НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ІМ. М.М.БОГОЛЮБОВА

Приходько Олена Олександрівна

УДК 530.182, 538.9

ДВОВИМІРНІ ЛОКАЛІЗОВАНІ СТРУКТУРИ В НЕЛІНІЙНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

01.04.02 – теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2011

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі квантової теорії поля фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Науковий керівник доктор фізико-математичних наук, професор
Вільчинський Станіслав Йосипович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри квантової теорії поля

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Гайдідей Юрій Борисович,
Інститут теоретичної фізики НАН України,
завідувач відділу квантової електроніки

доктор фізико-математичних наук
Держко Олег Володимирович,
Інститут фізики конденсованих систем НАН України,
завідувач відділу теорії модельних спінових систем

Захист відбудеться «28» квітня 2011 р. об 11:00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01 в Інституті теоретичної фізики НАН України за адресою:
ІТФ НАН України, вул. Метрологічна, 14-Б, м. Київ, 03680 МСП.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці ІТФ НАНУ за адресою:
ІТФ НАН України, вул. Метрологічна, 14-Б, м. Київ, 03680 МСП.

Автореферат розіслано «25» березня 2011 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор фізико-математичних наук В. Є. Кузьмичев

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Формування локалізованих структур є універсальною властивістю багатьох нелінійних середовищ. Просторові солітони виникають в результаті балансу між дифракційним (дисперсійним) розпливанням та нелінійним самофокусуванням. Різноманітність фізичних систем, де можуть формуватись нелінійні локалізовані структури охоплює багато різних областей фізики: нелінійну оптику, фізику плазми, фізику рідких кристалів, фізику низьких температур та ін. Проте формування локалізованих структур у всіх цих нелінійних системах описується порівняно невеликою кількістю математичних моделей, що носять універсальний характер.

Одновимірні нелінійні моделі в окремих важливих випадках є інтегровними, тобто дозволяють повний аналітичний опис, наприклад, в рамках методу оберненої задачі розсіяння. Локалізовані хвильові пакети, які зберігають свою форму при поширенні та при зіткненнях між собою, називають солітонами. Такі розв’язки природно виникають в одновимірних інтегровних моделях і добре вивчені на сьогоднішній день, хоча самі одновимірні моделі мають досить обмежене практичне застосування. В двовимірному або тривимірному випадку нелінійні рівняння, як правило, вже не є інтегровними, проте для них також можна отримати локалізовані розв’язки, які також прийнято називати солітонами. Такі солітони також можуть зберігати форму при поширенні, але при зіткненнях вона не зберігається.

В дисертаційній роботі окрім фундаментальних солітонів, тобто солітонів з одиничним максимумом інтенсивності, досліджено більш складні двовимірні локалізовані структури: солітони з вузлами, що є структурами з розподілом інтенсивності у вигляді світлої плями, оточеної світлими кільцями, вихори, що є структурами з ненульовим кутовим моментом, мультисолітони, що є зв’язаними станами декількох фундаментальних солітонів та також можуть мати ненульовий кутовий момент.

Актуальність теми. Останні десятиріччя велика увага приділяється дослідженням двовимірних локалізованих структур. Велика кількість експериментальних і теоретичних робіт присвячена вивченню властивостей цих структур, їх еволюції, визначенню умов їх стійкості та дослідженню різних сценаріїв нестійкої поведінки в різноманітних нелінійних середовищах. Проте досі залишався не вирішеним цілий ряд фундаментальних проблем, пов’язаних зі стійкістю двовимірних локалізованих структур.

- Залишалося відкритим питання про існування мультизарядних стійких солітонів в окремих нелокальних нелінійних середовищах.
- Зв’язані стани солітонів в нелокальних нелінійних середовищах відомі з початку 80-х років, проте відповісти на питання щодо стійкості цих структур стає можливим лише зараз, завдяки

розвитку можливостей комп'ютерного моделювання.

- Питання щодо існування локалізованих векторних солітонів в середовищах з самофокусуванням і крос-дефокусуванням до цього часу не було вирішено. Також не було відомо, чи можна усунути проблему колапсу, стабілізуючи потужні хвильові пучки іншою компонентою, що має малу інтенсивність.

Всі ці питання були розглянуті в даній дисертаційній роботі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась в рамках досліджень, які проводились в період з 2006 по 2010 роки на кафедрі квантової теорії поля фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка по темі № 01БФ051-06 (номер держреєстрації 0106U006394).

Мета і задачі дослідження. Основною метою даної роботи було знайти нові типи локалізованих структур, які можна спостерігати експериментально. Для цього потрібно було знайти стаціонарні розв'язки для відповідних нелінійних моделей та дослідити їх стійкість. У випадку нестійкого поширення потрібно оцінити час життя таких нестійких структур і визначити, за яких умов цей час життя буде достатнім для їх експериментального спостереження. Поставлені в дисертації задачі полягають у проведенні:

- аналітичного дослідження в рамках моделі, яка базується на узагальненому нелінійному рівнянні Шредінгера (УНРШ) з нелокальною нелінійністю, що містить інтегральне ядро у вигляді гаусоїди, умов формування та загальних властивостей двовимірних солітонів, вихорів, солітонів з вузлами та мультисолітонів;
- аналітичного дослідження в рамках моделі УНРШ з нелокальною тепловою нелінійністю умов формування та загальних властивостей двовимірних мультисолітонів, зокрема диполів, триполів та квадруполів;
- чисельного знаходження стаціонарних розв'язків двовимірного УНРШ, що описують локалізовані структури, проведення лінійного аналізу стійкості отриманих розв'язків щодо малих азимутальних збурень, чисельних експериментів по еволюції збурених стаціонарних розв'язків на основі УНРШ;
- аналітичного та чисельного дослідження властивостей та умов існування двовимірних векторних солітонів, зокрема солітон-солітонних пар, в середовищах з притягувальною внутрішньою та відштовхувальною міжкомпонентною взаємодіями, аналізу стаціонарних розв'язків відповідної зв'язаної системи нелінійних рівнянь Шредінгера;
- чисельного дослідження стійкості солітон-солітонних пар на основі чисельного моделювання еволюції збурених стаціонарних розв'язків.

Об'єктом дослідження в даній роботі є такі локалізовані структури як солітони, вихори, солітони з вузлами, мультисолітони та векторні солітони в різноманітних нелінійних середовищах.

Предметом дослідження є еволюція досліджуваних структур, умови їх стійкості та час життя у випадку, якщо вони виявляються нестійкими.

Методи дослідження. В роботі були застосовані методи математичної фізики, варіаційного аналізу, теорії стійкості та чисельного моделювання для аналізу розв'язків нелінійних інтегро-диференційних рівнянь в частинних похідних та систем таких рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів

- Вперше встановлено умови формування та передбачено основні властивості двовимірних солітонів, вихорів, солітонів з вузлами та мультисолітонів в середовищах з нелокальною нелінійністю з регулярним інтегральним ядром. Зокрема знайдено пороги стабілізації цих структур.
- Вперше знайдено умови стійкості таких двовимірних мультисолітонів, як диполі, триполі та квадруполі в середовищах з нелокальною тепловою нелінійністю та доведено, що лише для диполів існує область стійкості, в той час як решта структур є нестійкими.
- Вперше доведено, що в системах з нелокальним нелінійним відгуком динаміка локалізованих структур якісно залежить від форми ядра нелокальності.
- Вперше теоретично продемонстровано можливість існування квазістійких двовимірних локалізованих солітон-солітонних пар в середовищах з крос-дефокусуванням і знайдено область значень параметрів, при яких можливе їх існування.

Практичне значення одержаних результатів. Проведені в дисертації теоретичні дослідження можуть бути застосовані для пояснення експериментально спостережуваних двовимірних локалізованих структур в різноманітних нелінійних середовищах, що зараз активно досліджуються в різних областях науки, зокрема: в оптиці при побудові оптичних обчислювальних систем, де солітони є носіями даних і їх стійке поширення дозволяє передавати дані на значні відстані без спотворення сигналу; в макроскопічних квантових системах, таких як Бозе-Айнштайнівський конденсат (БАК) питання стійкості солітонів тісно пов'язане зі стійкістю самої системи; в дослідженнях низькотемпературної плазми та в прискорювачах частинок, де стає можливою стабілізація потужного лазерного пучка за допомогою нелінійної крос-взаємодії з іншим пучком низької потужності. Отримані результати відкривають можливості для експериментальної демонстрації широкого класу нових стійких локалізованих структур в нелінійних середовищах.

Особистий внесок здобувача. В роботі [1] здобувач самостійно провела аналітичні розрахунки в рамках варіаційного методу для дослідження властивостей радіально-симетричних розв'язків (солітонів, вихорів та солітонів з вузлами). За допомогою варіаційного методу дослідила динаміку слабко-збурених стаціонарних розв'язків УНРШ. Самостійно отримала лінеаризовані динамічні рівняння для малих азимутальних збурень мультизарядних вихрових солітонів. Проводила числові експерименти по динаміці двовимірних аксіально-симетричних структур.

В роботі [2] здобувач провела варіаційний аналіз стаціонарних мультисолітонних структур (диполів, триполів та квадруполів) в середовищі з тепловою нелокальною нелінійністю. Аналітично встановила поріг стійкості дипольних структур.

В роботі [3] здобувач запропонувала варіаційну функцію для дослідження векторних солітонів, що враховує просторове розділення компонент і якісну зміну форми огинаючої хвильового пакету. Провела аналітичні розрахунки за допомогою варіаційного методу стаціонарних солітон-солітоних пар. Чисельно дослідила динаміку векторних солітонів та знайшла умови існування довгоживучих солітон-солітонних пар.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались на наступних конференціях та школах національного та міжнародного масштабу: міжнародна конференція International workshop on nonlinear physics and mathematics, (Київ, 25–27 травня, 2006); міжнародна конференція ICPP (Київ, 22–26 травня, 2006); семінар з теорії солітонів УКМА (Київ, жовтень 2006); міжнародна школа Summer school on novel quantum phenomena in cold atomic gases (Італія, Трієст, серпень 2007); Всеукраїнська школа-семінар молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 5–6 травня, 2008); міжнародна конференція WAVES 2009 (По, Франція, травень 2009); міжнародна конференція Workshop on plasma physics (Італія, Трієст, липень 2010).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано три статті у фахових виданнях, що задовольняють вимогам ВАК до публікацій [1–3]. Отримані результати також висвітлено в опублікованих матеріалах конференцій та шкіл [4–7], де проводилась апробація результатів.

Структура дисертаційної роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 95 найменувань. Робота написана на 110 сторінках машинописного тексту, містить 31 рисунок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У ***вступі*** обґрунтована актуальність обраної теми, сформульовані мета та задачі дослідження, показана наукова та практична цінність отриманих результатів і коротко викладено зміст розділів дисертації.

В першому розділі введено основні поняття, що використовуються в наступних розділах, а також проведено аналіз проблем, що виникають при дослідженні локалізованих структур в різноманітних нелінійних середовищах. Наведено ключові пункти при отриманні нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ) для двовимірних оптичних солітонів [Kivshar Y. S., 2003] та розглянуто його основні властивості. Описано можливі типи локалізованих розв’язків, що можуть бути отримані при розв’язуванні рівнянь такого типу. Розглянуто основні типи нестійкої поведінки нелінійних локалізованих структур та методи їх стабілізації.

В другому розділі [1] вивчено основні властивості фундаментальних солітонів, солітонів з вузлами, вихрових солітонів та складних солітонів типу диполя в сильно нелокальних середовищах та проведено аналіз їх стійкості. Зокрема тут доведено можливість стабілізації мультизарядних вихрових солітонів в нелокальних нелінійних середовищах.

В підрозділі 2.2 розглянута модель, яка описує поширення огинаючої хвильового пакету Ψ та базується на обезрозміреному УНРШ

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\Delta_{\perp}\Psi+\Theta\Psi=0\,, \qquad (1)$$

з нелінійним відгуком Θ, що враховує просторову нелокальність

$$\Theta(\vec{r})=\int R(|\,\vec{r}-\vec{r}_1\,|)\,|\,\Psi(\vec{r}_1)\,|^2\;d^2\vec{r}_1\,, \qquad (2)$$

де функція $R(r)$ — ядро нелокальності, $\Delta_{\perp}$ — поперечна компонента Лапласіану, z — безрозмірна еволюційна змінна. В різних задачах в якості еволюційної змінної може виступати будь-яка змінна, що визначає еволюцію розв'язків. Тут це координата в напрямку поширення пучка. Одиниця виміру цієї координати має різний фізичний зміст в залежності від задачі та зазвичай її називають дифракційною довжиною.

Якщо просторово масштабований розподіл інтенсивності хвильового пакету $|\Psi|^2$ набагато ширший за ефективну ширину ядра нелокальності $R(r)$, нелінійний член перетворюється на нелінійність типу Кера ($\Theta\to|\Psi|^2$). В протилежному випадку, тобто в сильно нелокальному режимі, УНРШ переходить в лінійне рівняння Шредінгера з потенціалом у вигляді гармонічного осцилятора [Snyder A. W., 1997].

В даному розділі розглядається феноменологічний нелокальний нелінійний відгук з регулярним ядром у вигляді гаусоїди:

$$R(|\,\vec{r}-\vec{r}_1\,|)=\frac{\alpha^2}{\pi}\exp\!\left(-\alpha^2\,|\,\vec{r}-\vec{r}_1\,|^2\right), \qquad (3)$$

де α — параметр нелокальності. Зберігаючи основні властивості нелокальних середовищ, така модель дозволяє проводити точні аналітичні обрахунки.

В підрозділі 2.3 розглянуто одиничні солітонні та вихрові структури. Стаціонарні розв'язки рівняння (1) представляються в циліндричних координатах у наступній формі:

$$\Psi(r,\varphi,z)=\psi(r)\exp(im\varphi+i\Lambda z)\,, \qquad (4)$$

де φ і r — азимутальний кут і радіальна координата відповідно, Λ — стала поширення пучка, z — безрозмірна еволюційна змінна. Розв'язки (4) описують або солітон, коли m = 0, або вихровий солітон з топологічним зарядом m, коли m > 0. Підставивши (4) в (1) і (2), отримаємо наступне інтегро-диференційне рівняння для функції $\psi(r)$:

$$-\Lambda\psi + \Delta_r^{(m)}\psi + \theta\psi = 0\,, \tag{5}$$

де

$$\theta(r) = \int R(|\vec{r} - \vec{r}_1|)\psi(r_1)\exp(im\varphi_1)d^2\vec{r}_1,$$

$$\Delta_r^{(m)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}\,.$$

Розгляд розв’язків цього рівняння проведено за допомогою аналітичного аналізу, що ґрунтується на варіаційному підході.

Як відомо [Snyder A. W., 1997], нелокальне НРШ в сильно нелокальній границі (коли просторово масштабована функція відгуку є набагато ширшою за область локалізації хвильового пакета) переходить в лінійне рівняння Шредінгера з потенціалом у вигляді гармонічного осцилятора. Оскільки моди Лагерра-Гауса є власними станами двовимірного лінійного осцилятора, то логічно припустити, що варіаційний метод з пробною функцією у формі

$$\Psi(r,\varphi,z) = h(z)\xi^m L_n^{(m)}(\xi^2)\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\{1 + i\tilde{b}(z)\} + im\varphi + i\Phi(z)\right)$$

дасть точний опис всіх власних мод, особливо в сильно нелокальному режимі. Тут $L_n^{(m)}(x)$ — узагальнений поліном Лагерра, n — число вузлів радіального профілю, m — топологічний заряд, $\xi = r/a(z)$, де $a(z)$ — перший варіаційний параметр. Варіаційний параметр $a(z)$ характеризує радіус солітонної структури:

$$a^2 = \left\langle r^2 \right\rangle (2n + m + 1)\,,$$

де $\left\langle r^2 \right\rangle = N^{-1}\left\langle \Psi \middle| r^2 \middle| \Psi \right\rangle$ — середньо квадратичний радіус, N — потужність пучка, що задається умовою нормування. Другий варіаційний параметр $\tilde{b}(z)$ називають фазовою кривиною. Амплітуда $h(z)$ не є варіаційним параметром, оскільки може бути отримана з умови нормування.

Основною перевагою обраної пробної функції є те, що в результаті отримано явну аналітичну залежність фізичних властивостей досліджуваної структури від варіаційних параметрів, які теж мають зрозуміле фізичне значення. З іншого боку, оскільки форма пробної функції є фіксованою, вона не дозволяє описувати процеси, що супроводжуються суттєвою деформацією початкової структури. В рамках варіаційного методу неможливо досліджувати стійкість локалізованих структур по відношенню до збурень, що пов’язані зі зміною форми і які не можуть бути представлені як малі зміни варіаційних параметрів.

Найбільш важливим з практичної точки зору результатом варіаційного аналізу є знайдена аналітична залежність $N(a)$, яка дає можливість отримати в явному вигляді порогове значення числа квантів, нижче якого вихор або солітон не можуть існувати:

$$N > N_{cr} = \lim_{a\to\infty} N(a) = 4^{m+1}\pi(m+1)(m!)^2/(2m)!.$$

Використовуючи подібну процедуру, були розглянуті необертальні (m = 0) розв'язки з одним (n = 1) і двома вузлами (n = 2). Ці структури також характеризуються певними пороговими значеннями числа квантів, які було знайдено в даному розділі.

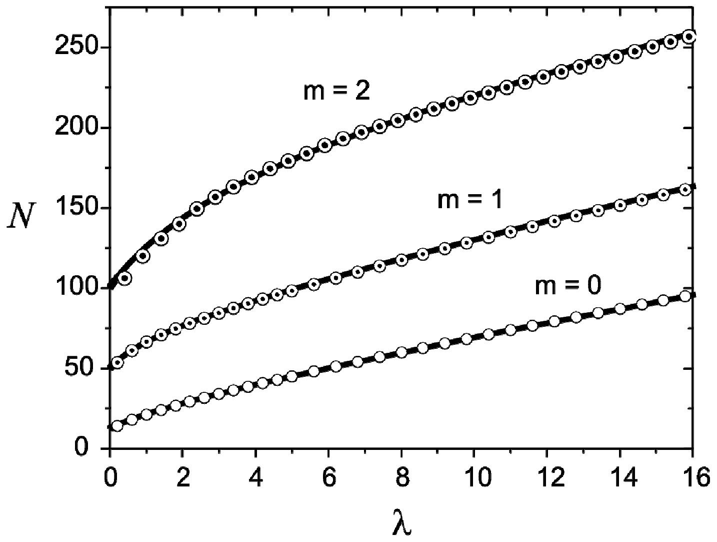

Рис. 1. Потужність N в залежності від параметра $\lambda = \Lambda/\alpha^2$ для солітонів (n = 0, m = 0) та вихрових солітонів (n = 0, m = 1, 2) (суцільні криві відповідають варіаційним результатам, кружки — чисельному розрахунку)

На основі залежності $N(a)$ було побудовано графіки параметричної залежності $N(\lambda)$. Результати для залежності $N(\lambda)$, отримані за допомогою варіаційного аналізу, наведено на рис. 1 для фундаментальних солітонів і вихрових солітонів. Описана варіаційна процедура дає можливість для аналізу будь-яких стаціонарних радіально-симетричних локалізованих структур.

Окрім того, використовуючи варіаційний аналіз, було вивчено радіально-симетричну динаміку локалізованих хвильових пакетів, що поширюються в напрямку вісі z. Однак, оскільки пробна функція є радіально-симетричною, то варіаційний підхід не дає можливості вивчити стійкість стаціонарних розв'язків по відношенню до азимутальних збурень, що порушують симетрію. Умови стійкості стаціонарних розв'язків відносно малих узагальнених двовимірних збурень також було отримано в даному підрозділі, але за допомогою чисельного моделювання та лінійного аналізу.

Для проведення чисельного моделювання рівняння (5) переписується у вигляді інтегрального рівняння

$$\psi(r) = \int_0^\infty \theta(\eta)\psi(\eta)G_m\left(\eta, r; \sqrt{\Lambda}\right)\eta\, d\eta, \tag{6}$$

з функцією Гріна у вигляді

$$G_m(\xi_1,\xi_2;a) = \begin{cases} K_m(a\xi_2)I_m(a\xi_1), & 0 \le \xi_1 < \xi_2, \\ I_m(a\xi_2)K_m(a\xi_1), & \xi_2 < \xi_1 < +\infty, \end{cases} \tag{7}$$

де $I_m(x)$ і $K_m(x)$ — модифіковані функції Бесселя першого і другого роду відповідно. На рис. 1 наведено залежність $N(\lambda)$, отриману за допомогою чисельного моделювання. Отримані результати в цілому добре узгоджуються з варіаційними оцінками. Зауважимо, що нелокальна границя $\alpha^2 << \Lambda$

відповідає великим значенням параметра λ і, як видно з рис. 1, великим значенням потужності пучка N.

Далі виконано дослідження стійкості отриманих розв'язків. Для цього нестаціонарний розв'язок поблизу стійкого стану шукається у вигляді

$$\Psi(r,\varphi,z) = \left\{\psi(r) + \delta\psi_+ + \delta\psi_-^*\right\}\exp(i\Lambda z + im\varphi), \tag{8}$$

де введено малі збурення

$$\delta\psi_\pm(r,\varphi,z) = \varepsilon_\pm(r)\exp(i\omega z + iL\varphi),$$

тут ω — частота, L — азимутальне квантове число збурення. В результаті лінеаризації НРШ отримується система рівнянь відносно $\varepsilon_\pm$. Отриману систему можна розглядати як задачу на власні значення ω і власні функції $\varepsilon_\pm$ з граничними умовами $\varepsilon_\pm \to 0$, при $r\to\infty$. Цю спектральну задачу було розв'язано чисельно. Якщо уявна частина хоча б одного з власних значень ω є додатньою, то це означає, що збурення буде зростати, отже розв'язок є нестійким. Величину Im(ω) називають інкрементом зро-стання азимутального збурення. Цю задачу потрібно було досліджувати окремо для різних значень L для визначення стійкості різних мод азимутальних збурень.

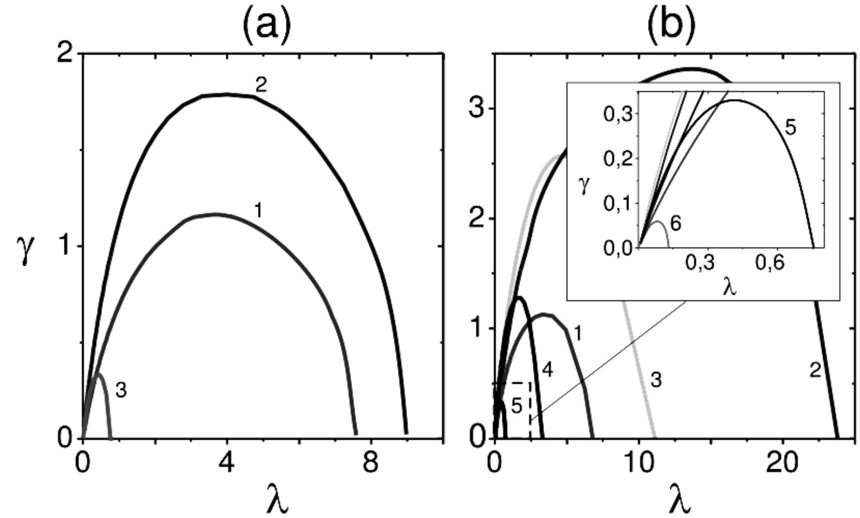

Рис. 2. Масштабований інкремент зростання γ = Im(ω)/α^2 лінійних мод збурення в залежності від параметра $\lambda = \Lambda/\alpha^2$ для вихорів з (a) m = 1 та (b) m = 2. Числа біля кривих відповідають значенням азимутального числа L.

На рис. 2 (a) зображено залежність інкременту зростання від параметра λ для однозарядного (m = 1) вихрового солітона. Видно, що тільки моди з L = 1, 2, 3 можуть бути нестійкими. Модуляційна нестійкість майже пригнічується в дуже нелокальному режимі: інкремент зникає при скінченному значенні λ. Також видно, що моди з азимутальним числом L = 2 відповідають найбільшому інкременту з найширшою областю нестійкості, і всі інкременти дорівнюють нулю при $\lambda > \lambda_{cr}^{(1)} \approx 9.1$. Подібний аналіз було пророблено для мультизарядних вихорів (з m = 2,...5). На Рис. 2 (b) зображено інкремент для двозарядного (m = 2) вихрового соліона. З малюнку слідує, що у досліджуваному випадку модуляційна нестійкість зникає при $\lambda > \lambda_{cr}^{(2)} \approx 23.8$. Таким чином, в середовищах з нелокальним відгуком у формі (3) мультизарядні вихори можуть бути стійкими. Варто зауважити, що вихрові солітони з m > 1, знайдені в [Yakimenko A. I., 2005], є нестійкими в середовищах з тепловою нелокальною нелінійністю. З цього випливає, специфічний тип нелокальної взаємодії може суттєво впливати на динаміку вихрових структур, хоча інші властивості розв'язків і є дуже схожими.

Результати лінійного аналізу були підтверджені великою кількістю чисельних розрахунків для динаміки збурених стаціонарних розв'язків. Для розв'язку нелокального НРШ з функцією відгуку (3) було застосовано метод розщеплення кроку з оберненням лінійного оператору за допомогою швидкого перетворення Фур'є, що також відомий як SSFT (Split Step Fourier Transform method) [Agrawal G. P., 2001]. При дослідженні часової еволюції в якості початкових умов для знаходження солітонів вищих порядків було використано чисельно знайдені стаціонарні вихрові розв'язки і варіаційні профілі. В чисельних розрахунках було застосовано різні види збурень, такі як випадковий шум, радіально симетричні та азимутально періодичні збурення. Результати чисельного моделювання добре узгоджуються з результатами, отриманими на основі лінійного аналізу: вихрові солітони стають стійкими вище критичної потужності, яка в межах наведених знаків співпадає з потужністю, передбаченою лінійним аналізом стійкості ($\lambda_{cr}^{(1)} \approx 9.1,\ \lambda_{cr}^{(2)} \approx 23.8$). На рис. 3 наведено приклад типової нестійкої поведінки вихору в області $\lambda < \lambda_{cr}$. Причиною руйнування вихору є азимутальна модуляційна нестійкість, що приводить до розпаду структури на два незв'язаних солітони.

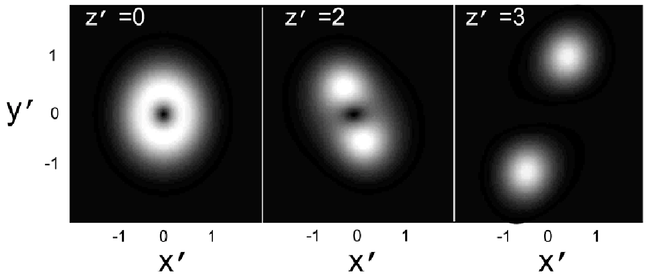

Рис. 3. Приклад нестійкої еволюції однозарядного вихрового солітона при $\lambda = 4$

Солітони з вузлами в слабко нелокальному режимі показують нестійку поведінку, аналогічну до поведінки вихорів. Однак, коли потужність пучка зростає, спостерігається незвичайна динаміка цих солітонів. Початкова огинаюча поля розпадається на декілька частин, але потім вона відновлюється при поширенні на більші відстані. При подальшому збільшенні потужності солітони вищих порядків стабілізуються – їх поширення має стійкий характер без розвалу протягом декількох сотень ефективних періодів осциляцій.

В підрозділі 2.4 розглянуто поширення більш складної локалізованої структури, а саме асиметричної структури типу диполя. Для цього розглядаються стаціонарні розв'язки рівняння (1) у формі

$$\Psi(x,y,z) = \psi(x,y)\exp(i\Lambda z),$$

і не робиться припущення про радіальну симетрію $\psi(x,y)$. На відміну від НРШ з локальною кубічною нелінійністю, рівняння (1) з нелокальним нелінійним відгуком середовища θ з ядром нелокальності (3) має два характеристичні поперечні масштаби: “внутрішній” масштаб $\Lambda^{1/2}$ (в НРШ цей масштаб визначає характеристичні розміри солітона) і “зовнішній” масштаб α, який є мірою нелокальності. Отже, характеристичні розміри самоузгодженої потенціальної ями в рівнянні (1) можуть суттєво відрізнятися від $\Lambda^{-1/2}$. Завдяки цьому стає можливим існування складних солітонних структур.

В цьому підрозділі розгляд обмежено локалізованими структурами типу диполя. Диполь складається з двох монополів, що знаходяться в протифазі. Характеристична ширина монополів в диполі і відстань між ними зменшується зі збільшенням параметра $\lambda = \Lambda/\alpha^2$.

Було досліджено стійкість таких дипольних розв’язків і вивчено їх еволюцію в присутності малих початкових збурень. Чисельне моделювання наочно показало, що диполі з $\lambda > \lambda_{th}$, де $\lambda_{th} \approx 21$ — порогове значення, залишаються стійкими по відношенню до малих початкових шумових збурень на досить великих відстанях поширення (порядку $z' = 3000$). Додатково стійка динаміка спостерігалась при дослідженні залежності середньої інтенсивності і середньоквадратичного радіуса від z'. При стійкому поширенні ці величини осцилюють з малою амплітудою поблизу рівноважного значення. Слід відзначити, що диполі з суттєво великими (порівняно з λ_{th}) значеннями λ залишаються стійкими на дуже великих відстанях (багато тисяч дифракційних довжин) в присутності досить значних (до 5% від амплітуди пучка) збурень. Проведено серію обчислень для $\lambda > 200$ в присутності значного початкового шуму. Аналіз еволюції таких збурених розв’язків показав, що диполь є дуже стійким — навіть при $z' = 2000$ не було зафіксовано значних змін форми диполя.

Диполі стають нестійкими (навіть, якщо початковий шум є дуже малим), якщо $\lambda < \lambda_{th}$. Ситуація, однак, змінюється нижче $\lambda_{cr} \approx 7{,}6$. В цьому випадку диполь розпадається на два монополі, що рухаються в протилежних напрямках без зміни своєї форми, тобто монополі розходяться на нескінченність. Це зумовлено тим фактом, що “енергія зв’язку” диполя $\delta N = N_{dip} - 2N_{mon}$ стає дуже малою коли λ зменшується до критичного значення $\lambda_{cr} = 7{,}6$. Як наслідок, диполь з $\lambda \leq \lambda_{cr}$ можна легко (під дією досить малих початкових збурень) розщепити на два солітони типу монополя.

В даному підрозділі також було проведено варіаційний аналіз дипольних розв’язків. Результати варіаційного аналізу якісно узгоджуються з результатами чисельного моделювання. Зокрема, знайдене критичне значення $\lambda_{cr} = 7{,}6$ узгоджується з результатами прямих чисельних розрахунків.

<u>В третьому розділі</u> [2] розглянуто складні локалізовані структури в системах з нелокальним нелінійним відгуком, що зазвичай називають тепловою нелінійністю. Така назва використовується завдяки тому, що специфічна форма нелокального відгуку була вперше запропонована для врахування збурень електронної температури при поширенні лазерного пучка в плазмі [Litvak A., 1975]. Однак, аналогічна модель знаходить застосування і в інших системах, де нелокальний відгук жодним чином не пов’язаний з температурою, зокрема в рідких кристалах.

Властивості багатьох локалізованих структур в середовищах з тепловою нелінійністю вже добре вивчені. Так відомо, що окрім фундаментальних солітонів в таких середовищах можуть існувати і вихори. Стійкими в таких середовищах є лише однозарядні вихори, а мультизарядні демонструють азимутальну нестійкість [Yakimenko A. I., 2005]. Однак, при дослідженні більш складних локалізованих структур зазвичай розглядається більш просте регулярне ядро нелокальності (наприклад [Lopez-Aguayo S., 2006]), що не завжди є коректним. Тому в даному розділі розглянуто складні локалізовані структури в середовищах з тепловою нелінійністю. Для розглянутої моделі було знайдено клас радіально асиметричних необертальних двовимірних солітонних розв'язків і показано, що при певній вхідній потужності скалярні розв'язки типу диполя є стійкими. В той же час, триполі та квадруполі є завжди нестійкими, але можуть існувати протягом значної відстані, що дає можливість їх експериментального спостереження. Знайдено область стійкості для дипольних мультисолітонів, а також знайдено і проаналізовано дипольні та квадрупольні розв'язки, що мають ненульовий кутовий момент (так звані "азимутони"), а також векторні вихрові структури.

В підрозділі 3.2 виведено основні рівняння, на яких базується модель з тепловою нелінійністю, причому показано як ця модель є застосовною і для слабко іонізованої плазми і для нематичних рідких кристалів. Основною системою рівнянь, записаною в відповідних обезрозмірених змінних, є

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\Delta_\perp\Psi+\theta\Psi=0, \tag{9}$$

$$\alpha^2\theta-\Delta_\perp\theta=|\Psi|^2, \tag{10}$$

де α і θ, як і в попередньому розділі, є параметром нелокальності та нелінійним відгуком відповідно. Така модель називається моделлю з тепловою нелінійністю, оскільки рівняння (9) і (10) описують поширення в напрямку вісі z електричного поля з огинаючою $\Psi(x,y,z)$ в плазмі, що характеризується температурним збуренням $\theta(x,y,z)$ [Litvak A., 1975]. Також, ідентична модель описує поширення лазерного пучка в нематичному рідкому кристалі [Conti C., 2003]. Однак тут нелокальний нелінійний відгук задається не температурним розподілом, а просторовим розподілом молекулярного директора (напрямку орієнтації молекул) в рідкому кристалі.

Рівняння (9) і (10) можуть бути переписані у вигляді одного інтегро-диференційного рівняння

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\Delta_\perp\Psi+\Psi\int R(|\vec{r}-\vec{r}_1|)\Psi(\vec{r}_1)d^2\vec{r}_1=0, \tag{11}$$

з ядром $R(\xi)=K_0(\alpha\xi)/(2\pi)$, де $K_0(z)$ – функція Макдональда нульового порядку. Нелінійний відгук в рівнянні (11) має суттєво нелокальний характер і по структурі є еквівалентним до (2).

Не роблячи припущення про радіальну симетрію $\psi(x,y)$, шукаємо стаціонарні розв'язки системи рівнянь (9) і (10) у формі $\Psi(x,y,z) = \psi(x,y)\exp(i\lambda z)$, так що $\psi(x,y)$ задовольняє рівнянням

$$-\lambda\psi + \Delta_{\perp}\psi + \theta\psi = 0, \tag{12}$$

$$\alpha^2\theta - \Delta_{\perp}\theta = -|\psi|^2. \tag{13}$$

Для чисельного моделювання було використано перемасштабовані змінні $\psi \to \psi/\alpha$, $\theta \to \theta/\alpha^2$, $z \to z\alpha^2$, $(x,y) \to (x,y)\alpha$, $\lambda \to \lambda/\alpha^2$. В такому випадку сильно нелокальний режим ($\alpha << 1$) відповідає великому значенню нової сталої поширення λ. В даному підрозділі було чисельно знайдено клас радіально асиметричних мультипольних локалізованих розв'язків, використовуючи техніку релаксації, подібну до тієї, що описана в роботі [Petviashvili V. I., 1989].

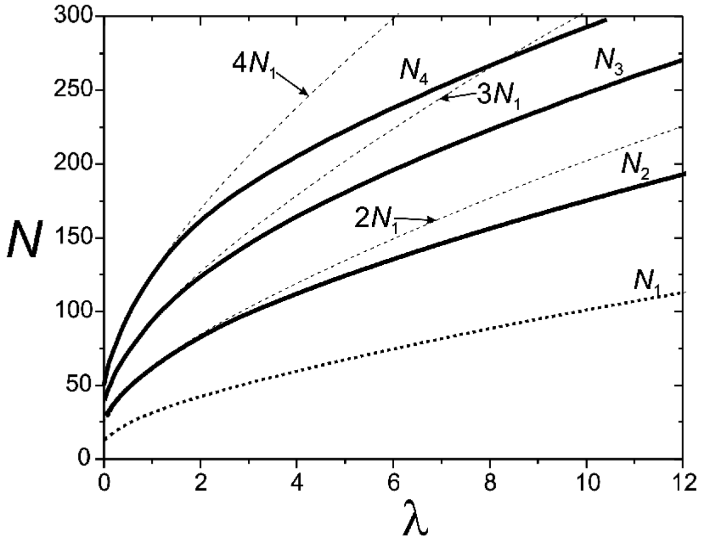

Рис. 4. Потужність мультисолітонів N_S в залежності від параметра λ (S — кількість солітонів в мультиполі). Суцільні криві відповідають зв'язаним станам S солітонів, що знаходяться в протифазі, пунктирні криві — SN_1

Для кращого розуміння властивостей стаціонарних необертальних мультисолітонів було проведено аналітичний варіаційний аналіз. Результати варіаційного аналізу добре узгоджуються з проведеними чисельними розрахунками. Рис. 4 показує залежність потужності пучка N від сталої поширення λ для монополів, диполів, триполів і квадруполів. Порогова потужність для існування стаціонарного зв'язаного стану S солітонів є дуже близькою до порогу формування S одиничних незв'язаних фундаментальних солітонів. Більш того, "енергія зв'язку" $N_S - SN_1$ (де N_1 – потужність для одиничного фундаментального солітона) є дуже малою для $\lambda < 1{,}9$, так що мультисолітони з такими значеннями сталої поширення λ є нестійкими відносно розпаду на незв'язані солітони.

В підрозділі 3.3 для аналізу стійкості отриманих мультипольних розв'язків було вивчено еволюцію (поширення) диполів, триполів, квадруполів і азимутонів в присутності малих початкових збурень. В залежності від значення параметра λ, спостерігались три різні режими поширення диполя. Перший режим відповідає області $\lambda < \lambda_{cr}$, причому критичне значення сталої поширення є універсальним для всіх мультипольних розв'язків і знайдене як $\lambda_{cr} \approx 1{,}9$. Якщо $\lambda < \lambda_{cr}$, початковий диполь розділяється на два монополі, які рухаються в протилежних напрямках без зміни своєї форми, тобто монополі просто розбігаються на нескінченність. З рис. 4 видно, що енергія зв'язку $\delta N = N_{dip} - 2N_{mon}$ в диполі прямує до нуля, коли λ досягає $\lambda_{cr} \approx 1{,}9$. Це пояснює чому диполь з $\lambda \leq \lambda_{cr}$ може досить легко (під дією досить малих початкових збурень) розпадатись на два монополі типу солітонів.

Другий режим відповідає області $\lambda_{cr} < \lambda < \lambda_{th}$, де $\lambda_{th} \approx 4$. Чисельні розрахунки показали, що в такому діапазоні значень параметра λ диполі є стійкими по відношенню до початкових шумових збурень. Якщо параметр збурення ε не дуже великий, диполі залишаються стійкими протягом значної відстані ($z > 3000$).

Подальше (вище $\lambda_{th} \approx 4$) збільшення параметра λ різко скорочує відстань поширення, на якій диполь є стійким (диполь руйнується на відстанях $z \leq 1$). Отже третя область, $\lambda > \lambda_{th}$, знову є областю нестійкості для диполів.

Таким чином, стійкі диполі існують тільки всередині скінченної, досить вузької області значень сталої поширення $1{,}9 < \lambda < 4$. В попередньому розділі показано можливість стійкого поширення диполів в нелокальних середовищах з регулярним ядром, але в тому випадку область стійкості не була обмежена зверху. Якісно відмінна поведінка диполів в цих моделях може бути пов'язана з властивостями регулярності функцій $R(\xi)$ в (11) — для моделі, що описується системою рівнянь (9) і (10), функція $R(\xi)$ має сингулярність в нулі. Отже, як випливає з отриманих результатів, специфічна форма нелокального відгуку є вирішальною для існування стійких мультисолітонних структур.

Дослідження еволюції триполів та квадруполів показало, що ці структури є нестійкими, але в області стійкості диполів $\lambda_{cr} < \lambda < \lambda_{th}$ вони можуть існувати протягом декількох десятків дифракційних довжин, що може бути достатнім для їх експериментального спостереження.

Для азимутонів було показано, що вони стають стійкими вище деякого критичного значення сталої поширення $\lambda > \lambda_{cr} \approx 15$. Нижче критичного значеннях ці структури поводять себе аналогічно до необертальних мультисолітонів, тобто розпадаються на незв'язані солітони.

Слід відмітити, що пряме чисельне моделювання не може дати строгого доведення стійкості або нестійкості мультисолітонів. По-перше, в прямих чисельних експериментах можна розглядати поширення тільки на скінченних відстанях. По-друге, результати обмежені профілем збурення. Строге доведення повинно містити лінійний аналіз стійкості з відповідною спектральною задачею. Тим не менше, з проведених чисельних розрахунків динаміки на скінченних, але великих, відстанях можна зробити висновок, що принаймні в тих випадках, які вважаються стійкими, можливий інкремент зростання є дуже малим. Отже, оскільки обговорені структури залишаються стійкими на дуже великих відстанях, протягом сотень дифракційних довжин, вони з практичної точки зору можуть вважатися стійкими.

В підрозділі 3.4 розглянуто поширення векторних вихорів в середовищах з тепловою нелінійністю. Такі структури описуються наступною системою з трьох зв'язаних рівнянь:

$$i\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} + \Delta_\perp \Psi_1 + \theta \Psi_1 = 0,$$

$$i\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}+\Delta_\perp\Psi_2+\theta\Psi_2=0,$$

$$\alpha^2\theta-\Delta_\perp\theta=|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2.$$

Стаціонарні розв’язки цієї системи, що відповідають двом неперервним лазерним пучкам різної частоти, шукаємо у вигляді

$$\Psi_n(r,\varphi,z)=\psi_n(r)\exp(i\Lambda_n z+im_n\varphi),$$

де $n = (1, 2)$, m_n — топологічний заряд, Λ_n — сталі поширення. Було показано, що векторний вихор з конфігурацією (1,−1) не проявляє азимутальної нестійкості на значних відстанях. Слід зауважити, що такі вихори можуть існувати лише при дуже близьких значеннях сталих поширення Λ_1 та Λ_2. При збільшенні різниці між сталими поширення, один з вихорів повністю зникає і розв’язок вироджується до одного скалярного вихора.

В четвертому розділі [3] аналітично та чисельно досліджено стаціонарні розв’язки зв’язаної системи НРШ з локальним нелінійним відгуком керівського типу. Розглянута задача знаходить застосування для опису поширення двочастотного лазерного пучка в плазмі у випадку фокусуючої внутрішньої взаємодії та дефокусуючої крос-взаємодії, а також в двокомпонентних БАК з притягуванням всередині компонент і відштовхуванням між компонентами. Розвинутий варіаційний підхід пояснює істотну модифікацію форми солітона і добре узгоджується з проведеними чисельними розрахунками. Стійкість отриманих солітон-солітонних пар була підтверджена чисельно. Було досліджено різні сценарії еволюції, особливо азимутальну асиметричну модуляційну нестійкість, яка суттєво обмежує відстань поширення векторних солітонів високої потужності. Було знайдено умови квазістійкого поширення двовимірних векторних солітонів.

В підрозділі 4.2 сформульовано основні рівняння, необхідні для вивчення умов формування самоіндукованих структур та їх стійкості, а саме, наступна система зв’язаних НРШ:

$$i\frac{\partial\Psi_1}{\partial z}+\left(\Delta_\perp+|\Psi_1|^2+\sigma|\Psi_2|^2\right)\Psi_1=0, \tag{14}$$

$$i\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}+\left(\Delta_\perp+\sigma|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2\right)\Psi_2=0, \tag{15}$$

де σ — параметр крос-взємодії. Ці рівняння описують два некогерентні взаємодіючі хвильові пучки, що поширюються в нелінійному середовищі у напрямку вісі z. Властивості світлих векторних солітонів добре відомі для середовищ з самофокусуючою та крос-фокусуючою ($\sigma > 0$) нелінійностями [Carlsson A. H., 2000]. В реально існуючих нелінійних оптичних середовищах параметр крос-взємодії σ може змінюватись в широкому діапазоні. Його значення залежить від стану поляризації, природи нелінійності та анізотропії середовища. Але в переважній більшості середовищ знак крос-взаємодії співпадає зі знаком взаємодії всередині компонент. Відомо лише декілька систем, в яких знаки внутрішньої та крос-взаємодії можуть відрізнятись.

В підрозділі 4.3 розглядаються радіально симетричні стаціонарні розв'язки системи рівнянь (14), (15) у формі

$$\Psi_j(r,\varphi,z)=\psi_j(r)\exp(i\beta_j z),$$

де β_1 та β_2 — незалежні сталі поширення. Шукаємо розв'язки, які описують основний стан, тому $\psi_j(r)$ можуть розглядатись як дійсні функції. Виберемо $\sqrt{\beta_1}$ як масштаб радіальної координати і введемо солітонний параметр $\lambda = \beta_2/\beta_1$. Використовуючи наступне масштабування солітонних профілів: $\psi_1=\sqrt{\beta_1}u(r)$, $\psi_2=\sqrt{\beta_1}v(r)$, було отримано наступну систему стаціонарних рівнянь

$$-u+\Delta_r u+(u^2+\sigma v^2)u=0, \tag{16}$$

$$-\lambda v+\Delta_r v+(\sigma u^2+v^2)v=0, \tag{17}$$

де Δ_r — радіальна частина лапласіана. В цьому розділі було чисельно і аналітично досліджено сім'ю двопараметричних векторних солітонів (з параметрами λ і σ) для дефокусуючої міжкомпонентної нелінійності ($\sigma < 0$).

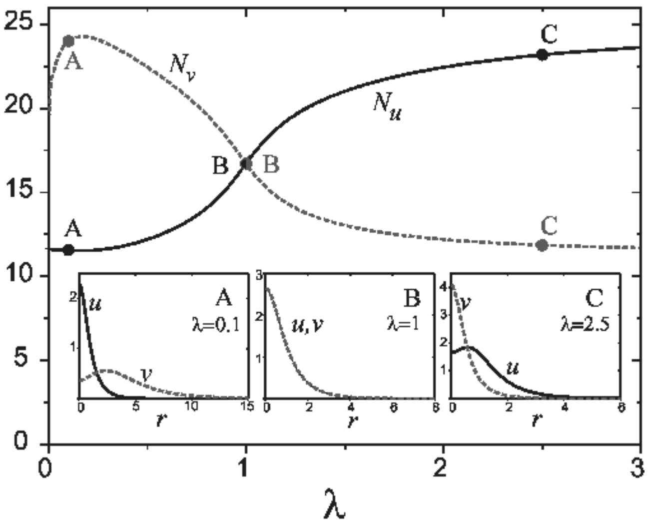

Рис. 5. Потужності пучків N_u (суцільна крива) та N_v (пунктирна крива) в залежності від солітонного параметра λ для сталої зв'язку σ = −0,3. На вставках наведені приклади радіальних профілів $u(r)$ (суцільна крива) та $v(r)$ (пунктирна крива) для точок відмічених на кривих $N_u(\lambda)$ та $N_v(\lambda)$

Стаціонарні рівняння були розв'язані за допомогою стабілізованої ітеративної процедури, аналогічної до тієї, що використана в попередніх розділах. Потужність N_j як функція солітонного параметра λ при σ = −0,3 зображена на рис. 5. Можна помітити, що при λ = 1 два рівняння системи (16), (17) співпадають. Це пояснює той факт, що криві $N_1(\lambda)$ та $N_2(\lambda)$ перетинаються при λ = 1.

У підрозділі 4.4 проведено аналіз стійкості векторних солітонів. Відомо [Ostrovskaya E. A., 1999], що в середовищах з притягувальною міжкомпонентною взаємодією двовимірні векторні солітони є лінійно нестійкими. Відштовхувальна міжкомпонентна взаємодія має стабілізуючий ефект, але питання, чи векторні солітони цього типу є стійкими чи ні, залишається відкритим. Для відповіді на це питання в даному підрозділі чисельно розв'язано динамічні рівняння (14) та (15), де в якості початкового наближення використовувались попередньо розраховані векторні солітони з додаванням гаусового шуму. Чисельне інтегрування було проведено на прямокутній декартовій сітці за допомогою стандартного підходу SSFT [Agrawal G. P., 2001].

Одночасний колапс обох солітонних компонент є неможливим завдяки міжкомпонентному відштовхуванню. Однак, якщо потужності обох компонент перевищують порогову потужність N_{th} $\approx 11{,}7$, компонента, яка має більшу потужність, швидко стискається до вісі пучка і колапсує на відстані всього декілька дифракційних довжин.

Структури, що дають найбільше надій на стійке поширення — це хвильові пакети, в яких надкритична ($N > N_{th}$) кільцева компонента утворює пастку для світлої неколапсуючої компоненти з меншою інтенсивністю $N < N_{th}$. Приклади таких розв'язків наведені на рис. 5 (вставки A і C). В такому випадку кільцевий солітон утримує внутрішній світлий солітон в ефективній потенціальній ямі. В той же час, можна очікувати, що відштовхувальна внутрішня частина буде запобігати колапсу кільцевої компоненти. В проведених чисельних експериментах дійсно спостерігалась суттєва стабілізація таких векторних солітонів. Проте, при подальшому поширенні, внутрішня компонента поступово витікає з потенціальної ями, утвореної зовнішньою кільцевою компонентою. В результаті, замість кільцевого солітона, з'являється світлий пучок високої інтенсивності з максимумом в центрі, який є нестійким по відношенню до колапсу. І хоча стійке поширення такого пучка спостерігалось в деяких випадках на відстані до сотні дифракційних довжин і більше, досягти повної стійкості в такому режимі не вдається.

Для подальшої стабілізації потрібно збільшити інтенсивність і ширину ефективної потенціальної ями, щоб запобігти розширенню внутрішньої компоненти. Але якщо потужність кільцевої компоненти перевищує критичне значення $N_{cr} \approx 2N_{th}$, то починає зростати модуляційна нестійкість, що порушує азимутальну симетрію. Початкове кільце розпадається на два фрагменти, які рухаються від центру і колапсують. Модуляційна нестійкість спостерігалась раніше для скалярних розв'язків вищих порядків, таких як вихрові солітони [Tikhonenko V., 1996], солітони з вузлами [Soto-Crespo J. M., 1991] та для векторних солітон-вихрових пар [Yakimenko A. I., 2009]. Однак, для розглянутої задачі було продемонстровано модуляційну нестійкість для радіально-симетричного розв'язку, що відповідає основному стану.

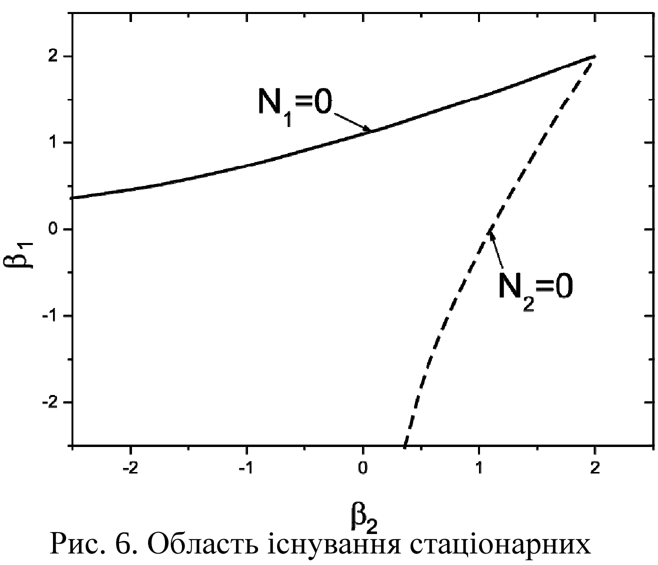

Рис. 6. Область існування стаціонарних векторних станів на площині (β_1,β_2)

В підрозділі 4.5 показано, як система рівнянь Гроса-Пітаєвського, аналогічна до (14) та (15), може бути застосована для знаходження хвильової функції двокомпонентних БАК в наближенні середнього поля [Yakimenko A. I., 2009]. Як і у випадку двочастотного пучка в плазмі, область існування стаціонарних розв'язків визначається залежностями $N_1(\beta_1,\beta_2)$ та

$N_2(\beta_1,\beta_2)$, але параметри β_j тепер мають сенс не сталої поширення, а хімічного потенціалу. В даному підрозділі побудовано ці залежності та визначено область існування стаціонарних розв'язків в двокомпонентних БАК. Область існування стаціонарних розв'язків на площині (β_1,β_2) – це область обмежена лініями $N_1(\beta_1,\beta_2) = 0$ та $N_2(\beta_1,\beta_2) = 0$ (див. рис. 6). В цій області інтенсивності обох компонент є додатніми.

ВИСНОВКИ

В даній роботі було проведено систематичне дослідження різних двовимірних локалізованих структур в декількох нелінійних моделях, що базуються на формалізмі узагальненого нелінійного рівняння Шредінгера.

1. Для моделі з нелокальним нелінійним відгуком з ядром у вигляді гаусоїди:
   - Аналітично, в рамках варіаційного методу, та чисельно знайдено стаціонарні розв'язки, що відповідають фундаментальним солітонам, однозарядним та двозарядним вихорам, солітонам з одним та двома вузлами, для різних значень параметра λ, що характеризує нелінійний зсув хвильового числа та ступінь нелокальності. Для всіх розглянутих структур знайдено залежності потужності пучка від λ.
   - За допомогою лінійного аналізу стійкості показано, що модуляційна нестійкість вихорів пригнічується в сильно нелокальному режимі та знайдено критичні значення параметра λ, що обмежують області стійкості для однозарядного ($\lambda_{cr} \approx 9{,}1$) та двозарядного ($\lambda_{cr} \approx 23{,}8$) вихорів. Результати лінійного аналізу підтверджено прямими чисельними розрахунками.
   - Чисельно досліджено еволюцію солітонів з вузлами і показано, що вони стають стійкими в сильно нелокальному режимі.
   - Чисельно знайдено стаціонарні дипольні розв'язки та знайдено критичне значення параметра $\lambda_{th} \approx 21$, вище якого диполі є стійкими. Отриманий результат перевірено аналітичними варіаційними розрахунками.
2. Для моделі з тепловою нелінійністю:
   - Аналітично, в рамках варіаційного методу, а також чисельно знайдено стаціонарні мультисолітонні розв'язки для різних значень параметра λ. Побудовано залежності від λ основних характеристик локалізованих структур – ширини пучка, інтенсивності, амплітуди і т.ін.
   - Чисельно досліджено стійкість диполів та показано, що вони є стійкими лише в досить вузькій області значень параметра $1{,}9 < \lambda < 4$.
   - Триполі та квадруполі, хоча і виявились нестійкими, можуть поширюватись на значні відстані для значень λ, що відповідають області стійкості диполя.
   - Показано, що обертальні мультисолітони стають стійкими в сильно нелокальному режимі та знайдено відповідне критичне значення $\lambda_{cr} \approx 15$.

- Чисельно знайдено розв’язки типу векторних вихорів. Такі розв’язки не проявляють азимутальної нестійкості і можуть вважатись єдиним прикладом стійких вихорів вищих порядків в середовищах з тепловою нелінійністю.

Результати, отримані для двох розглянутих нелокальних нелінійних моделей, дозволяють стверджувати, що форма ядра нелокальності є принциповою для стійкості локалізованих структур.

3. Аналітично та чисельно знайдено векторні локалізовані розв’язки в системі з притягувальною взаємодією всередині компонент та відштовхувальною взаємодією між компонентами. Побудовано залежності інтенсивностей кожної з компонент від параметра λ для різних значень параметра крос-взаємодії σ.
4. Дослідження еволюції векторних солітонів показало принципову можливість стабілізації надкритичного лазерного пучка за допомогою іншого пучка меншої інтенсивності.
5. Знайдено стаціонарні локалізовані розв’язки системи рівнянь Гроса-Пітаєвського, які описують двокомпонентний БАК в зовнішній магнітній пастці та визначено область значень хімічних потенціалів, де можуть існувати такі стаціонарні розв’язки.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Yakimenko A. I. Dynamics of two-dimensional coherent structures in nonlocal nonlinear media / A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin, O. O. Prikhodko // Phys. Rev. E. — 2006. — Jun. — Vol. 73, № 6. — P. 066605.

2. Lashkin V. Two-dimensional nonlocal multisolitons / V. Lashkin, A. Yakimenko, O. Prikhodko // Physics Letters A. — 2007. — Vol. 366, № 4–5. — Pp. 422 – 427.

3. Yakimenko A. I. Bright vector solitons in cross-defocusing nonlinear media / A. I. Yakimenko, O. O. Prikhodko, S. I. Vilchynskyi // Phys. Rev. E. — 2010. — Jul. — Vol. 82, № 1. — P. 016605.

4. Stable multisolitary structures in plasmas with nonlocal nonlinearities / A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin, O. O. Prikhodko// Book of abstracts “International Conference on Plasma Physics”. – Kyiv : ICPP 2006. – P. 66.

5. Nonlocal multi-solitons / A. I. Yakimenko, V. M. Lashkin, O. O. Prikhodko // Book of abstracts “International Workshop on Nonlinear Physics and mathematics”. – Kyiv, 2006. – P. 48.

6. Vector matter-wave solitons in two-component Bose-Einstein condensates / O. O. Prikhodko, A. I. Yakimenko, S. I. Vilchinskii // Book of abstracts “The 9th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation”. – Pau, 2009. – P. 340.

7. Стійкі векторні двовимірні когерентні структури в нелінійних налокальних середовищах / О. Приходько// VIII Всеукр. школа-семінар і конкурс молодих вчених зі статистичної фізики

та теорії конденсованої речовини : зб. тез. – Львів, 2008. – С. 35.

Приходько О. О. Двовимірні локалізовані структури в нелінійних середовищах. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. – Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ, 2011.

В дисертаційній роботі проведено систематичне дослідження властивостей та динаміки двовимірних локалізованих структур в рамках декількох моделей, аналіз яких базується на формалізмі узагальненого нелінійного рівняння Шредінгера. Для нелокальної моделі з регулярним ядром показано можливість стійкого поширення однозарядних та багатозарядних вихорів, необертальних солітонів з вузлами, а також мультисолітонних структур типу диполя. В моделі з тепловою нелокальною нелінійністю проаналізовано стійкість мультисолітонних розв'язків. Показано, що диполі є стійкими в певному діапазоні значень сталої поширення, а триполі та квадруполі завжди нестійкі, хоча в області стійкості диполя час їх життя може бути значним. Також було показано можливість існування векторних мультизарядних вихорів, що є, по суті, єдиним способом отримання стійких вихорів вищих порядків в таких середовищах. В роботі також досліджено поширення двовимірних солітон-солітонних пар в двокомпонентних середовищах з притягуванням всередині компонент та відштовхуванням між компонентами. Такі структури є нестійкими, але в роботі визначено умови, які дозволяють їх квазістійке поширення на значні відстані.

Ключові слова: локалізовані хвилі, нелінійне рівняння Шредінгера, солітони, вихори, нелокальний відгук, колапс, модуляційна нестійкість.

Приходько Е. А. Двумерные локализированные структуры в нелинейных средах. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика. – Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, 2011.

В диссертационной работе проведено систематическое исследование свойств и динамики двумерных локализованных структур в рамках нескольких моделей, анализ которых основан на формализме обобщенного нелинейного уравнения Шредингера. Для нелокальной модели с регулярным ядром показана возможность устойчивого распространения однозарядных и мультизарядных вихрей, солитонов с узлами, а также мультисолитонных структур типа диполя. В модели с тепловой нелинейностью проанализирована устойчивость мультисолитонных решений. Показано,

что диполи являются устойчивыми в определенном диапазоне значений постоянной распространения, а триполи и квадруполи всегда неустойчивы, хотя при определенных условиях время их жизни может быть существенным, достаточным для их экспериментального наблюдения. Также была показана возможность существования векторных вихрей, которые являются, по сути, единственным способом получения устойчивых вихрей высших порядков в таких средах. В работе также исследовано распространение двумерных солитон-солитонных пар в двукомпонентных средах с притягиванием внутри компонент и отталкиванием между компонентами. Такие структуры являются неустойчивыми, но были определены условия, позволяющие их квазиустойчивое распространение на значительные расстояния.

Ключевые слова: локализованные волны, нелинейное уравнение Шредингера, солитоны, вихри, нелокальный отклик, коллапс, модуляционная неустойчивость.

Prikhodko O. O. Two-dimensional localized structures in nonlinear media. – Manuscript.

Thesis for the candidate’s degree in speciality 01.04.02 – theoretical physics. – Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2011.

In the dissertation a systematic theoretical investigation of properties and dynamics of different two-dimensional localized structures in nonlinear media is performed. Several nonlinear models, based on a generalized nonlinear Schrodinger equation, are used to study different types of localized structures. Main attention is paid to nonlocal nonlinearity that can be found in a variety of different media. Spatially nonlocal nonlinear response can suppress collapse and modulational instabilities of different structures and can support propagation of such complex localized structures as multisolitons.

For a nonlocal model with regular integration kernel in a Gaussian form different stationary solutions, such as vortices, solitons with nodes were obtained analytically with variational analysis and also numerically. Properties of these structures were studied depending on nonlocality parameter. Stability of different solitary structures was investigated by means of linear stability analysis as well as direct numerical simulations. The vortices and higher-order solitons show the transverse symmetry-breaking azimuthal instability below some critical power. The threshold of the vortex soliton stabilization was found. The higher-order solitons, which have a central peak and one or more surrounding rings, are also demonstrated to be stabilized in nonlocal nonlinear media in highly nonlocal regime. Using direct numerical simulations radially-asymmetric dipole-like solutions were also obtained. The dynamics of these multisoliton solutions were studied in presence of strong initial noise. Their propagation is shown to be stable in highly nonlocal regime. From a comparison of stability conditions for vortices and multisolitons in different types of nonlocal nonlinear media it is shown that type of nonlocal response plays a crucial role for stability of localized structures.

Using a model with thermal nonlinearity formation and stability of multi-soliton structures is

analyzed. This model can be applied to a process of laser beam propagation in partly-ionized plasma or in nematic liquid crystals. Different stationary multi-soliton solutions were obtained analytically and numerically, such as dipoles, tripoles, quadrupoles and rotating solitons with two and four intensity peaks. Properties of these structures, such as intensity, amplitude, beam width etc., were studied depending on nonlocality parameter. Stability of multi-soliton solutions was studied numeriacally. It is shown that dipoles can demonstrate stable propagation in a certain region of propagation constant. More complex multi-soliton structures, such as tripoles and quadrupoles are unstable in considered model, while in certain conditions the propagation distance of these structures can be big enough for experimental observation. Multisolitons with nonzero angular momentum, also known as azimuthons, are shown to be stable in strongly nonlocal regime. In a model with thermal nonlinearity a possibility of existence of stable vector vortices is also demonstrated, which can be considered as unique example of stable higher-order vortices in this type of nonlinear media.

The propagation of two-dimensional soliton-soliton pairs in two-component media with attractive intra-component and repulsive inter-component interaction is also studied in the dissertation. Stationary solutions were found from analytical variational calculations and numerical solution of a system of two coupled Schrodinger equations. It is found that for strong repulsive interaction between the two solitons their shapes change substantially. The field of stronger beam is squeezed out and forms the ring-like shell, while the weaker component is noticeably compressed. Different scenarios of instability of vector solitons are observed using numerical simulations. The specific conditions were found that allow quasi-stable propagation of vector solitons over significant distances.

All structures that demonstrate stable or quasi-stable behavior in analyzed theoretical models are possible to observe in experiments, where it is possible to fulfill necessary conditions for parameters.

Key words: localized waves, nonlinear Schrodinger equation, solitons, vortices, nonlocal response, collapse, modulational instability.