

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Левківський Іван Петрович

УДК 538.94

**КРАЙОВІ СТАНИ В СИСТЕМАХ З КВАНТОВИМ
ЕФЕКТОМ ХОЛА**

Спеціальність 01.04.02 – теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2010

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на фізичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Гусинін Валерій Павлович,
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова
Національної Академії Наук України, завідувач
відділу астрофізики та елементарних частинок

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
Репецький Станіслав Петрович,
Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, м. Київ, професор кафедри фізики
функціональних матеріалів

доктор фізико-математичних наук,
Ситенко Юрій Олексійович,
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова
Національної Академії Наук України, м. Київ,
завідувач відділу теорії ядра і квантової теорії поля

Захист відбудеться «_____» _____ 2010 р. об 11 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01 Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної Академії Наук України за адресою: м.Київ, вул. Метрологічна 14-б.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної Академії Наук України за адресою: м.Київ, вул. Метрологічна 14-б.

Автореферат розісланий «_____» _____ 2010 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01,
доктор фіз.-мат. наук

В. Є. Кузьмичев

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Цілий квантовий ефект Хола (відкритий К. Клітцингом, Ж. Дорда та М. Пеппером у 1980 р.), та дробовий ефект Хола (відкритий Д. Цуї, Х. Штормером і А. Госардом у 1982 р.) являють собою одні з найцікавіших явищ у фізиці конденсованого стану. Унікальність цих ефектів полягає в тому, що вони є проявом квантових закономірностей на макроскопічному рівні. Квантовий ефект Хола (КЕХ) полягає у надзвичайно точному квантуванні провідності двовимірного електронного газу у сильному магнітному полі. Точність цього квантування настільки висока, що стандарт опору, будучи суттєво макроскопічним приладом, є одним з найточніших джерел вимірювання константи тонкої структури $\alpha = e^2/hc$. Крім того елементарні збудження електронного газу у режимі дробового квантового ефекта Хола мають *дробовий заряд*, у одиницях заряду електрона, та екзотичну *еніонну* статистику. За останні десятиліття був досягнутий значний прогрес, як в теоретичному розумінні КЕХ так і в техніці експериментів. Побудовано ефективну польову і мікроскопічну теорії цих ефектів. За роботи по квантовому ефекту Хола було присуджено дві Нобелівські премії. Тим не менше, експерименти на електронних інтерферометрах, що були проведені у 2000-2008 рр. свідчать про зовсім недостатній рівень розуміння квантового ефекта Хола на *мезоскопічному* рівні. Крім того, так і не існує єдиного теоретичного уявлення щодо можливості детектування дробових зарядів у когерентному режимі. В останні роки була усвідомлена необхідність дослідження крайових станів також і у КЕХ у графені. Все це обумовлює актуальність задач, які були розв'язані у даній дисертаційній роботі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота є частиною досліджень кафедри квантової теорії поля фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка у рамках Комплексної наукової програми "Конденсований стан - фізичні основи новітніх технологій".

Мета і завдання дослідження. *Мета* дослідження полягає у побудові моделі електронного інтерферометра на базі крайових станів в системах з ефектом Хола, та знаходження методу ідентифікації ефективних низькоенергетичних моделей дробового квантового ефекта Хола за допомогою такого інтерферометра.

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити такі *задачі*:

- модифікувати гамільтоніан кіральної рідини Латінжера на випадок коли має місце сильна кулонівська взаємодія між крайовими каналами;
- розрахувати кореляційну функцію електронів в моделі з модифікованим гамільтоніаном для випадку двох крайових каналів при нульовій та скінченній температурі;
- розрахувати диференційну провідність електронного інтерферометра Маха-Цендера в режимі цілого та дробового квантового ефекта Хола при нульовій та скінченній температурі;

- розрахувати залежність контрастності інтерференційної картини осциляцій Ааронова-Бома у провідності інтерферометра та фазовий зсув як функцію прикладеної різниці потенціалів $\Delta\mu$ та температури T ;
- побудувати класифікацію ефективних низькоенергетичних польових моделей крайових станів дробового квантового ефекту Хола;
- дослідити можливість експериментально відрізнити нееквівалентні ефективні польові моделі шляхом вимірювання спектрів зарядів та масштабних розмірностей квазічастинок за допомогою електронного інтерферометра Маха-Цендера.

Об'єкт дослідження -- когерентні ефекти в крайових збудженнях електронного газу в режимі квантового ефекту Хола; осциляції Ааронова-Бома.

Предмет дослідження -- властивості сильновзаємодіючого просторово обмеженого двовимірного електронного газу в сильному поперечному магнітному полі при низьких температурах.

Методами дослідження є методи квантової теорії поля в теорії конденсованого стану, методи бозонізації, методи теорії решіток та наближені методи квантової механіки і математичної фізики.

Наукова новизна одержаних результатів у дисертації полягає в тому, що в роботі було вперше:

1. Модифіковано гамільтоніан кіральної рідини Латінжера на випадок коли має місце сильна кулонівська взаємодія між крайовими каналами.
2. Розрахована кореляційна функція електронів в моделі з модифікованим гамільтоніаном для випадку двох крайових каналів при нульовій та скінченній температурі для різних значень фактора заповнення рівнів Ландау.
3. Отримано теоретичний вираз, який визначає диференційну провідність електронного інтерферометра Маха-Цендера в режимі цілого та дробового квантового ефекта Хола при нульовій та скінченній температурі й чисельно розраховано залежність провідності від прикладеної різниці потенціалів і температури.
4. Проведено чисельні розрахунки контрастності інтерференційної картини осциляцій Ааронова-Бома у провідності інтерферометра та фазового зсуву як функцію прикладеної різниці потенціалів $\Delta\mu$ та температури T для різних схем прикладення потенціалів до інтерферометра.
5. Побудовано класифікацію ефективних низькоенергетичних польових моделей крайових станів дробового квантового ефекту Хола на основі класифікації інваріантів цілочисельних решіток.
6. Продемонстрована принципова можливість експериментально відрізнити нееквівалентні ефективні польові моделі шляхом вимірювання спектрів

зарядів та масштабних розмірностей квазічастинок за допомогою електронного інтерферометра Маха-Цендера у лінійному та нелінійному режимах.

Практичне значення одержаних результатів полягає у тому, що отримані в дисертації результати узагальнюють та розвивають теорію кіральної рідини Латінжера, пояснюють на основі механізму плазмонного розсіяння явище немонотонної по напрузі втрати фазової когерентності у електронних інтерферометрах, запропоновано експериментальну методику визначення параметрів ефективних польових моделей крайових збуджень. Крім того запропонований у роботі теоретичний підхід може бути застосований до крайових станів у графені.

Особистий внесок здобувача. Всі основні результати, що винесені на захист, отримані здобувачем особисто. У роботах, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належать всі основні розрахунки, написання текстів статей.

У роботі [1] дисертантом знайдено кореляційні функції електронів, диференційну провідність інтерферометра та залежність контрастності інтерференційної картини від різниці потенціалів прикладеної до інтерферометра. У роботі [2] здобувачем знайдено класифікацію ефективних польових теорій на основі інваріантів решіток, розраховано кореляційні функції квазічастинок, знайдено струм через інтерферометр в лінійному та нелінійному режимах. У роботі [3] дисертантом отримано вираз для кореляційної функції електронів в термінах повної статистики шуму в квантовому точковому контакті, отримано теоретичний вираз для контрастності осциляцій Ааронова-Бома, проведено чисельні розрахунки контрастності для різних значень прозорості точкового контакту та прикладеної різниці потенціалів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались на Міжнародній конференції "Moriond 2008: Quantum Transport and Nanophysics" (Італія, ЛяТуіль, 8-15 березня 2008 р.); на міжнародній конференції молодих вчених "ВІТР-2008" (Київ, 24-26 грудня 2008 р.); на міжнародній конференції "EPQHS-3" (Італія, Піза, 25-28 червня 2009 р.); на міжнародній школі "Summer College on Nonequilibrium Physics from Classical to Quantum Low Dimensional Systems" (Італія, Трієст, 6-24 липня 2009 р.); на міжнародній конференції "AB50" (Ізраїль, Тель-Авів, 11-14 жовтня 2009 р.); робота також обговорювалася на наукових семінарах відділу теоретичної фізики Женецького університету, Швейцарія, на семінарах фізичного інституту університету Регенсбурга, Німеччина, на семінарах кафедри теоретичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка та на семінарах Інституту теоретичної фізики НАН України імені М.М. Боголюбова.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 3 статтях [1, 2, 3] у наукових фахових виданнях та додатково висвітлено у матеріалах міжнародних конференцій і шкіл.

Структура дисертаційної роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 78 найменувань. Робота написана на 114 сторінках машинописного тексту, містить 20 рисунків і 1 таблицю.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У вступі обґрунтована актуальність обраної теми, сформульовані мета та задачі дослідження, показана наукова та практична цінність отриманих результатів і коротко викладено зміст розділів дисертації.

У першому розділі наведено огляд існуючих методів квантової теорії поля що застосовуються при описі ефективної низькоенергетичної фізики систем в режимі цілого та дробового ефекту Хола. Зокрема розглянуто відомий гідродинамічний опис крайових збуджень, що виникають на краю двовимірного електронного газу. Проведено його узагальнене калібровочно інваріантне формулювання. Детально розглянуто в цьому розділі також недавні експериментальні роботи [1* - 4*] по вивченню електронного аналога оптичного інтерферометра Маха-Цендера, що використовує крайові стани в системах з ефектом Хола у ролі оптичних променів. У цих роботах були отримані несподівані результати, а саме суттєво немонотонну втрату фазової когерентності (дефазинг) при скінченній напрузі прикладеній до інтерферометра, що не може бути пояснено в рамках існуючої ефективної теорії квантового ефекта Хола. Також, у першому розділі коротко описані попередні теоретичні спроби [5*, 6*] описання деяких з експериментів на інтерферометрах Маха-Цендера.

У другому розділі пропонується проста фізична модель, що описує дефазинг у електронному інтерферометрі Маха-Цендера при факторі заповнення $\nu = 2$. Ця модель пояснює результати недавніх експериментів: нетипову пелюсткову структуру контрастності осциляцій Ааронова-Бома, стійкість фази та асиметрію видимості як функції прозоростей квантових точкових контактів. Згідно з моделлю, що пропонується в цьому розділі, дефазинг виникає в інтерферометрі через сильну кулонівську взаємодію на краю двовимірного електронного газу. Далекодіючий характер взаємодії призводить до розділення спектру крайових збуджень на повільні та швидкі моди. Ці моди збуджуються при тунелюванні електронів призводячи до втрати фазової когерентності. Новий масштаб енергії, пов'язаний з повільною модою, визначає температурну залежність видимості та період осциляцій її як функції напруги. Більше того, відмінність пелюсткової структури у різних експериментах пояснюється специфічними зарядовими ефектами, які відрізняються у всіх експериментах.

При факторі заповнення $\nu = 2$ є два крайових канали на кожному краю системи та два, пов'язаних з ними, кіральних ферміона, позначені як: $\Psi_{\alpha j}(x)$, $\alpha = 1, 2$ та $j = U, D$. Тут індекс 1 відповідає ферміону у зовнішньому каналі, а 2 - ферміону у внутрішньому каналі, тоді як індекс j позначає верхнє та нижнє плече

інтерферометру. Повний гамільтоніан інтерферометру $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} + \mathcal{H}_T$ містить одночастинковий член \mathcal{H}_0 , доданок, що описує взаємодію, \mathcal{H}_{int} та тунельний гамільтоніан \mathcal{H}_T . Одночастинковий гамільтоніан описує вільні кіральні ферміони:

$$\mathcal{H}_0 = -iv_F \sum_{\alpha,j} \int dx \psi_{\alpha j}^\dagger \partial_x \psi_{\alpha j}, \quad (1)$$

де v_F - швидкість Фермі, яка припускається однаковою для кожного крайового каналу. Гамільтоніан взаємодії може бути записаний через локальні густини $\rho_{\alpha j}$ у наступній загальній формі:

$$\mathcal{H}_{int} = (1/2) \sum_{\alpha,\beta,j} \iint dx dy U_{\alpha\beta}(x-y) \rho_{\alpha j}(x) \rho_{\beta j}(y). \quad (2)$$

Експеримент показує, що взаємодія має кулонівський далекодіючий характер та призводить до ефектів зарядки на краю. В роботі продемонстровано, що цей факт веде за собою появу універсальностей у фізиці електронних інтерферометрів та коректно описує більшість експериментальних спостережень.

Інтерференція у інтерферометрі Маха-Цендера спричинена процесами розсіяння у квантових точкових контактах. Найбільш цікава фізика має відбуватися у режимах слабого тунелювання та слабого відбиття назад. Обидва режими можна описати тунельним гамільтоніаном:

$$\mathcal{H}_T = A + A^\dagger \equiv \sum_{\ell} (A_{\ell} + A_{\ell}^\dagger), \quad \ell = L, R, \quad (3)$$

де амплітуда тунелювання $A_{\ell} = t_{\ell} \psi_{1D}^\dagger(x_{\ell}) \psi_{1U}(x_{\ell})$ пов'язує зовнішні крайові канали та переносить електрон з нижнього плеча інтерферометра до верхнього. Фаза Ааронова-Бома включається до тунельних амплітуд за допомогою співвідношення $t_R^* t_L = |t_R t_L| e^{i\varphi_{AB}}$.

Для того, щоб врахувати сильну взаємодію на краю, можна скористатися загальноприйнятою технікою бозонізації, тобто представити ферміонні оператори за допомогою кіральних бозонних полів $\phi_{\alpha j}$:

$$\psi_{\alpha j} \propto e^{i\phi_{\alpha j}}, \quad (4)$$

що задовольняють комутаційні співвідношення $[\phi_{\alpha j}(x), \phi_{\alpha j}(y)] = i\pi \text{sgn}(x-y)$.

Локальна густина одержується шляхом регуляризації $\rho_{\alpha j}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_{\alpha j}^\dagger(x+\varepsilon) \psi_{\alpha j}(x)$,

що дає: $\rho_{\alpha j}(x) = (1/2\pi) \partial_x \phi_{\alpha j}(x)$. Застосовуючи процедуру регуляризації до одночастинкового гамільтоніану (1) і (2), отримуємо

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} = \sum_{\alpha,\beta,j} \iint \frac{dx dy}{8\pi^2} V_{\alpha\beta}(x-y) \partial_x \phi_{\alpha j}(x) \partial_y \phi_{\beta j}(y), \quad (5)$$

де потенціал взаємодії просто зсувається на швидкість Фермі $V_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta} + 2\pi v_F \delta_{\alpha\beta} \delta(x-y)$.

Природно припустити, що крайові канали взаємодіють через кулонівський потенціал. Він має далекодіючий характер та логарифмічний закон дисперсії $V_{\alpha\beta}(k) \propto \log(ka)$. Тут a - це найкоротший важливий масштаб довжини, наприклад, ширина стисливих смуг або відстань між каналами. Далі припускаємо, що кулонівська взаємодія екранується на відстані D такої, що $L_U, L_D \gg D \gg a$, де L_U та L_D - довжини плечей інтерферометра Маха-Цендера (ІМЦ). Насправді, деяке екранування може мати місце у реальних інтерферометрах. Наприклад, в експериментах [1* - 4*] довжина екранування D може бути відстанню до регулюючого затвору чи до масивного металічного повітряного мосту. Перш за все, екранування дозволяє знехтувати взаємодією між двома плечима інтерферометру. По-друге, при всіх енергіях можна знехтувати логарифмічною дисперсією та записати $V_{\alpha\beta}(x-y) = V_{\alpha\beta}\delta(x-y)$, так що для перетворення Фур'є отримуємо: $V_{\alpha\beta}(k) = V_{\alpha\beta}(0) \equiv V_{\alpha\beta}$. І нарешті, міжканальна взаємодія між внутрішнім та зовнішнім крайовими каналами, розміщених на відстані порядку $a \ll D$ один від одного, сильно зменшується. Тому матрицю взаємодії можна параметризувати наступним чином

$$V_{\alpha\beta} = \pi \begin{pmatrix} u+v & u-v \\ u-v & u+v \end{pmatrix}, \quad (6)$$

де $u/v = \log(D/a) \gg 1$, новий великий параметр - найбільш важливий наслідок далекодіючого характеру кулонівської взаємодії.

Легко бачити, що середній струм у моделі з тунельним гамільтоніаном (3) можна записати як суму чотирьох доданків $I = \sum_{\ell, \ell'} I_{\ell\ell'}$, $I_{\ell\ell'} \equiv \int dt \langle [A_{\ell}^{\dagger}(t), A_{\ell'}(0)] \rangle$, де

I_{LL} та I_{RR} - струми безпосередньо у правому та лівому квантових точкових контактах (КТК) відповідно, а $I_{LR} + I_{RL}$ - інтерференційний внесок. У розглядуваній моделі немає взаємодії між верхнім та нижнім плечима ІМЦ, тому кореляційна функція розбивається на добуток двох одночастинкових кореляторів:

$$I_{\ell\ell'} = t_{\ell}^* t_{\ell'} \int dt \left[\langle \psi_{1U}^{\dagger}(x_{\ell}, t) \psi_{1U}(x_{\ell'}, 0) \rangle \langle \psi_{1D}(x_{\ell}, t) \psi_{1D}^{\dagger}(x_{\ell'}, 0) \rangle - \langle \psi_{1U}(x_{\ell'}, 0) \psi_{1U}^{\dagger}(x_{\ell}, t) \rangle \langle \psi_{1D}^{\dagger}(x_{\ell'}, 0) \psi_{1D}(x_{\ell}, t) \rangle \right] \quad (7)$$

Відповідні корелятори розраховано у додатку 1, використовуючи техніку бозонізації, та мають вигляд:

$$i \langle \psi_{1j}^{\dagger}(x_{\ell}, t) \psi_{1j}(x_{\ell'}, 0) \rangle = \frac{\exp[i\Delta\mu_{1j}t - 2\pi i Q_{1j}(x_{\ell} - x_{\ell'})]}{\sqrt{(x_{\ell} - x_{\ell'} - ut)(x_{\ell} - x_{\ell'} - vt)}} \quad (8)$$

де Q_{1j} - заряд накопичений у відповідному каналі.

Використовуючи результат для кореляційної функції, та вираз для струму можна знайти наступний вираз для контрастності осциляцій Ааронова-Бома у диференційній провідності, що вимірюється в експериментах:

$$\mathcal{I}_{AB}(\Delta\mu) = \oint_C \frac{dt}{2\pi i} \frac{t \exp(i\Delta\mu t)}{\prod_{j,\alpha} \sqrt{(t + \Delta t - L_j/v_\alpha)}}, \quad (9)$$

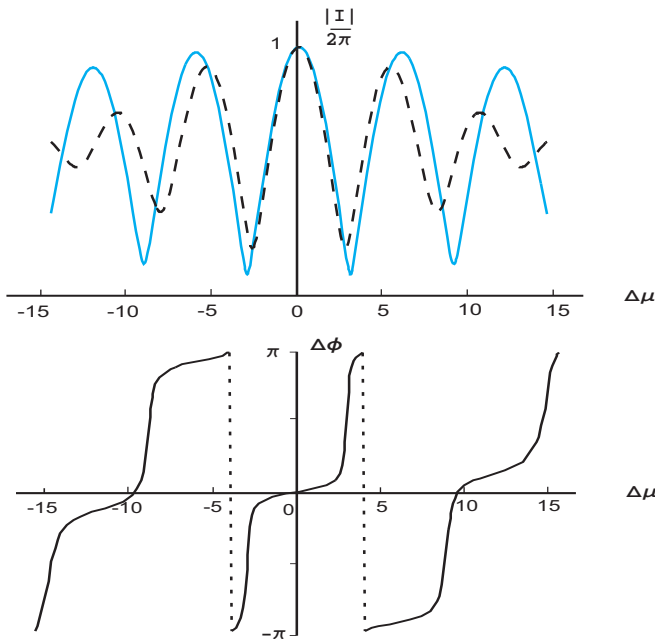


Рис.1 Власна контрастність осциляцій Ааронова-Бома $|I_{AB}|$ та зсув фази $\arg(\mathcal{I}_{AB})$ у випадку, коли тільки один канал знаходиться під напругою.[1*, 3*] *Верхня частина:* контрастність як функція від напруги в одиницях v/L_U для $L_D = 1.15L_U$ (суцільна лінія) та для $L_D = 1.35L_U$ (пунктирна лінія). *Нижня частина:* Зсув фази для $L_D = 1.15L_U$.

де зсув часу Δt спричинений ефектом зарядки, $\Delta t = 2\pi d_{\Delta\mu} (Q_{1U}L_U - Q_{1D}L_D)$, який залежить від схеми прикладення потенціалу в конкретному експерименті. Тут введено позначення $v_1 = u$, $v_2 = v$, а контур інтегрування C іде навколо розрізів функцій Гріна. Ці розрізи, що виникають замість одночастинкових полюсів кореляційних функцій для вільних електронів, викликані взаємодією.

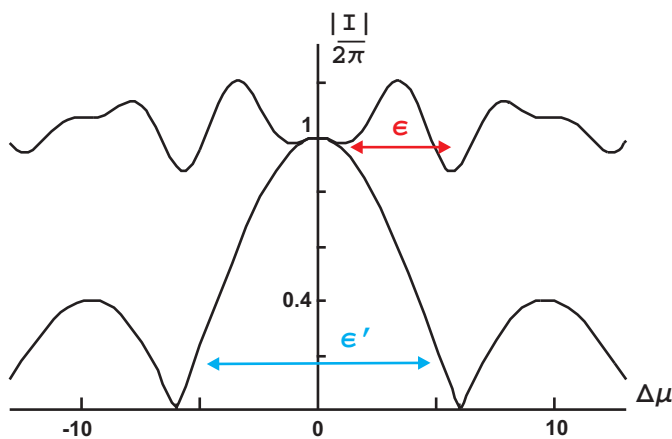


Рис.2 Власна контрастність осциляцій Ааронова-Бома $|I_{AB}|$ для випадку, коли до двох крайових каналів прикладено потенціал [2*] та для сильно асиметричного інтерферометру $L_D = 1.8L_U$. Її зображено як функцію від напруги $\Delta\mu$ в одиницях v/L_U для режиму слабого тунелювання (верхня крива) та для режиму слабого відбиття назад (нижня крива).

В усіх експериментах було виявлено, що контрастність осцилює як функція від прикладеного потенціалу $\Delta\mu$. Насправді, дві добре визначені колективні моди зі швидкостями u та v призводять до утворення чотирьох точок галуження в інтегралі (9), що дають відносно слабо згасаючі внески. Ці внески мають різні залежні від напруги фазові множники, тому функція $\mathcal{I}_{AB}(\Delta\mu)$ осцилює. Період осциляцій визначається найменшим енергетичним масштабом ϵ , що дається загальним розміром розрізу та може бути оцінений як

$$\varepsilon = \frac{2uv}{(u-v)(L_U + L_D)}. \quad (10)$$

У випадку $u \gg v$ параметр u скорочується так, що період осциляцій визначається найповільнішою модою та розміром інтерферометру. Далі можна застосувати вираз (9) для чисельного розрахунку фазового зсуву та контрастності у кожному конкретному експерименті. Наприклад у експериментах де напруга прикладена тільки до зовнішнього каналу, цей вираз призводить до результатів зображених на рисунку 1. Ці результати добре узгоджуються з експериментальними спостереженнями, а саме має місце пелюсткова структура контрастності та фазова стабільність. Відповідно на рисунку 2 зображена контрастність осциляцій Ааронова-Бома у випадку коли напруга прикладена до обох крайових каналів. У повній відповідності з експериментом вона має різну структуру у випадку слабого розсіяння назад та слабого тунелювання.

У *третьому розділі* [2] пропонується пряма експериментальна перевірка ефективної теорії дробових крайових станів. Спочатку розглядається класифікація ефективних моделей, що задовольняють умові скорочення аномалій. Ця класифікація ілюструється прикладом з фактором заповнення $\nu = 2/3$. У цьому випадку *неможливо* побудувати крайову модель з менш ніж двома кіральними каналами та є кілька нееквівалентних крайових моделей, що включають два поля. Розглядаються чотири найпростіші моделі для цього фактору заповнення та приводяться заряди та масштабні розмірності квазічастинок. Досліджується транспорт у електронному інтерферометрі Маха-Цендера та показано, що масштабні властивості компонент Фур'є осциляцій Ааронова-Бома у струмі дають інформацію про заряди та масштабні розмірності квазічастинок. Таким чином інтерферометр Маха-Цендера може бути використаний, для розрізнення допустимих ефективних моделей з однаковим фактором заповнення. Важливою частиною теоретичної моделі є тунельний гамільтоніан квазічастинок, форма якого обговорюється в деталях.

Одноканальна гідродинамічна модель не може описати усі спостережені фактори заповнення. Тому розглянемо загальні багатоканальні крайові моделі. Узагальнення однопольової дії на випадок багатьох полів дається виразом

$$S[\phi_i] = \frac{1}{4\pi} \sum_i \int dt dx [\sigma_i D_t \phi_i D_x \phi_i - v_i (D_x \phi_i)^2] + \frac{1}{4\pi} \sum_i \int dt dx [Q_i \varepsilon^{\mu\lambda} a_\mu \partial_\lambda \phi_i], \quad (11)$$

де $\sigma_i = \pm 1$ описує кіральність каналу з номером i , v_i - швидкість поширення, а Q_i - константа електромагнітної взаємодії з полем ϕ_i . Коваріантні похідні означені як $D_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i + \sigma_i Q_i a_\mu$. Варто підкреслити, що будь-яка квадратична калібровочно інваріантна дія для кіральних бозонів може бути приведена до єдиної форми (11) шляхом переозначення полів. Вимога скорочення аномалії для крайової дії (11) призводить до обмеження

$$\sum_i \sigma_i Q_i^2 = \nu. \quad (12)$$

Для того, щоб перевірити існування збуджень з квантовими числами електрону, розглянемо загальний вертексний оператор $\Psi = \exp(i \sum_j q_j \phi_j)$, де q_j - деякі константи. Беручи до уваги комутаційні співвідношення які випливають з рівняння (11), знаходимо, що статистична фаза оператора дається виразом $\theta = \pi \sum_i \sigma_i q_i q_i$. Оператор електричного заряду дається $Q_{em} = (1/2\pi) \sum_i Q_i \int dx \partial_x \phi_i$, таким чином заряд оператору Ψ має вигляд $Q_{em} = \sum_i \sigma_i Q_i q_i$. Як і у випадку цілого КЕХ, може існувати кілька електронних операторів, що відрізняються один від одного деякими квантовими числами. Різні електронні оператори позначаються додатковим індексом α : $\Psi_\alpha = \exp(i \sum_j q_{\alpha j} \phi_j)$, що пробігає значення від одиниці до числа крайових каналів. Всі електронні поля повинні мати одиничний заряд, це тягне за собою

$$\sum_i \sigma_i Q_i q_{\alpha i} = 1, \quad (13)$$

та необхідні відносні статистичні фази $\pi K_{\alpha\beta}$, сумісні з відносною локальністю та статистикою Фермі. Це приводить до того, що числа

$$K_{\alpha\beta} = \sum_i \sigma_i q_{\alpha i} q_{\beta i} \quad (14)$$

мають бути цілими, та для $\alpha = \beta$ ці числа мають бути непарними.

Багатоканальні моделі повністю визначаються числами q_α^i , тоді як значення константи зв'язку Q_i можна отримати розв'язуючи рівняння (13): $Q_i = \sigma_i \sum_\alpha q_{i\alpha}^{-1}$.

Тому фізичні вимоги до ефективної теорії можуть бути сформульовані як обмеження на матрицю q . А саме, вимога того, що елементи матриці K , які даються рівнянням (14), є цілими числами, має бути доповнена такою умовою:

$$\sum_{\alpha,\beta} K_{\alpha\beta}^{-1} = \nu, \quad (15)$$

що слідує з вимоги скорочення аномалії (12) та рівняння (13). Варто зауважити, що обмеження на матрицю q тепер переформульовані як обмеження на матрицю K .

Квазічастинкові оператори визначаються у відповідності до вимоги того, що вони мають цілі статистичні фази відносно всіх електронних полів. Квазічастинкові оператори є також вертексними операторами $\Psi = \exp(i \sum_j p_j \phi_j)$. Їхні статистичні фази відносно електронних полів даються відношенням $\theta_{pq\alpha} = \pi \sum_i \sigma_i p_i q_{\alpha i} = \pi n_\alpha$,

де n_α - цілі числа. Розв'язок цього рівняння, $p_i = \sigma_i \sum_\beta q_{i\beta}^{-1} n_\beta$, є лінійною комбінацією з цілочисельними коефіцієнтами. Тому повний набір дозволених квазічастинкових операторів утворює решітку, що є дуальною по відношенню до

решітки, натягнутої на електронні вектори $q_{\alpha i}$. Статистична фаза та заряд квазічастинкового оператора, позначені числом n_{α} , можуть бути виражені тільки у термінах матриці K :

$$\frac{\theta}{\pi} = \sum_i \sigma_i p_i p_i = \sum_{\alpha, \beta} n_{\alpha} K_{\alpha\beta}^{-1} n_{\beta}, \quad Q_{em} = \sum_i \sigma_i Q_i p_i = \sum_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}^{-1} n_{\beta}. \quad (16)$$

Розглянемо також кореляційні функції квазічастинкових операторів. Детальне обчислення цих функцій міститься у додатку 1 і приводить до результату:

$$\langle 0 | \psi^{\dagger}(x, t) \psi(0, 0) | 0 \rangle \propto e^{i\varphi_0(\mathbf{n})} \prod_i (x + \sigma_i v_i t)^{-\delta_i(\mathbf{n})}, \quad (17)$$

де показники задаються виразом $\delta_i(\mathbf{n}) = p_i^2 = [\sum_{\alpha} q_{\alpha i}^{-1} n_{\alpha}]^2$. Тут $\mathbf{n} \equiv \{n_{\alpha}\}$ та φ_0 - несуттєва фаза. Масштабна розмірність кореляційної функції, означена через її поведінку при великих часах, дається $\Delta(\mathbf{n}) = \sum_i \delta_i(\mathbf{n})$. А виражена у термінах матриці q набуває вигляду $\Delta(\mathbf{n}) = \sum_i p_i^2 = \sum_{\alpha, \beta} n_{\alpha} (qq^T)^{-1}_{\alpha\beta} n_{\beta}$.

Далі у третьому розділі застосовуються вище обговорені ідеї до конкретного випадку з фактором заповнення $\nu = 2/m$. Прямий розв'язок рівняння (15) складний. На щастя, у роботі [7*] були доведені загальні результати для випадку, коли статистичні фази електронних операторів менше ніж 7π : усі двопольові моделі для $\nu = 2/m$ описуються матрицею K наступної форми:

$$K_a = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Тоді рівняння (15) накладає наступне обмеження на матрицю (18): $\nu = 2/(a+b)$. Так, для $\nu = 2/m$ параметри a та b пов'язані рівнянням $a+b = m$, де непарне число a нумерує моделі.

Для чисто кіральних моделей масштабні розмірності кореляційних функцій (17) даються статистичними фазами. Тому для матриці K форми (18) розмірності і заряди збуджень даються виразами

$$\Delta(\mathbf{n}) = \frac{1}{a^2 - b^2} [a(n_1^2 + n_2^2) - 2bn_1n_2], \quad Q_{em}(\mathbf{n}) = \frac{n_1 + n_2}{m}. \quad (19)$$

Для некіральних моделей вираз для зарядів квазічастинок залишається таким самим, а масштабні розмірності у границі сильної кулонівської взаємодії мають аналогічний вигляд. Для $\nu = 2/3$ матриці (18) з найменшими діагональними елементами (тобто з найменшими статистичними фазами електронних операторів) є наступними:

$$K_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad K_5 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Значення масштабних розмірностей збуджень у моделях (20) зведені у таблиці 1.

K_a	$\Delta(\mathbf{n})$	$\Delta_0, \Delta_{\frac{1}{3}}, \Delta_{\frac{2}{3}}, \Delta_1, \Delta_{el}$
K_5	$\frac{1}{21}(5(n_1^2 + n_2^2) + 4n_1n_2)$	$\frac{6}{21}, \frac{5}{21}, \frac{2}{3}, \frac{11}{7}, 5$
K_3	$\frac{1}{3}(n_1^2 + n_2^2)$	$\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 3$
K_1	$\frac{2}{3}(n_1^2 + n_2^2 - n_1n_2)$	$2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2, 2$
K_{-1}	$\frac{2}{15}(2(n_1^2 + n_2^2) + n_1n_2)$	$\frac{6}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{3}, \frac{8}{5}, 4$

Табл. 1: Масштабні розмірності збуджень у моделях зі станом $\nu = 2/3$. Для кожної моделі приведено загальний вираз для масштабних розмірностей $\Delta(\mathbf{n})$ квазічастинкових операторів. Мінімальні значення Δ_q для збуджень заряду q , так як і масштабні розмірності електронних операторів перераховано у правій колонці.

У наближенні низької температури $T = 0$ кореляційні функції даються формулою (17). Тоді когерентна частина струму (7) при малих напругах $\Delta\mu \ll v_i/L_\alpha$, $\alpha = U, D$ має вигляд

$$I_\Phi = \sum_{\mathbf{n}} C_{\mathbf{n}} (\Delta\mu)^{2\Delta(\mathbf{n})-1} \cos \left[2\pi Q_{em}(\mathbf{n}) \frac{\Phi}{\Phi_0} \right], \quad (21)$$

де $C_{\mathbf{n}}$ - деякі (несуттєві) константи. Область застосування результату (21) обмежена умовами $\Delta\mu \ll v_i/L_\alpha$, $\alpha = U, D$. За межами цієї області залежність контрастності від прикладеної напруги немонотонна через зарядові ефекти, як спостерігалось в експериментах [1*-4*]. Більше того, поведінка (21) має місце тільки коли $\Delta\mu > T$. Для типових експериментів це означає, що $1\mu V < \Delta\mu < 10\mu V$.

Підбиваючи підсумок, на відміну від теоретичних робіт, у яких *ad-hoc* використовуються кляйнівські фактори [8*], показано, що періоди осциляцій Ааронова-Бома (АБ) більші ніж Φ_0 . Найлегший спосіб зафіксувати великі періоди експериментально це порівняти періодичності у режимі слабого тунелювання та у режимі слабого відбиття назад. Рівняння (21) можна використати, щоб розрізнити різні ефективні моделі. А саме, модель можна визначити, вимірюючи струм крізь ІМЦ як функцію магнітного потоку Φ та напруги $\Delta\mu$. Виконуючи перетворення Фур'є по відношенню до Φ , можна дослідити поведінку по $\Delta\mu$ різних гармонік, що відповідають внескам найбільш важливих збуджень для всіх значень заряду Q_{em} . Для того, щоб визначити правильну модель, треба порівняти експериментально визначенні масштабні розмірності Δ із тими, що наведено у таблиці 1.

ВИСНОВКИ

1. В роботі модифіковано гамільтоніан кіральної рідини Латінжера на випадок коли має місце сильна кулонівська взаємодія в кожному крайовому каналі електронного газу в режимі квантового ефекта Хола та між цими каналами. Показано, що така модифікація призводить до результатів, що узгоджуються з останніми експериментами на електронних інтерферометрах Маха-Цендера.
2. В моделі з модифікованим гамільтоніаном розрахована функція Гріна електронних збуджень для випадку присутності двох крайових каналів на краю області заповненої електронним газом при нульовій та скінченній температурі для різних цілих та дробових значень фактора заповнення рівнів Ландау.
3. Отримано теоретичний вираз, який визначає диференційну провідність електронного інтерферометра Маха-Цендера в режимі цілого та дробового квантового ефекта Хола при нульовій та скінченній температурі через знайдені в попередньому пункті функції Гріна. Чисельно розраховано залежність провідності від прикладеної різниці потенціалів і температури для відповідних випадків.
4. Проведено чисельні розрахунки контрастності інтерференційної картини осциляцій Ааронова-Бома у провідності інтерферометра та фазового зсуву як функцію прикладеної різниці потенціалів $\Delta\mu$ та температури T для різних схем прикладення потенціалів до інтерферометра. Продемонстровано, що отримані результати повністю узгоджуються з даними експериментів проведених на електронних інтерферометрах.
5. В рамках підходу Вена-Фрьоліха побудовано класифікацію ефективних низькоенергетичних польових моделей крайових станів дробового квантового ефекта Хола дозволених принципами локальності та калібровочної інваріантності на основі класифікації інваріантів цілочисельних решіток. Дана класифікація застосована до станів з фактором заповнення рівнів Ландау $\nu = 2/3$.
6. Використовуючи класифікацію запропоновану у попередньому пункті продемонстрована принципова можливість експериментально відрізнити нееквівалентні ефективні польові моделі шляхом вимірювання спектрів зарядів та масштабних розмірностей квазічастинок за допомогою електронного інтерферометра Маха-Цендера у лінійному та нелінійному режимах та порівняння їх зі знайденими у роботі значеннями.
7. Важливим результатом розглянутої теорії є те, що вона передбачає АБ осциляції з квазічастинковою періодичністю по магнітному потоку, тобто з періодами,

рівними кільком електронним періодам. Ця періодичність дозволяє розділити внески різних збуджень струму. У контексті запропонованої теорії квазічастинкова періодичність пов'язана із вибором тунельного гамільтоніану, який відрізняється від вибору у попередніх роботах, та призводить до некомутативності тунельних гамільтоніанів у різних просторових точках.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Levkivskiy I.P. Dephasing in the electronic Mach-Zehnder interferometer at filling factor $\nu = 2$ / I.P. Levkivskiy, E.V. Sukhorukov // *Physical Review B*. – 2008. – V. 78, № 4. – P. 045322.
2. Levkivskiy I.P. Mach-Zehnder interferometry of fractional quantum Hall edge states / I.P. Levkivskiy, A. Boyarsky, J. Froehlich, E.V. Sukhorukov // *Physical Review B*. - 2009. - V. 80, № 4. - P. 045319.
3. Levkivskiy I.P. Noise-induced phase transition in the electronic Mach-Zehnder interferometer / I.P. Levkivskiy, E.V. Sukhorukov // *Physical Review Letters*. - 2009. - V. 103, № 3. - P. 036801.

СПИСОК ЦИТОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- 1*. Neder I. Unexpected Behavior in a Two-Path Electron Interferometer / I. Neder, M. Heiblum, Y. Levinson [et al.] // *Physical Review Letters*. - 2006. - V. 96, № 1. - P. 016804.
- 2*. Bieri E. Finite-bias visibility dependence in an electronic Mach-Zehnder interferometer / E. Bieri, M. Weiss, O. Goktas [et al.] // *Physical Review B*. – 2009. – V. 79, № 24. – P. 245324.
- 3*. Roulleau P. Finite bias visibility of the electronic Mach-Zehnder interferometer / P. Roulleau, F. Portier, D. C. Glatli [et al.] // *Physical Review B*. – 2007. – V. 76, № 16. – P. 161309(R).
- 4*. Litvin L.V. Decoherence and single electron charging in an electronic Mach-Zehnder interferometer / L. V. Litvin, H.-P. Tranitz, W. Wegscheider [et al.] // *Physical Review B*. – 2007. – V. 75, № 3. – P. 033315.
- 5*. Chalker J.T. Decoherence and interactions in an electronic Mach-Zehnder interferometer / J.T. Chalker, Y. Gefen, M.Y. Veillette // *Physical Review B*. – 2007. – V. 76, № 8. – P. 085320.
- 6*. Youn S.-C. Nonequilibrium Dephasing in an Electronic Mach-Zehnder Interferometer / S.-C. Youn, H.-W. Lee, H.-S. Sim // *Physical Review Letters*. – 2008. – V. 100, № 19. – P. 196807.
- 7*. Fröhlich J. A classification of quantum Hall fluids / J. Fröhlich U.M. Studer, E. Thiran // *Journal of Statistical Physics*. - 1990. - V. 86, № 3-4, P. 821-897.
- 8*. Feldman D.E. Shot noise in an anyonic Mach-Zehnder interferometer / D.E. Feldman, Y. Gefen, A. Kitaev [et al.] // *Physical Review B*. – 2007. – V. 76, № 8. – P. 085333.

Левківський І. П. *Крайові стани в системах з квантовим ефектом Хола.* – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2010.

У дисертаційній роботі запропоновано модифікований гамільтоніан кіральної рідини Латінжера на випадок коли має місце сильна кулонівська взаємодія між крайовими каналами. В моделі з модифікованим гамільтоніаном, для випадку двох крайових каналів, отримано теоретичний вираз, який визначає диференційну провідність електронного інтерферометра Маха-Цендера. Чисельно розраховано залежність провідності від прикладеної різниці потенціалів і температури, проведено чисельні розрахунки контрастності інтерференційної картини осциляцій Ааронова-Бома у провідності інтерферометра та фазового зсуву. Також у роботі побудована класифікація ефективних низькоенергетичних польових моделей крайових станів дробового квантового ефекту Хола на основі класифікації інваріантів цілочисельних решіток і продемонстрована принципова можливість експериментально відрізнити нееквівалентні ефективні польові моделі шляхом вимірювання спектрів зарядів та масштабних розмірностей квазічастинок за допомогою електронного інтерферометра Маха-Цендера.

Ключові слова: квантовий ефект Хола, крайові стани, розмірні ефекти, еніони, дробовий заряд, електронні інтерферометри.

Левковский И. П. *Краевые состояния в системах с квантовым эффектом Холла.* – Рукопись.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, 2010.

В диссертационной работе предложен модифицированный гамильтониан киральной жидкости Латтинжера в случае когда имеет место сильное кулоновское взаимодействие между краевыми каналами. В модели с модифицированным гамильтонианом, для случая двух краевых каналов, получено теоретическое выражение, определяющее дифференциальную проводимость электронного интерферометра Маха-Цендера. Численно рассчитано зависимость проводимости от приложенной разности потенциалов и температуры, проведены численные расчеты контрастности интерференционной картины осцилляций Ааронова-Бома в проводимости интерферометра и фазового сдвига. Также в работе построена классификация эффективных низкоэнергетических полевых моделей краевых состояний дробного квантового эффекта Хола на основе классификации инвариантов целочисленных решеток и продемонстрирована принципиальная возможность экспериментально отличить неэквивалентные эффективные полевые модели путем измерения спектров зарядов и масштабных размерностей квазичастиц с помощью электронного интерферометра Маха-Цендера.

Ключевые слова: квантовый эффект Холла, краевые состояния, размерные эффекты, энионы, дробный заряд, электронные интерферометры.

Levkivskiy I. P. *Edge states in systems with quantum Hall effect.* – Manuscript.

Thesis for the Doctor of Philosophy degree (Candidate of science in Physics and Mathematics) in speciality 01.04.02 – theoretical physics. – Taras Shevchenko Kyiv National University, Kyiv, 2010.

The subject of the dissertation is the quantum Hall effect. Namely, gapless edge states which are formed at the boundary of the two-dimensional electron gas in the quantum Hall effect regime are considered. These edge states play the key role in the transport properties of the quantum Hall systems and have been thoroughly investigated in several recent experiments on electronic Mach-Zehnder interferometers. A theoretical description of these experiments is proposed in the manuscript. The construction of a theoretical model takes into account Coulomb interactions effects.

The quantum Hall effect is observed in the two dimensional electron gas in a strong perpendicular magnetic field. It manifests itself in the precise and universal conductance quantization. Since its discovery in early eighties it continues to attract a great attention of both experimentalists and theoreticians. The reason for this is the nature of the quantum Hall effect being a macroscopic quantum effect. Moreover, in the regime of quantum Hall effect, the elementary excitations have fractional charge and anyon statistics.

It is important to note that in the regime of quantum Hall effect all bulk excitations have large gap, thus the transport properties of a sample are determined mostly by the edge states which are gapless. These chiral states are formed at the edge of the two-dimensional electron gas where the filled Landau levels cross the Fermi level. Recent progress in the fabrication of nano-scale semiconductor heterostructures made it possible to implement coherent experiments involving the edge states. Such experiments have been motivated by the idea of using them in several quantum computing schemes. The most important experiments have studied the properties of the edge states in the coherent regime, i.e. within the length scales much smaller than the dephasing length. These experimental works deal with samples which have the structure of the electronic interferometers. Unexpectedly, these works have found results which are in strong contradiction to all previous theoretical predictions. Thus, addressing these experiments and proposing additional experimental tests of quantum Hall edge states physics is an extremely important theoretical challenge.

The first chapter of the dissertation contains a review of existing methods of quantum field theory which are used to describe the low-energy physics of systems in the quantum Hall effect regime. In particular, widely used Wen's hydrodynamic description of edge excitations at the edge of the two dimensional electron gas is considered in details. This description is then generalized to a gauge-invariant form. As well this chapter contains a detailed discussion of the recent experiments on electronic analogue of optical Mach-Zehnder interferometers, which utilize one-dimensional chiral quantum Hall edge states in place of optical beams. These experiments showed unexpected puzzling results, namely, strongly non-monotonous dephasing with the applied voltage bias has been observed. These findings cannot be explained in the framework of commonly accepted non-interacting fermions picture of the integer quantum Hall edge. As well, first theoretical attempts to address these experiments on electronic interferometers are briefly discussed

in the first chapter.

In the second chapter of the manuscript, the Hamiltonian of the chiral Luttinger liquid is modified for the situation with a strong Coulomb interaction between edge channels of the quantum Hall liquid. Using the model with the modified Hamiltonian for the case of two edge channels, a theoretical expression that determines the electronic Green function and therefore the differential conductance of electronic Mach-Zehnder interferometer at zero and finite temperature is obtained for different values of the filling factor of Landau levels. The dependence of the conductance on the applied potential difference and temperature is thus numerically calculated starting from this expression.

As a next step, the visibility of the interference pattern of Aharonov-Bohm oscillations in the conductance of the interferometer and the phase shift of these oscillations as a function of the applied potential difference and temperature is calculated for different schemes of application of potentials to the interferometer. The resulting dependences are in good agreement with the recent experiments.

The important property of our model is that at zero temperature the phase information emitted at the first quantum point contact of the interferometer can be partially recollected at the second quantum point contact. This leads to oscillation and lobes in the visibility which can be interpreted as a size effect. The new energy scale in these oscillations, associated with the total size of the Mach-Zehnder interferometer and with the slow mode, determines also the temperature dependence of the visibility. Moreover, the variation of the lobe structure from one experiment to another is explained by specific charging effects which are different in all experiments.

In the third chapter, a classification of low-energy effective models for edge states of fractional quantum Hall effect is constructed with the help of the classification of invariants of integral lattices. It is found that even for simple filling fractions there are several minimal effective theories which satisfy all the natural conditions of locality and gauge invariance. It is demonstrated that it is possible, at least in principle, to experimentally distinguish the inequivalent effective field models by measuring the spectra of charge and scaling dimensions of quasiparticles with an electronic Mach-Zehnder interferometer in the linear and nonlinear regimes.

The important ingredient of the model of the fractional electronic Mach-Zehnder interferometer is the tunneling Hamiltonian, which is different from the one in previous works and leads to the multiple Aharonov-Bohm periodicities. This allows to separate contributions of different quasi-particle excitations to the current through the interferometer. The non-commutativity of tunneling Hamiltonians arises from topological nature of the excitations and from the open boundary conditions, which takes place for the Mach-Zehnder interferometers.

Key words: quantum Hall effect, edge states, size effects, anyons, fractional charge, electronic interferometers.

Левківський Іван Петрович

Крайові стани в системах з квантовим ефектом Хола.

(Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.)

Зак. – 27

Формат 60 x 84/16

Обл.-вид. арк. - 0.93

Підписано до друку 21.09.2010 р.

Тираж 100 прим.

Поліграфічна дільниця ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України,
03680, м. Київ, вул.. Метрологічна, 14-б

