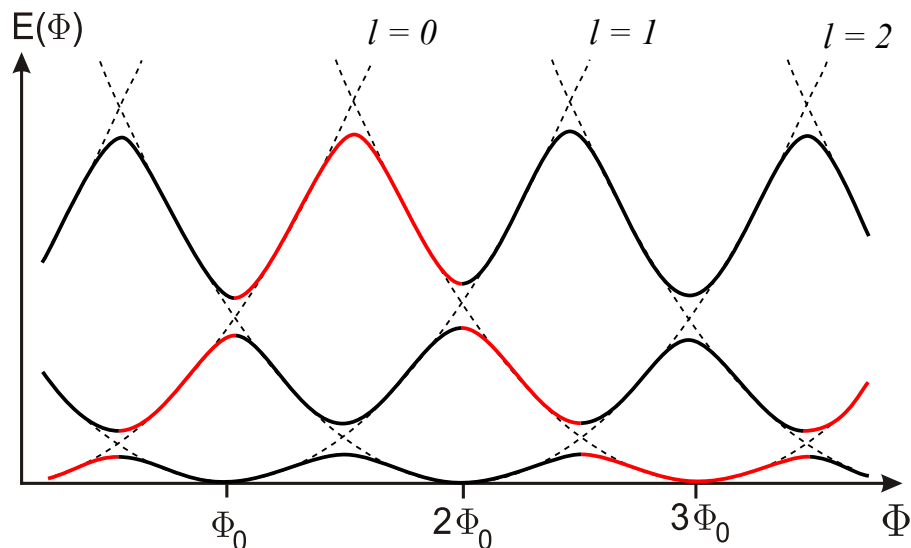


Рис. 3.6. Схематично зображено енергетичний спектр квантовохольної рідини при $\nu = 1/3$ у Корбіно диску. Пунктирні лінії зображають кулонівську енергію зарядки ізолюваної КХ рідини як функцію магнітного потоку Φ , що пронизує Корбіно диск. Різні гілки відповідають різним числам квазічастинок на краю. За наявності тунелювання квазічастинок між краями та для слабкого зв'язку з металічними резервуарами, енергетична щілина відкривається у точках виродження, де різні гілки перетинаються. Якщо потік змінюється адіабатно, КХ рідина слідує основному стану так, що енергія є періодичною функцією потоку з електронним періодом Φ_0 . Якщо зміна потоку відносно швидка (квазічастинкове тунелювання слабке), КХ

рідина слідує “електронній” гілці (зображено сірим) вздовж ліній $l=0$ та $l=3$ так, що число електронів на краю змінюється на одиницю. У цьому випадку енергія осцилює з квазічастинковим періодом $3\Phi_0$.

Далеко від рівноваги, коли різниця потенціалів прикладена до металічних резервуарів, і зарядовий струм тече через МЦ інтерферометр, фізична ситуація загалом більш складна. Однак, все ж таки можна покластися на ефективну теорію, беручи до уваги описану вище залежність енергії нульових мод від магнітного потоку та записуючи гамільтоніан як

$$\mathcal{H} = \sum_{s=U,D} \frac{v_s}{4\pi} \int dx \left(\partial_x \phi_s + \frac{2\pi}{W_s \sqrt{m}} \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2. \quad (\text{D.14})$$

Підкреслимо, що додавання сингулярного потоку не впливає на АБ фазу. Це слідує з того, що є два вклади до інтегралу $\delta\varphi_{AB} = (1/\sqrt{m}) \int_\gamma dr^\mu \delta b_\mu$ по МЦ контуру γ . Один вклад береться від зміни у полі b_μ через зміну зовнішнього поля A_μ , що слідує з співвідношення (Е.7). Другий вклад з’являється через зміну повного заряду у МЦ контурі, що відштовхується від сингулярного потоку, відповідно до співвідношення (Е.1). Ці два ефекти скорочують один одного точно, що можна розглядити результат екранування зовнішнього поля A_μ КХ системою.

Для того, щоб визначити струм через інтерферометр, усереднення у формулі лінійного відгуку (3.44) треба робити по рівноважній матриці густини $\rho_0 = e^{-\beta\mathcal{H}}/Z_0$. У термодинамічній границі поля $\partial_x \phi_s$ можна зсунути при усередненні для того, щоб позбавитися від залежності від магнітного потоку з гамільтоніану (D.14). Це означає, що єдиним фізичним наслідком додавання сингулярного магнітного потоку у Корбіно диск кінцевого розміру є ефект кулонівської блокади, що має електронну періодичність. Однак, такого ефекту немає у МЦ інтерферометрі через сильну взаємодію з омічними контактами.

Модуляція АБ фази шляхом додавання сингулярного потоку є ідеалізацією. У типовому експерименті магнітне поле можна змінити тільки однорідно. У цьому випадку фаза, що її набуває квазічастинка, більше не є топологічним числом і може складним чином залежати, наприклад, від процесів в омичних контактах. Тому виявляється більш доречним досліджувати періодичність АБ осциляцій змінюючи напругу модулюючого затвору, а не магнітне поле.

Напруга затвору, прикладена на краю КХ рідини, призводить до зміщення $y(x)$ краю у точці x . Це зміщення можна описати як накопичення фонові одновимірної густини заряду, $\delta\rho_i(x) = \sigma_i Q_i^2 y(x)/2\pi l_B^2$ у крайових каналах. У присутності цих густин поля ϕ_i переозначаються як $\partial\phi_i \rightarrow \partial\phi_i + \sigma_i Q_i y(x)/l_B^2$. Як наслідок, кореляційна функція $\langle \psi^\dagger(x, t)\psi(0, 0) \rangle$ збудження $\psi = e^{ip_i\phi_i}$ набуває фазового зсуву $\delta\varphi_0 = \sigma_i p_i Q_i \int_0^x dx' y(x')/l_B^2$. Цей зсув фази пропорційний заряду квазічастинок, $Q_{em}(\mathbf{n}) = \sum_i \sigma_i p_i Q_i$ та площі деформації $S = \int_0^x dx' y(x')$. Тому зсув фази можна інтерпретувати як АБ фазу:

$$\delta\varphi_0(\mathbf{n}) = Q_{em}(\mathbf{n}) \cdot S/l_B^2 = 2\pi Q_{em}(\mathbf{n}) \frac{\delta\Phi}{\Phi_0}, \quad (\text{D.15})$$

де $\delta\Phi$ - зміна магнітного потоку крізь замкнений шлях у МЦ інтерферометрі, що з'являється через деформацію. Для спрощення позначень включимо цю додаткову фазу (D.15) у тунельні амплітуди у рівнянні (3.38).

На завершення скажемо, що у запропонованій моделі періодичність АБ осциляцій у середньому струмі визначається зарядами квазічастинок, що тунелюють. Для того щоб перевірити це твердження треба порівняти періодичність у режимі слабкого тунелювання, коли можливе тільки тунелювання електронів, з періодичністю у режимі слабкого відбиття назад, коли тунелювання квазічастинок більш релевантне.

Е Теорія Черна-Саймонса та голографічний принцип

У цьому додатку ілюструється голографічний принцип, конструюючи об'ємні ефективні моделі та показуючи, що вони визначають мінімальні крайові моделі, що обговорювалися у параграфі 3.1. Можна припустити, що крайові струми виникають як деформації нестисливих рідин. Ці рідини описуються набором об'ємних струмів $j_{i\mu}$, що незалежно зберігаються $\partial_\mu j_i^\mu = 0$. Розв'яжемо рівняння неперервності вводячи потенціали $b_{i\mu}$,

$$j_{i\mu} = \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\nu b_i^\lambda, \quad (\text{E.1})$$

де мається на увазі ейнштейнівське правило сумування. Струми інваріантні при калібровочному перетворенні $b_{i\mu} \rightarrow b_{i\mu} + \partial_\mu f_i$. Підраховуючи розмірності, легко бачити, що калібровочно інваріантна дія для цих потенціалів

$$S_{\text{bulk}}[b_i] = (1/4\pi) \sum_i \sigma_i \int_D d^3r \epsilon_{\mu\nu\lambda} b_i^\mu \partial^\nu b_i^\lambda \quad (\text{E.2})$$

має нульову розмірність, тоді як всі інші можливі доданки мають *менші* розмірності, тобто є *нерелевантними* при низьких енергіях. Наприклад, дія максвелівського типу має розмірність -1 .

Повний електричний струм можна записати як лінійну комбінацію нестисливих струмів $j_{\text{em}}^\mu = \sum_i Q_i j_i^\mu$. Так як доданок у дії, що описує взаємодію з зовнішнім електромагнітним полем, є

$$S_{\text{int}}[b_i, A] = \int_D d^3r A_\mu j_{\text{em}}^\mu = (1/2\pi) \sum_i \int_D d^3r A_\mu Q_i \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu b_{i\lambda}, \quad (\text{E.3})$$

відінтегровуючи поля $b_{i\mu}$, приходимо до ефективної дії для електромагнітного поля у формі Черна-Саймонса:

$$S_{\text{eff}}[A] = (1/4\pi) \sum_i \sigma_i Q_i^2 \int_D d^3r \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda. \quad (\text{E.4})$$

Порівнюючи цей результат з рівнянням (3.2), можна прийти до висновку, що обмеження на константи зв'язку Q_i є таким самим як і у крайовій теорії, а саме $\sum_i \sigma_i Q_i^2 = \nu$.

Дія (E.2) з'являється у контексті топологічної теорії, де збудження даються вільсонівськими лініями. [69] Наприклад, загальне локальне збудження у точці r можна записати як

$$\psi_q(r) = \exp\left(i \sum_j q_j \int_{r_0}^r dr^\mu b_{j\mu}\right). \quad (\text{E.5})$$

Статистична фаза двох збуджень типу (E.5) дається зачепленням відповідних Вільсонівських ліній. [69] Розглядаючи два збудження, позначених q_{1j} та q_{2j} , після нескладного обчислення зачеплення приходимо до наступного виразу для статистичної фази: $\theta_{12} = \pi \sum_i \sigma_j q_{1j} q_{2j}$. Важливо, що цей вираз співпадає з виразом для крайових збуджень. Більше того, якщо визначити оператор заряду як інтеграл по просторовоподібній площині $Q_{\text{em}} = (Q_i/2\pi) \int d^2r \epsilon_{\nu\lambda} \partial^\nu b_i^\lambda$, тоді заряд збудження (E.5) дорівнює $Q_{\text{em}} = \sum_i \sigma_i Q_i q_i$, тобто приймає таку саму форму як і у крайовій теорії.

Співпадіння об'ємних та крайових виразів для зарядів та статистичних фаз збуджень ілюструє голографічний принцип у КХ системі. Насправді, легко бачити, що уся класифікація ефективних моделей на краю використовує також об'єм. Більше того, Фрьоліх та Педріні [75] запропонували точне відображення між крайовою та об'ємними моделями, припускаючи, що крайові збудження виникають від нестисливих деформацій КХ рідин. Нижче підсумовуються головні кроки конструкції.

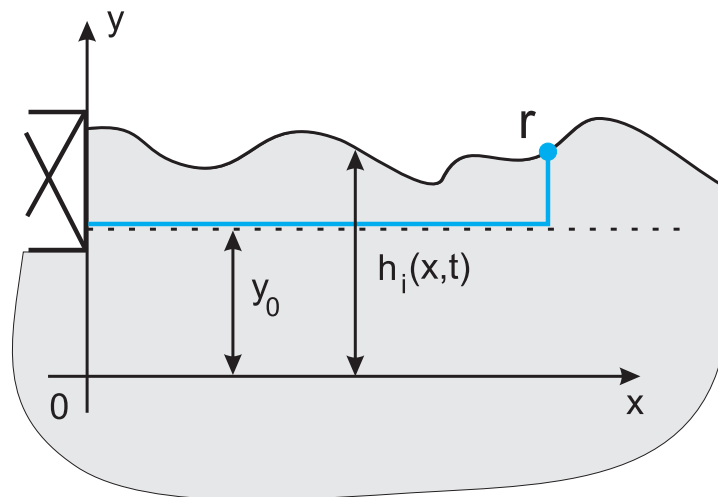


Рис. 3.7. Конструкція крайових збуджень як нестисливих деформацій КХ рідини. Вільсонівська лінія починається від омічного контакту (зображено білим) та іде до фізичного краю $y = h_i(x, t)$ i -тої КХ рідини (суцільна лінія) вздовж допоміжної границі у $y = y_0$ (пунктирна лінія) та закінчується у точці r .

Головною ідеєю є представити вставку оператора $\exp(i \sum_j q_j \phi_j)$ на краю як вставку Вільсонівської лінії (Е.5) об'ємної теорії, розміщуючи кінцеву точку r на границі, а r_0 в омічному контакті. Для того щоб реалізувати цю ідею виберемо певну Вільсонівську лінію, показану на рис. 3.7. Параметризуючи нестисливі деформації КХ рідин набором функцій $y = h_i(x, t)$, можна ввести крайові поля:

$$\phi_i(x, t) = \int_{y_0}^{h_i(x, t)} dy' b_{iy}(x, y', t) + \int_{x_0}^x dx' b_{ix}(x', y_0, t), \quad (\text{E.6})$$

де $y = y_0$ допоміжна границя, а x_0 - координата омічного контакту.

Відінтегруючи об'ємі поля $b_{i\mu}$, знаходимо, що ⁹

$$b_{i\mu} = \sigma_i Q_i A_\mu. \quad (\text{E.7})$$

⁹Топологічні дефекти (вихори) поля b , якщо присутні в об'ємі, змінюють співвідношення між полями $b_{\mu i}$ та A_μ . Однак ці дефекти мають відносно велику енергію (див. також додаток D). Тому вони не розглядаються у даному підході.

Беручи похідну від рівняння (Е.6) по x , можна отримати $\sigma_i \partial_x \phi_i = Q_i A_y(x, h_i, t) \partial_x h_i + Q_i \int_{y_0}^{h_i} dy' \partial_x A_y(x, y', t) + Q_i A_x(x, y_0, t)$. У низькоенергетичній границі можна знехтувати доданком, пропорційним $\partial_x h_i$. Потім, беручи до уваги те, що магнітне поле постійне $\partial_x A_y - \partial_y A_x = 1/l_B^2$, пов'язуємо похідні $\partial_x \phi_i$ з крайовими густинами ¹⁰ $\rho_i(x, t) = \sigma_i Q_i^2 [h_i(x, t) - y_0] / 2\pi l_B^2$:

$$\rho_i(x, t) = \frac{1}{2\pi} [Q_i \partial_x \phi_i + \sigma_i Q_i^2 A_x(x, h_i, t)]. \quad (\text{E.8})$$

Цей вираз для густин заряду крайових каналів співпадає з виразом, виведеним з дії (3.1), якщо далі припустити, що у низькоенергетичній границі h_i мале, та замінити $A_x(x, h_i, t) \rightarrow A_x(x, y_0, t)$. Іншими словами, припускається лінійна взаємодія з електромагнітним полем.

Рівняння неперервності $\dot{\rho}_i + \partial_x \int_{y_0}^{h_i} j_{ix} = j_{iy}$ після підстановки у рівняння (Е.1) набуває форми:

$$\begin{aligned} \frac{Q_i \dot{h}_i}{2\pi l^2} + \partial_x \int_{y_0}^{h_i} dy' [\partial_{y'} b_{it}(x, y', t) - \partial_t b_{iy}(x, y', t)] \\ = \partial_x b_{it}(x, y_0, t) - \partial_t b_{ix}(x, y_0, t). \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Лінійаризуючи це рівняння по h_i , можна знайти рівняння руху для крайових полів $\sigma_i \partial_t D_x \phi_i = -Q_i \partial_x a_t$, де a_μ - значення електромагнітного векторного потенціалу на краю, а $D_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i + \sigma_i Q_i a_\mu$ - коваріантні похідні. Ці рівняння руху можна вивести з дії

$$S \propto \sum_i \int dt dx (\sigma_i D_t \phi_i D_x \phi_i + Q_i \epsilon_{\mu\nu} a^\mu \partial^\nu \phi_i), \quad (\text{E.10})$$

що узгоджується з дією (3.1) у випадку $v_i = 0$. Швидкості крайових мод у приведеному вище аналізі є нульовими тому, що не бралися до уваги обмежуючий потенціал та ефекти взаємодії на краю.

¹⁰Важливо що на краю $\partial_\mu j_i^\mu \neq 0$, тому густина заряду не визначається полем b . Іншими словами, крайові деформації не спричиняють топологічної перебудови в об'ємі і призводять тільки до накопичення заряду.

Важливо зауважити, що описана вище відповідність об'єм - край не завжди виконується. Наприклад, на краю можуть бути присутні стисливі смуги. [22] У цьому випадку крайова теорія буде містити більше полів ніж об'ємна теорія. Тимне менш, об'ємні збудження мають бути завжди присутні у крайовому спектрі. У цьому додатку розглядаються тільки мінімальні моделі краю з наступних причин. Перш за все, у випадку, коли число кіральних полів на краю велике, масштабні розмірності додаткових електронів, пов'язаних з цими полями, зазвичай великі, [45] тобто ці збудження не спостережувані у низькотемпературній границі. Подруге, некіральні моделі з додатковими полями зазвичай є нестійкими по відношенню до безпорядку. [35, 49] Однак, можлива релевантність моделей з великим числом каналів потребує окремого детального аналізу.

Ф Математичні аспекти теорії КХ ґраток

У цьому додатку коротко описується конструкція КХ ґраток запропонована у роботах [45, 75]. Ця конструкція - це математичне переформулювання фізичних вимог до ефективної теорії КХ системи, що обговорювалася у параграфах 1.1. та 3.1.. Воно пропонує метод, що ґрунтується на використанні інваріантів ґраток, для того, щоб прокласифікувати фізично дозвалені низькоенергетичні ефективні моделі КХ крайових станів. Головні фізичні наслідки ґраткової констркції включають визначення мінімального заряду квазічастинок, мінімального числа крайових каналів для данного фактору заповнення і т.д. Тут коротко нагадаємо ґраткову констркцію та наведемо результати без доведення.

По-перше, нагадаємо, що дія (3.1) ефективної теорії параметризується вектором констант зв'язку Q_i , введеним у параграфі 3.1. Локальні збудження представляються вертексними опереторами $\exp(i \sum_j q_j \phi_j)$, та позначаються векторами $\mathbf{q} = \{q_i\}$; так що сума двох таких векторів відповідає

добутку операторів. Означивши скалярний добуток:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_i a_i b_i \sigma_i, \quad (\text{F.1})$$

де σ_i - кіральність i -того каналу, можемо представити електричний заряд (3.6) збудження, що відповідає вектору \mathbf{q} та статистичну фазу (3.5) двох збуджень, що відповідають \mathbf{q}_1 та \mathbf{q}_2 як

$$Q_{\text{em}} = \langle \mathbf{Q}, \mathbf{q} \rangle, \quad \theta_{12} = \pi \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle \quad (\text{F.2})$$

відповідно.

Як обговорювалося у параграфі 3.1., після того, як були зафіксовані константи зв'язку Q_i (тобто зафіксована дія), потрібно вибрати електронні збудження. Позначимо їх \mathbf{q}_α . Багатоелектронні збудження утворюють цілу гратку Γ :

$$\Gamma = \{k_\alpha \mathbf{q}_\alpha | k_\alpha \in \mathbb{Z}\}. \quad (\text{F.3})$$

у параграфі 3.1.2. зазначалося, що вибір деяких різних наборів елементарних електронних збуджень є еквівалентним вибору різних базисів у тій самій гратці Γ . Так гратка Γ описує ефективну теорію незалежним від базису чином. Умова того, що електричний заряд $\langle \mathbf{Q}, \mathbf{q} \rangle$ будь-якої комбінації електронів $\mathbf{q} \in \Gamma$ є цілим означає, що вектор констант взаємодії \mathbf{Q} належить до дуальної гратки Γ^* . Таким чином, обираючи гратку Γ і вектор \mathbf{Q} з дуальної до неї, обирається певна ефективна модель.

Далі, важливі фізичні обмеження на ефективні моделі, що розглядалися у параграфі 1.1., можна сформулювати так:

- Умова скорочення аномалії для даного фактору заповнення ν призводить до того, що $\langle \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \rangle = \nu$.
- Правильний заряд електронних операторів гарантовано, якщо найбільший спільний дільник координат \mathbf{Q} у Γ^* дорівнює 1 тому, що цей дільник дорівнює мінімальному значенню $\langle \mathbf{Q}, \mathbf{q} \rangle$ для $\mathbf{q} \in \Gamma$.

- Правильна статистична фаза електронних збуджень є наслідком умови $\langle \mathbf{Q}, \mathbf{q} \rangle \equiv \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle \pmod{2}, \forall \mathbf{q} \in \Gamma$.

Спектр дозволених локальних збуджень слідує з вимоги того, щоб хвильова функція КХ стану була однозначною у присутності збудження $\exp(i \sum_j p_j \phi_j)$. У параграфі 1.1. зазначалося, що ця умова еквівалентна тому, що відносна статистична фаза між електронами та квазічастинками є цілочисельною:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}_\alpha \rangle \in \mathbb{Z}. \quad (\text{F.4})$$

Таким чином, ґратка дозволених збуджень - $\Gamma^* \supseteq \Gamma$. Як показано у параграфі 3.1., масштабна розмірність Δ кореляційної функції збуджень \mathbf{p} не залежить від гамільтоніану у чисто кіральной теорії. Вона дорівнює статистичній фазі $\Delta = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle$. Так для чисто кіральних моделей пара (Γ, \mathbf{Q}) надає повну інформацію про ефективну теорію. Для того, щоб зробити детальні обчислення, треба ввести певний базис для Γ . Однак з'ясувати чи генерують два різних базиси одну й ту саму ґратку, не є тривіальним. Для того, щоб розрізнити ефективні моделі, а значить і прокласифікувати їх, необхідно мати інформацію про ґратки, що не залежить від базису. Така інформація надається *інваріантами ґратки*.

Для того, щоб прокласифікувати пари (Γ, \mathbf{Q}) , що задовольняють описані вище умови, введемо найбільш важливі інваріанти ґраток. Очевидними інваріантами є фактори заповнення $\nu = n_H/d_H$ з n_H та d_H як взаємнопрості цілі числа, та розмірність (або ранг) ґратки $N = \dim \Gamma$. Можна показати, що для будь-якого базису $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ Γ детермінант матриці Грама $\Delta_\Gamma = \det \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle$ теж інваріант. [76] Цікавою властивістю цього детермінанту є факторизація $\Delta_\Gamma = l d_H$, де l - ціле число, що зветься *рівнем*. Більше того, можна показати, що для будь-якого базису $\{\mathbf{e}^\alpha\}$ Γ^* найбільший спільний дільник $g = \text{gcd}(Q^1, \dots, Q^N)$ чисел $Q^\alpha = \Delta_\Gamma \langle \mathbf{Q}, \mathbf{e}^\alpha \rangle$ є інваріантним, і що $l = \lambda g$, де λ - ціле число. Це число λ є важливим параметром,

який часто називають *зарядовим параметром*. Воно визначає мінімальний можливий електричний заряд квазічастинок:

$$e^* = \min_{\mathbf{p} \in \Gamma^*, \langle \mathbf{Q}, \mathbf{p} \rangle \neq 0} |\langle \mathbf{Q}, \mathbf{p} \rangle| = \frac{1}{\lambda d_H}. \quad (\text{F.5})$$

І нарешті, можна ввести наступні інваріанти, що зветься мінімальний та максимальний відносний момент імпульсу. Мінімальний відносний момент імпульсу визначається як

$$\ell_{\min} = \min_{\mathbf{q} \in \Gamma, \langle \mathbf{Q}, \mathbf{q} \rangle = 1} \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle. \quad (\text{F.6})$$

Вводячи набір $B_{\mathbf{Q}}$ усіх можливих електронних базисів $\{\mathbf{q}_\alpha\}$ Γ для данного \mathbf{Q} (тобто такого, що $\forall \alpha : \langle \mathbf{Q}, \mathbf{q}_\alpha \rangle = 1$), максимальний відносний момент імпульсу визначається як

$$\ell_{\max} = \min_{\{\mathbf{q}_\alpha\} \in B_{\mathbf{Q}}} \left(\max_{\alpha} \langle \mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\alpha \rangle \right). \quad (\text{F.7})$$

Інваріанти ℓ_{\min} та ℓ_{\max} не можуть приймати довільні значення. Наприклад, у чисто кіральних моделях вони обмежені нерівністю $1/\nu \leq \ell_{\min} \leq \ell_{\max}$.

Найпростіші приклади такої ґраткової конструкції з'являються у випадку розмірності $N = 1$. Для одновимірних ґраток існує тільки один незалежний інваріант $\ell_{\max} = \ell_{\min} = \Delta_{\Gamma} = m$, де m - непарне ціле число. Це число є нічим іншим як статистичною фазою електрону, тому $Q = 1/\sqrt{m}$, а фактор заповнення $\nu = 1/m$. Більше того, легко бачити, що рівень $l = \Delta_{\Gamma}/d_H = 1$, так як параметр заряду $\lambda = 1$, знаходимо, що мінімальний електричний заряд становить $e^* = 1/m$. Тобто приходимо до висновку, що КХ ґратки

$$\Gamma_m = \{n\sqrt{m}\mathbf{e} | n \in \mathbb{Z}\} \quad (\text{F.8})$$

з $\mathbf{Q}_m = \mathbf{e}/\sqrt{m}$ та $\nu = 1/m$ є єдиними дозволеними для $N = 1$.

Для випадку двох полів $N = 2$ конструкція дозволених ґраток більш складна. З визначення відносного моменту імпульсу випливає, що можна вибрати електронні базиси з матрицею Грама наступної форми:

$$K = \begin{pmatrix} \ell_{\min} & b \\ b & \ell_{\max} \end{pmatrix}. \quad (\text{F.9})$$

Розглянемо ґратки з $\ell_{\max} < 7$, що є зазвичай найбільш релевантними.¹¹ Тоді можна просто перерахувати всі моделі пробігаючи по усім можливим значенням ℓ_{\max} , ℓ_{\min} та b . [45] Більше того, сконцентруємо увагу на випадку $\ell_{\min} = \ell_{\max}$, який є найбільш важливим у контексті цієї роботи.

Для зручності обираємо такі координати, що $\mathbf{Q} = (\sqrt{\nu}, 0)$. Умова одного заряду $\langle \mathbf{Q}, \mathbf{q}_\alpha \rangle = 1$ для $\alpha = 1, 2$ частково фіксує форму електронних векторів \mathbf{q}_α у цих координатах. А саме $\mathbf{q}_1 = (1/\sqrt{\nu}, s)$ та $\mathbf{q}_2 = (1/\sqrt{\nu}, -s)$, де число s ще треба визначити. З умови $|\mathbf{q}_1|^2 = |\mathbf{q}_2|^2 = \ell_{\max}$ слідує, що $s^2 = \ell_{\max} - 1/\nu$. Взаємна статистична фаза електронів $\theta_{12} = \pi(1/\nu - s^2)$ має бути цілою. Це означає, що $\ell_{\max} + \theta_{12}/\pi = 2/\nu$ є цілим числом. Легко бачити, що особливий випадок $\ell_{\min} = \ell_{\max}$ відповідає $\nu = 2/m$ де m - ціле. Зазначимо, що для $\ell_{\max} < 7$, зворотнє твердження теж вірне, тобто для $\nu = 2/m$, усі двомірні ґратки мають $\ell_{\min} = \ell_{\max}$.

Після деяких елементарних обчислень знаходимо, що для $\nu = 2/m$ матрицю Грама (F.9) можна виразити як:

$$K = \begin{pmatrix} \ell_{\max} & \ell_{\max} - l \\ \ell_{\max} - l & \ell_{\max} \end{pmatrix}. \quad (\text{F.10})$$

З умови (3.11), застосованої до рівняння (F.10), знаходимо, що рівень $l = 2\ell_{\max} - m = 2s^2$. Тому усі ґратки у випадку $\nu = 2/m$ можна параметризувати *тільки двома* числами m та l . Важливо зауважити, що для всіх цих

¹¹Так як вже зазначалося, що чисельні симуляції [78] проказують, що для великих значень статистичних фаз КХ стан не є стійким, і електрони утворюють вігнерівський кристал. [4]

граток $\lambda = 1$. Тоді для двопольових моделей з $\nu = 2/m$ мінімальний заряд завжди дорівнює $e^* = 1/m$. Вводячи пару ортогональних векторів $\mathbf{e}_{1,2}$ так, що $\mathbf{q}_{1,2} = \sqrt{m/2}\mathbf{e}_1 \pm \sqrt{l/2}\mathbf{e}_2$, гратку можна записати явно як

$$\Gamma_{ml} = \{\sqrt{m/2}(n_1 + n_2)\mathbf{e}_1 + \sqrt{l/2}(n_1 - n_2)\mathbf{e}_2 | n_{1,2} \in \mathbb{Z}\}, \quad (\text{F.11})$$

та константа взаємодії $\mathbf{Q}_{ml} = \sqrt{2/m}\mathbf{e}_1$. Нарешті, зауважимо, що матриці K (3.30) та (3.31) запропоновані у параграфі 3.2. є матрицями Грама (F.10) для конкретного випадку $\nu = 2/3$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Levkivskiy I.P. Dephasing in the electronic Mach-Zehnder interferometer at filling factor $\nu = 2$ / I.P. Levkivskiy, E.V. Sukhorukov // Physical Review B. – 2008. – V. 78, № 4. – P. 045322.
2. Levkivskiy I.P. Mach-Zehnder interferometry of fractional quantum Hall edge states / I.P. Levkivskiy, A. Boyarsky, J. Froehlich, E.V. Sukhorukov // Physical Review B. - 2009. - V. 80, № 4. - P. 045319.
3. Levkivskiy I.P. Noise-induced phase transition in the electronic Mach-Zehnder interferometer / I.P. Levkivskiy, E.V. Sukhorukov // Physical Review Letters. - 2009. - V. 103, № 3. - P. 036801.
4. Prange R.E. The Quantum Hall Effect / R.E. Prange, S.M. Girvin. – New York : Springer, 1987.
5. Datta S. Electronic transport in mesoscopic systems / S. Datta. Cambridge, Cambridge University Press, 1999.
6. Для огляду див. Chang A.M. Chiral Luttinger liquids at the fractional quantum Hall edge / A.M. Chang // Reviews of Modern Physics. 2003. - V. 75, № 4. - P. 1449-1505. та Wen X.-G. Topological orders and edge excitations in fractional quantum Hall states / X.-G. Wen // Advances in Physics. - 1995. - V. 44, № 5. - 405-473.
7. Ji Y. An electronic Mach-Zehnder interferometer / Y. Ji, Y. Chung, D. Sprinzak [et al.] // Nature. – 2003. – V. 422. – P. 415.
8. Neder I. Unexpected Behavior in a Two-Path Electron Interferometer / I. Neder, M. Heiblum, Y. Levinson [et al.] // Physical Review Letters. - 2006. - V. 96, № 1. - P. 016804.

9. Neder I. Controlled dephasing of electrons by non-gaussian shot noise / I. Neder, F. Marquardt, M. Heiblum [et al.] // Nature Physics. - 2007. - V. 3. - P. 534 - 537
10. Bieri E. Correlation and Interference Experiments with Edge States / PhD thesis, University of Basel, 2007.
11. Bieri E. Finite-bias visibility dependence in an electronic Mach-Zehnder interferometer / E. Bieri, M. Weiss, O. Goktas [et al.] // Physical Review B. - 2009. - V. 79, № 24. - P. 245324.
12. Roulleau P. Finite bias visibility of the electronic Mach-Zehnder interferometer / P. Roulleau, F. Portier, D. C. Glattli [et al.] // Physical Review B. - 2007. - V. 76, № 16. - P. 161309(R).
13. Roulleau P. Direct Measurement of the Coherence Length of Edge States in the Integer Quantum Hall Regime / P. Roulleau, F. Portier, P. Roche // Physical Review Letters. - 2008. - V. 100, № 12. - P. 126802.
14. Litvin L.V. Decoherence and single electron charging in an electronic Mach-Zehnder interferometer / L. V. Litvin, H.-P. Tranitz, W. Wegscheider [et al.] // Physical Review B. - 2007. - V. 75, № 3. - P. 033315.
15. Litvin L.V. Edge-channel interference controlled by Landau level filling / L.V. Litvin, A. Helzel, H.-P. Tranitz [et al.] // Physical Review B. - 2008. - V. 78, № 7. - P. 075303.
16. Büttiker M. Four-Terminal Phase-Coherent Conductance / M. Büttiker // Physical Review Letters. - 1986. - V. 57, № 14. - P. 1761-1764.
17. Sukhorukov E.V. Resonant Dephasing in the Electronic Mach-Zehnder Interferometer / E.V. Sukhorukov, V.V. Cheianov // Physical Review Letters. - 2007. - V. 99, № 15. - P. 156801.

18. Chalker J.T. Decoherence and interactions in an electronic Mach-Zehnder interferometer / J.T. Chalker, Y. Gefen, M.Y. Veillette // Physical Review B. – 2007. – V. 76, № 8. – P. 085320.
19. Neder I. Behavior of Electronic Interferometers in the Nonlinear Regime / I. Neder, E. Ginossar // Physical Review Letters. – 2008. – V. 100, № 19. – P. 196806.
20. Youn S.-C. Nonequilibrium Dephasing in an Electronic Mach-Zehnder Interferometer / S.-C. Youn, H.-W. Lee, H.-S. Sim // Physical Review Letters. – 2008. – V. 100, № 19. – P. 196807.
21. P. Roche, приватна розмова.
22. Chklovskii D.B. Electrostatics of edge channels / D.B. Chklovskii, B.I. Shklovskii, L.I. Glazman // Physical Review B. – 1992. – V. 46, № 7. – P. 4026.
23. Wen X.-G. Quantum Field Theory of Many-body Systems / X.-G. Wen. – New York : Oxford University Press, 2007.
24. Giamarchi Th. Quantum Physics in One Dimension / Th. Giamarchi. – Oxford : Oxford University Press, 2003.
25. Mahan G.D. Many Particle Physics / G.D. Mahan. – New York : Plenum, 1993.
26. Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва : Физматлит, 2002. (Теоретическая физика, т. VIII).
27. Seelig G. Charge-fluctuation-induced dephasing in a gated mesoscopic interferometer / G. Seelig, M. Büttiker // Physical Review B. – 2001. – V. 64, № 24. – P. 245313.

28. Seelig G. Probe-configuration-dependent dephasing in a mesoscopic interferometer / G. Seelig, S. Pilgram, A. N. Jordan [et al.] // Physical Review B. – 2003. – V. 68, № 16. – P. 161310.
29. Marquardt F. Influence of Dephasing on Shot Noise in an Electronic Mach-Zehnder Interferometer / F. Marquardt, C. Bruder // Physical Review Letters. – 2004. – V. 92, № 5. – P. 056805.
30. Marquardt F. Effects of dephasing on shot noise in an electronic Mach-Zehnder interferometer / F. Marquardt, C. Bruder // Physical Review B. – 2004. – V. 70, № 12. – P. 125305.
31. Fröhlich J. Universality in Quantum Hall Systems: Coset Construction of Incompressible States / J. Fröhlich, B. Pedrini, C. Schweigert [et al.] // Journal of Statistical Physics. - 2001. - V. 103, №. 3-4. - P. 527-567.
32. Fröhlich J. Large scale physics of the quantum hall fluid / J. Fröhlich, A. Zee // Nuclear Physics B. - 1991. - V. 364, № 3. - P. 517-540.
33. Fröhlich J. Universality in quantum Hall systems / J. Fröhlich, T. Kerler // Nuclear Physics B. - 1991. V. 354, № 2-3. - P. 369-417.
34. Chung V. S.-W. Visibility of current and shot noise in electrical Mach-Zehnder and Hanbury Brown Twiss interferometers / V. S.-W. Chung, P. Samuelsson, M. Büttiker // Physical Review B. – 2005. – V. 72, № 12. – P. 125320.
35. Kane C.L. Randomness at the edge: Theory of quantum Hall transport at filling $\nu = 2/3$ / C.L. Kane, M.P. Fisher, J. Polchinski [et al.] // Physical Review Letters. – 1994. – V. 72, № 26. – P. 4129.
36. Law K.T. Electronic Mach-Zehnder interferometer as a tool to probe fractional statistics / K.T. Law, D.E. Feldman, Y. Gefen // Physical Review B. – 2006. – V. 74, № 4. – P. 045319.

37. Ponomarenko V.V. Mach-Zehnder Interferometer in the Fractional Quantum Hall Regime / V.V. Ponomarenko, D.V. Averin // Physical Review Letters. – 2007. – V. 99, № 6. – P. 066803.
38. Ardonne E. Non-abelian statistics in the interference noise of the Moore–Read quantum Hall state / E. Ardonne, E.-A. Kim // Journal of Statistical Mechanics. - 2008. - P. L04001.
39. Rosenow B. Bulk-Edge Coupling in the Non-Abelian $\nu = 5/2$ Quantum Hall Interferometer / B. Rosenow, B.I. Halperin, S.H. Simon, [et al.] // Physical Review Letters. – 2008. – V. 100, № 22. – P. 226803.
40. Bishara W. Edge states and interferometers in the Pfaffian and anti-Pfaffian states of the $\nu = 5/2$ quantum Hall system / W. Bishara, C. Nayak // Physical Review B. – 2008. – V. 77, № 16. – P. 165302.
41. G. 't Hooft, Proceedings of the Salamfest, 1993, 0284-0296;
Susskind L. The world as a hologram / L. Susskind // Journal of Mathematical Physics. - 1995. - V. 36, № 11. - P. 6377.
42. Добре відомі приклади голографічного принципу у математичній фізиці описано у роботах: Witten E. Anti de Sitter Space and Holography / E. Witten // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. - 1998. - V. 2, № 2. - P. 253-290. та Aharony O. Large N field theories, string theory and gravity / O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena [et al.] // Physics Reptorts. - 2000. - V. 323, № 3-4. - P. 183-386.
43. Приклади притоку аномалії на краю у деяких інших фізичних системах наведено у Harvey J.A. The local structure of anomaly inflow / J.A. Harvey, O. Ruchayskiy // Journal of High Energy Physics. - 2001. - № 6. - P. 044. та Boyarsky A. Observational manifestations of anomaly inflow / A. Boyarsky, O. Ruchayskiy, M. Shaposhnikov // Physical Review D. - 2005. - V. 72, № 8. - P. 085011.

44. Wen X.-G. Chiral Luttinger liquid and the edge excitations in the fractional quantum Hall states / X.-G. Wen // Physical Review B. – 1990. – V. 41, № 18. – P. 12838-12844.
45. Fröhlich J. A classification of quantum Hall fluids / J. Fröhlich U.M. Studer, E. Thiran // Journal of Statistical Physics. - 1990. - V. 86, № 3-4, P. 821-897.
46. Wen X.-G. Edge transport properties of the fractional quantum Hall states and weak-impurity scattering of a one-dimensional charge-density wave / X.-G. Wen // Physical Review B. – 1991. – V. 44, № 11. – P. 5708–5719.
47. Chang A.M. Observation of Chiral Luttinger Behavior in Electron Tunneling into Fractional Quantum Hall Edges / A.M. Chang, L.N. Pfeiffer, K.W. West // Physical Review Letters. – 1996. – V. 77, № 12. – P. 2538–2541.
48. Grayson M. Continuum of Chiral Luttinger Liquids at the Fractional Quantum Hall Edge / M. Grayson, D.C. Tsui, L.N. Pfeiffer [et al.] // Physical Review Letters. – 1998. – V. 80, № 5. – P. 1062–1065.
49. Kane C.L. Impurity scattering and transport of fractional quantum Hall edge states / C.L. Kane, M.P.A. Fisher // Physical Review B. – 1995. – V. 51, № 19. – P. 13449–13466.
50. Khlebnikov S. Piezoelectric coupling, phonons, and tunneling into a quantum Hall edge / S. Khlebnikov // Physical Review B. – 2006. – V. 73, № 4. – P. 045331.
51. Kane C.L. Nonequilibrium noise and fractional charge in the quantum Hall effect / C.L. Kane, M.P.A. Fisher // Physical Review Letters. – 1994. – V. 72, № 5. – P. 724–727.
52. Saminadayar L. Observation of the $e/3$ Fractionally Charged Laughlin Quasiparticle / L. Saminadayar, D.C. Glattli, Y. Jin [et al.] // Physical Review Letters. – 1997. – V. 79, № 13. – P. 2526–2529.

53. Picciotto R. Direct observation of a fractional charge / R. Picciotto, M. Reznikov, M. Heiblum [et al.] // Nature. – 1997. – V. 389. – P. 162-164.
54. Dolev M. Observation of a quarter of an electron charge at the $\nu = 5/2$ quantum Hall state / M. Dolev, M. Heiblum, V. Umansky, A. [et al.] // Nature. - 2008. - V. 452. - P. 829-835.
55. Camino F.E. Aharonov-Bohm Superperiod in a Laughlin Quasiparticle Interferometer / F.E. Camino, W. Zhou, V.J. Goldman // Physical Review Letters. – 2005. – V. 95, № 24. – P. 246802.
56. Guyon R. Klein factors in multiple fractional quantum Hall edge tunneling / R. Guyon, P. Devillard, T. Martin [et al.] // Physical Review B. – 2002. – V. 65, № 15. – P. 153304.
57. Kane C.L. Telegraph Noise and Fractional Statistics in the Quantum Hall Effect / C.L. Kane // Physical Review Letters. – 2003. – V. 90, № 22. – P. 226802.
58. Kim E.-A. Measuring fractional charge and statistics in fractional quantum Hall fluids through noise experiments / E.-A. Kim, M.J. Lawler, S. Vishveshwara [et al.] // Physical Review B. – 2006. – V. 74, № 15. – P. 155324.
59. Treiman S.B. Lectures on Current Algebra and its Applications / S.B. Treiman, R. Jackiw, D.J. Gross. – Princeton : Princeton University Press, 1972.
60. Gogolin A.O. Bosonization and Strongly Correlated Systems / A.O. Gogolin, A.A. Nersesyan, A.M. Tsvelik. – Cambridge : Cambridge University Press, 1998.
61. Laughlin R.B. Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations / R.B. Laughlin // Physical Review Letters. – 1983. – V. 50, № 18. – P. 1395–1398.

62. Wen X.G. Electrodynamical properties of gapless edge excitations in the fractional quantum Hall states / X.G. Wen // Physical Review Letters. – 1990. – V. 64, № 18. – P. 2206–2209.
63. MacDonald A.H. Edge states in the fractional-quantum-Hall-effect regime / A.H. MacDonald // Physical Review Letters. – 1990. – V. 64, № 2. – P. 220–223.
64. Johnson M.D. Composite edges in the $\nu = 2/3$ fractional quantum Hall effect / M.D. Johnson, A.H. MacDonald // Physical Review Letters. – 1991. – V. 67, № 15. – P. 2060–2063.
65. Jain J.K. Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect / J.K. Jain // Physical Review Letters. – 1989. – V. 63, № 2. – P. 199–202.
66. Hu Z.-X. Ground state and edge excitations of a quantum Hall liquid at filling factor $2/3$ / Z.-X. Hu, H. Chen, K. Yang [et al.] // Physical Review B. – 2008. – V. 78, № 23. – P. 235315.
67. Eisenstein J.P. Evidence for a spin transition in the $\nu = 2/3$ fractional quantum Hall effect / J.P. Eisenstein, H.L. Stormer, L.N. Pfeiffer [et al.] // Physical Review B. – 1990. – V. 41, № 11. – P. 7910–7913.
68. Engel L.W. Fractional quantum Hall effect at $\nu = 2/3$ and $3/5$ in tilted magnetic fields / L.W. Engel, S.W. Hwang, T. Sajoto [et al.] // Physical Review B. – 1992. – V. 45, № 7. – P. 3418.
69. Marino M. Chern-Simons Theory, Matrix Models, and Topological Strings / M. Marino. – Oxford : Oxford University Press, 2005.
70. Chamon C. de C. Distinct universal conductances in tunneling to quantum Hall states: The role of contacts / C. de C. Chamon, E. Fradkin // Physical Review B. – 1997. – V. 56, № 4. – P. 2012–2025.

71. Stern A. Anyons and the quantum Hall effect—A pedagogical review / A. Stern // *Annals of Physics*. - 2008. - V. 323, № 1. - P. 204-249.
72. Feldman D.E. Detecting Non-Abelian Statistics with an Electronic Mach-Zehnder Interferometer / D.E. Feldman, A. Kitaev // *Physical Review Letters*. - 2006. - V. 97, № 18. - P. 186803.
73. Feldman D.E. Shot noise in an anyonic Mach-Zehnder interferometer / D.E. Feldman, Y. Gefen, A. Kitaev [et al.] // *Physical Review B*. - 2007. - V. 76, № 8. - P. 085333.
74. Thouless D.J. Fractional quantum Hall effect and multiple Aharonov-Bohm periods / D.J. Thouless, Y. Gefen // *Physical Review Letters*. - 1991. - V. 66. - P. 806–809.
75. Fröhlich J. *Statistical Field Theories* / J. Fröhlich, B. Pedrini. - Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
76. Fröhlich J. Integral quadratic forms, Kac-Moody algebras, and fractional quantum Hall effect / J. Fröhlich, E. Thiran // *Journal of Statistical Physics*. - 1994. - V. 76, № 1-2. - P. 209-283.
77. Boyarsky A. Microscopic construction of the chiral Luttinger liquid theory of the quantum Hall edge / A. Boyarsky, V.V. Cheianov, O. Ruchayskiy // *Physical Review B*. - 2004. - V. 70, № 23. - P. 235309.
78. Zhu X. Variational quantum Monte Carlo study of two-dimensional Wigner crystals: Exchange, correlation, and magnetic-field effects / X. Zhu, S.G. Louie // *Physical Review B*. - 1995. - V. 52, № 8. - P. 5863–5884.

Подяка

Автор висловлює щирі подяки своєму науковому керівникові професору Гусиніну Валерію Павловичу за постійну підтримку і допомогу в створенні дисертації. Автор дуже вдячний Сухорукову Євгену Вікторовичу за плідні ідеї та дискусії по темі дисертації та Юргу Фреліху за ідеї та постійні обговорення результатів.