

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ІМ. М.М. БОГОЛЮБОВА

На правах рукопису

ШАРАПОВ Сергій Геннадійович

УДК 530.145, 538.9

**ЕЛЕКТРОННІ ВЛАСТИВОСТІ СИСТЕМ З ДІРАКІВСЬКИМ
ЕНЕРГЕТИЧНИМ СПЕКТРОМ: ГРАФЕН ТА
ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНІ НАДПРОВІДНИКИ**

01.04.02 — теоретична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Наукові консультанти:
Гусинін Валерій Павлович,
доктор фізико-математичних наук, професор,
Локтєв Вадим Михайлович,
доктор фізико-математичних наук, академік НАНУ, професор

Київ — 2009

ЗМІСТ

Перелік умовних скорочень	7
Вступ	8
Розділ 1. Моделі 2D систем з діраківським спектром квазі- частинкових збуджень	21
1.1. Графен: від моделі сильного зв'язку до КЕД_{2+1} опису	21
1.1.1. Опис графену у моделі на ґратці	23
1.1.2. Спінорне представлення невзаємодіючого гамільтоніана	27
1.1.3. Дискретні симетрії гамільтоніана на ґратці	30
1.1.4. КЕД_{2+1} лагранжіан графену	34
1.1.5. Підсумки щодо КЕД_{2+1} опису графену	40
1.2. Високотемпературна надпровідність	42
1.2.1. d -густини хвилі	42
1.2.2. d -хвильова надпровідність	43
1.2.3. Модельні гамільтоніани ДГХ і d НП станів	44
Розділ 2. Властивості КЕД_{2+1} опису графену	50
2.1. Неперервні симетрії КЕД_{2+1} моделі	50
2.1.1. $U(2)$ долинно-підґраткова симетрія	51
2.1.2. $U(4)$ симетрія спін-долина-підґратка та її порушення зеєманівським членом	51
2.2. Кіральність у КЕД_{2+1} теорії графену та її різниця з кіраль- ністю у КЕД_{3+1}	52
2.3. Дискретні симетрії КЕД_{2+1} моделі графену	57
2.3.1. Просторова інверсія $\mathcal{P}$	57
2.3.2. Обернення часу $\mathcal{T}$	58

2.3.3.	Зарядове спряження $\mathcal{C}$	59
2.4.	Різниця між квазічастинками в графені та безмасовими нейтрино	60
2.5.	Порушення симетрії в графені: діраківські маси, їхні перетворення при $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{C}$ та фізичний зміст	61
2.5.1.	Фізичний зміст діраківських мас	62
2.5.2.	Трансформаційні властивості діраківських мас	64
2.6.	Діраківські рівні Ландау	66
Розділ 3. Динамічна та статична електрична провідність діраківських ферміонів		72
3.1.	Електромагнітний відгук	72
3.2.	Електрична провідність без магнітного поля	75
3.2.1.	Статична провідність та універсальна границя	79
3.2.2.	Динамічна провідність: Друде та міжзонний вклади	80
3.2.3.	Огляд експериментальних та новітніх теоретичних результатів	85
3.3.	Динамічна провідність у зовнішньому магнітному полі	87
3.3.1.	ФГ у зовнішньому магнітному полі	87
3.3.2.	Вирази для динамічної провідності	89
3.3.3.	Магніто-лоренціанівська модель у границі малого поля	93
3.3.4.	Аналіз результатів для оптичної провідності	96
3.4.	Правила сум для оптичних поздовжньої та холлівської провідностей	108
3.4.1.	Загальна інформація про правила сум та необхідність їх узагальнення для графену	108
3.4.2.	Оптичне правило сум для діагональної провідності	111
3.4.3.	Правило сум для холлівського кута	115

Розділ 4. Квантові магнітні осциляції та ефект Нернста для	
діраківських ферміонів	118
4.1. Осциляції густини станів	120
4.1.1. ГС у присутності розсіювання	123
4.1.2. Порівняння МО у графені та 2D електронному газі. Ідентифікація діраківських квазічастинок з вимірю- вань фази ШдГ осциляцій	123
4.2. Повздожня та холлівська статичні провідності	124
4.2.1. Граничні випадки для σ_{xx} і σ_{xy}	125
4.3. Ефект Шубнікова - де Гааза	128
4.3.1. Одержання осциляцій з $\mathcal{A}$ з використанням властиво- стей ψ -функції	128
4.3.2. Осцилююча частина електричної провідності. Іденти- фікація діраківських квазічастинок з вимірювань тем- пературного фактору ШдГ осциляцій	130
4.4. Холлівський кут та коефіцієнт Нернста	132
4.4.1. Границі Друде-Зенера $ eB v_F^2/c \ll \Gamma^2 \ll \mu^2$ та $T \ll$ $ \mu \ll \sqrt{ eB v_F^2/c} \ll \Gamma$	133
4.4.2. Ілюстрації аналітичних результатів та визначення щі- лини Δ з вимірювань холлівського кута	134
Розділ 5. Квантовий ефект Холла у графені	137
5.1. Теоретичне підґрунтя	137
5.2. Незвичайне (напівціле) квантування холлівської провідності у графені	138
5.3. Квантовий ефект Холла у графені у сильних магнітних по- лях: крайові стани, масові та спінові щілини у графені . . .	145
5.3.1. Короткий огляд літератури по порушенню симетрії в графені та формулювання проблеми	145

5.3.2.	Модель з динамічними щілинами	149
5.3.3.	Рівняння Дірака у зовнішньому полі	152
5.3.4.	Крайові стани для зигзагоподібного краю	154
5.3.5.	Обговорення результатів	161
Розділ 6. Електрон-фононна взаємодія у графені		163
6.1.	Огляд особливостей ЕФВ у графені	163
6.2.	Модель для ЕФВ у графені	164
6.2.1.	ЕФВ у першому наближенні, без самоузгодження . .	167
6.2.2.	Вплив самоузгодження на ЕФВ	178
6.3.	Оптична провідність	179
Розділ 7. Надпровідна густина та конкуруючі параметри порядку у d-хвильових надпровідниках		184
7.1.	Формулювання проблеми параметрів порядку конкуруючих з d НП	184
7.2.	Діраківський формалізм для опису конкуруючих параметрів порядку у d НП	189
7.3.	Загальне представлення для надпровідної густини	192
7.3.1.	Властивості Λ_s для різних конкуруючих параметрів порядку	193
7.4.	Вплив відкриття вторинної щілини на розсіяння на домішках	195
7.4.1.	T -матричне рівняння для конкуруючого ХСГ параметру порядку	197
7.4.2.	T -матричне рівняння для конкуруючого id_{xy} параметру порядку	199
7.5.	Надпровідна густина при $H = 0$	200
7.5.1.	Конкуруючий ХСГ порядок	201
7.5.2.	Конкуруючі id_{xy} та is параметри порядку	203
7.6.	Надпровідна густина у вихровому стані	204

7.6.1. Результати для польової залежності надпровідної густини при $m, \Delta_{xy}, \Gamma = \text{const}$	206
7.6.2. Анзац для щілини $m(H)$	208
7.6.3. Результати для польової залежності надпровідної густини для залежних від поля щілини та Γ	209
7.7. Обговорення результатів	210
Висновки	212
Подяки	215
Додаток А. Рівняння Дірака у зовнішньому магнітному полі: калібрування Ландау	217
Додаток Б. Рівняння Дірака у зовнішньому магнітному полі: симетричне калібрування	223
Додаток В. Динамічна провідність без магнітного поля	226
Додаток Г. ФГ у зовнішньому магнітному полі	229
Додаток Д. Діагональна та холлівська динамічна провідності у магнітному полі	233
Додаток Е. Обчислення діамагнітного та холлівського членів	242
Додаток Ж. Одержання холлівської провідності з рівняння (4.21) у чистій границі	246
Список використаних джерел	248

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

- 1D, 2D, and 3D — одно-, дво-, та три-вимірні
- 2DEГ (2DEG) — двовимірний електронний газ
- ВТНП — високотемпературна надпровідність або високотемпературний надпровідник
- ГС (DOS) — густина станів
- ДГХ (DDW) — d -густини хвиля (d -density wave)
- d НП (d SC) — d -хвильова надпровідність
- дГвА (dHvA) — де Гааз - ван Альфен
- ЕФВ — електрон-фононна взаємодія
- КЕД₂₊₁, КЕД₃₊₁ — квантова електродинаміка у $2 + 1$, $3 + 1$ вимірах
- КЕХ (QHE) — квантовий ефект Холла
- КК — Крамерс-Кроніг (Kramers-Krönig)
- КХФ (QHF) — квантовий Холлівський феромагнетизм
- МО (MO) — магнітні осциляції
- НРЛ (LLL) — найнижчий рівень Ландау
- ФГ (GF) — функція Гріна
- ХСГ (SDW) — хвиля спінової густини
- ЦКЕХ (IQHE) — цілочисельний квантовий ефект Холла
- ШдГ (SdH) — Шубніков - де Гааз
- ARPES — angle-resolved photoemission spectroscopy (фотоемісійна спектроскопія з кутовим вирішенням)
- STM — scanning tunneling microscopy (сканувальна тунельна мікроскопія)

ВСТУП

Актуальність теми. У той час, коли передові наукові дослідження коштовні та складні, здається дивним, що визначне досягнення у фізиці може бути зроблено за допомогою простої липкої стрічки. Але у 2004 Андрій Гейм, Костянтин Новоселов, співробітники Манчестерського університету та Інституту мікроелектронної технології з Чорноголівки зробили саме це. Обережно розколюючи зразок графіту липкою стрічкою, вони створили те, що тривалий час вважалось неможливим: виділили шар кристалічного вуглецю товщиною в один атом, зараз відомий як *графен*.

Цей новий кристал може спостерігатися навіть у простий оптичний мікроскоп. Одношарова сотова структура графена робить його “батьком” усіх основаних на вуглеці систем: графіт, який ми знаходимо в наших олівцях,¹ – просто стосом з шарів графену; вуглецеві нанотрубки створені зі згорнутого у трубку шару графену;² і бакмінстерфулерен (buckminsterfullerene) молекули, або “бакібаллс” (“buckyballs”)³ – сфери нанорозміру, згорнуті з графену. Ці форми вуглецю були створені набагато раніше за графен і мають вже багато застосувань, але всі їх електричні, магнітні та механічні властивості походять з відповідних властивостей графену.

Унікальні властивості графену виникають з колективної поведінки електронів. Як підсумовано у відомому вислові Філіпа Андерсона (Philip Anderson) “більше є відмінним” (“more is different”), ми знаємо, що коли велика

¹Саме слово “графіт” походить від грецького слова *γραφειν* (малювати, писати).

²Дуже цікаво відзначити, що питання кого вважати батьком, а кого дитиною є не тривіальним, оскільки у роботі [31] показано, що графенові нанострічки можна одержувати шляхом розрізання нанотрубок вздовж їх осі.

³Ця назва і термін “бакібаллс” були вигадані на честь далекоглядного американського архітектора та інженера Buckminster Fuller, котрий дослідив такі форми ще до відкриття цих форм вуглецю.

кількість частинок взаємодіє сильно між собою, може з'явитися неочікуваний колективний рух. У випадку графену, взаємодія між електронами та сотовою ґраткою призводить до того, що електрони поведуть себе як безмасові. Безмасова поведінка електронів у графені вперше була передбачена у 1947 році канадським теоретиком Філіпом Расселом Уолісом (Philip Russell Wallace, 1915-2006) [32].⁴ Однак, у той час ніхто не вірив, що тверде тіло завтовшки в один атомний шар може існувати, тому Уоліс використав модель графену як початкову точку у дослідженнях графіту, які були частиною досліджень ядерних реакторів, керованих графітом. Як було показано іншим канадським теоретиком Гордоном Семеновом (Gordon W. Semenoff) у 1984 році, за 20 років до фактичного отримання графену, у неперервному наближенні графен теоретично добре описується за допомогою двовимірної квантової електродинаміки (КЕД_{2+1}) [34]. Хоча графен було одержано тільки 5 років тому, йому вже присвячені тисячі статей. На серпень 2009 року робота у Science [35], де повідомлялось про створення графену, мала понад 1600 посилань.

Хоча можна бути певним у реальності застосувань тільки тоді, коли з'явилися комерційні продукти, важливість графену для фундаментальної фізики не потребує вже подальших доказів. Через свій незвичайний електронний спектр графен призвів до нової парадигми “релятивістської” теорії конденсованої матерії, де релятивістські квантові явища, деякі з котрих не спостерігались навіть у фізиці високих енергій, можуть бути імітовані та

⁴У той же час доречно зауважити, що загальна модель для обчислення електронних кристалів з кількома молекулами у комірці була запропонована О.С. Давидовим у 1948 році (див. [33]). З неї прямо випливало, що у наближенні найближчих сусідів краї ексітонних зон завжди вироджені, що певною мірою відповідає спектру графена, виявленому Уолісом. Проте графен принципово відрізняється від звичайних молекулярних кристалів тим, що в останніх мова йде про збуджені (ексітонні) стани, а в графені – про основний. Крім того, як буде видно у Розділі 1, сотова структура графену обумовлює діраківський характер його електронного спектру, чого не спостерігається у ґратках іншої структури. Останнє свідчить, що наявність кількох атомів (молекул) у комірці є необхідною, але не достатньою умовою безмасовості електронних збуджень у конденсованих середовищах.

перевірені в настільних експериментах. Взагалі, графен являє собою концептуально новий клас матеріалів завтовшки в один атомний шар і, на цій основі, пропонує нові шляхи у низькорозмірну фізику, яка ніколи не припиняла дивувати і продовжує забезпечувати родючий ґрунт для застосувань [36]. Наша здатність управляти рухом електронів у графені прокладає шлях до практично безвтратних та ультрашвидких транзисторів атомних розмірів.

Так склалося, що автор цієї дисертації почав теоретичні дослідження графену ще до його експериментального створення, вивчаючи поведінку двовимірних діраківських ферміонів у зовнішньому магнітному полі. Через це багато з отриманих результатів фактично передбачили основні властивості графену, що і допомогло експериментаторам швидко перевірити і довести діраківський характер квазічастинок у графені.

Кандидатська дисертація [37] починається з констатації, що на момент її написання минуло вже майже 10 років з відкриття високотемпературної надпровідності (ВТНП) у купратах. Проте навіть зараз, коли минуло вже 23 роки, основні питання щодо механізму ВТНП, природи псевдощільни, тощо залишаються нез'ясованими, хоча і є постійний прогрес у якості зразків, який супроводжується і теоретичним розвитком. Нема вже сумнів, що надпровідний стан купратних ВТНП має d -хвильову щільну з вузлами вздовж діагоналей зони Бріллюена [38]. Лінеаризація боголюбівського спектру квазічастинок навколо чотирьох вузлів на поверхні Фермі також дозволяє описувати відповідні безщільні ферміонні збудження за допомогою ефективної діраківської теорії. Дослідження ВТНП спонукали великий інтерес до так званих вузлових (нодальних) квазічастинок, які є безщільними фермі-збудженнями, пов'язаними з нулями щільної функції. Залежно від фізичного походження щільності, можна розглядати різні фізичні ситуації, які дуже часто описуються моделями, що у певному наближенні⁵

⁵Головним наближенням є те, що ВТНП це – квазідвовимірні системи, і зв'язком між надпровідними

зводяться до КЕД_{2+1} .

Ситуація з дослідженнями ВТНП дуже вдало характеризується словами В.Л. Гінзбурга, наведеними в епіграфі Розділу 7: незважаючи на велике значення досліджень ВТНП, інтерес до них у великій мірі визначається модою. Не став винятком і автор: почавши з досліджень ефективної КЕД_{2+1} , яка описує купратні ВТНП, він зацікавився графеном, який, на той момент, хоча й не був ще створеним, але вже здавався більш обіцяючим з точки зору фізичної реалізації КЕД_{2+1} . Таким чином, ця дисертація є гарною ілюстрацією ситуації, коли досить різні фізичні системи описуються однаковими рівняннями. Про це дуже влучно сказано у Файнманівських лекціях з фізики (Vol.2, Ch.12-1): “Finally, there is a most remarkable coincidence: The equations for many different physical situations have exactly the same appearance”.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась в Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, на фізичному факультеті університету Преторії (м. Преторія, Південна Африка), в Інституті фізики університету Нюшателю (м. Нюшатель, Швейцарія), в Інституті наукового обміну (м. Турін, Італія), на фізичному факультеті університету Макмастер (м. Гамільтон, Канада), Західно-Іллінойському університеті (м. Макоум, США). Частину результатів було отримано в процесі виконання наступних проектів: тема НАН України “Динамічні, термодинамічні та спектральні властивості неперервних та ґраткових систем з нелінійними збудженнями”, номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ 0103У006884 (виконавець); ДФФД Ф28.2/083 “Застосування методів теорії струн та теорії поля у вивченні нелінійних явищ в низьковимірних системах” номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ 0109U006861.

площинами можна знехтувати тільки за деяких умов. На відміну від цього, графен є справжньою 2D системою.

Мета і задачі дослідження. Метою досліджень є встановлення основних термодинамічних та транспортних властивостей систем, які теоретично описуються за допомогою КЕД_{2+1} . Зокрема, розв'язувались наступні задачі:

- Виявлення дискретних симетрій ефективної КЕД_{2+1} теорії графену.
- Одержання та дослідження виразів для діагональної та недіагональної статичної та динамічної магнітопровідностей графену.
- Дослідження квантових магнітних осциляцій та ефекту Нернста у графені.
- Дослідження впливу електрон-фононної взаємодії на властивості графену.
- Дослідження залежності надпровідної густини у високотемпературних надпровідниках від зовнішнього магнітного поля у присутності інших параметрів порядку, які конкурують з надпровідністю.

Об'єктами дослідження є квазічастинкові електронні збудження у графені та вузлові (нодальні) квазічастинки у високотемпературних надпровідниках.

Предметом дослідження є густина станів (ГС), тензор електричної провідності графену та надпровідна густина у високотемпературних надпровідниках у зовнішньому магнітному полі.

У роботі було застосовано наступні **методи дослідження**: метод лінійного відгуку Кубо для обрахунку електричної провідності та надпровідної густини, метод температурних (мацубарівських) функцій Гріна та метод Швінгера для одержання функції Гріна у зовнішньому магнітному полі.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

1. Циклотронна маса для діраківських ферміонів, що входить у температурний фактор у відповідному виразі для амплітуди осциляцій

Шубнікова – де Гааза, у графені залежить від густини носіїв кореневим чином, що вже знайшло підтвердження в експериментальних дослідженнях.

2. Фаза квантових магнітних осциляцій у графені (зокрема, осциляцій Шубнікова – де Гааза) зсунута на π по відношенню до відповідної фази для електронів у нерелятивістському двовимірному електронному газі. Цей зсув фази магнітних осциляцій для діраківських ферміонів обумовлений тим, що енергія найнижчого рівня Ландау не залежить від магнітного поля.
3. Квантовий ефект Холла (КЕХ) для діраківських ферміонів у графені є аномальним (напівцілим) з фактором заповнення $\nu = \pm 4(n + 1/2)$, $n = 0, 1, \dots$. Аномальність КЕХ викликана виродженням найнижчого рівня Ландау, яке дорівнює половині виродження вищих рівнів.
4. Універсальна оптична (динамічна) провідність для невзаємодіючих діраківських ферміонів, при енергіях фотонів $\Omega \gg T, \mu$ (T – температура, а μ – хімічний потенціал) визначається величиною $\sigma_{opt} = \pi e^2 / (2h)$, де e – це заряд електрона, а h – постійна Планка. Поведінка оптичної провідності має пороговий характер, який залежить від концентрації носіїв.
5. Поблизу діраківської точки сигнал Нернста стає великим та додатним порядку $1 \mu\text{V}/\text{K}$ на 1 Tesla, що в 100 разів більше, ніж у звичайних системах.
6. По еволюції ліній поглинання електромагнітних хвиль при зміні хімічного потенціалу в графені можна дізнатися про наявність аномального (найнижчого) діраківського рівня Ландау. При цьому перша лінія поглинання, яка пов'язана з цим рівнем, завжди має або повну інтенсивність, або цілком відсутня, тоді як всі інші лінії зникають у два кроки.

7. Розрахунку правил сум для діагональної та холлівської оптичних провідностей у графені.
8. У присутності електрон-фононної взаємодії величина оптичної провідності стає меншою, ніж розрахована універсальна величина σ_{opt} .
9. У присутності параметру порядку іншої природи, який конкурує з d -хвильовою надпровідністю, залежність надпровідної густини від зовнішнього магнітного поля H відрізняється від простої $\sim \sqrt{H}$ залежності, яку зазвичай пов'язують з доплерівським зсувом енергії квазічастинок.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теоретичний опис графену та високотемпературних надпровідників. Описані вище теоретичні передбачення властивостей графену, такі як незвичайний цілочисельний квантовий ефект Холла (ЦКЕХ) [1, 2], зсув фази осциляцій де Гааза – ван Альфена [3] та Шубнікова – де Гааза [4] і концентраційна залежність циклотронної маси [3, 4] спостерігалися в двох незалежних експериментальних роботах, опублікованих у найавторитетніших наукових журналах світу [39, 40]. Саме на основі експериментального спостереження цих передбачень стало загальноприйнятим фактом те, що квазічастинки в графені описуються за допомогою рівняння Дірака, а не Шрьодінгера, як у більшості інших матеріалів. Про широке вживання та велике практичне значення результатів свідчить їхня висока цитованість іншими авторами. Зокрема, на сучасний момент за даними ISI Thomson Scientific робота [1] має понад 330 цитувань, робота [2] цитувалася 91 раз. Передбачена у роботі [5], цитований вже 67 разів, універсальна оптична провідність та її порогова залежність від густини носіїв, спостерігалася в експериментальних роботах, опублікованих у *Science* [41, 42], *Nature Physics* [43] та *Phys. Rev. Lett.* [44]. Керовані оптичні властивості графену мають великий потенціал за-

стосувань в інфрачервоній оптиці та оптоелектроніці. Передбачений у [2] великий та додатний сигнал Нернста поблизу діраківської точки, який є ще однією визначною рисою діраківських ферміонів, спостерігався у найновіших експериментах [45–47]. Роботи [3, 9, 25] мають понад 40 цитувань кожна, а робота [4] цитувалась 30 разів, що вказує на їх практичну важливість у дослідженнях графену. Огляд [24] має 105 посилань.

Особистий внесок здобувача. Результати, які увійшли до дисертації та були опубліковані зі співавторами, одержані автором самостійно. Це стосується, зокрема, формулювання задач та виконаних аналітичних та чисельних розрахунків. У роботах за участю В.П. Гусиніна з квантового ефекту Холла [1, 2], квантових магнітних осциляцій [3, 4] та оптичних властивостей графену [5, 7, 8, 13, 22] здобувач зробив порівняння з експериментальними даними, виклав кінцеві результати у формі, зручній для використання у фізиці твердого тіла, а також зробив всі чисельні розрахунки. У роботах, виконаних без участі В.П. Гусиніна [14–17, 20, 21], навпаки, здобувач відповідав за використання теоретико-польового формалізму та аналітичні розрахунки. Це також стосується і робіт з високотемпературної надпровідності [6, 18]. У роботах, присвячених крайовим станам у графені [10–12], автору належить частина постановки задачі та розрахунки. В огляді по графену у *Int. J. Mod. Phys. B* [25] автору належать оригінальні результати з досліджень дискретних симетрій графену, а також текст перших трьох розділів. В огляді по ВТНП у *Physics Reports* [24] автору належить текст перших п'яти розділів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися на семінарах відділу Нелінійної фізики конденсованого стану та наукових сесіях Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної Академії наук України, та семінарах і колоквіумах інших установ по всьому світу: Інституту математики Національної Академії на-

ук України, Інституту магнетизму Національної Академії наук України, Department of Physics, University of Pretoria (Преторія, Південна Африка), Department of Physics, University of the Witwatersrand (Йоханесбург, Південна Африка), Institut de Physique, Université de Neuchâtel (Нюшатель, Швейцарія), Institute for Theoretical Physics, ЕТН, (Цюрих, Швейцарія), Département de Physique de la Matière Condensée, Université de Genève (Женева, Швейцарія), Université de Lausanne (Лозанна, Швейцарія), University of Leipzig (Лейпциг, Німеччина), University of Camerino (Камеріно, Італія), Torino Politecnico (Турін, Італія), University of Western Ontario (Лондон, Канада), Brock University (Санкт-Катарін, Канада), Western Illinois University (Макоум, США).

Також, результати були представлені на наступних міжнародних конференціях, зокрема як **запрошені доповіді** на:

- March 2006 Meeting of the American Physical Society, Балтімор, Меріленд, США (березень 13-17, 2006) [29],
- Congress of the Canadian Association of Physicists, University of Saskatchewan, Саскатун, Саскачевань, Канада (червень 17-20, 2007) [30],
- Workshop on Graphene: Fundamentals and Perspectives, Бенаск, Іспанія (липень 26 - серпень 08, 2009) ⁶

усні доповіді на

- Third International Conference on New Theories, Discoveries, and Applications of Superconductors and Related Materials, Гонолулу, Гаваї, США (січень 15 - 19, 2001),
- Meeting of the Swiss Physical Society, Дюбендорф, Швейцарія (2 травня, 2001),
- Meeting of the Swiss Physical Society, Лозанна, Швейцарія (1 березня, 2002),

⁶Доповідь знаходиться тут http://benasque.org/2009graphene/talks_contr/303Sharapov-talk.pdf

- Materials with Novel Electronic Properties (MaNEP) Topical Meeting “Non-Fermi Liquids and Low Dimensional Systems”, Нюшатель, Швейцарія (10 лютого, 2003),
- Meeting of the Swiss Physical Society, Базель, Швейцарія (20 березня, 2003),
- Bogolyubov Kyiv conference: Modern Problems of Mathematics and Theoretical Physics, Київ (13-16 вересня, 2004),
- workshop Electronic Properties of Graphene, Kavli Institute for Theoretical Physics, Санта Барбара, Каліфорнія, США (8-19 січня, 2007)⁷,
- March 2007 Meeting of the American Physical Society, Денвер, Колорадо, США (5-9 березня, 2007),
- workshop on “Relativistic dynamics of graphene”, Institute for Nuclear Theory, University of Washington, Сіетл, США (січень 8 - 11, 2008)⁸,
- March 2009 Meeting of the American Physical Society, Пітсбург, Пенсільванія, США (16-20 березня, 2009),
- Київська Боголюбівська конференція: Сучасні проблеми теоретичної і математичної фізики Київ (15-18 вересня, 2009),

та **постери** на

- Swiss Workshop on Materials with Novel Electronic Properties (MaNEP), Ле Дьяблере, Швейцарія, (жовтень 1 - 3, 2001),
- the 19-th General Conference of the EPS Condensed Matter Division, Брайтон, Англія (квітень 7 - 11, 2002),
- International Workshop “Non-Fermi-Liquid Physics in Transition Metal and Rare Earth Compounds”, Блед, Словенія (23 - 26 травня, 2002),
- 7-th International Conference on “Materials and Mechanisms of Superconductivity and High Temperature Superconductors”, Ріо де Жаней-

⁷Доповідь знаходиться тут http://online.itp.ucsb.edu/online/graphene_m07/sharapov/

⁸Доповідь знаходиться тут http://www.int.washington.edu/talks/WorkShops/int_08_37W/People/Sharapov_S/Sharapov.pdf

ро, Бразилія (25-30 травня, 2003),

- Swiss Workshop on Materials with Novel Electronic Properties (MaNEP),
Ле Дьяблере, Швейцарія, (29 вересня - 1 жовтня, 2003).

Публікації. Результати, отримані в цій дисертації, були описані в 30 публікаціях [1] – [30]. Публікації, що виносяться на захист, включають 2 статті у провідному науковому фаховому виданні України [11,17], 22 роботи видані в провідних міжнародних дослідницьких журналах, включаючи 3 статті [1,5,7] у Physical Review Letters, 14 статей у Physical Review B, огляд у журналі Physics Reports [24], запрошений огляд у журналі International Journal of Modern Physics B [25], а також тези 5-ти конференцій [26–30] та один препринт [23].

Структура дисертації. Розділ 1 має ввідний характер і присвячений огляду основних моделей, що досліджуються в дисертації. Зокрема, у Розділі 1 ми розглядаємо дві системи: графен та високотемпературні надпровідники (ВТНП), які описується за допомогою КЕД_{2+1} . Ми починаємо цей Розділ з опису граткової моделі із зовнішнім векторним потенціалом, яка описує рух носіїв у графені, і одержуємо з неї континуальне КЕД_{2+1} формулювання теорії, на якому базується практично весь подальший розгляд графену в дисертації.

Розділ 2 присвячено оригінальному аналізу властивостей КЕД_{2+1} опису графену. Зокрема, фізичний зміст кіральності обговорюється у Розділі 2.2. У Розділі 2.3 дискретні операції симетрії у ефективній діраківській теорії визначені у *відповідності* з дискретними симетріями моделі на гратці, які розглядаються у Розділі 1.1.3. Базуючись на дискретних симетріях у Розділі 2.4, ми роз'яснюємо різницю між квазічастинками у графені і безмасовими нейтрино у КЕД_{3+1} . Вісім можливих діраківських мас введено у Розділі 2.5, де розглядаються їх трансформаційні властивості при дискретних перетвореннях.

Розділ 3 присвячено динамічній та статичній електричним провідностям діраківських ферміонів. У ньому одержано загальні аналітичні вирази для діагональної та холлівської провідностей, які потім аналізуються в деталях. Зокрема у Розділі 3.2 вивчена діагональна статична та динамічна електрична провідність у відсутності зовнішнього магнітного поля. З одержаного загального виразу для цієї провідності, який містить міжзонний та Друде внески, отримано, що при великих енергіях фотонів $\Omega \gg T, \mu$, де T – це температура, а μ – хімічний потенціал, оптична провідність для невзаємодіючих діраківських ферміонів дорівнює універсальній величині $\sigma_{opt}(\Omega) = \pi e^2 / (2h)$. У Розділі 3.3 вивчена діагональна та холлівська статична та динамічна електричні провідності у зовнішньому магнітному полі. У Розділах 3.4.2 та 3.4.3 розглядаються правила оптичних сум для діагональної та холлівської провідностей, відповідно.

У Розділі 4 розглядаються квантові магнітні осциляції та ефект Нернста для діраківських ферміонів. Ми починаємо з осциляцій ГС у Розділі 4.1, де показуємо, що фаза магнітних осциляцій діраківських квазічастинок зсунута на π по відношенню до відповідної фази для електронів у нерелятивістському двовимірному електронному газі. Далі, у Розділі 4.2 ми розглядаємо статичні електричні провідності $\sigma_{xx}(\Omega \rightarrow 0)$ і $\sigma_{xy}(\Omega \rightarrow 0)$ у присутності зовнішнього магнітного поля та у Розділі 4.3 явно виділяємо осциляції Шубнікова – де Гааза з виразу для провідності σ_{xx} .

Головний результат дисертаційної роботи - аномальний квантовий ефект Холла у графені з фактором заповнення $\nu = \pm 2(2n + 1)$ з $n = 0, 1, \dots$ розглядається у першій половині Розділу 5. Друга половина цього Розділу, а саме Розділ 5.3 присвячена розгляду крайових станів у графені випадку сильних полів, коли з'являються нові плато із заповненням $\nu = 0, \pm 1$. Сформульовано критерій існування безщілинних крайових станів в енергетичному спектрі.

У Розділі 6 розглядається електрон-фононна взаємодія (ЕФВ) у графе-

ні. Ми досліджуємо, як ЕФВ перенормує рух електронів на поверхні фермі через наявність фактору $(1 + \lambda_{eff})$, де λ_{eff} – це залежний від хімічного потенціалу ефективний параметр ренормалізації маси, або, точніше, у випадку графена - швидкості. Зокрема, ми вивчаємо зміну значення хімічного потенціалу по відношенню до його значення в голій зоні, зсув відносного положення діраківської точки. Ми закінчуємо цю главу розглядом впливу ЕФВ на оптичну провідність графену у Розділі 6.3.

У Розділі 7 досліджується модель високотемпературного d -хвильового надпровідника у надпровідному стані, котрий, на додаток до d -хвильового параметру порядку, має ще один параметр порядку іншої природи, пов'язаний або з хвилями спінової густини (ХСГ), або також з надпровідними is , або id_{xy} порядками. У наближенні доплерівського зсуву вивчається залежність надпровідної густини від зовнішнього магнітного поля H , прикладеного перпендикулярно до ab площини, та вплив на неї конкуруючого параметру порядку.

РОЗДІЛ 1

МОДЕЛІ 2D СИСТЕМ З ДІРАКІВСЬКИМ СПЕКТРОМ КВАЗІЧАСТИНКОВИХ ЗБУДЖЕНЬ

Тут я с ходу столкнувся с Ландау, который без предисловия спросил меня, чем я намерен заниматься. ... и я, не заикнувшись, выпалил: “Теорией поля”. Голос Ландау мгновенно достиг столь родного нам форте: “Ах, теорией поля? Так вы – модник! Но ведь только бабам пристало гоняться за модами. Стыдитесь!”

Ландау глазами ученика

И.Е. Дзялошинский

Є широка різноманітність 2D систем у конденсованому стані, що у низько-енергетичній границі мають лінійний закон дисперсії квазічастинкових збуджень. У цьому розділі, що базується на роботах автора [3, 6, 25], буде розглянуто такі приклади, як *графен* (*graphene*) та високотемпературні надпровідники (ВТНП), що описується за допомогою КЕД₂₊₁. Цей розділ має здебільшого ввідний характер і містить не стільки оригінальні результати, скільки послідовний огляд концепцій і позначень, які будуть використані у подальших розділах. Почавши з моделі сильного зв’язку, ми отримаємо ефективний КЕД₂₊₁ лагранжіан, що описує графен. Властивості цього лагранжіану будуть розглянуті у Розділі 2.

1.1. Графен: від моделі сильного зв’язку до КЕД₂₊₁ опису

Найбільш відомим, на сучасний момент, прикладом системи, що дуже добре описується за допомогою КЕД₂₊₁, є графен. Саме цьому визначному матеріалу в дисертації буде присвячено найбільше уваги. Єдиний шар

атомів вуглецю, упакований у 2D сотову гратку, зветься графен. Зонна структура графену складається з цілком заповненої валентної зони та порожньої провідної зони. Обидві зони мають конічну форму з вершинами, що зустрічаються у точці Дірака. Є дві нееквівалентні пари таких конусів. Ця модель, яка заснована на континуальній границі зонної моделі, може адекватно описати низькоенергетичні явища. Відхилення від простих конусів можуть стати важливими біля границь зони, де потрібно розглядати додаткові деталі повного спектру. Прикладом необхідності йти поза межі континуального наближення є обговорення оптичного правила сум, яке потребує інтегрування оптичної провідності (або пов'язаних з нею характеристик) по всій енергетичній зоні.

Повертаючись до континуального опису за допомогою КЕД_{2+1} , цікаво відзначити, що історично цей теоретико-польовий опис графену було запропоновано за 20 років до [34] його фактичного відкриття [35, 48] і мотивовано теоретичним дослідженням можливості реалізації аномалії парності у конденсованому стані речовини [49] – [52], застосування ренормалізаційної групи до цієї системи [53] – [57], а також непертурбативної динаміки, пов'язаної з генерацією ексітонної щільності у графені [58–60]. Інтерес до діраківських ферміонів у теорії конденсованого стану був також пов'язаний із вивченням цілочисельного квантового ефекту Холла (ЦКЕХ) [61]. У даний час графен є джерелом натхнення для робіт з фракціоналізації ферміонів [62–64], яка все ще чекає на відкриття.

Експериментальний доказ існування діраківських ферміонів у графені [39, 40], що надійшов зі спостереження теоретично очікуваного незвичайного ЦКЕХ [1, 65, 66] з квантованим фактором заповнення

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \nu, \quad \nu = \pm 2(2n + 1), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

зробив діраківські ферміони не лише красивою теоретичною іграшкою, а реальним об'єктом, який одного дня, можливо, працюватиме в “grapheni-

um inside” процесорі [67], або навіть швидше стане стандартом опору, що працює за температури вищої, ніж у рідкого азоту [68].

Ця сприятлива ситуація викликала велике захоплення. Зараз з’явилася можливість зробити дослід на колінці, щоб дослідити властивості КЕД₂₊₁. Існуюче відображення твердотільної моделі графену до КЕД також означає, що інтуїтивні здогадки, отримані при вивченні релятивістських ферміонів, можуть бути використані для вивчення твердотільної системи. Приклади релятивістських ефектів, що могли б бути досліджені, включають парадокс Клейна, який пов’язаний із ідеальним проходженням електронів через високий потенційний бар’єр [69–71]. Другий приклад – це *Zitterbewegung* або “тремтіння” центру вільного хвильового пакету [72]. Для того, щоб краще оцінити аналогії між поведінкою електронів у графені і в КЕД₂₊₁, у наступній частині 1.1.1 ми дуже детально переглянемо теоретичний зв’язок між твердотільним описом графену на гратці та його наближеним описом у континуальному КЕД₂₊₁ формулюванні.

Хоча графену тільки 5 років, вже існує багато популярних статей ввідного [73–76] і вищого [77–79] рівнів. Також є чудова оглядова стаття А.К. Гейма і К. Новоселова [67] (див. також [80]) і більш теоретичні огляди [71, 81, 82]. Тому що графен – основна складова всіх форм графіта, вся існуюча література від кінця 40-их розглядає графен як початковий пункт аналізу. Особливо корисними є результати, одержані для вуглецевих нанотрубок (див., наприклад, роботи [83, 84]). Не дивлячись на цю різноманітність робіт з графену, ми знайшли, що більше формальний погляд, який може сформувати міст між теорією конденсованого середовища і квантовою теорією поля, був ще відсутнім, тому був написаний огляд [25], на якому базується наступна частина та Розділ 2.

1.1.1. Опис графену у моделі на гратці. Сотова гратка може бути описана у термінах двох трикутних підграток, А та В (див Рис. 1.1 а).

Елементарна комірка містить два атоми типів A і B . Показані вектори

$$\mathbf{a}_1 = a\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \mathbf{a}_2 = a\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad (1.2)$$

є примітивними трансляціями, де постійна ґратки $a = |\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = \sqrt{3}a_{CC}$ та a_{CC} є відстанню між найближчими атомами вуглецю. Відповідні векто-

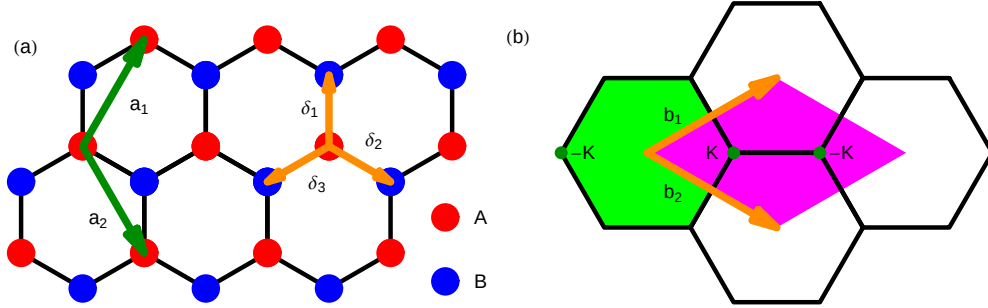


Рис. 1.1. (Кольоровий у електронній версії [25].) (а) Гексагональна ґратка графену сконструйована як суперпозиція двох трикутних ґраток A і B , з базисними векторами $\mathbf{a}_{1,2}$ для ґратки A і векторами δ_i з $i = 1, 2, 3$, що з'єднують A з B . (б) Зелений гексагон – це зона Бріллюена та рожевий ромб – це розширена зона Бріллюена для сотової ґратки. $\mathbf{b}_1$ і $\mathbf{b}_2$ – це вектори оберненої ґратки.

ри оберненої ґратки $\mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{a}(1, 1/\sqrt{3})$ та $\mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{a}(1, -1/\sqrt{3})$ показані на Рис. 1.1 б разом зі звичайною та розширеною зонами Бріллюена. Вектори оберненої ґратки задовольняють умові $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$.

Будь-який A атом з розташуванням $\mathbf{n} = \mathbf{a}_1 n_1 + \mathbf{a}_2 n_2$, де $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, зв'язаний зі своїми сусідами на B позиціях трьома векторами δ_i :

$$\delta_1 = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)/3, \quad \delta_2 = \mathbf{a}_1/3 + 2\mathbf{a}_2/3, \quad \delta_3 = -\delta_1 - \delta_2 = -2\mathbf{a}_1/3 - \mathbf{a}_2/3. \quad (1.3)$$

Окрім трансляцій, група симетрій сотової ґратки включає обертання (R і R^{-1}) на $\pm 2\pi/3$ і дзеркальні відображення (Y_1, Y_2, Y_3) довкола площин, що проходять через центр і три вершини гексагона. Разом обертання і відображення формують неабелеву групу C_{3v} з 6 елементами. Їхнє явне матричне

зображення може бути визначене матрицями, що перетворюють базисні вектори $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$,

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \\ Y_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Крім того, є віддзеркалення у площині (змінює $\mathbf{a}_i \rightarrow -\mathbf{a}_i$, за яким слідує трансляція на один з векторів $\mathbf{z}_i$) і, відповідно, комбінації Z з будь-якою з вищезгаданих дій. Всі ці дії не переставляють атоми А- і В-типів. Одноелектронні власні функції можуть бути класифіковані згідно підгрупи (E, Z) в залежності від того, чи стани є парними (σ стани), або непарними (π стани) при віддзеркаленні Z . Є також операції, які обмінюють А і В атоми, наприклад, віддзеркалення X_1, X_2, X_3 у дзеркальних площинах, що перпендикулярні до відповідних площин Y_i . Вони є операціями симетрії, коли супроводжуються певними дробовими трансляціями [85].

Операції обертання і обертання-віддзеркалення (залишення в стороні Z віддзеркалення) утворюють точкову групу графену, яка містить 12 елементів. Ефект дії групової операції G на функції координат визначається так: $\psi'(\mathbf{r}) = \psi(G^{-1}\mathbf{r}) = T(G)\psi(\mathbf{r})$. Це дозволяє визначати незвідні представлення для графену. Зокрема, відзначимо, що підгрупа (1.4) має двовимірне спінорне представлення, яке буде використане нижче. Повний розгляд групи симетрій графену був зроблений в роботах [85, 86].

Вуглецеві атоми у графеновій площині зв'язані сильними ковалентними σ -зв'язками завдяки sp^2 гібридизації атомних $2s, 2p_x, 2p_y$ орбіталей. $2p_z$ (π) орбіталі є перпендикулярними до площини і мають слабе перекриття. Тому ми почнемо з найпростішого опису для π орбіталей вуглецю за

допомогою гамільтоніана

$$H = -t \sum_{\mathbf{n}, \boldsymbol{\delta}_i, \sigma} \left[a_{\mathbf{n}, \sigma}^\dagger \exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \boldsymbol{\delta}_i \mathbf{A} \right) b_{\mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_i, \sigma} + \text{c.c.} \right], \quad (1.5)$$

де t є параметром перескоку для найближчих сусідів, $a_{\mathbf{n}, \sigma}$ та $b_{\mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_i, \sigma}$ є Фермі-операторами для електронів зі спіном $\sigma = \uparrow, \downarrow$ на A і B підгратках, відповідно. Оскільки ми зацікавлені в струмовому відгуку, векторний потенціал $\mathbf{A}$ вводиться у гамільтоніані (1.5) за допомогою заміни Пайерлсу (Peierls) $a_{\mathbf{n}, \sigma}^\dagger b_{\mathbf{m}, \sigma} \rightarrow a_{\mathbf{n}, \sigma}^\dagger \exp \left(-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}} \mathbf{A} d\mathbf{r} \right) b_{\mathbf{m}, \sigma}$ яка вносить фазовий фактор $\exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \boldsymbol{\delta}_i \mathbf{A} \right)$ у член з перескоками (див. [87] для огляду). Ми утримали постійну Планка $\hbar$ і швидкість світла c , але встановили $k_B = 1$. Заряд електрона є $-e < 0$. Відзначимо, що ми розглядаємо 2D модель. Експеримент, однак, показує, що графен для того, щоб існувати без субстрату, розповсюджується поза 2D площину [88].

Розкладаючи гамільтоніан (1.5) до другого порядку по векторному потенціалу, одержуємо

$$H = H_0 - \sum_{\mathbf{n}} \left[\frac{1}{c} \mathbf{A}(\mathbf{n}) \mathbf{j}(\mathbf{n}) - \frac{1}{2c^2} A_\alpha(\mathbf{n}) \tau_{\alpha\beta}(\mathbf{n}) A_\beta(\mathbf{n}) \right], \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (1.6)$$

Оператор повного струму одержано з диференціювання рівняння (1.6) по $A_\alpha(\mathbf{n})$,

$$j_\alpha(\mathbf{n}) = -\frac{\partial H}{\partial (A_\alpha/c)} = j_\alpha^P(\mathbf{n}) - \tau_{\alpha\beta}(\mathbf{n}) A_\beta(\mathbf{n})/c, \quad (1.7)$$

та складається зі звичайної парамагнітної частини,

$$j_\alpha^P(\mathbf{n}) = \frac{ite}{\hbar} \sum_{\boldsymbol{\delta}_i, \sigma} (\delta_i)_\alpha \left[a_{\mathbf{n}, \sigma}^\dagger b_{\mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_i, \sigma} - b_{\mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_i, \sigma}^\dagger a_{\mathbf{n}, \sigma} \right], \quad (1.8)$$

і діамагнітної частини,

$$\tau_{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = \frac{\partial^2 H}{\partial (A_\alpha/c) \partial (A_\beta/c)} = \frac{te^2}{\hbar^2} \sum_{\boldsymbol{\delta}_i, \sigma} (\delta_i)_\alpha (\delta_i)_\beta \left[a_{\mathbf{n}, \sigma}^\dagger b_{\mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_i, \sigma} + b_{\mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_i, \sigma}^\dagger a_{\mathbf{n}, \sigma} \right]. \quad (1.9)$$

Ми підкреслюємо: щоб отримати правильну форму струму (1.8) і діамагнітної частини (1.9), заміну Пайерлсу треба робити в оригінальному гамільтоніані (1.5) або його імпульсному представленні (див. (1.10) нижче), а не після того, як діагоналізація цих гамільтоніанів вже зроблена (див. [89] і посилання там). Ми повернемося до парамагнітного і діамагнітного членів взаємодіючого гамільтоніана (1.6), коли ми будемо обговорювати зв'язок з векторним потенціалом у Розділі 1.1.4.2 і правила сум у Розділі 3.4. А зараз ми розглянемо невзаємодіючий гамільтоніан H_0 .

1.1.2. Спінорне представлення невзаємодіючого гамільтоніана. В імпульсному представленні гамільтоніан H_0 записується

$$H_0 = \sum_{\sigma} \int_{BZ} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \Upsilon_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \mathcal{H}_0 \Upsilon_{\sigma}(\mathbf{k}), \quad \mathcal{H}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \phi(\mathbf{k}) \\ \phi^*(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

з $\phi(\mathbf{k}) = -t \sum_{\delta_i} e^{i\mathbf{k}\delta_i} \equiv -\epsilon(\mathbf{k}) e^{i\varphi(\mathbf{k})}$. У базисі (1.2) одержуємо

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{k}) &= -t e^{i\mathbf{k}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)/3} [1 + e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}_2} + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}_1}] \\ &= -t \left[\exp\left(i \frac{k_y a}{\sqrt{3}}\right) + \exp\left(-i \frac{k_y a}{2\sqrt{3}}\right) 2 \cos \frac{k_x a}{2} \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

і

$$\epsilon(\mathbf{k}) = t \sqrt{1 + 4 \cos^2 \frac{k_x a}{2} + 4 \cos \frac{k_x a}{2} \cos \frac{\sqrt{3} k_y a}{2}}. \quad (1.12)$$

Відповідно, через те що графенова структура містить два атоми в елементарній комірці (дві підгратки), спектр квазічастинкових збуджень має дві гілки (зони) з дисперсією [32] $E_{\pm} = \pm \epsilon(\mathbf{k})$ показані на Рис. 1.2. У рівнянні (1.10) ми ввели спінори

$$\Upsilon_{\sigma}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} a_{\sigma}(\mathbf{k}) \\ b_{\sigma}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

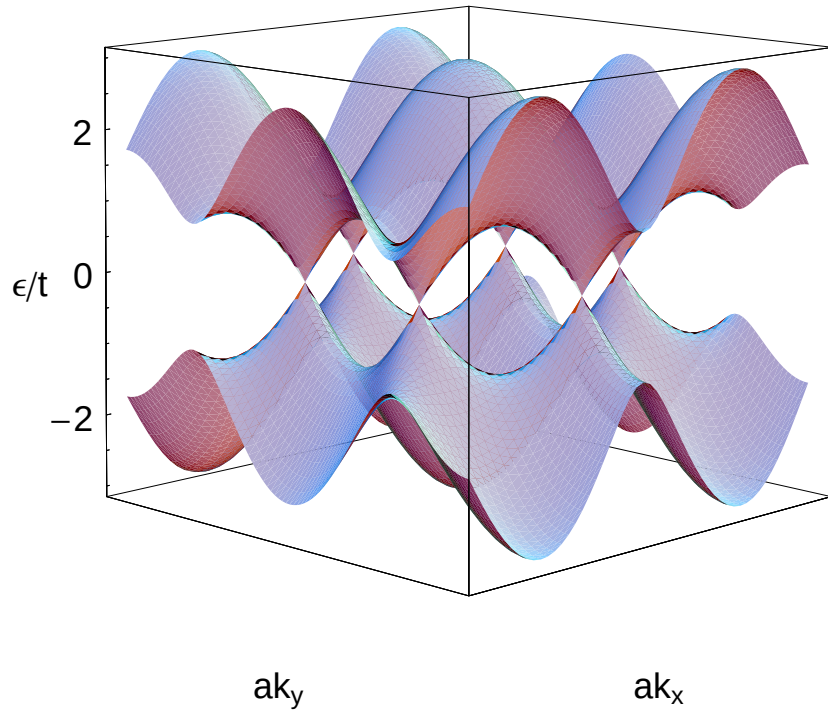


Рис. 1.2. (Кольоровий у електронній версії [25].) Енергетична зонна структура графену. Валетна зона та зона провідності зустрічаються у шести $\mathbf{K}$ точках.

з оператором $\Upsilon_\sigma(\mathbf{k})$, який є Фур'є перетворенням спінору $\Upsilon_\sigma(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} a_{\mathbf{n},\sigma} \\ b_{\mathbf{n},\sigma} \end{pmatrix}$:

$$\Upsilon_\sigma(\mathbf{n}) = \sqrt{S} \int_{BZ} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{n}} \Upsilon_\sigma(\mathbf{k}). \quad (1.14)$$

Тут $S = \sqrt{3}a^2/2$ є площиною елементарної комірки. Інтегрування в (1.10) і (1.14) ведеться по розширеній ромбічній зоні Бріллюена (BZ). Ми також додали до H_0 член Зеємана та хімічний потенціал

$$H_Z = - \sum_{\sigma} \mu_{\sigma} \int_{BZ} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \Upsilon_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \Upsilon_{\sigma}(\mathbf{k}) \quad (1.15)$$

з $\mu_{\sigma} = \mu - \sigma g/2\mu_B B$, де $\mu_B = e\hbar/(2m_e c)$ є магнетоном Бору, і g є фактором Ланде. Ми відраховуємо енергію Зеємана від хімічного потенціалу μ , так що наступний розгляд базується на великому канонічному ансамблі.

Відповідна функція Гріна (ФГ) у формалізмі уявного часу визначена як термальна середня величина

$$G_\sigma(\tau_1 - \tau_2, \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) = -\langle T_\tau \Upsilon_\sigma(\tau_1, \mathbf{n}_1) \Upsilon_\sigma^\dagger(\tau_2, \mathbf{n}_2) \rangle \quad (1.16)$$

та її Фур'є перетворення є

$$G_\sigma(\tau_1 - \tau_2, \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) = ST \sum_n \int_{BZ} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} G_\sigma(i\omega_n, \mathbf{k}) \exp[-i\omega_n(\tau_1 - \tau_2) + i\mathbf{k}(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2)] \quad (1.17)$$

з

$$G_\sigma(i\omega_n, \mathbf{k}) = \frac{(i\omega_n + \mu_\sigma) \hat{I} + \tau_+ \phi(\mathbf{k}) + \tau_- \phi^*(\mathbf{k})}{(i\omega_n + \mu_\sigma)^2 - \epsilon^2(\mathbf{k})}, \quad \omega_n = \pi(2n + 1)T, \quad (1.18)$$

де матриці $\tau_\pm = (\tau_1 \pm i\tau_2)/2$ зроблені з Паулі матриць діють у просторі підґраток. ФГ (1.18) описує електронні та діркові збудження з енергією $E_\pm(\mathbf{k}) = \pm\epsilon(\mathbf{k}) - \mu_\sigma$, відповідно.

Дисперсія $\epsilon(\mathbf{k})$ поблизу шести $\mathbf{K}$ точок $\pm 2\pi/a(1/3, 1/\sqrt{3})$, $\pm 2\pi/a(2/3, 0)$, $\pm 2\pi/a(1/3, -1/\sqrt{3})$ у кутах гексагональної зони Бріллюена (BZ) (див. Рис. 1.2) є лінійною, [32] $E_\pm(\mathbf{p}) = \pm \hbar v_F |\mathbf{p}| - \mu_\sigma$ (див. Рис. 2.1 (а) у Розділі 2.6), де хвильовий вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ відраховується від $\mathbf{K}$ точок, і швидкість Фермі дорівнює $v_F = \sqrt{3}ta/(2\hbar)$. Її експериментальна величина [39, 40] дорівнює $v_F \approx 10^6$ m/s (див. також [90], де експериментальні значення v_F та t обговорюються детальніше). Оскільки тільки дві $\mathbf{K}$ точки є нееквівалентними, нижче ми оберемо їх $\mathbf{K}_\pm = \pm 2\pi/a(2/3, 0)$ (див. Рис. 1.1 b) так, що вони будуть у середині розширеної зони Бріллюена. Виродження двох $\mathbf{K}_\pm$ точок, які також називають діраківськими, захищено групою точкових симетрій гексагональної ґратки. Використовуючи те, що у відсутності спонтанного порушення симетрії діраківські конуси успадковують підгрупу Z_3 з групи симетрії сотової ґратки, у роботі [91] показано, що навіть спектр гамільтоніана із взаємодією у лідируючому порядку є ізотропним поблизу діраківських точок.

1.1.3. Дискретні симетрії гамільтоніана на гратці. $\mathbf{K}_{\pm}$ точки у єдиному шарі графену стійкі проти збурень, що зберігають дискретну просторово-часову симетрію інверсії і які не змішують $\mathbf{K}_{\pm}$ точки [92]. Ми розглянемо ці симетрії для моделі на гратці і визначимо нижче відповідні дискретні операції симетрії для ефективної КЕД_{2+1} теорії графену. Топологічна стабільність появи безмасових діраківських ферміонів вивчалася у [93], і в Розділі 1.1.3.3 ми також обговоримо це питання.

1.1.3.1. Просторова інверсія $\mathcal{P}$. Вибираючи центр симетрії так, щоб він був і центром гексагону [86] з Рис. 1.1 а, ми бачимо, що просторова інверсія $\mathcal{P}$: $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ буде симетрією системи, якщо А і В атоми також обмінюються місцями, тобто

$$a_{\mathbf{n},\sigma} \rightarrow \mathcal{P}a_{\mathbf{n},\sigma}\mathcal{P}^{-1} = b_{-\mathbf{n},\sigma} \quad b_{\mathbf{n},\sigma} \rightarrow \mathcal{P}b_{\mathbf{n},\sigma}\mathcal{P}^{-1} = a_{-\mathbf{n},\sigma}. \quad (1.19)$$

Як ми обговоримо у Розділі 2.3, таке означення $\mathcal{P}$ відрізняється від широківживаного означення у КЕД_{2+1} [63]. В імпульсному просторі $\mathcal{P}$ діє так

$$a_{\sigma}(\mathbf{k}) \rightarrow \mathcal{P}a_{\sigma}(\mathbf{k})\mathcal{P}^{-1} = b_{\sigma}(-\mathbf{k}), \quad b_{\sigma}(\mathbf{k}) \rightarrow \mathcal{P}b_{\sigma}(\mathbf{k})\mathcal{P}^{-1} = a_{\sigma}(-\mathbf{k}), \quad (1.20)$$

тобто воно змінює знак імпульса $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ і обмінює $\mathbf{K}$ точки. На спінорах $\Upsilon_{\sigma}(\mathbf{k})$, дія $\mathcal{P}$ визначається так

$$\Upsilon_{\sigma}(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathcal{P}\Upsilon_{\sigma}(\mathbf{k})\mathcal{P}^{-1} = \tau_1\Upsilon_{\sigma}(-\mathbf{k}). \quad (1.21)$$

Можна легко перевірити, що невзаємодіючий гамільтоніан H_0 є інваріантним при $\mathcal{P}$ перетворенні

$$H_0 \longrightarrow \mathcal{P}H_0\mathcal{P}^{-1} = H_0 \quad (1.22)$$

тому що гамільтонова густина $\mathcal{H}_0$ задовольняє умові

$$\tau_1\mathcal{H}_0(\mathbf{k})\tau_1 = \mathcal{H}_0(-\mathbf{k}). \quad (1.23)$$

Проте, якщо припустити, що густина частинок на А і В підгратках відмінна, тобто, що

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_{\sigma} \int_{BZ} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} [m_a a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\sigma}(\mathbf{k}) + m_b b_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) b_{\sigma}(\mathbf{k})] \\ &= \sum_{\sigma} \int_{BZ} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \Upsilon_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) [m_{+} \tau_0 + m_{-} \tau_3] \Upsilon_{\sigma}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (1.24)$$

з $m_{+} = (m_a + m_b)/2$ [$\tau_0 \in 2 \times 2$ одиничною матрицею] та $m_{-} = (m_a - m_b)/2$, то такий член буде порушувати симетрію відносно інверсій обміном вже нееквівалентних підграток:

$$H_1 \longrightarrow \mathcal{P} H_1 \mathcal{P}^{-1} = \sum_{\sigma} \int_{BZ} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} [m_b a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\sigma}(\mathbf{k}) + m_a b_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) b_{\sigma}(\mathbf{k})], \quad (1.25)$$

або в спінових позначеннях

$$H_1 \longrightarrow \mathcal{P} H_1 \mathcal{P}^{-1} = \sum_{\sigma} \int_{BZ} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \Upsilon_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) (m_{+} \tau_0 - m_{-} \tau_3) \Upsilon_{\sigma}(\mathbf{k}). \quad (1.26)$$

Можна побачити, що член з m_{+} , який відповідає одній і тій самій густині носіїв на А і В підгратках, може бути поглинений у хімічний потенціал μ , а член з дисбалансом носіїв m_{-} є порушуючим парність.

Було запропоновано, що можна штучно створити член з діраківською масою, поклавши лист графену на субстрат, зроблений з гексагонального нітриду бора. У цьому випадку дві вуглецевих підгратки стають нееквівалентними через їхню взаємодію із субстратом. Недавні обчислення зонної структури [94] для графену, покладеного на субстрат з гексагонального нітриду бора h-BN з таким же розміром ґратки, приводять до щілини величиною близько 53 meV. Експериментальні дослідження фотоемісійної спектроскопії з кутовим вирішенням (ARPES) зроблені на епітаксialьному графені, вирощеному на SiC субстраті, показали наявність щілини ~ 0.26 eV [95]. Найновіші дані зі скануючої тунельної спектроскопії також виявили присутність щілини поблизу від діраківської точки у одношаровому графені, який знаходиться на графіті [96].

1.1.3.2. Обернення часу $\mathcal{T}$. Операція обернення часу $t \rightarrow -t$ змінює знаки імпульса та спіна, залишаючи знак координат незмінним:[97]

$$\begin{pmatrix} a_+(\mathbf{k}) \\ a_-(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{T} \begin{pmatrix} a_+(\mathbf{k}) \\ a_-(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} a_-(-\mathbf{k}) \\ -a_+(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} = i\sigma_2 \begin{pmatrix} a_+(-\mathbf{k}) \\ a_-(-\mathbf{k}) \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Оператор $b_{\pm}(\mathbf{k})$ підлягає тому ж самому правилу, і $a_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{k})$, $b_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{k})$ перетворюються, як вказано нижче,

$$\begin{pmatrix} a_+^{\dagger}(\mathbf{k}) & a_-^{\dagger}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{T} \begin{pmatrix} a_+^{\dagger}(\mathbf{k}) & a_-^{\dagger}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} a_+^{\dagger}(\mathbf{k}) & a_-^{\dagger}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} (-i\sigma_2). \quad (1.28)$$

Щоб обернути напрям часу, оператор $\mathcal{T}$ має бути антиунітарним. Дія $\mathcal{T}$ на підграткові спінори задається так

$$\Upsilon(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathcal{T}\Upsilon(\mathbf{k})\mathcal{T}^{-1} = i\sigma_2\Upsilon(-\mathbf{k}), \quad (1.29)$$

де σ_2 діє на спінові індекси спінору $\Upsilon_{\sigma}(\mathbf{k})$. Можна перевірити, що невзаємодіючий гамільтоніан H_0 є інваріантним при $\mathcal{T}$ перетворенні

$$H_0 \longrightarrow \mathcal{T}H_0\mathcal{T}^{-1} = H_0 \quad (1.30)$$

через те, що $\mathcal{H}_0$ задовільняє умові

$$\tau_0\mathcal{H}_0^*(\mathbf{k})\tau_0 = \mathcal{H}_0(-\mathbf{k}). \quad (1.31)$$

Оскільки фіксоване зовнішнє магнітне поле порушує симетрію обернення часу, гамільтоніан (1.5), в який входить це поле, і член Зеємана (1.15) порушують її. З іншого боку, гамільтоніан H_1 , заданий рівнянням (1.24), є інваріантним при оберненні часу, але якщо ми розглянемо залежні від спини маси $m_{b,\sigma}$, то також порушимо цю симетрію.

Присутність комбінованої $\mathcal{PT}$ симетрії призводить до умови на $\mathcal{H}_0$:

$$\tau_1\mathcal{H}_0^*(\mathbf{k})\tau_1 = \mathcal{H}_0(\mathbf{k}) \quad (1.32)$$

або для матричних елементів: $\mathcal{H}_0^{11} = \mathcal{H}_0^{22}$ і $\mathcal{H}_0^{12} = \mathcal{H}_0^{21*}$. Можна сказати, що перша рівність забороняє $m_- \tau_3$ члени в гамільтоніані, захищаючи $\mathbf{K}_\pm$ точки, якщо вони не перемішані [92]. Енергетичний спектр дається співвідношенням $E = \mathcal{H}_0^{11} \pm |\mathcal{H}_0^{12}|$. Для $\mathcal{H}_0^{11} = \text{const}$, постійний член може бути поглинений у хімічному потенціалі. Таким чином $\mathcal{PT}$ симетрія призводить до симетрії спектру так само, як і співвідношення (1.33), що розглядається нижче.

1.1.3.3. Частинково-дірочна симетрія і стабільність Фермі точки. Гамільтоніан $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$ також задовольняє двом іншим співвідношенням [62, 93, 98, 99] (див. також у кінці Розділу 2.2)

$$\tau_3 \mathcal{H}_0(\mathbf{k}) \tau_3 = -\mathcal{H}_0(\mathbf{k}) \quad (1.33)$$

та

$$\tau_2 \mathcal{H}_0^*(\mathbf{k}) \tau_2 = -\mathcal{H}_0(\mathbf{k}). \quad (1.34)$$

Легко перевірити, що вони гарантують, що, якщо є стан $|\psi\rangle$ з енергією E , то стани $\tau_3|\psi\rangle$ і $\tau_2|\psi\rangle^*$ відповідають енергії $-E$, а це означає, що енергетичні зони симетричні відносно $E = 0$. Ми відзначимо, що в той час, коли порушуючий парність член $m_- \Upsilon^\dagger \tau_3 \Upsilon$, очевидно, порушує умову (1.33), більш загальна умова (1.34) все ще задовольняється. Дійсно, навіть для $m_- \neq 0$ спектр симетричний відносно $E = 0$: $E(\mathbf{k}) = \pm \sqrt{m_-^2 + |\phi(\mathbf{k})|^2}$. Для того, щоб Фермі точка $E(\mathbf{k} = 0) = 0$ існувала, ми повинні вимагати виконання співвідношення (1.33), яке є необхідною, але недостатньою, умовою для її існування. Існування і стабільність точки Фермі диктується топологією в імпульсному просторі [100], тобто відмінним від нуля топологічним інваріантом (числом обертів) який виражається аналітично як

$$N = \oint_C \frac{d\mathbf{k}}{4\pi i} \text{tr}[\sigma_3 H^{-1}(\mathbf{k}) \partial_{\mathbf{k}} H(\mathbf{k})]. \quad (1.35)$$

Тут інтеграл береться довкола довільного контуру C навкруги однієї з $\mathbf{K}_{\pm}$ точок and tr – це слід по індексах підґраток. Для гамільтоніана $\mathcal{H}_0$ заданого рівнянням (1.10) топологічний інваріант може бути переписано у формі

$$N = \frac{1}{4\pi i} \oint_C \frac{\phi(\mathbf{k})d\phi^*(\mathbf{k}) - \phi^*(\mathbf{k})d\phi(\mathbf{k})}{|\phi(\mathbf{k})|^2}. \quad (1.36)$$

Для $\mathbf{K}_{\pm}$ точок це дає $N(\mathbf{K}_{\pm}) = \pm 1$. З іншого боку, коли у спектрі відкривається щілина, топологічний інваріант $N = 0$ і Фермі поверхня зникають. Це може траплятися через те, що повний топологічний заряд двох $\mathbf{K}_{\pm}$ точок $N = 0$. Тривіальний повний топологічний заряд поверхонь Фермі дозволяє їх анігіляцію, яка відбувається, коли спектр енергії має щілину. Питання топологічної стабільності діраківських точок у присутності інших членів перескоку було розглянуто в роботі [93] (див. також роботу [101] де також розглянута слабка анізотропія перескоку) і зараз ми тільки побіжно відзначимо наступне. Перескок між наступними сусідами (внутрішнідґратковий), який розглянуто, наприклад, у роботі [102] (див. також роботу за участю автора [103], присвячену впливу цих членів на дГВА ефект), призводить до появи тільки діагонального члена в гамільтоніані $\mathcal{H}_0$, який задається рівнянням (1.10). Цей член усуває частинково-дірочну симетрію вихідних енергетичних зон, для котрих малі відхилення від $\mathbf{K}_{\pm}$ можуть бути поглинені у хімічний потенціал [66]. Роль діагонального трансферу (треті наступні сусіди) була також розглянута в [93].

1.1.4. КЕД₂₊₁ лагранжіан графену.

1.1.4.1. Невзаємодіючий діраківський гамільтоніан. Поблизу двох нееквівалентних $\mathbf{K}_{\pm}$ точок, де $\epsilon(\mathbf{K}_{\pm}) = 0$, функція (1.11) може бути розкладена так $\phi(\mathbf{K}_{\pm} + \mathbf{p}) = \pm \hbar v_F(p_1 \mp ip_2)$, що гамільтоніан (1.10) лінеаризується

[34, 104]

$$H_0 = \sum_{\sigma} \int_{DC} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[\Upsilon_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) \mathcal{H}_{\mathbf{K}_+}(\mathbf{p}) \Upsilon_{\sigma}(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) + \Upsilon_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{K}_- + \mathbf{p}) \mathcal{H}_{\mathbf{K}_-}(\mathbf{p}) \Upsilon_{\sigma}(\mathbf{K}_- + \mathbf{p}) \right], \quad (1.37)$$

з гамільтонівською густиною для $\mathbf{K}_{\pm}$ точок

$$\mathcal{H}_{\mathbf{K}_+} = \hbar v_F (\tau_1 p_1 + \tau_2 p_2), \quad \mathcal{H}_{\mathbf{K}_-} = \hbar v_F (-\tau_1 p_1 + \tau_2 p_2). \quad (1.38)$$

Інтегрування в (1.37) проводиться по діраківському конусу (DC) з обрізанням по енергії, зробленим таким чином, що зберігає число станів

$$W = \hbar v_F \sqrt{\frac{\Omega_B}{2\pi}} = \frac{\hbar v_F}{a} \sqrt{\frac{4\pi}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\pi\sqrt{3}} t \approx 2.33t, \quad (1.39)$$

де $\Omega_B = (2\pi)^2/S$ є площею зони Бріллюена.

Дуже зручно використовувати 4-компонентні спінори $\Psi_{\sigma}(\mathbf{p})$, які зроблені зі спінорів для $\mathbf{K}_{\pm}$ точок. Комбінуючи спінори $\Upsilon_{\sigma}(\mathbf{K}_{\pm} + \mathbf{p})$ разом, ми переставляємо підгратки в спінорі для $\mathbf{K}_-$ точки,¹ так що

$$\Psi_{\sigma}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{K}_+, \sigma}(\mathbf{p}) \\ \psi_{\mathbf{K}_-, \sigma}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\sigma}(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) \\ b_{\sigma}(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) \\ b_{\sigma}(\mathbf{K}_- + \mathbf{p}) \\ a_{\sigma}(\mathbf{K}_- + \mathbf{p}) \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

¹Це дозволяє використовувати один і той же гамільтоніан для обидвох $\mathbf{K}$ точок, тобто $\mathcal{H}_{\mathbf{K}_{\pm}} = \pm \hbar v_F (\tau_1 p_1 + \tau_2 p_2)$ і одержати стандартне представлення для гамма матриць.

Відповідно, гамільтоніан (1.37) приймає форму

$$\begin{aligned}
H_0 &= \hbar v_F \sum_{\sigma} \int_{DC} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \\
&\times \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} K_+ A & K_+ B & K_- B & K_- A \\ 0 & p_x - ip_y & 0 & 0 \\ p_x + ip_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_x + ip_y \\ 0 & 0 & -p_x - ip_y & 0 \end{pmatrix} \Psi_{\sigma}(\mathbf{p}) \\
&= \sum_{\sigma} \int_{DC} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{p}) \mathcal{H}_0(\mathbf{p}) \Psi_{\sigma}(\mathbf{p}), \quad \mathcal{H}_0(\mathbf{p}) = \hbar v_F (\alpha^1 p_1 + \alpha^2 p_2).
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Тут 4×4 матриці $\alpha^{1,2}$ є першими двома α матрицями з трьох α^i ($i = 1, 2, 3$) матриць

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = \tilde{\tau}_3 \otimes (\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

які антикомутують між собою та з матрицею β :

$$\beta = \tilde{\tau}_1 \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.43}$$

Незвідне представлення діраківської алгебри у $(2+1)$ вимірі задається 2×2 матрицями, і є два таких незвідних представлення, які відрізняються знаком. Вони обидва використані у (1.41), відображаючи те, що на додаток до двох ступенів свободи, пов'язаних з A і B підгратками, треба також взяти до уваги ферміони з двох різних $\mathbf{K}_{\pm}$ точок. Ці ступені свободи описуються $\tilde{\tau}$ матрицями, які діють у долинному $(\mathbf{K}_{\pm})$ підпросторі і, в результаті, ми використовуємо 4×4 звідне (у $2 + 1$ вимірі) представлення діраківських матриць.

1.1.4.2. Лагранжеві графену. Щоб закінчити відображення граткової моделі графена до КЕД_{2+1} , ми введемо γ матриці та включимо зовнішнє

магнітне поле. Ми вибираємо

$$\gamma^0 = \beta, \quad \boldsymbol{\gamma} = \beta \boldsymbol{\alpha} = -i\tilde{\tau}_2 \otimes (\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

і вводимо діраківський спряжений спіно́р $\bar{\Psi}_\sigma(\mathbf{p}) = \Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{p})\gamma^0$. Матриці γ^ν з $\nu = 0, 1, 2, 3$ задовольняють звичайним антикомутаційним співвідношенням

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}I_4, \quad g^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1), \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (1.45)$$

Проте ми нагадуємо, що у КЕД₂₊₁, матриця γ^3 не використовується у діраківському представленні гамільтоніана

$$H_0 = \sum_\sigma \int_{\vec{DC}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \bar{\Psi}_\sigma(\mathbf{p}) \mathcal{H}_0^D(\mathbf{p}) \Psi_\sigma(\mathbf{p}), \quad (1.46)$$

$$\mathcal{H}_0^D(\mathbf{p}) = \gamma^0 \mathcal{H}_0(\mathbf{p}) = \hbar v_F (\gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2).$$

Представлення (1.44) називається вейлевським або кіральним представленням γ матриць. І через те, що ці матриці 4×4 , є можливість сконструювати кіральну γ^5 матрицю

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

яка комутує з α^i та антикомутує з γ^ν . Ми відзначимо, що кіральне представлення (1.44) за допомогою матриці

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & \tau_3 \\ I & -\tau_3 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ \tau_3 & -\tau_3 \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

переходить в інше представлення

$$\gamma^\nu = \tilde{\tau}_3 \otimes (\tau_3, i\tau_2, -i\tau_1) = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}^0 & 0 \\ 0 & \check{\gamma}^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\gamma}^1 & 0 \\ 0 & \check{\gamma}^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\gamma}^2 & 0 \\ 0 & \check{\gamma}^2 \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

яке було використане в роботах [1, 2, 9, 58, 59, 105, 106]. Відзначимо, що різні дослідники використовували різні представлення діраківської алгебри (див., наприклад, роботи [34, 53, 54, 60, 107, 108]). Через це порівняння порушуючих $U(4)$ симетрію членів у термінах вихідної структури блохівських компонент 4-спінорів (1.40), які введені для опису графену, є досить ускладненим. Наш вибір кірального представлення γ матриць в (1.44) мотивується тим фактом, що в цьому представленні спінори з певною кіральністю є власними станами γ^5 , що робить фізичну інтерпретацію квантового числа кіральності в графені у Розділі 2.2 більш прозорою. Іншою перевагою цього представлення є можливість порівняння з роботами [109–116], де обговорювалися дискретні симетрії графену.

З рівняння (1.8) можна одержати повний електричний струм

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n}} j_{\alpha}(\mathbf{n}) &= e \int_{BZ} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \sum_{\delta_i, \sigma} \Upsilon_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial k_{\alpha}} \frac{t}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\mathbf{k}\delta_i} \\ e^{-i\mathbf{k}\delta_i} & 0 \end{pmatrix} \Upsilon_{\sigma}(\mathbf{k}) \\ &\simeq -ev_F \sum_{\sigma} \int_{DC} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \bar{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{p}) \gamma^{\alpha} \Psi_{\sigma}(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (1.50)$$

де у другій лінії ми розклали матрицю поблизу $\mathbf{K}_{\pm}$ точок та ввели 4-компонентні спінори $\Psi_{\sigma}(\mathbf{p})$ і $\bar{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{p})$. Можна побачити, що форма оператора електричного струму та зв'язок останнього з векторним потенціалом $\mathbf{A}$ у рівнянні (1.8) є стандартними для КЕД. Як вже обговорювалось у Розділі 1.2.3.2, іншою відомою системою, що описується за допомогою КЕД₂₊₁, є d НП, але зв'язок з векторним потенціалом відрізняється через присутність надструмів.

Об'єднуючи гамільтоніан (1.46) з членом взаємодії $\mathbf{A}(\mathbf{n})\mathbf{j}(\mathbf{n})$ (див. рівняння (1.6)), де густина струму $\mathbf{j}(\mathbf{n})$ відповідає оператору струму в (1.50), ми приходимо до КЕД₂₊₁ лагранжіану

$$\mathcal{L} = \sum_{\sigma=\pm 1} \bar{\Psi}_{\sigma}(t, \mathbf{r}) \left[i\gamma^0 (\hbar \partial_t - i\mu_{\sigma}) + i\hbar v_F \gamma^1 D_x + i\hbar v_F \gamma^2 D_y \right] \Psi_{\sigma}(t, \mathbf{r}) \quad (1.51)$$

3

$$D_\alpha = \partial_\alpha + ie/\hbar c A_\alpha, \quad \alpha = x, y \quad (1.52)$$

записаному в координатному представленні. У наступних Розділах 2 – 6 ми розглянемо ситуацію, коли зовнішнє постійне магнітне поле $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ прикладено перпендикулярно до площини графену вздовж позитивного напрямку z осі. Магнітне поле також входить до зеєманівського члену, котрий введений через μ_σ . Якщо поле $\mathbf{B}$ не перпендикулярне до площини, то до зеєманівського члену все одно входить його повна величина, тоді як орбітальний член залежить від його перпендикулярної компоненти. Більш загально, число спінових компонент N_f може розглядатися як індекс, який пов'язаний з ароматом, при цьому фізичному випадку відповідає величина $N_f = 2$.

Для теоретичного пояснення базових експериментів [39, 40], які довели, що діраківські квазічастинки існують в графені, достатньо використовувати діраківський лагранжіан (1.51). Хоча низькоенергетичні квазічастинкові збудження, що описуються лагранжіаном (1.51) є невзаємодіючими, цей лагранжіан фіксує діраківську природу квазічастинок. Окрім цього, у магнітних полях до 10 Т нема необхідності включати член Зеємана [117] і достатньо розглядати тільки орбітальний ефект магнітного поля. Проте ДС [117, 118] і АС [119] вимірювання у сильних полях $B \gtrsim 10$ Т вже показують, що ефект взаємодії між квазічастинками в графені грає важливу роль. Як предмет теоретичних досліджень, роль далекодіючої кулонівської взаємодії стала предметом численних досліджень навіть ще до відкриття графену [53–60]. Гамільтоніан кулонівської взаємодії має вигляд

$$H_C = \frac{\hbar v_F}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}' \bar{\Psi}_\sigma(\mathbf{r}) \gamma^0 \Psi_\sigma(\mathbf{r}) \frac{g}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \bar{\Psi}_{\sigma'}(\mathbf{r}') \gamma^0 \Psi_{\sigma'}(\mathbf{r}'), \quad (1.53)$$

з константою зв'язку $g = e^2/\epsilon\hbar v_F = \alpha c/\epsilon v_F$, де $\alpha \simeq 1/137$ – це постійна тонкої структури. З повітрям з одного боку та SiO_2 з другого, заекранована

діелектрична постійна $\epsilon \approx 1.6\epsilon_0$ була оцінена у [120]. Відповідна величина $g \approx 1.37$ не задовольняє умові $g \ll 1$, яка б могла спростити теоретичний аналіз. Все це пояснює, чому роль кулонівської взаємодії в графені є актуальним предметом сучасних досліджень, див., наприклад, роботи [121–123].

Окрім далекодіючої кулонівської взаємодії можна також розглядати інші взаємодії на ґратці, такі як відштовхування на одному і тому ж вузлі та між найближчими сусідами [107, 120]

$$\begin{aligned}
H_{int} = & \frac{U}{2} \sum_{\mathbf{n}, \sigma, \sigma'} \Upsilon_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{n}) P_{+} \Upsilon_{\sigma}(\mathbf{n}) \Upsilon_{\sigma'}^{\dagger} P_{+}(\mathbf{n}) \Upsilon_{\sigma'}(\mathbf{n}) \\
& + \frac{U}{2} \sum_{\mathbf{n}, \sigma, \sigma'} \Upsilon_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_1) P_{-} \Upsilon_{\sigma}(\mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_1) \Upsilon_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_1) P_{-} \Upsilon_{\sigma'}(\mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_1) \quad (1.54) \\
& + \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{n}, \boldsymbol{\delta}_i, \sigma, \sigma'} \Upsilon_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{n}) P_{+} \Upsilon_{\sigma}(\mathbf{n}) \Upsilon_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_i) P_{-} \Upsilon_{\sigma'}(\mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_i)
\end{aligned}$$

з $P_{\pm} = (1 \pm \tau_3)/2$. У низькоенергетичній границі це призводить до декількох локальних чотирьохферміонних взаємодій [107, 120] (див. також найновішу роботу [124]), які, загалом, порушують початкову $U(4)$ інваріантність і ведуть до генерації відповідних мас (див, Розділ. 2.5):

$$H_{int} = \sum_i U_i \int d^2\mathbf{r} (\bar{\Psi}(\mathbf{r}) \Gamma_i \Psi(\mathbf{r}))^2, \quad \Gamma_i = (I, \gamma^3, \gamma^5, \gamma^3 \gamma^5) \otimes (\sigma_0, \sigma_3). \quad (1.55)$$

1.1.5. Підсумки щодо КЕД₂₊₁ опису графену. Підсумовуючи, ми хотіли б зробити наголос, що твердження, що ефективна низькоенергетична теорія графену — це безмасова КЕД₂₊₁, базується на трьох нетривіальних фактах:

1. Низькоенергетичні збудження в графені є безмасовими квазічастинками з лінійною дисперсією, яка має додатні та від’ємні гілки, $\pm \hbar v_F |\mathbf{p}|$. Часто недостатньо підкреслюється, що навіть масивні квазічастинки (див. Розділ 2.5 та Рис. 3.1 (b) нижче) з енергією $\pm \sqrt{\hbar^2 v_F^2 \mathbf{p}^2 + \Delta^2}$ описуються масивною КЕД₂₊₁, а не теорією Шрьодінгера.

2. Якісно нова особливість графену полягає в тому, що власні функції низькоенергетичних квазічастинкових збуджень описуються рівнянням Дірака. Як ми побачили, спірна структура хвильової функції є загальним наслідком стільникової гратчатої структури графену з двома вуглецевими атомами в елементарній комірці [34, 104].
3. Дуже важливо, що взаємодія квазічастинок у графені із зовнішнім електромагнітним полем вводиться за допомогою принципу мінімального зв'язку, як у квантовій теорії поля.

Треба також пам'ятати про важливі відмінності рівняння для електронів в графені від рівняння для звичайних релятивістських ферміонів [82]:

1. Рівняння для квазічастинок у графені є двовимірним (див. Розділ 2.2 нижче).
2. Лагранжіан (1.51) є придатним до застосування тільки при малих хвильових векторах, які набагато менші за вектори оберненої ґратки, та, відповідно, у зовнішніх полях, що змінюються плавно.
3. Лагранжіан (1.51) придатний до застосування у системі спокою ґратки і не інваріантний ні відносно перетворень Галелєя, ні перетворень Лоренца.

Останній пункт треба дещо пояснити. Ефективне рівняння для електронів у графені виводиться у наближенні ефективної маси з нерелятивістського рівняння Шрьодінґера [82, 84], яке інваріантне відносно перетворень Галілея (і тому описує нерелятивістські електрони). При виводі (1.51) ця інваріантність втрачається. Що стосується перетворень Лоренца, то при переході у систему відліку, яка рухається, координатний вектор x^μ перетворюється по закону, в якому фігурує швидкість світла c . Ця ж сама швидкість входить і до калібрувально інваріантного принципу мінімального зв'язку $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + (e/c)\mathbf{A}$ у (1.51), який необхідний для опису графену в магнітному полі. У той же самий час просторова та часова компоненти вектора імпульсу p_μ пов'язані через швидкість Фермі $v_F \approx c/300$. Таке неспівпадіння

швидкостей призводить до порушення релятивістської інваріантності.

1.2. Високотемпературна надпровідність

Зокрема вивчення високотемпературних купратних надпровідників викликало великий інтерес у так званих нодальних збудженнях, які є безщільними ферміонними збудженнями, пов'язаними з нулями щільності функції. Залежно від фізичного походження щілини можна розглядати різні фізичні ситуації, які, взагалі, описуються різними теоретичними моделями. Наприклад, якщо щілина відкривається завдяки анізотропному спарюванню електрона та дірки, яке є одним із можливих станів електронної системи з напівзаповненою зоною і нестінгом Фермі поверхні. Це відповідає 2D орбітальному антиферромагнетизму (ОАФ), який ще зветься англійською *staggered flux phase* [125, 126]. Через $d_{x^2-y^2}$ імпульсну залежність щілини в ОАФ стані цей стан також зветься d -густини хвилі (ДГХ) стан [127].

1.2.1. d -густини хвилі. Запропонований у роботі [127] сценарій базується на тому, що псевдощілинний стан [128] (див. також огляд автора [24], присвячений іншому сценарію появи псевдощілини) ВТНП купратів є результатом присутності іншого параметру порядку, що зветься ДГХ [129] і має d -хвильову симетрію:

$$\langle c_s^\dagger(t, \mathbf{k} + \mathbf{Q}) c_{s'}(t, \mathbf{k}) \rangle = i\Phi_{\mathbf{Q}} f(\mathbf{k}) \delta_{ss'} \quad (1.56)$$

де $s, s' = \pm$ це спіновий індекс, $f(\mathbf{k}) = \cos k_x a - \cos k_y a$, $\mathbf{Q} = (\pi/a, \pi/a)$, та a – постійна ґратки.

У порівнянні з d -хвильовим надпровідним порядком ДГХ параметр порядку здається більш екзотичним, бо він порушує симетрії звороту часу, трансляції на одну постійну ґратки, та обертання на $\pi/2$, але зберігає симетрію відносно будь-якої комбінації з цих двох.

Основна причина для цього порушення полягає у тому, що в основному ДГХ стані є зворотньоциркулюючі струми. Схематична фазова діаграма для ДГХ сценарію псевдощільності показана на Рис. 1.3. Для дірочного допінгу більшого, ніж критичний [130], припущено, що ДГХ порядок зникає, тоді як у недодопованій системі ДГХ порядок співіснує з d -хвильовою надпровідністю (d НП).

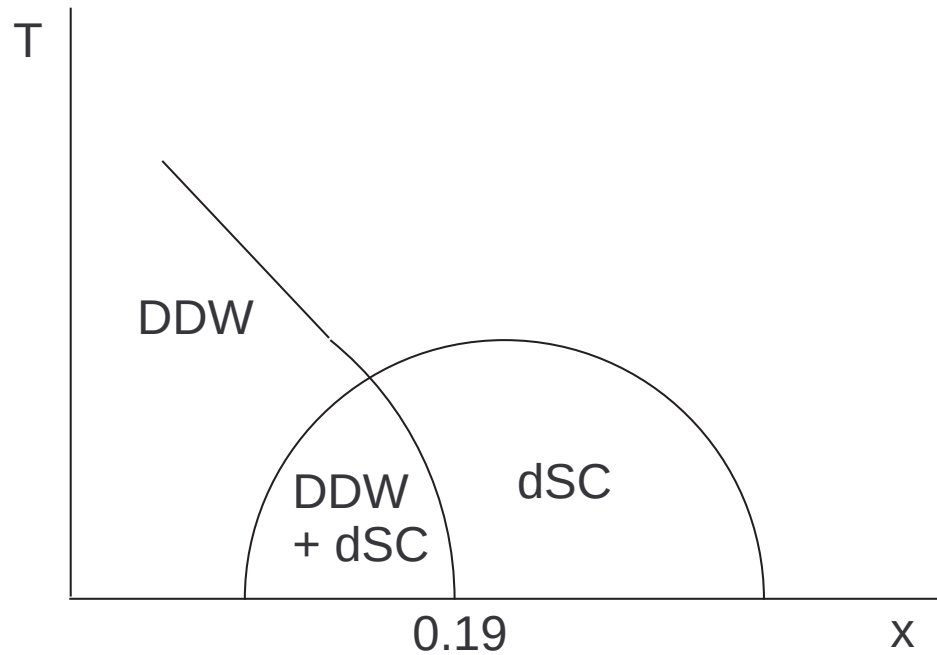


Рис. 1.3. Схематична фазова діаграма купратів у ДГХ сценарії.

Треба відзначити, що на сьогоднішній день можна вважати, що ДГХ сценарій не реалізується у псевдощільному стані купратів. Це негативне твердження у тому числі є результатом із роботи автора [6]. Проте конкуруючі порядки можуть стосуватися властивостей недодопованого надпровідного стану купратів. Цій цікавій проблемі присвячено Розділ 7.

1.2.2. d -хвильова надпровідність. Є консенсус, що надпровідний стан купратів має d -хвильову щільність з вузлами вздовж діагоналей зони Бріллюена [38]. Лінеаризація боголюбівського спектру квазічастинок навколо чотирьох вузлів на поверхні Фермі призводить до іншої реалізації безщільних ферміонних збуджень. Хоча з фізичної точки зору ОАФ стан

здається складнішим, ніж d -хвильовий надпровідний стан, тому що перший характеризується відмінними від нуля локальними струмами, що порушують симетрії інверсії часу та трансляційну, насправді діраківський опис ОАФ стану простіший, тому що зовнішнє електромагнітне поле входить у відповідні теоретичні вирази таким же чином, як в КЕД_{2+1} .

1.2.3. Модельні гамільтоніани ДГХ і d НП станів. Зараз ми перейдемо до опису модельних гамільтоніанів для ОАФ, d -хвильового надпровідного станів.

1.2.3.1. Гамільтоніан ДГХ стану. У наближенні середнього поля феноменологічний гамільтоніан ДГХ стану записується так [126, 131]

$$H^{\text{DDW}} = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \int_{\text{RBZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \chi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \left[\varepsilon(\mathbf{k})\sigma_3 - \mu\hat{I} - D(\mathbf{k})\sigma_2 \right] \chi_{\sigma}(\mathbf{k}), \quad (1.57)$$

де спінори

$$\chi_{\sigma}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} c_{\sigma}(\mathbf{k}) \\ c_{\sigma}(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) \end{pmatrix}, \quad \chi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} c_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) & c_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) \end{pmatrix}, \quad (1.58)$$

складаються з операторів створення та знищення $c_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k})$, $c_{\sigma}(\mathbf{k})$ з імпульсом $\mathbf{k}$ та спіном σ , одночастинковою енергією $\varepsilon(\mathbf{k}) = -2t(\cos k_x a + \cos k_y a)$ з параметром перескоку t , хімічним потенціалом μ , ДГХ щільною $D(\mathbf{k}) = \frac{D_0}{2}(\cos k_x a - \cos k_y a)$ та хвильовим вектором, $\mathbf{Q} = (\pi/a, \pi/a)$ за якого має місце впорядкування хвилі густини. Інтегрування ведеться по редукованій зоні Бріллюена RBZ. σ_i це матриці Паулі. Скрізь обрано одиниці $\hbar = c = k_B = 1$, якщо не сказано протилежне.

Гамільтоніан (1.57) описує збудження зі спектром

$$E(\mathbf{k}) = -\mu \pm \sqrt{\varepsilon^2(\mathbf{k}) + D^2(\mathbf{k})}.$$

Лінеаризуючи спектр біля чотирьох вузлів $\mathbf{N}_i = (\pm\pi/2a, \pm\pi/2a)$ з $i = 1, \dots, 4$ при половинному заповненні ($\mu = 0$), одержуємо $E(\mathbf{k}) = -\mu \pm$

$\sqrt{v_F^2 k_x^2 + v_D^2 k_y^2}$, де Фермі швидкість обчислена при напівзаповненні $v_F = |\partial \varepsilon(\mathbf{k}) / \partial \mathbf{k}|_{\mathbf{k}=\mathbf{N}} = 2\sqrt{2}ta$, ДГХ щільна швидкість $v_D = |\partial D(\mathbf{k}) / \partial \mathbf{k}|_{\mathbf{k}=\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}}D_0a$, та імпульси k_x і k_y наведені в локальній вузловій системі координат (див. Рис. 2 з роботи [131]).

Використовуючи цей лінеаризований спектр і вставляючи векторний потенціал таким чином, щоб зберігався заряд для оригінального гамільтоніана (1.57), одержуємо [6] наступний діраківський лагранжіан, що описує квазічастинки біля одного з вузлів, наприклад $\mathbf{N}_{i=1} = (\pi/2a, \pi/2a)$:

$$\mathcal{L} = \bar{\chi}_\sigma^i(x) i \tilde{\gamma}^\nu D_\nu \chi_\sigma^i(x), \quad x = (t, \mathbf{r}), \quad (1.59)$$

де $\bar{\chi}_\sigma^i(x) = \chi_\sigma^{i\dagger}(x) \sigma_1$ це діраківський спряжений спінор, i нумерує вузол $\mathbf{N}_i$, коваріантні похідні D_ν є

$$D_\nu = \begin{cases} \hbar \partial_t - ie A_0(x), & \nu = 0, \\ v_F (\hbar \partial_x - i \frac{e}{c} A_1(x)), & \nu = 1, \\ v_D (\hbar \partial_y - i \frac{e}{c} A_2(x)), & \nu = 2, \end{cases} \quad (1.60)$$

та γ матриці є

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^\nu &= (\sigma_1, -i\sigma_2, i\sigma_3), \quad \{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = 2\hat{I}_2 g^{\mu\nu}, \\ g^{\mu\nu} &= \text{diag}(1, -1, -1), \quad \mu, \nu = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Хімічний потенціал μ може бути введено в лагранжіан (1.59), вибираючи $A_0 = \mu/e$. Також сума по спіновим компонентам у рівнянні (1.59) може розглядатися як додатковий індекс аромату.

У $2 + 1$ вимірі є два унітарно нееквівалентних представлення діраківської алгебри (див напр. [132]):

$$\hat{\gamma}^0 = \sigma_3, \quad \hat{\gamma}^1 = i\sigma_1, \quad \hat{\gamma}^2 = i\sigma_2, \quad (1.62a)$$

$$\hat{\gamma}^0 = -\sigma_3, \quad \hat{\gamma}^1 = -i\sigma_1, \quad \hat{\gamma}^2 = -i\sigma_2. \quad (1.62b)$$

Як можна перевірити, наші γ -матриці (1.61) відповідають представленню (1.62b), якщо зробити унітарне перетворення $\hat{\chi}^1 = U\chi^1$, $\hat{\gamma}^\mu = U\tilde{\gamma}^\mu U^{-1}$ з $U = (1/2)(\hat{I}_2 - i\sigma_1 - i\sigma_2 + i\sigma_3)$. Оскільки фізичні властивості системи залежать тільки від алгебри, яку ці матриці задовольняють, можна прямо працювати з більш загально використовуваним представленням (1.62) замість (1.61).

Працюючи з (1.59) треба не забути, що фізичні властивості включають сумування по 4 вузлам, які присутні в оригінальному (1.57). Фактично, тільки два сусідніх вузли, наприклад $\mathbf{N}_{i=1} = (\pi/2a, \pi/2a)$ та $\mathbf{N}_{i=2} = (\pi/2a, -\pi/2a)$ є нееквівалентними у редукованій зоні Бріллюена RBZ, і відповідні локальні вузлові координатні системи, якщо їх визначити так, як зроблено на Рис. 2 у роботі [131]), пов'язані одна з одною перетворенням парності (див. на початку Розділу 2.3 з приводу такого означення цього перетворення), $(k_x, k_y) \rightarrow (k_x, -k_y)$, з одночасним обміном $v_F \leftrightarrow v_D$. Таким чином, сума по нееквівалентним вузлам може бути прийнята до урахування подвоєнням спінорів

$$\Upsilon_\sigma = \begin{pmatrix} \psi_\sigma^1 \\ \psi_\sigma^2 \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

та використовуючи редуковане представлення γ -матриць,

$$\gamma^\mu = (\sigma_3, i\sigma_1, i\sigma_2) \otimes \sigma_3 : \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

з відповідною густиною лагранжіана

$$\mathcal{L} = \bar{\Upsilon}_\sigma(x) i\gamma^\nu D_\nu \Upsilon_\sigma(x). \quad (1.65)$$

1.2.3.2. Гамільтоніан d -хвильового надпровідного стану. На відміну від гіпотетичного ДГХ стану, d -хвильова надпровідність спостерігається у купратних надпровідниках [38]. Вона описується за допомогою га-

мільтоніана Боголюбова – де Женна

$$\begin{aligned}
H_{\text{BdG}} = & \int d^2r \Psi^\dagger(t, \mathbf{r}) \tau_3 \left[\varepsilon \left(-i\nabla - \tau_3 \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) - \mu \right] \Psi(t, \mathbf{r}) \\
& - \int d^2r_1 \int d^2r_2 \left[\Delta^\dagger(t, \mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) \Psi^\dagger(t, \mathbf{r}_1) \tau_- \Psi(t, \mathbf{r}_2) \right. \\
& \left. + \Psi^\dagger(t, \mathbf{r}_1) \tau_+ \Psi(t, \mathbf{r}_2) \Delta(t, \mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) \right], \tag{1.66}
\end{aligned}$$

де Ψ та $\Psi^\dagger = (\psi_\uparrow^\dagger, \psi_\downarrow)$ є стандартними спінорами Намбу, $\varepsilon(\mathbf{p})$ є одно-частинковою енергією, $\tau_\pm = (\tau_1 \pm i\tau_2)/2$ і $\Delta(t, \mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2)$ є білокальним щілинним оператором, ермітове спряження якого включає транспонування у функціональному сенсі, $\Delta^\dagger(t, \mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) \equiv [\Delta(t, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1)]^*$. Припускається, що нетривіальна залежність $\Delta(t, \mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2)$ від відносної координати $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ описує d -хвильовий стан. Подальше спрощення цього члену в рівнянні (1.66) можливе, якщо припустити, що амплітуда спарюючого члена зі щілиною не залежить від часу t та координати центру мас $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$. Для купратів це припущення може бути виправданим навіть вище критичної температури, T_c . Нижче T_c у вихровому стані це припущення відповідає нехтуванню ядром вихору і розглядом тільки “вихорів фази”. Оскільки ми розглядаємо амплітуду білокального комплексного поля $\Delta(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, природньо розглядати також його фазу $\theta(t, \mathbf{R})$. Є, проте, деяка тонкість при написанні континуальної версії спарюючого члену (1.66) в очевидно калібрувально інваріантній формі, яку можна вирішити, обираючи відповідну форму диференціального оператора для Δ (див. роботи [133, 134]). Через те, що ми розглядаємо низькоенергетичні квазічастинкові збудження біля чотирьох вузлів, ми пишемо лінеаризований гамільтоніан для одного з цих вузлів, як (див., наприклад, [131, 133])

$$\begin{aligned}
H_{dSC} = & \Psi^\dagger(x) \left[iv_F \tau_3 \left(\partial_x - i \frac{e}{c} \tau_3 A_x \right) \right. \\
& \left. + iv_\Delta \tau_+ e^{i\theta(x)/2} \partial_y e^{i\theta(x)/2} + iv_\Delta \tau_- e^{-i\theta(x)/2} \partial_y e^{-i\theta(x)/2} \right] \Psi(x), \tag{1.67}
\end{aligned}$$

де v_F є Фермі швидкістю, $v_\Delta = |\partial \Delta(\mathbf{k}) / \partial \mathbf{k}|_{\mathbf{k}=\mathbf{N}}$ є щілинною швидкістю, що визначається нахилом надпровідної щілини $\Delta(\mathbf{k})$. Обидві швидкості обчи-

слюються у вузлових точках на справжній поверхні Фермі системи, а не при половинному заповненні, як було у випадку ДГХ (див. Рис. 7.1). Лінеаризація призводить до обмежень на область застосування гамільтоніана (1.67), яка, проте, залишається досить широкою [135].

Нарешті, вводячи діраківський спряжений спіно́р $\bar{\eta}^i = \Psi^{i\dagger} \tau_2$, ми можемо отримати з гамільтоніана (1.67) лагранжіан, подібний до (1.59), але з векторним потенціалом, що сполучається тільки з v_F членом. Знову, роблячи, якщо необхідно, унітарне перетворення, можна зкомбінувати спіно́ри η^i , що походять від двох протилежних вузлів, в один чотирьохкомпонентний спіно́р. Подібним чином у термінах ефективної КЕД₂₊₁ d НП описується, наприклад, у роботах [19, 133, 136–139].

Таким чином, у відсутності магнітного поля низькоенергетичні квазі-частинкові збудження у d НП описуються релятивістським дисперсійним законом

$$E(\mathbf{k}) = \pm \sqrt{v_F^2 k_x^2 + v_\Delta^2 k_y^2}, \quad (1.68)$$

де імпульси k_x і k_y надаються у локальній вузловій системі координат. Експериментальні значення v_F і v_Δ у купратах можуть бути знайдені у [140], наприклад, значення $v_F \sim 2.5 \times 10^5$ m/s і анізотропія конусу Дірака v_F/v_Δ змінюється між 10 і 20 залежно від допінгу та речовини.

Є дві важливі відмінності між ДГХ і d НП гамільтоніанами. Роблячи калібрувальне перетворення, яке переміщає фазу від крайнього члену в (1.67), ми спостерігаємо, що квазічастинки в надпровіднику приєднані не до векторного потенціалу $\mathbf{A}$, який відповідає магнітному полю $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, а до надструму $\nabla\theta - (2e/\hbar c)\mathbf{A}$, де θ - фаза надпровідного параметру порядку. Ця різниця між випадками ДГХ і d НП приводить до висновку, що в зовнішньому магнітному полі вузлові квазічастинки ДГХ стану формують рівні Ландау [141], тоді як у d НП стані рівні Ландау сильно змішані [142]. Проте ми представили d НП гамільтоніан (1.67) тут завдяки його пра-

критичній важливості і факту, що спрощена фізична картина заснована на рівнях Ландау [143, 144], можливо, стає доречною при вищих енергіях [145] і може бути розцінена як перша апроксимація до більш ускладненого випадку вихрового стану в d -хвильових надпровідниках.

Друга різниця є у тому, що, для ДГХ стану хімічний потенціал μ явно присутній у лагранжіані (1.59), тоді як для d НП, він був поглинений у визначенні швидкості Фермі v_F на поверхні Фермі. Походження цієї різниці може бути протилежне у різній структурі гамільтоніанів (1.57) і (1.66). Можна також сказати, що в d НП хімічний потенціал вузлових квазічастинок нульовий, таким чином, що, коли прикладне поле змінюється, відповідні рівні Ландау (навіть якщо вони були сформовані) не можуть перетнути хімічний потенціал і привести до дХВА ефекту [143]. Як вже згадувалось, ми повернемося до властивостей d НП у Розділі 7.

Наприкінці згадаємо, що ще одним трохи менш відомим прикладом систем, що мають діраківські квазічастинкові збудження у фазі з нетрадиційною хвилею густини, є перехідні метали діхалькогеніди [146].

РОЗДІЛ 2

ВЛАСТИВОСТІ КЕД₂₊₁ ОПИСУ ГРАФЕНУ

Что может быть больше похоже на мою руку или мое ухо, чем их собственное отражение в зеркале? И все же руку, которую я вижу в зеркале, нельзя поставить на место настоящей руки...

ИММАНУИЛ КАНТ

Цей розділ базується на оригінальних матеріалах, які увійшли в огляд [25]. Ми зосередимося на симетріях проблеми вільних діраківських ферміонів і наслідках можливого порушення таких симетрій. Зокрема ми розглянемо просторову інверсію, обернення часу, зарядове спряження і неперервну $U(4)$ симетрію. Ми пояснимо різницю між 2D діраківськими ферміонами в графені і 3D діраківськими ферміонами, які вивчаються у звичайній КЕД₃₊₁. Зокрема, є різниця у фізичному змісті такого важливого квантового числа, як *кіральність* (*chirality*) в КЕД₂₊₁ і КЕД₃₊₁. Через це і завдяки факту, що поняття кіральності є зараз широко вживаним у літературі з графену (див., наприклад, [147]), ми вирішили, що буде корисним пояснити схожість і відмінності цього поняття в теорії поля і в графені у Розділі 2.2. Різниця між квазічастинками в графені та безмасовими нейтрино обговорюється у Розділі 2.4. Наприкінці, у Розділі 2.6 (див. також Додаток А) ми обговорюємо властивості діраківських рівнів Ландау.

2.1. Неперервні симетрії КЕД₂₊₁ моделі

У відсутності зеєманівського розщеплення, коли $\mu_\sigma = \mu$ ефективний лагранжіан (1.51) має глобальну $U(4)$ симетрію, яка, наприклад, обгово-

рюється у Додатках А і С з робіт [2, 60]. Ця симетрія оперує у просторі долина-підгратка та спіновому просторі. Для початку корисно знехтувати спіновим простором і роздивитись уважніше глобальну $U(2)$ симетрію для 4-компонентних спінів у просторі долина-підгратка.

2.1.1. $U(2)$ долинно-підграткова симетрія. Можна перевірити, що матриці

$$T_1 = \frac{1}{2}i\gamma^3 = \frac{1}{2}\tilde{\tau}_2 \otimes \tau_3, \quad T_2 = \frac{1}{2}\gamma^5 = \frac{1}{2}\tilde{\tau}_3 \otimes \tau_0, \quad T_3 = \frac{1}{2}\gamma^3\gamma^5 = \frac{1}{2}\tilde{\tau}_1 \otimes \tau_3 \quad (2.1)$$

комутують з Гамільтоніаном (1.41) та задовольняють комутаційним співвідношенням $SU(2)$ алгебри

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k, \quad (2.2)$$

де ϵ_{ijk} є символом Леві-Чівіті. Разом з одиничною матрицею ($T_0 = I_4/2$), вони призводять до $U(2)$ симетрії [60, 148], яка діє у просторах долинних та підграткових індексів. Ми будемо називати цю ефективну симетрію для низькоенергетичного опису графену кіральною, оскільки вона містить γ^5 матрицю і нагадує кіральні симетрії для безмасових частинок у фізиці високих енергій (див. далі спеціальний Розділ 2.2 присвячений цьому). Через наявність кіральної $SU(2)$ симетрії існує квантове число кіральності, яке зберігається. Це число характеризується власними величинами діагонального генератору $T_2 = \gamma^5/2$. Оскільки є дві власних величини $+1/2$ і $-1/2$ діагонального оператора T_2 , чотирьохкомпонентний спіновий Ψ_σ перетворюється по звідному представленню групи $SU(2)$. Збереження числа кіральності грає важливу роль та призводить до відсутності зворотного розсіяння [149] у присутності домішок, які не порушують цю симетрію.

2.1.2. $U(4)$ симетрія спін-долина-підгратка та її порушення земанівським членом. А зараз ми узагальнимо результати попереднього

Розділу і включимо обертання у спіновому просторі. 16 генераторів $U(4)$, які працюють у спіновому та долинно-пігратковому просторах, дорівнюють

$$\frac{\sigma_\kappa}{2} \otimes I_4, \quad \frac{\sigma_\kappa}{2} \otimes i\gamma^3, \quad \frac{\sigma_\kappa}{2} \otimes \gamma^5, \quad \text{and} \quad \frac{\sigma_\kappa}{2} \otimes \frac{1}{2}[\gamma^3, \gamma^5], \quad (2.3)$$

де I_4 це – одинична 4×4 матриця та σ_κ з $\kappa = 0, 1, 2, 3$ це – чотири матриці Паулі, пов’язані зі спіновим ступенем свободи [σ_0 це – одинична 2×2 матриця]. Легко перевірити, що коли $B = 0$ і зеєманівське розщеплення відсутнє, лагранжіан (1.51) та член взаємодії (1.53) інваріантні при перетвореннях глобальної $U(4)$ групи, які генеруються цими 16 генераторами.

Найпростіший приклад порушення симетрії надається членом Зеємана, $\Psi^\dagger_\sigma \sigma_3 \Psi = \bar{\Psi} \gamma^0 \sigma_3 \Psi$, де σ_3 діє на спінові індекси σ діраківських спінорів. Він явно порушує $U(4)$ симетрію до $U(2)_a \times U(2)_b$ з генераторами

$$\frac{\sigma_{\kappa'}}{2} \otimes I_4, \quad \frac{\sigma_{\kappa'}}{2} \otimes i\gamma^3, \quad \frac{\sigma_{\kappa'}}{2} \otimes \gamma^5, \quad \text{and} \quad \frac{\sigma_{\kappa'}}{2} \otimes \frac{1}{2}[\gamma^3, \gamma^5], \quad (2.4)$$

де $\kappa' = 0, 3$. Ми обговоримо інші члени, що порушують симетрію далі у Розділі 2.5.

2.2. Кіральність у КЕД₂₊₁ теорії графену та її різниця з кіральністю у КЕД₃₊₁

Оскільки у безмасовій теорії Дірака γ^5 комутує з Гамільтоніаном (1.41) (антикомутує з H_0^D , який заданий (1.46)), це вводить квантове число *кіральність*, яке відповідає долинному індексу. Дійсно, спінори

$$\Psi_{\mathbf{K}_+} = \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{K}_+} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\mathbf{K}_-} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{\mathbf{K}_-} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

які описують квазічастинкові збудження у $\mathbf{K}_\pm$ точках, є власними станами γ^5 :

$$\gamma^5 \Psi_{\mathbf{K}_+} = \Psi_{\mathbf{K}_+}, \quad \gamma^5 \Psi_{\mathbf{K}_-} = -\Psi_{\mathbf{K}_-}. \quad (2.6)$$

Маркування $\mathbf{K}_{\pm}$ точок власними станами кірального оператора γ^5 є перевагою кірального представлення (1.44) для γ матриць. В іншому часто використовуваному базисі (1.49) з діагональною γ^0 ця властивість відсутня.

Для безмасових частинок у $3 + 1$ вимірі квантове число кіральності відповідає *спіральності*, яка характеризує проекцію її спіну на напрямок імпульсу. У $2 + 1$ вимірі звичайна концепція спіральності для безмасових частинок не має сенсу, і можна говорити тільки про псевдоспіральність.

Зараз ми це проілюструємо, розглянувши рівняння Дірака, яке слідує з лагранжіану (1.51) у найпростішому випадку $B = \mu = 0$, опустивши спіновий індекс. Ми розглядаємо розв'язки з додатною та від'ємною енергією з визначеною кіральністю

$$\Psi_{\mathbf{K}_{\pm}}^e(t, \mathbf{r}) = e^{-i\frac{Et}{\hbar} + i\mathbf{r}\mathbf{p}} U_{\mathbf{K}_{\pm}}^e(E, \mathbf{p}), \quad \Psi_{\mathbf{K}_{\pm}}^h(t, \mathbf{r}) = e^{i\frac{Et}{\hbar} + i\mathbf{r}\mathbf{p}} U_{\mathbf{K}_{\pm}}^h(E, \mathbf{p}) \quad (2.7)$$

з $E = \hbar v_F |\mathbf{p}|$, які відповідають електронам і діркам з $\mathbf{K}_{\pm}$ долин, відповідно. Підставивши (2.7) у рівняння Дірака, ми одержуємо, що спінори

$$U_{\mathbf{K}_{+}}^{e,h}(E, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{K}_{+}}^{e,h}(E, \mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_{\mathbf{K}_{-}}^{e,h}(E, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{\mathbf{K}_{-}}^{e,h}(E, \mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

задовольняють рівнянню Вейля, $\mathcal{H}_0(\mathbf{p})U^{e,h}(\mathbf{p}) = \pm EU^{e,h}(\mathbf{p})$ або, для двокомпонентних спінорів,

$$\begin{aligned} \hbar v_F(\tau_1 p_1 + \tau_2 p_2)\psi_{\mathbf{K}_{+}}^{e,h} &= \pm E\psi_{\mathbf{K}_{+}}^{e,h}, \\ -\hbar v_F(\tau_1 p_1 + \tau_2 p_2)\psi_{\mathbf{K}_{-}}^{e,h} &= \pm E\psi_{\mathbf{K}_{-}}^{e,h}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

де, відповідно, верхній знак відповідає електронам, а нижній – діркам. Ми підкреслимо, що у нашому випадку вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ знаходиться у площині графену. Формально рівняння (2.9) виглядають подібно до рівнянь Дірака-Вейля, які описують безмасові нейтрино [150]

$$\hbar c \mathbf{p} \boldsymbol{\alpha} \Psi = \hbar c \begin{pmatrix} \mathbf{p} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\mathbf{p} \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \Psi = p_0 \Psi, \quad (2.10)$$

проте, в останньому випадку простір є 3D. Це дозволяє ввести для безмасових частинок у $3 + 1$ вимірі *спіральності*

$$\Lambda = \frac{\mathbf{p}\Sigma}{|\mathbf{p}|}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

який комутує з діраківським Гамільтоніаном $\hbar c \boldsymbol{\alpha}$ та характеризує проєкцію спіна частинки на напрямок її імпульсу. Домноживши (2.10) на γ^5 та прийнявши до уваги, що безмасові частинки (античастинки) мають дисперсію $p_0 = \pm \hbar c |\mathbf{p}|$, ми одержуємо, що $\gamma^5 \Psi = \pm \mathbf{p}\Sigma/|\mathbf{p}| \Psi$. Це ілюструє, що для безмасових частинок спіральність співпадає з кіральністю, тоді як для античастинок вона має протилежний до кіральності знак.

А зараз розглянемо розв'язки (2.9) для $\mathbf{K}_+$ точки

$$\psi_{\mathbf{K}_+}^e(E, \mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_x + ip_y}{|\mathbf{p}|} \end{pmatrix}, \quad \psi_{\mathbf{K}_+}^h(E, \mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{-p_x + ip_y}{|\mathbf{p}|} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

та для $\mathbf{K}_-$ точки

$$\psi_{\mathbf{K}_-}^e(E, \mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{p_x + ip_y}{|\mathbf{p}|} \end{pmatrix}, \quad \psi_{\mathbf{K}_-}^h(E, \mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{|\mathbf{p}|} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

4-компонентні спінори (2.5) утворені з розв'язків (2.12), (2.13) є взаємно-ортогональними власними станами Гамільтоніана $\mathcal{H}_0(\mathbf{p})$ і оператора γ^5 :

$$\Psi_r^{i*}(\mathbf{p}) \Psi_s^j(\mathbf{p}) = \delta^{ij} \delta_{rs}, \quad i, j = e, h, \quad r, s = \mathbf{K}_+, \mathbf{K}_-. \quad (2.14)$$

У $2 + 1$ вимірному випадку нема можливості зробити обертання навколо напрямку імпульсу $\mathbf{p}$, що знаходиться у 2D площині, і оператор $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ не має фізичного змісту звичайного спінового оператора. Таким чином, концепція спіральності для безмасових частинок, яка зв'язана з групою Лоренца та обертаннями у звичайному просторі, у цьому випадку не має сенсу [151]. Далі, оскільки є тільки один генератор кутового моменту τ_3 , не

існує неабелівської алгебри, яка б могла обмежити можливі значення власних величин, що призводить до можливості існування екзотичних статистик (див. [152] та посилання там). Розв'язки (2.12) і (2.13) мають подвійні (double-valued) значення при обертаннях $R(\theta) = \exp(i\theta\tau_3/2)$ з $0 < \theta < 4\pi$, оскільки вони описують спінові поля [151].

Формально можна використати оператор псевдоспіральності

$$\Lambda^{2D} = \frac{\mathbf{p}\Sigma}{|\mathbf{p}|}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2) \quad (2.15)$$

який комутує з Гамільтоніаном і, таким чином, відповідає квантовому числу, яке зберігається. Цей оператор, однак, відповідає внутрішній, а не просторовій симетрії, як було у $3+1$ вимірному випадку. Однак існує можливість зв'язати між собою оператори кіральності та псевдоспіральності для безмасових квазічастинок, $\gamma^5\Psi = \pm\Lambda^{2D}\Psi$.

Можна бачити, що розв'язки (2.12) та (2.13), які задовільняють (2.14) відрізняються тільки знаком імпульсу. Таким чином, ми приходимо до висновку [112–114, 153], що у $\mathbf{K}_+$ точці електронні збудження мають енергію $\hbar v_F|\mathbf{p}|$ і $\mathbf{p}\boldsymbol{\tau}/|\mathbf{p}|\psi_{\mathbf{K}_+}^e = \psi_{\mathbf{K}_+}^e$, тоді як для дірок енергія дорівнює $-\hbar v_F|\mathbf{p}|$, тобто $\mathbf{p}\boldsymbol{\tau}/|\mathbf{p}|\psi_{\mathbf{K}_+}^h = -\psi_{\mathbf{K}_+}^h$. У $\mathbf{K}_-$ точці ці співвідношення є оберненими: для електронів $\mathbf{p}\boldsymbol{\tau}/|\mathbf{p}|\psi_{\mathbf{K}_-}^e = -\psi_{\mathbf{K}_-}^e$ і для дірок $\mathbf{p}\boldsymbol{\tau}/|\mathbf{p}|\psi_{\mathbf{K}_-}^h = \psi_{\mathbf{K}_-}^h$. Для 4-компонентних спінових $\Psi_{\mathbf{K}_\pm}^{e,h}$ ці умови можуть бути переписані з використанням оператора псевдоспіральності: $\Lambda^{2D}\Psi_{\mathbf{K}_\pm}^e = \pm\Psi_{\mathbf{K}_\pm}^e$ and $\Lambda^{2D}\Psi_{\mathbf{K}_\pm}^h = \mp\Psi_{\mathbf{K}_\pm}^h$. Вони мають на увазі, що у будь-якій заданій $\mathbf{K}_\pm$ точці напрямок імпульсу для електронів та дірок з тією ж самою абсолютною величиною енергії є протилежним. Ця властивість безмасових електронів та дірок є наслідком рівняння руху. Однак, щоб заборонити розсіяння квазічастинок назад [149, 154], треба також придушити їх перехід від однієї долини до іншої. Це обмеження також пов'язане зі збереженням кіральності. Наприклад, кіральність є хорошим квантовим числом у моношарі з електростатичним

потенціальним розсіянням.

Ми змогли визначити кіральну матрицю γ^5 та квантове число кіральності, оскільки ми використовуємо редуковане 4×4 представлення діраківських матриць. У $2 + 1$ вимірі є два нееквівалентних нередукованих 2×2 представлення діраківської алгебри [132]. Відповідні 2×2 $\tilde{\gamma}$ матриці характеризуються сигнатурою [155]

$$\eta = \frac{i}{2} \text{Tr}[\tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2]. \quad (2.16)$$

Можна перевірити, що $\hat{\gamma}^\nu$ і $\check{\gamma}^\nu$ матриці, з яких сформовано 4×4 представлення (1.49), мають протилежні сигнатури $\eta = +1$ і $\eta = -1$ відповідно. Щоб прийняти до уваги наявність двох нееквівалентних $\mathbf{K}_\pm$ точок потребу використання двох унітарно нееквівалентних представлень 2×2 гамма матриць. Як ми бачили, у кіральному представленні 4×4 γ матриць $\mathbf{K}_\pm$ точки розрізняються квантовим числом кіральності (долинний індекс). Сигнатуру η відповідних 2×2 γ матриць іноді також називають “кіральністю” [155]. Ми відзначимо, що сам по собі цей знак не спостерігається, і необхідно ввести діраківську масу або/та магнітне поле та розглядати їх відносні знаки (див. Розділ 2.5 нижче).

Наприкінці ми відзначимо, що відповідно до (1.33) матриця α^3 антикомутує з Гамільтоніаном (1.41): $\{\alpha^3, H_0\} = 0$. Наслідком цього є те, що спектр Гамільтоніану є симетричним відносно власної величини $E = 0$. Тотожність $\alpha^2 H_0^*(\mathbf{k}) \alpha^2 = -H_0(\mathbf{k})$ відповідає рівнянню (1.34) та гарантує симетрію спектру відносно $E = 0$ навіть при наявності скінченої діраківської маси $\bar{\Psi} \gamma^3 \Psi$. Також матриця γ^0 антикомутує з Гамільтоніанами (1.41) та (1.46): $\{\gamma^0, H_0\} = \{\gamma^0, H_0^D\} = 0$. У [93, 99] властивість H_0 антикомутувати з матрицею α^3 була також названа кіральною симетрією, через аналогію з антикомутативністю γ^5 з діраківським лагранжіаном у $3 + 1$ вимірному випадку [156, 157]. Також інколи знак енергії, $\varepsilon = \lambda v_F |\mathbf{k}|$, де $\lambda = 1$ відповідає зоні провідності та $\lambda = -1$ відповідає зоні валентності, зветься

“ярликом кіральност”. Ми, однак, використовуємо слово “кіральний” для характеристик, що дійсно пов’язані з матрицею γ^5 .

2.3. Дискретні симетрії КЕД₂₊₁ моделі графену

У континуальному наближенні означення операцій дискретної симетрії не є однозначними. У теоретикопольових дослідженнях КЕД₂₊₁ існує домовленість (див., наприклад, [63, 132]), як визначити ці операції. Вона базується на тому, що перетворення парності відповідає інверсії тільки однієї осі, наприклад x осі: $\mathcal{P}(x, y) \rightarrow (-x, y)$, оскільки інверсія обидвох осей відповідає обертанню. Маючи на увазі те, що КЕД₂₊₁ модель має твердотільне походження, введені тут операції дискретної симетрії узгоджені з операціями, визначеними у Розділі 1.1.3 для моделі на ґратці. Знання цих симетрій необхідне для правильної класифікації членів, які порушують симетрію, і дозволяє уникнути пастку, яскраво описану в роботі [158].

2.3.1. Просторова інверсія $\mathcal{P}$. Як обговорюється у Розділі 1.1.3.1, просторова інверсія повинна обернути обидві осі та обміняти місцями A і B атоми та $\mathbf{K}_\pm$ точки. Таким чином, використавши означення (1.20) та (1.21), для 4-компонентного спінору $\Psi_\sigma(\mathbf{p})$, який заданий рівнянням (1.40), ми визначаємо ¹

$$\Psi_\sigma(\mathbf{p}) \longrightarrow \mathcal{P}\Psi_\sigma(\mathbf{p})\mathcal{P}^{-1} = P\Psi_\sigma(-\mathbf{p}), \quad P = \tilde{\tau}_1 \otimes \tau_0 = \gamma^0, \quad P^2 = 1. \quad (2.17)$$

Відзначимо, що операція інверсії обидвох просторових координат не є еквівалентною обертанню на кут π у площині, яке задається наступним чином: $\Psi(k_x, k_y) \rightarrow \exp(i\pi(i\gamma^1\gamma^2/2))\Psi(-k_x, -k_y)$, де $i\gamma^1\gamma^2/2$ – це генератор відповідного обертання.

¹Компоненти $\psi_{\mathbf{K}_\pm}$ спінору (1.40) обмінюються при інверсії, але оскільки за означенням $\psi_{\mathbf{K}_-}$ підґратки вже переставлені, ми маємо τ_0 , яка діє у просторі підґраток замість τ_1 , яка була присутня у (1.21). Це означення $\mathcal{P}$ співпадає з відповідним оператором з роботи [113].

Інваріантність (1.22) Гамільтоніану H_0 при $\mathcal{P}$ перетворенні зараз слідує з умови

$$P\mathcal{H}_0^D(\mathbf{p})P = \mathcal{H}_0^D(-\mathbf{p}) \quad (2.18)$$

для діраківської Гамільтонівської густини (1.46). Рівняння (2.18) узагальнює умову (1.23) для 2×2 Гамільтонівської густини. Легко побачити, що при $\mathcal{P}$ перетворенні струм $\bar{\Psi}\sigma_0\gamma^\mu\Psi$ з (1.50) перетворюється так

$$\bar{\Psi}\sigma_0\gamma^0\Psi \xrightarrow{\mathcal{P}} \bar{\Psi}\sigma_0\gamma^0\Psi, \quad \bar{\Psi}\sigma_0\gamma^1\Psi \xrightarrow{\mathcal{P}} -\bar{\Psi}\sigma_0\gamma^1\Psi, \quad \bar{\Psi}\sigma_0\gamma^2\Psi \xrightarrow{\mathcal{P}} -\bar{\Psi}\sigma_0\gamma^2\Psi, \quad (2.19)$$

де одинична матриця σ_0 діє на спінові індекси σ діраківських спінорів. Взаємодія з фіксованим зовнішнім магнітним полем $eA_\alpha\bar{\Psi}\sigma_0\gamma^\alpha\Psi$ є інваріантною при просторовій інверсії.

2.3.2. Обернення часу $\mathcal{T}$. Оператор обернення часу (1.29) перетворює $\mathbf{K}_\pm$ точки, але не підгратки. Відповідно, коли ми визначаємо дію $\mathcal{T}$ на 4-компонентні спінори $\Psi_\sigma(\mathbf{p})$, частина, яка діє на підграткову ступінь свободи, дорівнює [112, 114] τ_1^2

$$\Psi(\mathbf{p}) \longrightarrow \mathcal{T}\Psi(\mathbf{p})\mathcal{T}^{-1} = i\sigma_2 T\Psi(-\mathbf{p}), \quad T = \tilde{\tau}_1 \otimes \tau_1 = \gamma^1\gamma^5, \quad T^2 = 1, \quad (2.20)$$

де σ_2 діє на спінові індекси спінору $\Psi_\sigma(\mathbf{p})$. Подвійне $\mathcal{T}$ -перетворення дає $\mathcal{T}^2\Psi(\mathbf{p})\mathcal{T}^{-2} = -\Psi(\mathbf{p})$. Таким чином для системи з непарною кількістю ферміонів, симетричної відносно обернення часу, виродження рівнів не може бути меншим за 2 (теорема Крамерса). Легко побачити, що $\mathbf{K}_\pm$ точки дійсно зв'язані симетрією обернення часу

$$\Psi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} a(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) \\ b(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) \\ b(\mathbf{K}_- + \mathbf{p}) \\ a(\mathbf{K}_- + \mathbf{p}) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{T}} T\Psi(-\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} a(\mathbf{K}_- - \mathbf{p}) \\ b(\mathbf{K}_- - \mathbf{p}) \\ b(\mathbf{K}_+ - \mathbf{p}) \\ a(\mathbf{K}_+ - \mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

²Порівняйте з означенням для $\mathcal{P}$ вище, що містить τ_0 .

де для спрощення ми не врахували спіні.

У часово-просторовому представленні перетворення (2.20) та відповідні перетворення для діраківського спряженого спінору дорівнюють

$$\begin{aligned}\Psi(t, \mathbf{r}) &\rightarrow \mathcal{T}\Psi(t, \mathbf{r})\mathcal{T}^{-1} = i\sigma_2 T\Psi(-t, \mathbf{r}), \\ \bar{\Psi}(t, \mathbf{r}) &\rightarrow (\mathcal{T}\Psi(t, \mathbf{r})\mathcal{T}^{-1})^\dagger (\gamma^0)^* = -\bar{\Psi}(-t, \mathbf{r})i\sigma_2 T.\end{aligned}\quad (2.22)$$

Інваріантність (1.30) Гамільтоніану H_0 при $\mathcal{T}$ зараз слідує з умови

$$T\mathcal{H}_0^{D*}(\mathbf{p})T = \mathcal{H}_0^D(-\mathbf{p}). \quad (2.23)$$

на густину Гамільтоніану (1.46). Рівняння (2.23) узагальнює умову (1.31) для 2×2 Гамільтонової густини.

Легко бачити, що при $\mathcal{T}$ перетворенні струм $\bar{\Psi}\sigma_0\gamma^\mu\Psi$ з (1.50) перетворюється так

$$\bar{\Psi}\sigma_0\gamma^0\Psi \xrightarrow{\mathcal{T}} \bar{\Psi}\sigma_0\gamma^0\Psi, \quad \bar{\Psi}\sigma_0\gamma^1\Psi \xrightarrow{\mathcal{T}} -\bar{\Psi}\sigma_0\gamma^1\Psi, \quad \bar{\Psi}\sigma_0\gamma^2\Psi \xrightarrow{\mathcal{T}} -\bar{\Psi}\sigma_0\gamma^2\Psi. \quad (2.24)$$

Коли зовнішнє магнітне поле зафіксовано, відповідний член взаємодії $\bar{\Psi}\sigma_0\gamma^\alpha\Psi$ порушує симетрію відносно обернення часу.

2.3.3. Зарядове спряження $\mathcal{C}$. Зарядове спряження $\mathcal{C}$ набуває нетривіального значення, коли ми розглядаємо вторинно квантовану теорію Дірака і вводимо перетворення, яке обмінює частинки і античастинки (електрони і дірки), залишаючи їхні спіні та імпульс незмінними.

Відповідно, ми визначаємо дію $\mathcal{C}$ на 4-компонентні спінори $\Psi_\sigma(\mathbf{p})$:

$$\Psi_\sigma(\mathbf{p}) \longrightarrow \mathcal{C}\Psi_\sigma(\mathbf{p})\mathcal{C}^{-1} = C\bar{\Psi}_\sigma^T(\mathbf{p}), \quad C = \gamma^1, \quad (2.25)$$

де T означає транспонування. Матриця C задовольняє співвідношенням³

$$C = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T, \quad C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = -\gamma^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2. \quad (2.26)$$

³Відзначимо, що наше означення $C = \gamma^1$ співпадає з роботою [63] і що $C(\gamma^3)^T C^{-1} = \gamma^3$.

Легко бачити, що $\mathcal{C}$ обмінює A та B підгратки

$$\Psi_\sigma(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} a_\sigma(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) \\ b_\sigma(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) \\ b_\sigma(\mathbf{K}_- + \mathbf{p}) \\ a_\sigma(\mathbf{K}_- + \mathbf{p}) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{C}} \gamma^1 \gamma^0 \Psi_\sigma^{\dagger T}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -b_\sigma^\dagger(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) \\ -a_\sigma^\dagger(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) \\ a_\sigma^\dagger(\mathbf{K}_- + \mathbf{p}) \\ b_\sigma^\dagger(\mathbf{K}_- + \mathbf{p}) \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Для діраківського спряженого спінору ми знаходимо

$$\bar{\Psi}_\sigma(\mathbf{p}) \rightarrow \mathcal{C} \Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{p}) \mathcal{C}^{-1} \gamma^0 = (\gamma^1 \gamma^0 \Psi_\sigma(\mathbf{p}))^T \gamma^0 = (-\gamma^1 \Psi_\sigma(\mathbf{p}))^T. \quad (2.28)$$

Легко бачити, що при $\mathcal{C}$ перетворенні струм $\bar{\Psi} \sigma_0 \gamma^\mu \Psi$ з (1.50) перетворюється так

$$\bar{\Psi} \sigma_0 \gamma^\mu \Psi \xrightarrow{\mathcal{C}} -\bar{\Psi} \sigma_0 \gamma^\mu \Psi, \quad \mu = 0, 1, 2. \quad (2.29)$$

Можна також перевірити, що лагранжіан (1.51) є інваріантним відносно $\mathcal{C}$, якщо одночасно замінити $e \rightarrow -e$.

2.4. Різниця між квазічастинками в графені та безмасовими нейтрино

Існує широкорозповсюджена аналогія між квазічастинками в графені та безмасовими нейтрино, яка базується на подібності рівнянь Дірака-Вейля (2.10) і рівнянь (2.9) для квазічастинок у графені [84]. Наш розгляд дискретних $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ і $\mathcal{C}$ симетрії у Розділах 2.3.1, 2.3.2 та 2.3.3 показує, що ця аналогія є неповною. Рівняння Дірака (2.10) відповідає парі рівнянь Вейля для 2-компонентних лівих спінорів, $\Psi_L = (1/2)(1 - \gamma^5)\Psi$ та правих спінорів $\Psi_R = (1/2)(1 + \gamma^5)\Psi$. Ці два рівняння пов'язані одне з іншим перетворенням парності. У фізиці частинок припускається, що в природі існують тільки ліві нейтрино, так що досить використовувати тільки одне рівняння Вейля. Однак, одне це рівняння порушує $\mathcal{C}$ та $\mathcal{P}$ симетрії, але зберігає $\mathcal{CP}$ та $\mathcal{T}$ симетрії [150]. Діраківські квазічастинки у графені з певною кіральністю також описуються одним з рівнянь Вейля (2.9) для 2-компонентного

спінору. Однак останнє рівняння порушує $\mathcal{P}$ та $\mathcal{T}$ симетрії, але зберігає $\mathcal{PT}$ та $\mathcal{C}$ симетрії. Цей висновок про різницю між дискретними симетріями у КЕД_{3+1} і в графені не може бути зроблений формальним порівнянням рівнянь (2.10) і (2.9), оскільки було при континуальному описі графену необхідно врахувати дискретні симетрії моделі на гратці з Розділу 1.1.3. Ми також відзначимо той факт, що $\mathbf{K}_{\pm}$ точки пов'язані симетрією обернення часу (див. (2.21)), і це має важливі наслідки для ефекту Джозефсона у мезоскопічних переходах, які зроблені з шару графену, що оточений двома близькорозташованими надпровідними електродами [159]. Оскільки Куперівські пари зроблені з обернених у часі станів, два електрони з Куперівської пари, які інjektуються з надпровідних електродів у графен, ідуть до протилежних $\mathbf{K}_{\pm}$ точок [160, 161]. Наприкінці відзначимо, що розгляд дискретних симетрій дозволяє зробити аналогію між $\mathbf{K}_{\pm}$ індексом та квантовим числом, яке описує кругову поляризацію фотонів. Дійсно, фотони з певною круговою поляризацією також порушують симетрії парності та обернення часу, але не зарядове спряження.

2.5. Порушення симетрії в графені: діраківські маси, їхні перетворення при $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{C}$ та фізичний зміст

Однією з основних причин того, чому графен притягує до себе увагу багатьох теоретиків, див., наприклад, роботи [9, 58–60, 79, 107, 108, 120, 162–171] є те, що електрон-електронні взаємодії та/або магнітне поле призводять до порушення $U(4)$ симетрії та нової фізики, розуміння якої потребує виходу за незвичайну, але ще досить просту фізику невзаємодіючих діраківських квазічастинок. У Розділі 5.3.1 ми ще повернемося до більш систематичного огляду цих робіт, а зараз тільки вкажемо основні експериментальні факти, які вказують на цю нову фізику та їхні сучасну інтерпретацію. Припускається, що новий стан КЕХ у графені з нульовим фактором заповнення, що

спостерігається у сильних магнітних полях $B \gtrsim 20$ Т, пов'язаний зі спіно-поляризованим станом [117, 118, 172], тоді як стани з фактором заповнення $\nu = \pm 1$ пов'язані зі зняттям підграткового або долинного виродження [117, 172].

Стан з поляризованим спіном описується параметром порядку $\langle \bar{\Psi} \gamma^0 \sigma_3 \Psi \rangle$ (або більш загальним $\langle \bar{\Psi} \gamma^0 \boldsymbol{\sigma} \Psi \rangle$), який нагадує член Зеємана, але, на відміну від нього, походить від багаточастинкових взаємодій.

Інший канал спонтанного порушення $U(4)$ симетрії до $U(2)_c \times U(2)_d$ пов'язаний із можливістю генерації за рахунок взаємодій діраківської маси M_D , яка входить до лагранжіану (1.51) наступним чином:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(t, \mathbf{r}) \left[i\gamma^0 \left(\hbar\sigma_0\partial_t - i\sigma_0\mu + i\sigma_3\frac{g}{2}\mu_B B \right) + i\hbar v_F \sigma_0 \gamma^1 D_x + i\hbar v_F \sigma_0 \gamma^2 D_y - M_D \right] \Psi(t, \mathbf{r}). \quad (2.30)$$

Діраківська маса M_D ⁴ має загальну форму $\Delta\sigma_\kappa \otimes \Gamma \equiv \Delta\sigma_\kappa\Gamma$, де Δ – це її абсолютна величина, σ_κ – одна з матриць Паулі (далі ми розглядаємо тільки σ_0 і σ_3 , більш загальні маси з $\boldsymbol{\sigma}$ були розглянуті, наприклад, у [173]) та Γ – це одна з чотирьох матриць

$$I_4, \quad \gamma^3, \quad i\gamma^5, \quad \gamma^3\gamma^5. \quad (2.31)$$

При перетвореннях групи $SU(2)$ (як у Розділі 2.1.1 ми поки що ігноруємо спіновий ступінь свободи) щілини $\bar{\Psi}\Psi$, $\bar{\Psi}\gamma^3\Psi$, $\bar{\Psi}i\gamma^5\Psi$ трансформуються як вектор, тоді як щілину $\bar{\Psi}\gamma^3\gamma^5\Psi$ – як скаляр. Три щілини, $\bar{\Psi}\Psi$, $\bar{\Psi}\gamma^3\Psi$, і $\bar{\Psi}i\gamma^5\Psi$ порушують групу $SU(2)$ до підгрупи $U(1)$ (з непорушеними генераторами T_3 , T_2 та T_1 , відповідно).

2.5.1. Фізичний зміст діраківських мас. Щоб зрозуміти фізичний зміст однієї з мас, перепишемо Гамільтоніан H_1 визначений у (1.24)

⁴Енергетична щілина M_D пов'язана з відповідною діраківською масою m як $M_D = mv_F^2$. Далі ми будемо ігнорувати різницю між “діраківською щілиною” і “діраківською масою” та використовувати термін “діраківська маса” для обидвох випадків.

через 4-компонентний спінор (1.40)

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \sum_{\sigma} \int_{DC} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{p}) [m_+ \tilde{\tau}_0 \otimes \tau_0 + m_- \tilde{\tau}_3 \otimes \tau_3] \Psi_{\sigma}(\mathbf{p}) \\
 &= \int_{DC} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \bar{\Psi}(\mathbf{p}) [m_+ \sigma_0 \gamma^0 + m_- \sigma_0 \gamma^3] \Psi(\mathbf{p}).
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Як було згадано після (1.24), член $m_+ \sigma_0 \gamma^0$ змінює повну густину носіїв на обох А та В підгратках і, таким чином, може бути поглинений до члену з хімічним потенціалом $\mu \sigma_0 \gamma^0$. Однак член $m_- \sigma_0 \gamma^3$ порушує $\mathcal{P}$, яка визначена у (2.17). Цей член є прикладом однієї з діраківських мас, введених вище. Оператор

$$\begin{aligned}
 &\int d^2 x \bar{\Psi} \sigma_0 \gamma^3 \Psi = \\
 &\sum_{\sigma} \int_{DC} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} [a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) a_{\sigma}(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) + a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{K}_- + \mathbf{p}) a_{\sigma}(\mathbf{K}_- + \mathbf{p}) \\
 &\quad - b_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) b_{\sigma}(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) - b_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{K}_- + \mathbf{p}) b_{\sigma}(\mathbf{K}_- + \mathbf{p})]
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

визначає величину параметру порядку $\langle \bar{\Psi} \sigma_0 \gamma^3 \Psi \rangle$ (і, таким чином, ферміонну щільність), яка пропорційна густині електронного дисбалансу між А та В підгратками і відповідає формуванню хвилі зарядової густини у ексітонному основному стані [58], який знімає виродження між підгратками. Як ми вже згадували у Розділі 1.1.3.1, у [94] було запропоновано, що цей тип діраківської маси може бути створений у графені, якщо покласти його на відповідний субстрат, який порушив би симетрію між А та В підгратками.

Більше прикладів мас розглянуті в огляді [25], а тут ми ще розглянемо тільки масовий член з $\Gamma = \gamma^3 \gamma^5$, для котрого ми маємо

$$\begin{aligned}
 &\int d^2 x \bar{\Psi} \sigma_0 \gamma^3 \gamma^5 \Psi = \\
 &\sum_{\sigma} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} [a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) a_{\sigma}(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) - a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{K}_- + \mathbf{p}) a_{\sigma}(\mathbf{K}_- + \mathbf{p}) \\
 &\quad - b_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) b_{\sigma}(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}) + b_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{K}_- + \mathbf{p}) b_{\sigma}(\mathbf{K}_- + \mathbf{p})].
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

На відміну від щілини (маси) у (2.33), щілина у (2.34) відповідає щілині з протилежним знаком у $\mathbf{K}_-$ точці [порівняй (2.34) та (2.33)]. Як обговорюється у роботі [111], ця щілина пов'язана з моделлю, що була запропонована Халдейном (Haldane) [51] у якості реалізації аномалії парності у $2 + 1$ вимірній теорії поля (див. також [49, 52, 158]). Відзначимо інше визначення спінору

$$\Psi'_\sigma = (a_\sigma^\dagger(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}), b_\sigma^\dagger(\mathbf{K}_+ + \mathbf{p}), a_\sigma^\dagger(\mathbf{K}_- + \mathbf{p}), b_\sigma^\dagger(\mathbf{K}_- + \mathbf{p})) \quad (2.35)$$

у [110,111] таке, що вираз (2.34) зі щілиною записується так $\Psi'^\dagger \sigma_0 \otimes \tilde{\tau}_3 \otimes \tau_3 \Psi'$ ($\tilde{\tau}$ і τ матриці діють, відповідно, у просторах долин та підграток). У наших позначеннях (1.40) це відповідає щілині $\Psi^\dagger \sigma_0 \otimes \tilde{\tau}_0 \otimes \tau_3 \Psi = \bar{\Psi} \sigma_0 \gamma^3 \gamma^5 \Psi$. Порівнюючи маси у рівняннях (2.33) та (2.34), знаходимо, що друга маса зберігає $\mathcal{P}$. З іншого боку, маючи на увазі, що $\mathbf{K}_\pm$ точки пов'язані оберенням часу $\mathcal{T}$ (див. (2.21)), можна побачити, що, тоді як масовий член $\Delta \sigma_0 \gamma^3$ зберігає $\mathcal{T}$, маса $\Delta_{\mathcal{T}} \sigma_0 \gamma^3 \gamma^5$ порушує цю симетрію. Це також ілюструється відповідними НРЛ енергіями, які задані, відповідно, рівняннями (2.38) та (2.41). На відміну від цього маса $\sim \sigma_3 \gamma^3 \gamma^5$, яка пов'язана зі спін-орбітальною взаємодією [110,111] не порушує $\mathcal{T}$. Фактично тільки щілини $\sigma_3 \gamma^3 \gamma^5$ та $\sigma_0 \otimes I_4$ симетричні відносно всіх дискретних симетрій.

2.5.2. Трансформаційні властивості діраківських мас. Всі можливі діраківські маси $\bar{\Psi} M_D \Psi$ та їх трансформаційні властивості при $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{C}$ симетріях наведені у Таблиці 2.1. Для повноти ми також включили матриці M_μ , M_Z і $\mathcal{M}_{\mu 1}$, $\mathcal{M}_{\mu 2}$, які відповідають хімічному потенціалу, зееманівському члену та узагальненим хімічним потенціалам. Для зручності порівняння з [110,111], ми надаємо також еквівалентні M' для цих членів, записані через спінори Ψ' і $\Psi'^\dagger$ з (2.35).

Таблиця 2.1

Трансформаційні властивості різних діраківських мас

$$\bar{\Psi} M_D \Psi = \Psi^\dagger M \Psi = \Psi'^\dagger M' \Psi' \text{ з } M_D = \sigma_{0,3} \otimes \Gamma \text{ при } \mathcal{P}, \mathcal{T} \text{ та } \mathcal{C}$$

перетвореннях. Матриці M_μ , M_Z та $\mathcal{M}_{\mu 1}$, $\mathcal{M}_{\mu 2}$ відповідають хімічному потенціалу, зеєманівському члену та узагальненим хімічним потенціалам.

M_D	M	M'	$\mathcal{P}$	$\mathcal{T}$	$\mathcal{C}$
$\sigma_0 \otimes I_4$	$\sigma_0 \otimes \tilde{\tau}_1 \otimes \tau_0$	$\sigma_0 \otimes \tilde{\tau}_1 \otimes \tau_1$	1	1	1
$\sigma_0 \otimes \gamma^3$	$\sigma_0 \otimes \tilde{\tau}_3 \otimes \tau_3$	$\sigma_0 \otimes \tilde{\tau}_0 \otimes \tau_3$	-1	1	1
$\sigma_0 \otimes i\gamma^5$	$\sigma_0 \otimes \tilde{\tau}_2 \otimes \tau_0$	$\sigma_0 \otimes \tilde{\tau}_2 \otimes \tau_1$	-1	1	-1
$\sigma_0 \otimes \gamma^3 \gamma^5$	$\sigma_0 \otimes \tilde{\tau}_0 \otimes \tau_3$	$\sigma_0 \otimes \tilde{\tau}_3 \otimes \tau_3$	1	-1	1
$\sigma_3 \otimes I_4$	$\sigma_3 \otimes \tilde{\tau}_1 \otimes \tau_0$	$\sigma_3 \otimes \tilde{\tau}_1 \otimes \tau_1$	1	-1	1
$\sigma_3 \otimes \gamma^3$	$\sigma_3 \otimes \tilde{\tau}_3 \otimes \tau_3$	$\sigma_3 \otimes \tilde{\tau}_0 \otimes \tau_3$	-1	-1	1
$\sigma_3 \otimes i\gamma^5$	$\sigma_3 \otimes \tilde{\tau}_2 \otimes \tau_0$	$\sigma_3 \otimes \tilde{\tau}_2 \otimes \tau_1$	-1	-1	-1
$\sigma_3 \otimes \gamma^3 \gamma^5$	$\sigma_3 \otimes \tilde{\tau}_0 \otimes \tau_3$	$\sigma_3 \otimes \tilde{\tau}_3 \otimes \tau_3$	1	1	1
$M_\mu = \sigma_0 \otimes \gamma^0$	$\sigma_0 \otimes \tilde{\tau}_0 \otimes \tau_0$	$\sigma_0 \otimes \tilde{\tau}_0 \otimes \tau_0$	1	1	-1
$M_Z = \sigma_3 \otimes \gamma^0$	$\sigma_3 \otimes \tilde{\tau}_0 \otimes \tau_0$	$\sigma_3 \otimes \tilde{\tau}_0 \otimes \tau_0$	1	-1	-1
$\mathcal{M}_{\mu 1} = \sigma_0 \otimes \gamma^0 \gamma^5$	$\sigma_0 \otimes -i\tilde{\tau}_2 \otimes \tau_0$	$\sigma_0 \otimes -i\tilde{\tau}_2 \otimes \tau_1$	-1	-1	-1
$\mathcal{M}_{\mu 2} = \sigma_3 \otimes \gamma^0 \gamma^5$	$\sigma_3 \otimes -i\tilde{\tau}_2 \otimes \tau_0$	$\sigma_3 \otimes -i\tilde{\tau}_2 \otimes \tau_1$	-1	1	-1

Що стосується неперервної групи симетрії $U(4)$, всі діраківські щілини, окрім $\sigma_0 \otimes \gamma^3 \gamma^5$ порушують її до $U(2) \otimes U(2)$ підгрупи, хоча зразок порушення залежить від конкретної щілини. Наприклад, у випадку щілини $\Delta \bar{\Psi} \gamma^3 \Psi$ ми маємо порушення $U(4)$ до $U_a(2) \otimes U_b(2)$ з генераторами

$$\frac{\sigma^a}{2} \otimes I_4, \quad \frac{\sigma^a}{2} \otimes T_2. \quad (2.36)$$

Підгрупи $U_{a,b}(2)$ діють у просторах станів $(\mathbf{K}_+, \uparrow)$, $(\mathbf{K}_+, \downarrow)$ та $(\mathbf{K}_-, \uparrow)$, $(\mathbf{K}_-, \downarrow)$, не змішуючи їх.

Цікавий приклад порушення $U(4)$ симетрії пов'язаний зі щілиною $\bar{\Psi} \sigma_3 \gamma^3 \Psi$. У цьому випадку ми маємо 8 непорушених генераторів

$$\frac{\sigma^1}{2} \otimes T_1, \quad \frac{\sigma^2}{2} \otimes T_1, \quad \frac{\sigma^1}{2} \otimes T_3, \quad \frac{\sigma^2}{2} \otimes T_3, \quad \frac{\sigma^0}{2} \otimes T_2, \quad \frac{\sigma^3}{2} \otimes T_2, \quad \frac{\sigma^0}{2} \otimes I_4, \quad \frac{\sigma^3}{2} \otimes I_4, \quad (2.37)$$

які утворюють іншу $U_{a'}(2) \otimes U_{b'}(2)$ групу, що діє у просторах станів $(\mathbf{K}_+, \uparrow)$, $(\mathbf{K}_-, \downarrow)$ та $(\mathbf{K}_+, \downarrow)$, $(\mathbf{K}_-, \uparrow)$, відповідно. Тоді як ця щілина є $\mathcal{P}$ -непарною і $\mathcal{T}$ -непарною, вона інваріантна відносно комбінованої $\mathcal{PT}$ -інверсії.

Закінчуючи нашу класифікацію діраківських мас, ми відзначимо, що вже згаданий у Розділі 1.2.3.2 КЕД₂₊₁ опис d НП також включає різноманітні діраківські маси [19, 133, 137–139], коли розглядається можливе відкриття вторинної щілини (наприклад, хвиля зарядової чи спінової густини, або ще один надпровідний параметр порядку з іншою симетрією, див. Розділ 7).

2.6. Діраківські рівні Ландау

У зовнішньому магнітному полі формуються релятивістські рівні Ландау. У присутності скінченої щілини $\Delta \neq 0$, але ігноруючи зеєманівське розщеплення, для матриць $\Gamma = I_4, \gamma^3, \gamma^5$ енергії рівнів Ландау дорівнюють

$$E_n = \begin{cases} \pm \Delta \operatorname{sgn}(eB), & n = 0, \\ \operatorname{sgn}(n) \sqrt{\Delta^2 + 2|n|\hbar v_F^2 |eB|/c}, & n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (2.38)$$

Щоб зрозуміти, як з'являється спектр (2.38), повчально записати рівняння Дірака для однієї з мас, розглянувши обидві $\mathbf{K}$ точки окремо. Наприклад, для маси $\Delta\sigma_0\gamma^3$, ми одержуємо

$$[i\tau_0\hbar\partial_t + i\hbar v_F\tau_1 D_x + i\hbar v_F\tau_2 D_y - \tau_3\Delta] \psi_{\mathbf{K}_+}(t, \mathbf{r}) = 0, \quad (2.39a)$$

$$[i\tau_0\hbar\partial_t - i\hbar v_F\tau_1 D_x - i\hbar v_F\tau_2 D_y + \tau_3\Delta] \psi_{\mathbf{K}_-}(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (2.39b)$$

Домноживши ліву частину (2.39a) на τ_3 , а ліву частину (2.39b) на $-\tau_3$, ми одержуємо

$$[i\hat{\gamma}^0\hbar\partial_t + i\hbar v_F\hat{\gamma}^1 D_x + i\hbar v_F\hat{\gamma}^2 D_y - \Delta] \psi_{\mathbf{K}_+}(t, \mathbf{r}) = 0, \quad (2.40a)$$

$$[i\tilde{\gamma}^0\hbar\partial_t + i\hbar v_F\tilde{\gamma}^1 D_x + i\hbar v_F\tilde{\gamma}^2 D_y - \Delta] \psi_{\mathbf{K}_-}(t, \mathbf{r}) = 0, \quad (2.40b)$$

де у (2.40a), 2×2 гамма матриці наведені у (1.49), а у (2.40b) $\tilde{\gamma}^0 = -\hat{\gamma}^0$, $\tilde{\gamma}^{1,2} = \hat{\gamma}^{1,2}$ і мають протилежну сигнатуру η . Розв'язок рівнянь (2.39a) та (2.39b) у зовнішньому магнітному полі у калібруванні Ландау детально описано у Додатку А, а Додаток Б присвячений розв'язку цього рівняння у симетричному калібруванні. Енергії рівнів Ландау з n та $-n$ для $|n| \geq 1$ є симетричними (див. рівняння (2.38) та (2.41)). НРЛ, однак, є асиметричним і аномальним тому, що у рівнянні (2.40a) його енергія дорівнює $-\Delta \operatorname{sgn}(eB)$, тоді як у (2.40b) його енергія дорівнює $\Delta \operatorname{sgn}(eB)$ (див. Рис. 2.1 (с), де показано випадок $eB > 0$). Виявляється, що знак енергії НРЛ визначається відносним знаком сигнатури η для 2×2 діраківських матриць (2.16) і діраківської маси Δ [155, 174]. Це означає, що, оскільки знак перед масою Δ у (2.40a) і (2.40b) є однаковим, то знак енергії НРЛ залежить від знаку сигнатури $\hat{\gamma}^\nu$ і $\tilde{\gamma}^\nu$ матриць. Таким чином скомбінований з (2.39a) і (2.39b) енергетичний спектр є симетричним і задається (2.38). Це відповідає тому, що діраківська маса $\Delta\sigma_0\gamma^3$ не порушує симетрію відносно обернення часу.

У границі $\Delta \rightarrow 0$ рівні Ландау $\pm\Delta\operatorname{sgn}(eB)$, які відповідають $n = 0$, об'єднуються разом, щоб сформувати єдиний рівень. Однак, коли $\mu = 0$ і

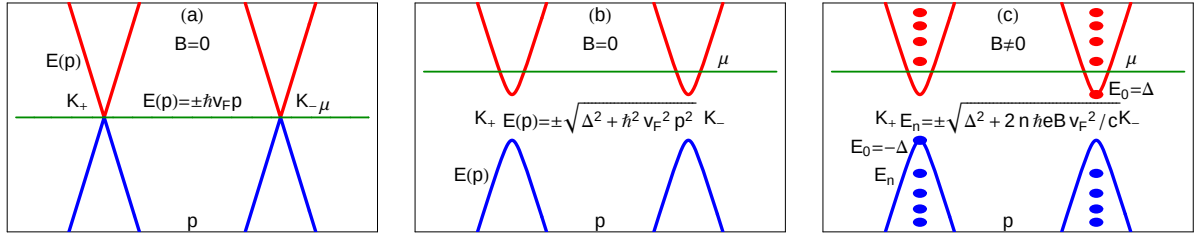


Рис. 2.1. (Кольоровий в електронній версії [25].) Зонна структура графену. Електрони показані червоним, а дірки синім. (а) Низькоенергетична лінійна дисперсія $E(\mathbf{k})$ поблизу діраківських точок $\mathbf{K}_+$ і $\mathbf{K}_-$ при $B = 0$. (b) Можлива модифікація спектру скінченою щільною (діраківською масою) Δ . Хімічний потенціал (показаний горизонтальною лінією) μ зсунутий від нуля напругою на затворі. (c) Рівні Ландау в діраківській теорії графену. Спінова ступінь свободи не враховується. Для заданого напрямку магнітного поля $\mathbf{B}$, яке прикладене перпендикулярно до площини графену, найнижчий ($n = 0$) рівень Ландау (НРЛ) має енергію $E_0 = -\Delta$ у $\mathbf{K}_+$ та $E_0 = \Delta$ у $\mathbf{K}_-$.

знехтувано розщепленням Зеемана, він залишається напівзаповненим. Ця властивість НРЛ, який порівну розподілений між частинками та античастинками, є основою незвичайного ЦКЕХ у графені [1] (див. Розділ 5).

Для $\Gamma = \gamma^3 \gamma^5$, спектр є асиметричним

$$E_n = \begin{cases} -\Delta \text{sgn}(eB), & n = 0, \\ \text{sgn}(n) \sqrt{\Delta^2 + 2|n| \hbar v_F^2 |eB|/c}, & n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (2.41)$$

Дійсно, порушуюча $\mathcal{T}$ маса $\Delta_{\mathcal{T}} \sigma_0 \gamma^3 \gamma^5$ відповідає двом рівнянням

$$\begin{aligned} [i\tau_0 \hbar \partial_t + i\hbar v_F \tau_1 D_x + i\hbar v_F \tau_2 D_y - \tau_3 \Delta_{\mathcal{T}}] \psi_{\mathbf{K}_+}(t, \mathbf{r}) &= 0, \\ [i\tau_0 \hbar \partial_t - i\hbar v_F \tau_1 D_x - i\hbar v_F \tau_2 D_y - \tau_3 \Delta_{\mathcal{T}}] \psi_{\mathbf{K}_-}(t, \mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}$$

які мають один і той же знак перед $\Delta_{\mathcal{T}}$. Відповідно, оскільки 2×2 гама матриці співпадають з матрицями в (2.40a) і (2.40b), можна легко побачити, що обидва рівняння у (2.42) ведуть до однакового знаку енергії НРЛ,

який дорівнює $-\Delta_{\mathcal{T}} \operatorname{sgn}(eB)$. Відповідно, НРЛ залишається подвійно виродженим. Таким чином, скомбінований енергетичний спектр (2.41) стає асиметричним, а порушуючий симетрію обернення часу характер діраківської маси $\Delta_{\mathcal{T}}\sigma_0\gamma^3\gamma^5$ виявляється зовнішнім магнітним полем. При температурах набагато нижче $\Delta_{\mathcal{T}}$ це веде до КЕХ навіть у нульовому магнітному полі [51]. Дійсно, оскільки холлівська провідність непарна відносно обернення часу, ненульова σ_{xy} можлива, якщо інваріантність відносно обернення часу порушена.

У границі $\Delta_{\mathcal{T}} \rightarrow 0$, $n = 0$ рівень Ландау з енергією $-\Delta \operatorname{sgn}(eB)$ у рівнянні (2.41) є або електронним, або дірочним, залежно від відносного знаку Δ і eB . Таким чином, границя нульової щільності невизначена у тому сенсі, що вона не має ясного частинкового або дірочного характеру квазічастинок на НРЛ. Однак, з фізичної точки зору, властивість НРЛ бути порівну розподіленим між частинками та античастинками може бути обґрунтована наявністю члена Зеємана.

Виродження рівнів Ландау з $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, що задані рівняннями (2.38) і (2.41), дорівнює $|eB|/(\pi\hbar)$ (на одиничну площу і на один спін), тоді як виродження НРЛ з $n = 0$ для (2.38) дорівнює $|eB|/(2\pi\hbar)$, а для (2.41) дорівнює $|eB|/(\pi\hbar)$.

Треба особливо відзначити “релятивістський” масштаб енергій $L(B) = \sqrt{2|eB|\hbar v_F^2/c}$, який визначає відстань між рівнями Ландау

$$\Delta E = E_1(\Delta = 0) - E_0(\Delta = 0) = \sqrt{L^2(B)} \approx 421\sqrt{B[\text{T}]} \text{K} \approx 36.3\sqrt{B[\text{T}]} \text{meV}, \quad (2.42)$$

якщо для Фермі швидкості v_F обрати значення $v_F \approx 10^6 \text{ m/s}$ [див. також рівняння (3.42)]. Це, наприклад, відповідає $\Delta E \approx 2800 \text{ K}$ при $B = 45 \text{ T}$, що і робить можливим спостереження КЕХ у графені навіть при кімнатній температурі [68].

Прийнявши до уваги справжню спінову ступінь свободи, для рівнів Лан-

дау у присутності $\mathcal{P}$ -непарної і $\mathcal{T}$ -парної щілини $\Delta\bar{\Psi}\gamma^3\Psi$ ми маємо наступну ситуацію. Для $n \geq 1$ всі рівні Ландау є 4-кратно вироджені (стани $|\mathbf{K}_+, \uparrow\rangle, |\mathbf{K}_+, \downarrow\rangle, |\mathbf{K}_-, \uparrow\rangle, |\mathbf{K}_-, \downarrow\rangle$). З іншого боку, як показано на Рис. 2.2 (а) для рівнів Ландау з $n = 0$ ми маємо 2-кратне виродження: для станів $|\mathbf{K}_+, \uparrow\rangle, |\mathbf{K}_+, \downarrow\rangle$ та $|\mathbf{K}_-, \uparrow\rangle, |\mathbf{K}_-, \downarrow\rangle$ з відповідними енергіями $\mp\Delta$. Для $\mathcal{P}$ -

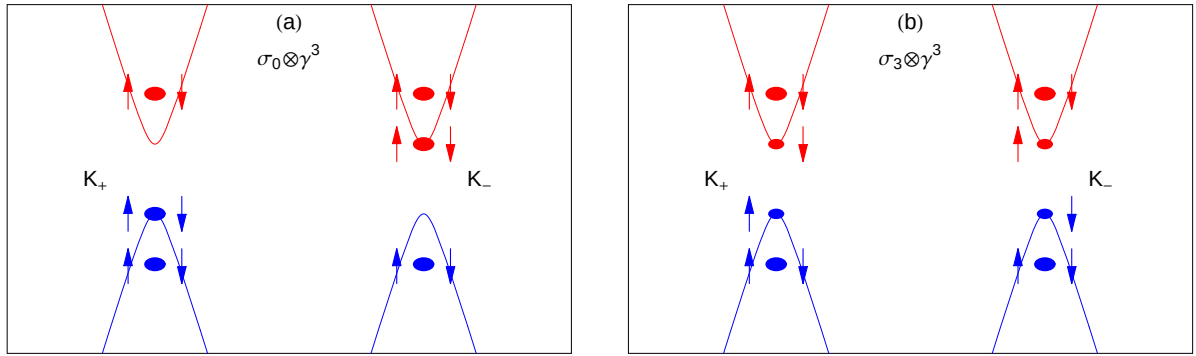


Рис. 2.2. (Кольоровий в електронній версії [25].) Рівні Ландау у присутності спінового ступеню свободи, але при нульовій величині зееманівського розщеплення. Електрони показані червоним, а дірки синім. (а) для $\sigma_0 \otimes \gamma^3$ щілини. (б) для $\sigma_3 \otimes \gamma^3$ щілини.

непарної і $\mathcal{T}$ -непарної щілини $\Delta\bar{\Psi}\sigma_3\gamma^3\Psi$ (див. Рис. 2.2 (b)) ситуація з рівнями з $n \geq 1$ така ж сама, проте два рівні Ландау з $n = 0$ з енергіями $\mp\Delta$ тепер мають іншу 2-кратну виродженість: $|\mathbf{K}_+, \uparrow\rangle, |\mathbf{K}_-, \downarrow\rangle$ та $|\mathbf{K}_-, \uparrow\rangle, |\mathbf{K}_+, \downarrow\rangle$ яка відповідає порушенню симетрії за зразком, описаним у (2.36). В обох випадках врахування зееманівської взаємодії призводить до подальшого розщеплення $n = 0$ рівня на чотири різних рівня, таким чином повністю знімаючи 4-кратне виродження цього рівня у невзаємодіючій теорії. Для обох розглянутих щілин очікуваний КЕХ матиме наступні фактори заповнення $\nu = 0, \pm 1, \pm 2k$, де k є додатним цілим.

Розглянемо тепер $\mathcal{P}$ -парну і $\mathcal{T}$ -непарну щілину $\Delta\bar{\Psi}\gamma^3\gamma^5\Psi$, яка не порушує $U(4)$ симетрію. Усі рівні Ландау мають 4-кратне виродження. Точніше, для рівнів з $n = 0$, стани з будь-яким спіном з $\mathbf{K}_+$ долини, які знаходяться

на підгратці В, вироджені зі станами з обидвома спінами з $\mathbf{K}_+$ долини, які знаходяться на підгратці А. При наявності члена Зеємана, ми одержуємо тільки 2 різних (подвійно вироджених) рівня.

Наприкінці, для $\mathcal{P}$ -парної і $\mathcal{T}$ -парної щілини $\Delta\bar{\Psi}\sigma_z\gamma^3\gamma^5\Psi$ маємо дві пари станів для рівнів Ландау з $n = 0$: $|\mathbf{K}_+, \uparrow\rangle, |\mathbf{K}_-, \uparrow\rangle$ та $|\mathbf{K}_+, \downarrow\rangle, |\mathbf{K}_-, \downarrow\rangle$, які залишаються виродженими навіть у присутності зеєманівської взаємодії. Таким чином, для двох останніх щілин очікуваний КЕХ матиме наступні фактори заповнення $\nu = 2k$ з $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

РОЗДІЛ 3

ДИНАМІЧНА ТА СТАТИЧНА ЕЛЕКТРИЧНА ПРОВІДНІСТЬ ДІРАКІВСЬКИХ ФЕРМІОНІВ

... we show that the opacity of suspended graphene is defined solely by the fine structure constant, $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ (where c is the speed of light), the parameter that describes coupling between light and relativistic electrons and that is traditionally associated with quantum electrodynamics rather than materials science. Despite being only one atom thick, graphene is found to absorb a significant ($\pi\alpha = 2.3\%$) fraction of incident white light, a consequence of graphene's unique electronic structure.

R.R. NAIR, *et al.* SCIENCE **320**, 1308 (2008).

Цей Розділ написано за роботами [2, 5, 7, 8, 13–17, 22] та оглядом [25].

3.1. Електромагнітний відгук

Залежний від частоти Ω тензор електричної провідності $\sigma_{\alpha\beta}(\Omega)$ одержується за допомогою формули Кубо

$$\sigma_{\alpha\beta}(\Omega) = \frac{K_{\alpha\beta}(\Omega + i0)}{-i(\Omega + i0)}, \quad K_{\alpha\beta}(\Omega + i0) \equiv \frac{\langle \tau_{\alpha\beta} \rangle}{V} + \frac{\Pi_{\alpha\beta}^R(\Omega + i0)}{\hbar V}, \quad (3.1)$$

де запізнювальна кореляційна функція струмів дорівнює

$$\Pi_{\alpha\beta}^R(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\Omega t} \Pi_{\alpha\beta}^R(t), \quad \Pi_{\alpha\beta}^R(t) = -i\theta(t) \text{Tr}(\hat{\rho}[J_{\alpha}(t), J_{\beta}(0)]), \quad (3.2)$$

V є об'ємом (площиною) системи, $\hat{\rho} = \exp(-\beta H_0)/Z$ є матрицею густини у великому канонічному ансамблі, $\beta = 1/T$ - обернена температура,

$Z = \text{Tr} \exp(-\beta H_0)$ - статистична сума, та J_α є операторами повного парамагнітного струму

$$J_\alpha(t) = e^{iHt/\hbar} J_\alpha(0) e^{-iHt/\hbar}, \quad J_\alpha(t) = \sum_{\mathbf{n}} j_\alpha^P(t, \mathbf{n}), \quad (3.3)$$

який пов'язаний з густиною парамагнітного струму (1.8). Діамагнітний тензор $\langle \tau_{\alpha\beta} \rangle$ у формулі Кубо (3.1) є температурним усередненням діамагнітного члену (1.9):

$$\langle \tau_{\alpha\beta} \rangle = \left\langle \sum_{\mathbf{n}} \tau_{\alpha\beta}(\mathbf{n}) \right\rangle. \quad (3.4)$$

У багатьох випадках ефективний низькоенергетичний КЕД₂₊₁ опис забезпечує дуже добру відправну точку для дослідження різноманітних транспортних властивостей графену, що робить можливим використання методів теорії поля, які дозволяють отримувати досить прості аналітичні вирази. У даному випадку, тензор провідності в (3.1) обчислюється для модельного лагранжіану (2.30) замість того, щоб обчислювати його для моделі на ґратці (1.5). Наприклад, у якості оператора струму можна використовувати другий рядок рівняння (1.50), або, якщо використати формалізм уявного часу, $t \rightarrow -i\tau$, то густина струму дорівнює

$$j_\alpha(\tau, \mathbf{r}) = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (A_\alpha/c)} = -ev_F \sum_{\sigma} \bar{\Psi}_\sigma(\tau, \mathbf{r}) \gamma^\alpha \Psi_\sigma(\tau, \mathbf{r}). \quad (3.5)$$

Відповідні оператор повного струму та τ -хронологічний корелятор є

$$J_\alpha(\tau) = \int d^2r j_\alpha(\tau, \mathbf{r}), \quad \Omega_m = 2\pi mT, \quad \beta = \frac{1}{T},$$

$$\Pi_{\alpha\beta}(i\Omega_m) = - \int_0^\beta d\tau e^{i\Omega_m \tau} \langle T_\tau J_\alpha(\tau) J_\beta(0) \rangle. \quad (3.6)$$

Відзначимо, що, на відміну від робіт [2,8,16,17], ми ввели знак “—” в означення $\Pi_{\alpha\beta}(i\Omega_m)$, так, як робилося в роботах [4,6]. Останнє означення є більш загальноприйнятим [175–177]. Щоб спростити вирази, ми також поклали

$\hbar = 1$ і через це далі Ω вже має зміст як частоти, так і енергії. Після обчислення (3.6) запізнювальну кореляційну функцію струм-струм отримано аналітичним продовженням $\Pi_{\alpha\beta}^R(\Omega) = \Pi_{\alpha\beta}(i\Omega_m \rightarrow \Omega + i0)$.

Якщо знехтувати вершинною функцією, що пов'язана з домішками, то обчислення провідності спрощується до обрахунку “bubble” діаграми

$$\frac{\Pi_{\alpha\beta}(i\Omega_m)}{V} = e^2 v_F^2 T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \text{tr} [\gamma^\alpha S\{G\}(i\omega_n, \mathbf{k}) \gamma^\beta S\{G\}(i\omega_n - i\Omega_m, \mathbf{k})], \quad (3.7)$$

де $\omega_n = \pi(2n + 1)T$ – ферміонна мацубарівська частота, а tr включає суму за індексом аромату (спіну). Для універсалізації подальшого розгляду ми ввели позначення $S\{G\}(i\omega_n, \mathbf{k})$, де S – це Фур'є перетворення трансляційно інваріантної частини $\Phi\Gamma$ у зовнішньому магнітному полі, а G – це мацубарівська $\Phi\Gamma$ у частотно-імпульсному представленні при $B = 0$. Відзначимо, що трансляційно неінваріантна фаза, що входить у вираз для $\Phi\Gamma$ у зовнішньому магнітному полі (3.38), скорочується у Π .

Сума по мацубарівським частотам у (3.7) легко обчислюється, якщо ферміонну $\Phi\Gamma$ записати, використавши її спектральне представлення

$$S\{G\}(i\omega_n, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega A(\omega, \mathbf{k})}{i\omega_n + \mu - \omega}, \quad (3.8)$$

де спектральна функція $A(\omega, \mathbf{k})$ ¹ задана умовою

$$A(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi i} [S^A\{G^A\}(\omega, \mathbf{k}) - S^R\{G^R\}(\omega, \mathbf{k})] \quad (3.9)$$

де випереджувальна та запізнювальна $\Phi\Gamma$ одержуються аналітичним продовженням з додатних та від'ємних дискретних частот, відповідно,

$$\begin{aligned} S^R\{G^R\}(\omega + i0, \mathbf{k}) &= S\{G\}(i\omega_m \rightarrow \omega + i0, \mathbf{k}), \\ S^A\{G^A\}(\omega - i0, \mathbf{k}) &= S\{G\}(i\omega_m \rightarrow \omega - i0, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

¹Для того, щоб поверхня Фермі відповідала умові $\omega = \mu$, у (3.8), спектральну функцію у чисельнику треба записати як $A(\omega - \mu, \mathbf{k})$.

У результаті, після сумування і аналітичного продовження, ми одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_{\alpha\beta}(\Omega + i0)}{V} = & e^2 v_F^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \frac{n_F(\omega) - n_F(\omega')}{\omega - \omega' - \Omega - i0} \\ & \times \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \text{tr} [\gamma^\alpha A(\omega, \mathbf{k}) \gamma^\beta A(\omega', \mathbf{k})], \end{aligned} \quad (3.11)$$

де $n_F(\omega)$ є функцією розподілу Фермі $n_F(\omega) = 1/(\exp((\omega - \mu)/T) + 1)$. Інше дуже корисне представлення для $\Pi_{\alpha\beta}$ можна одержати, якщо, знову використавши спектральне представлення

$$S^{R,A}\{G^{R,A}\}(\omega, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' A(\omega, \mathbf{k})}{\omega - \omega' \pm i0}, \quad (3.12)$$

проінтегрувати, відповідно, член з $n_F(\omega)$ по ω' , а член з $n_F(\omega')$ по ω , та наприкінці замінити спектральну функцію $A(\omega, \mathbf{k})$ різницею випереджувальної та запізнювальної ФГ використавши (3.9). Таким чином,

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_{\alpha\beta}(\Omega + i0)}{V} = & -\frac{e^2 v_F^2}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega n_F(\omega) \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \\ & \times \text{tr} [\gamma^\alpha (S^R(\omega, \mathbf{k}) - S^A(\omega, \mathbf{k})) \gamma^\beta (S^A(\omega - \Omega, \mathbf{k}) + S^R(\omega + \Omega, \mathbf{k}))], \end{aligned} \quad (3.13)$$

де для скорочення ми записали останню формулу тільки через ФГ $S^{R,A}$. Представлення (3.11) та (3.13) придатні для дослідження як діагональної, так і недіагональної провідностей.

3.2. Електрична провідність без магнітного поля

У Додатку А роботи [2] із загального виразу для динамічної провідності у зовнішньому магнітному полі, який буде наведено у Розділі 3.3, у границі $B \rightarrow 0$ ми одержали наступний загальний вираз для дійсної частини

динамічної провідності

$$\begin{aligned}
 \text{Re}\sigma_{xx}(\Omega) = & \frac{e^2 N_f}{2\pi^2 \Omega} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [n_F(\omega) - n_F(\omega + \Omega)] \\
 & \times \left[\left(\frac{(\omega + i\Gamma)(\omega' + i\Gamma') - \Delta^2}{[\omega - \omega' + i(\Gamma - \Gamma')][\omega + \omega' + i(\Gamma + \Gamma')]} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{(\omega + i\Gamma)(\omega' - i\Gamma') - \Delta^2}{[\omega - \omega' + i(\Gamma + \Gamma')][\omega + \omega' + i(\Gamma - \Gamma')]} \right) \right. \\
 & \left. \times \ln[\Delta^2 - (\omega + i\Gamma)^2] + (\omega \leftrightarrow \omega', \Gamma \leftrightarrow \Gamma') \right]. \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

Тут $\omega' = \omega + \Omega$, $\Gamma = \Gamma(\omega)$ є затуханням квазічастинок, та $\Gamma' = \Gamma(\omega')$. Затухання квазічастинок $\Gamma(\omega)$ виражається через запізнюючу ферміонну власну енергію, $\Gamma(\omega) = -\text{Im}\Sigma^R(\omega)$, яка, взагалі кажучи, залежить від енергії, температури, концентрації та типу домішок, а у зовнішньому полі – і від його величини. Власна енергія повинна знаходитися самоузгоджено з рівняння Швінгера-Дайсона. Точний вигляд цього рівняння залежить від модельних припущень про розсіювання на домішках, наприклад, чи є ці домішки коротко- або далекодіючими розсіювачами. Усі ці питання не розглядаються у Дисертації, і функція $\Gamma(\omega)$ вважається заданою. Відзначимо також, що коли $\Sigma^R(\omega)$ знаходиться для ФГ, яка включає в себе хімічний потенціал, як, наприклад, ФГ (1.16), то аргумент $\Sigma^R(\omega)$ треба зсунути $\omega \rightarrow \omega - \mu$ (див. зноску на попередній сторінці).

У Додатку В ми одержуємо провідність (3.14) по-іншому, з використанням ФГ G записаних з самого початку у нульовому полі, а також узагальнюємо його на випадок скінченної дійсної частини, $\text{Re}\Sigma^R(\omega)$ власної енергії, що входить у ФГ G , а не тільки $\text{Im}\Sigma^R(\omega)$. Врахування дійсної частини $\text{Re}\Sigma^R(\omega)$ є принциповим при дослідженні впливу електрон-фононої взаємодії на оптичну провідність [178]. Обчисливши дійсну частину, (3.14)

можна одержати наступний вираз для провідності

$$\sigma_{xx}(\Omega) = \frac{e^2 N_f}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\frac{n_F(\omega) - n_F(\omega + \Omega)}{\Omega} \right] \mathcal{A}_L(\omega, \Omega, \Gamma, \Delta), \quad (3.15)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_L(\omega, \Omega, \Gamma, \Delta) = & \frac{1}{D(\omega, \omega')} \left[a \ln \frac{(\Delta^2 + \Gamma'^2 - \omega'^2)^2 + 4\omega'^2 \Gamma'^2}{(\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \Gamma^2} \right. \\ & \left. + b \arctan \frac{2\omega\Gamma}{\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2} + c \arctan \frac{2\omega'\Gamma'}{\Delta^2 + \Gamma'^2 - \omega'^2} \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

та

$$\begin{aligned} D(\omega, \omega') = & [(\Gamma - \Gamma')^2 + (\omega - \omega')^2][(\Gamma + \Gamma')^2 + (\omega - \omega')^2] \\ & \times [(\Gamma - \Gamma')^2 + (\omega + \omega')^2][(\Gamma + \Gamma')^2 + (\omega + \omega')^2], \\ a = & \Gamma\Gamma' [(\omega'^2 - \omega^2 + \Gamma'^2 - \Gamma^2)[(\omega'^2 + \omega^2 + \Gamma'^2 + \Gamma^2)^2 \\ & + 4(\omega'^2\omega^2 - \Gamma'^2\Gamma^2)] - 8\Delta^2\omega\omega'(\omega'^2 - \omega^2 - \Gamma'^2 + \Gamma^2)], \\ b = & 2 [\omega\Gamma'(\omega'^2 + \omega^2 + \Gamma'^2 + \Gamma^2)[(\omega'^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma'^2 - \Gamma^2)^2 \\ & + 2(\omega'^2 + \omega^2)(\Gamma'^2 + \Gamma^2) - 8\omega'^2\Gamma^2] \\ & - 2\Delta^2\omega'\Gamma'[(\omega'^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma'^2 - \Gamma^2)^2 + 2(\omega'^2 + \omega^2)(\Gamma'^2 + \Gamma^2) - 8\omega'^2\Gamma^2], \\ c = & 2 [\omega'\Gamma(\omega'^2 + \omega^2 + \Gamma'^2 + \Gamma^2)[(\omega'^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma'^2 - \Gamma^2)^2 \\ & + 2(\omega'^2 + \omega^2)(\Gamma'^2 + \Gamma^2) - 8\omega'^2\Gamma^2] \\ & - 2\Delta^2\omega\Gamma[(\omega'^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma'^2 - \Gamma^2)^2 + 2(\omega'^2 + \omega^2)(\Gamma'^2 + \Gamma^2) - 8\omega'^2\Gamma'^2]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

При $\Delta = 0$ вирази для a, b і c спрощуються:

$$\begin{aligned} a = & \Gamma\Gamma'(\omega'^2 - \omega^2 + \Gamma'^2 - \Gamma^2)[(\omega'^2 + \omega^2 + \Gamma'^2 + \Gamma^2)^2 + 4(\omega'^2\omega^2 - \Gamma'^2\Gamma^2)], \\ b = & 2 [\omega\Gamma'(\omega'^2 + \omega^2 + \Gamma'^2 + \Gamma^2) \\ & \times [(\omega'^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma'^2 - \Gamma^2)^2 + 2(\omega'^2 + \omega^2)(\Gamma'^2 + \Gamma^2) - 8\omega'^2\Gamma^2]], \\ c = & 2 [\omega'\Gamma(\omega'^2 + \omega^2 + \Gamma'^2 + \Gamma^2) \\ & \times [(\omega'^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma'^2 - \Gamma^2)^2 + 2(\omega'^2 + \omega^2)(\Gamma'^2 + \Gamma^2) - 8\omega'^2\Gamma'^2]]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Поведінка $\sigma_{xx}(\Omega)$ при $\Delta = 0$ у графені досліджувалася у [179], а в роботі [180] розглядався d НП. Поведінка $\sigma_{xx}(\Omega)$ у d НП при $B = 0$ нагадує графен при $\mu = 0$. При $B = 0$ усі чисельні результати у роботах [2, 5, 8] були одержані з використанням рівнянь (3.14) і (3.15). Зокрема, ми, як приклад показаний на Рис. 3.1, наведемо Рис. 2 з роботи [5], де провідність $\sigma_{xx}(\Omega, T)$ досліджувалась у діапазоні частот Ω , що відповідає мікрохвилям. На Рис. 3.1 лінія з довгими штрихами з $T = 1$ К має Друді пік

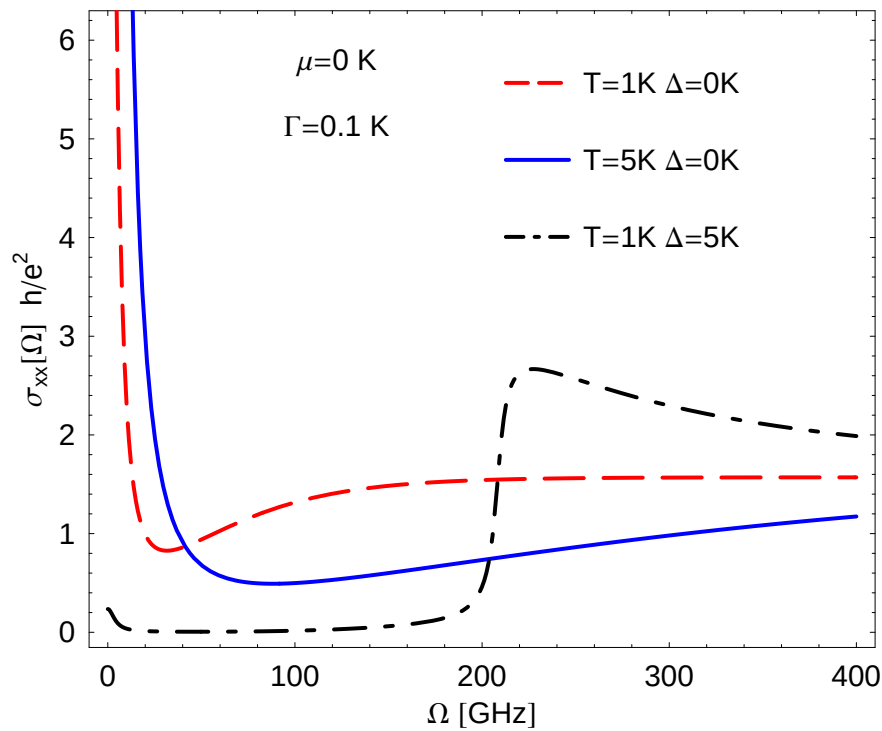


Рис. 3.1. (Кольоровий в електронній версії [5].) Мікрохвильова провідність $\sigma_{xx}(\Omega, T)$ в одиницях e^2/h як функція частоти Ω у GHz. Лінія з довгими штрихами для $T = 1$ К, а суцільна лінія для $T = 5$ К. В обидвох випадках $\mu = \Delta = 0$ К та $\Gamma = 0.1$ К. Штрих-пунктирна лінія для щілини $\Delta = 5$ К та $T = 1$ К.

за малих Ω (всередині), який накладається на міжзонний вклад $\pi e^2/(2h)$. Останній майже не залежить від Ω за виключенням деякого виснаження нижче 200 GHz, яке пов'язане зі скінченною температурою і призводить до передачі спектральної ваги у пік Друді. Коли T підвищується до 5К (су-

цільна лінія), термальне виснаження значно збільшується зі зростанням спектральної ваги під Друде піком. З іншого боку, якщо замість підвищення T , ми відкриємо щілину $\Delta = 5\text{K}$ (штрих-пунктирна лінія), пік Друде майже повністю виснажується в області нижче $2\Delta \simeq 200\text{ GHz}$ з додатковою спектральною вагою, яка накопичується при 2Δ та вище у міжзонній області, де ця вага розподіляється в області $\Omega \gtrsim (2 \div 4)\Delta$. Пік при $\Omega = 2\Delta$ у $\sigma_{xx}(\Omega)$ є характерною ознакою відкриття щілини. Вирази (3.14) і (3.15) є досить складними, тому дуже корисно аналітично дослідити поведінку $\sigma_{xx}(\Omega)$ у декількох простих граничних випадках.

3.2.1. Статична провідність та універсальна границя. По-перше, розглянемо де границю рівняння (3.14) для $\sigma_{xx}(\Omega)$ [див. рівняння (4.16) роботи [6] по ДГХ та рівняння (24) з роботи [4] по графену]:

$$\sigma_{xx}(\Omega \rightarrow 0) = e^2 N_f \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [-n'_F(\omega)] \mathcal{A}_L(\omega, \Gamma, \Delta), \quad (3.19)$$

де

$$\mathcal{A}_L(\omega, \Gamma, \Delta) = \frac{1}{2\pi^2} \left[1 + \frac{\omega^2 - \Delta^2 + \Gamma^2}{2|\omega|\Gamma} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2}{2|\omega|\Gamma} \right) \right]. \quad (3.20)$$

та $-n'_F(\omega) = (1/4T) \cosh^{-2}[(\omega - \mu)/2T]$ є похідною розподілу Фермі. Статичній провідності у ДГХ стані у нульовому полі присвячено Розділ III С роботи [6], де одержано декілька аналітичних виразів, а зараз ми розглянемо найцікавіший випадок $T \ll |\mu| \ll \Gamma$ “універсальної” [60, 181]² провідності

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2 N_f}{\pi^2}. \quad (3.21)$$

Більш того, у цьому наближенні універсальна величина $(e^2/2\pi\hbar)(4/\pi)$ (або $e^2/\pi\hbar$ на кожний тип носіїв) очікується навіть у довільних полях [60] через

²Ця універсальність має таке ж саме походження, як універсальність, розглянута в [182] для вироджених напівпровідників та в [183] для dНП у відсутності магнітного поля.

те, що $n = 0$ рівень Ландау не залежить від поля. Експеримент [39] демонструє, однак, у π раз більшу величину провідності на кожний тип носіїв, e^2/h . Після публікації роботи [39] з'явилася велика кількість експериментальних робіт, присвячених дослідженню мінімальної провідності графену, так що тут ми наведемо тільки декілька з них [184–186], і ще набагато більша кількість теоретичних робіт, присвячених цьому питанню. На відміну від універсальної величини динамічної провідності графену, яка розглядається далі у Розділі 3.2.2, на сучасний момент нема загальноприйнятої відповіді щодо мінімальної статичної провідності графену. Ми знову повернемося до властивостей поздовжньої та холлівської статичних провідностей у Розділі 4.2.

3.2.2. Динамічна провідність: Друде та міжзонний вклади. У випадку $\Gamma(\omega) = \Gamma(\omega') \equiv \Gamma$ вираз (3.15) може бути спрощений, і ми одержуємо

$$\begin{aligned}
 \text{Re}\sigma_{xx}(\Omega) = & \frac{e^2 N_f}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{[n_F(\omega) - n_F(\omega + \Omega)]}{\Omega} \frac{1}{\omega^2 - \omega'^2} \\
 & \times \frac{\Gamma}{(\omega^2 + \omega'^2 + 4\Gamma^2)^2 - 4\omega^2\omega'^2} \\
 & \times \left\{ \Gamma[\omega^4 - 8\Delta^2\omega\omega' + 6\omega^2\omega'^2 + \omega'^4 + 4\Gamma^2(\omega^2 + \omega'^2)] \right. \\
 & \times \ln \frac{(\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\Gamma^2}{(\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega'^2)^2 + 4\omega'^2\Gamma^2} + 2 \arctan \frac{2\omega\Gamma}{\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2} \times \\
 & [8\Gamma^4\omega + (\omega^2 - \omega'^2)(\omega^3 - 2\Delta^2\omega' + \omega\omega'^2) + 2\Gamma^2(3\omega^3 + 4\Delta^2\omega' + \omega\omega'^2)] \\
 & - 2 \arctan \frac{2\omega'\Gamma}{\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega'^2} \times \\
 & \left. [8\Gamma^4\omega' - (\omega^2 - \omega'^2)(\omega'^3 - 2\Delta^2\omega + \omega^2\omega') + 2\Gamma^2(3\omega'^3 + 4\Delta^2\omega + \omega^2\omega')] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Далі, у границі $\Gamma \rightarrow 0$, утримуючи тільки головні по Γ члени, одержуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(\Omega) = & \frac{e^2 N_f}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{[n_F(\omega) - n_F(\omega + \Omega)]}{\Omega} \left[\frac{2\Gamma}{\Omega^2 + 4\Gamma^2} - \frac{2\Gamma}{(\omega + \omega')^2 + 4\Gamma^2} \right] \\ & \times \left[\frac{\omega^3 - 2\Delta^2\omega' + \omega\omega'^2}{\omega\omega'} \arctan \frac{2\omega\Gamma}{\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2} + (\omega \leftrightarrow \omega') \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.2.2.1. Член Друде. Через те, що член Друде відповідає малим Ω , вище ми припустили, що $\Gamma(\omega') \simeq \Gamma(\omega)$. Крім цього, для $\Omega \ll T$ різниця $[n_F(\omega) - n_F(\omega')]/\Omega$ може бути замінена похідною $-\partial n_F(\omega)/\partial\omega$ так, що член Друде приймає вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{intra}(\Omega, T) = \\ \sigma_{00} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(-\frac{\partial n_F(\omega)}{\partial\omega} \right) \frac{2\Gamma(\omega)}{\Omega^2 + 4\Gamma^2(\omega)} \frac{\omega^2 - \Delta^2}{\omega} \arctan \frac{2\omega\Gamma}{\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

де $\sigma_{00} = e^2 N_f / (2\pi^2 \hbar)$. Або, прийнявши до уваги, що

$$\arctan \frac{2\omega\Gamma}{\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2} \rightarrow \pi \operatorname{sgn}(\omega) \theta(\omega^2 - \Delta^2), \quad \Gamma \rightarrow 0, \quad (3.25)$$

ми знаходимо

$$\sigma_{xx}^{intra}(\Omega, T) = \sigma_{00} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(-\frac{\partial n_F(\omega)}{\partial\omega} \right) \frac{2\Gamma(\omega)}{\Omega^2 + 4\Gamma^2(\omega)} \pi \frac{(\omega^2 - \Delta^2) \theta(\omega^2 - \Delta^2)}{|\omega|}. \quad (3.26)$$

При $\Delta = 0$ останній вираз набирає форми

$$\sigma_{xx}^{intra}(\Omega, T) = \sigma_{00} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(-\frac{\partial n_F(\omega)}{\partial\omega} \right) \pi |\omega| \frac{2\Gamma(\omega)}{\Omega^2 + 4\Gamma^2(\omega)}. \quad (3.27)$$

Якщо ми візьмемо $\mu = 0$ і припустимо, що $\Gamma(\omega) = \gamma_{00} + \alpha|\omega|$ з малою величиною γ_{00} , як можна очікувати у наближенні Борна у границі слабкого розсіяння на домішках, можна одержати наближений вираз

$$\sigma_{xx}^{intra}(\Omega, T) \simeq \frac{\pi\sigma_{00}}{2\alpha} \left[1 - \frac{\pi}{8\alpha} \frac{\Omega}{T} \right], \quad \gamma_{00} < \Omega \ll T. \quad (3.28)$$

Таке рівняння було використано нещодавно в роботі [180], щоб пояснити загострення у поведінці частотної залежності мікрохвильової провідності, яка спостерігалась [187] у дуже чистих зразках орто II YBCO_{6.5}. Також деякі чисельні результати одержані у [179]. Все це показує, що, якщо поведінка (3.28) буде спостерігатися у графені, то це вкаже на доречність борнівського наближення.

Однак, якщо хімічний потенціал збільшується так, що $|\mu| > T$ рівняння (3.28) замінюються на

$$\sigma_{xx}^{intra}(\Omega, T) = \sigma_{00} 2\pi |\mu| \frac{(\gamma_{00} + \alpha|\mu|)}{\Omega^2 + 4(\gamma_{00} + \alpha|\mu|)^2}, \quad (3.29)$$

яке вже має форму Друде. Множник $|\mu|$ задає спектральну вагу, яка розподілена відповідно формі Друде піку з напівшириною $\gamma_{00} + \alpha|\mu|$. Ширина піка Друде може бути збільшена просто зміною напруги на затворі, $\mu \propto \text{sgn } V_g \sqrt{|V_g|}$ з незмінною величиною розсіяння на домішках Γ . При цьому трапляється так, що вже $\Gamma(\omega)$ поблизу $\omega = \mu$, а не поблизу $\omega = 0$ зараз стає релевантною величиною, яка зростає зі зростанням $|\mu|$. Важливим є те, що частотна залежність $\Gamma(\omega)$ навіть у більш загальному випадку теж може бути встановлена таким само способом, оскільки форма $\Gamma(\omega)$ відображається у формі $\sigma_{xx}(\Omega)$. Наприклад, в унітарній границі T -матричного наближення залежність $\Gamma(\omega)$ є абсолютно іншою, ніж у границі Борна, і обернено пропорційна електронній густині станів [66]. Ця залежність відповідно змінить Ω залежність внутризонного члена.

3.2.2.2. Роль міжзонного вкладу. У границі $\Gamma \rightarrow 0$ рівняння (3.23)

набуває вигляд

$$\begin{aligned}
 \text{Re}\sigma_{xx}(\Omega) &= \sigma_{00}\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{[n_F(\omega) - n_F(\omega + \Omega)]}{\Omega} [\delta(\Omega) - \delta(2\omega + \Omega)] \\
 &\quad \times \left[\frac{\omega^3 - 2\Delta^2\omega' + \omega\omega'^2}{4\omega\omega'} \text{sgn}(\omega)\theta(\omega^2 - \Delta^2) + (\omega \leftrightarrow \omega') \right] \\
 &= \frac{e^2 N_f}{2} \delta(\Omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [-n'_F(\omega)] \frac{(\omega^2 - \Delta^2)\theta(\omega^2 - \Delta^2)}{|\omega|} \\
 &\quad + \frac{e^2 N_f}{8} \left| n_F\left(-\frac{\Omega}{2}\right) - n_F\left(\frac{\Omega}{2}\right) \right| \frac{\Omega^2 + 4\Delta^2}{\Omega^2} \theta(\Omega^2 - 4\Delta^2).
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

При $T = \Delta = 0$ останнє рівняння набуває вигляду (див. також роботу [131] по ДГХ)

$$\text{Re}\sigma_{xx}(\Omega) = \frac{\pi e^2 N_f}{h} |\mu| \delta(\Omega) + \frac{\pi e^2 N_f}{4h} \theta\left(\frac{|\Omega|}{2} - |\mu|\right), \tag{3.31}$$

де ми поновили постійну Планка h . При $\mu = 0$ (ми вже поклали $T = 0$) внутризонний вклад, який $\sim \delta(\Omega)$ через те, що $\Gamma = 0$ відсутній. Міжзонний вклад розповсюджується від нуля до границі зони. Величина цього вкладу не залежить від Ω , і в “bare bubble” наближенні, яке використане при одержанні всіх рівнянь цього Розділу, дорівнює по висоті $\pi e^2/(2h)$ [179]. Взагалі, можна показати, що

$$\sigma_{xx}(\Omega) \simeq \frac{\pi e^2}{2h}, \quad \Omega \gg \mu, \Delta, T, \tag{3.32}$$

як впливає з наведених нижче (3.34) і (3.37). Нагадаємо також, що Ω повинно бути меншим, ніж границя зони. Плaskість $\sigma_{xx}(\Omega)$ на великих частотах може бути простежена у топології діраківського конусу та лінійної залежності енергії квазічастинок від імпульсу (див. також нижче у Розділі 3.2.3 про малий вплив нелінійних поправок). Коли μ зростає, міжзонні переходи відсутні нижче порогу $\Omega = 2|\mu|$, а відсутня спектральна

вага з'являється у вкладі $\delta(\Omega)$ -функції. У напівпровідниках така концентраційна залежність краю поглинання зветься ефектом Бурштейна-Мосса (Burstein-Moss) [188–190].

У випадку малого, але скінченного $\Gamma(\omega)$, скінченної температури досить зручним є рівняння (1) з роботи [5]

$$\begin{aligned} \text{Re}\sigma_{xx}(\Omega, T) = & \frac{e^2 N_f}{2\pi^2 \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{[n_F(\omega) - n_F(\omega')]}{\Omega} \frac{\pi}{4\omega\omega'} \\ & \times \left[\frac{2\Gamma(\omega)}{\Omega^2 + 4\Gamma^2(\omega)} - \frac{2\Gamma(\omega)}{(\omega + \omega')^2 + 4\Gamma^2(\omega)} \right] \\ & \times (|\omega| + |\omega'|)(\omega^2 + \omega'^2), \quad \omega' = \omega + \Omega, \end{aligned} \quad (3.33)$$

яке можна одержати з (3.23) поклавши $\Delta = 0$ та взявши границю $\Gamma \rightarrow$ відповідно до (3.25). Останній вираз був використаний у роботі [43] (див. наведену Додаткову інформацію) для аналізу провідності, яка була отримана з одержаних експериментальних даних для коефіцієнту передачі. У роботі [8] (див. також роботи [191–193]) ми одержали інше корисне представлення вже для комплексної оптичної провідності

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(\Omega) = & -\frac{2ie^2(\Omega + 2i\Gamma)}{h} \left[\frac{1}{(\Omega + 2i\Gamma)^2} \int_0^{\infty} dy y \left(\frac{\partial n_F(y)}{\partial y} - \frac{\partial n_F(-y)}{\partial y} \right) \right. \\ & \left. - \int_0^{\infty} dy \frac{n_F(-y) - n_F(y)}{(\Omega + 2i\Gamma)^2 - 4y^2} \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

з якого у границі $\Gamma \rightarrow 0$ впливає наступна проста форма для комплексного члена Друде [192, 193] (див. також [194])

$$\sigma_{xx}^{intra}(\Omega) = i \frac{4e^2 T}{h(\omega + i0)} \ln \left[2 \cosh \frac{\mu}{2T} \right], \quad (3.35)$$

де ми поклали $N_f = 2$. Відзначимо, що тоді як для одержання $\text{Re}\sigma_{xx}(\Omega)$ достатньо обчислити $\text{Im}\Pi_{\alpha\beta}(\Omega + i0)$, для обчислення комплексної провідності необхідно використовувати повну формулу (3.1).

Зараз ми повернемося до випадку масивних діраківських квазічастинок. При $T = 0$ з рівняння (3.30) ми одержуємо

$$\begin{aligned} \text{Re}\sigma_{xx}(\Omega) = & \frac{\pi e^2 N_f}{h} \delta(\Omega) \frac{(\mu^2 - \Delta^2) \theta(\mu^2 - \Delta^2)}{|\mu|} \\ & + \frac{\pi e^2 N_f}{4h} \frac{\Omega^2 + 4\Delta^2}{\Omega^2} \theta\left(\frac{|\Omega|}{2} - \max(|\mu|, \Delta)\right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Тут тета-функція $\theta(|\Omega|/2 - \max(|\mu|, \Delta))$ вимикає міжзонний вклад з малими Ω або при $2|\mu|$, або при 2Δ залежно від того, яка з величин є найбільшою. Треба відзначити наявність додаткового множника $(\Omega^2 + 4\Delta^2)/\Omega^2$, який дозволяє розрізнити в залежності $\sigma(\Omega)$ випадок скінченного Δ від скінченного μ . Як ми бачили з (3.31), коли $\Delta = 0$ міжзонний вклад залишається пласким, хоча й зникає при $2|\mu|$. Це не так у випадку скінченного Δ і при $|\mu| < \Delta$ міжзонний вклад при $\Omega = 2\Delta$ підвищується вдвічі. Це є ознакою відкриття щілини та репрезентує зміну в геометрії діраківських конусів, як показано на Рис. 3.1 (від (а) до (b) панелей). Також варто привести і відповідне узагальнення (3.34) на випадок $\Delta \neq 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(\Omega) = & -\frac{2ie^2(\Omega + 2i\Gamma)}{h} \left[\frac{1}{(\Omega + 2i\Gamma)^2} \int_{\Delta}^{\infty} d\omega \frac{\omega^2 - \Delta^2}{\omega} \left(\frac{\partial n_F(\omega)}{\partial \omega} - \frac{\partial n_F(-\omega)}{\partial \omega} \right) \right. \\ & \left. - \int_{\Delta}^{\infty} d\omega \frac{\omega^2 + \Delta^2}{\omega^2} \frac{n_F(-\omega) - n_F(\omega)}{(\Omega + 2i\Gamma)^2 - 4\omega^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Цікаво відзначити, що формула (3.37) була переодержана і використана в роботі [195] для пояснення результатів вимірювань в епітаксiальному графені.

3.2.3. Огляд експериментальних та новітніх теоретичних результатів. У 2008 році вийшов ряд експериментальних робіт з графену [41–44], який підтвердив основні передбачення для поведінки $\sigma_{xx}(\Omega)$, описані в Розділі 3.2.2.2. У роботі [196] досліджувалась оптична провідність

графіту в діапазоні $[0, 1]\text{eV}$ і було показано, що її поведінка нагадує поведінку графену у такому ж діапазоні енергій. Дослідження багатошарового графену, вирощеного на SiC, від терагерцового діапазону до видимого світла показали досить складну поведінку [195] з величинами оптичної провідності, які в інфрачервоному діапазоні близькі до значень, передбачених для графену. В усіх цих роботах вимірювалися коефіцієнти проходження та віддзеркалення світла здебільшого в інфрачервоному діапазоні, і за ними відновлювалася комплексна оптична провідність. Було встановлено, що пласка поведінка $\text{Re}\sigma_{xx}(\Omega)$ при $\Omega > 2\mu$ дійсно спостерігається (при чому не тільки в графені, але і в графіті [196]), при цьому величина провідності дорівнює $\pi e^2/(2h)$ із досить великою, хоча і не метрологічною, точністю. На диво пласка поведінка $\text{Re}\sigma_{xx}(\Omega)$ спостерігається не тільки при $\Omega < 1\text{eV}$, коли лінійне діраківське наближення можна застосовувати, але й при значно більших енергіях, що відповідають видимому світлу [42]. Проведені теоретичні розрахунки [42, 197] дійсно показали, що поправки до діраківського наближення є малими (декілька %) навіть для видимого світла. За допомогою оптичних вимірювань вдається незалежним від вимірювань на постійному струмі чином встановити залежність μ від напруги на затворі (густини носіїв) та визначити величину v_F , яка дорівнює $1.11 \times 10^6 \text{m/s}$ [42]. Ця величина є у добрій згоді з величиною, що одержана з вимірювань на постійному струмі [39, 40], але є вищою, ніж у графіті. Це може свідчити про важливу роль ефектів взаємодії в графені.

Наприкінці перерахуємо новітні теоретичні роботи, присвячені різним деталям поведінки оптичної провідності в графені при $B = 0$. Оптична провідність у моделі на гратці досліджувалась у [198],³ включаючи урахування наступних сусідів, яке було зроблено у [197]. Вплив кулонівської взаємодії на величину універсальної провідності (3.31) був досліджений у

³Статична границя при $T \neq 0$ у цій роботі знайдена невірно. Див. роботу [22].

[194, 199–201]. Вплив оптичних фононів на поведінку $\sigma_{xx}(\Omega)$ досліджувався у [178], вплив оптичних та акустичних фононів у присутності домішок вивчався у роботах [202, 203].

Щодо поведінки оптичної провідності у присутності щілини відзначимо, що у Розділі 1.1.3.1 було вже вказано на те, що результати з фотоемісії (ARPES) [95] також свідчать про наявність щілини. Однак через те, що одержані в [95] дані мають не параболічну, а, скоріше, “V”-подібну форму, в роботі [204] було запропоновано, що енергетичний спектр має вигляд $E_{\pm} = \pm(\hbar v_F |\mathbf{p}| + \Delta)$. Відповідно, для пояснення результатів оптичних вимірювань в епітаксіальному графені [195] в роботі [204] було одержано інші формули. На відміну від (3.36) та (3.37), ці формули дають пониження провідності поблизу порога поглинання 2μ .

3.3. Динамічна провідність у зовнішньому магнітному полі

3.3.1. ФГ у зовнішньому магнітному полі. Для розрахунку провідності необхідно мати відповідну ФГ $S(t - t', \mathbf{r}; \mathbf{r}')$, яка описує діраківські квазічастинки у зовнішньому магнітному полі. Ця ФГ дорівнює

$$S(t - t', \mathbf{r}; \mathbf{r}') = \exp\left(-\frac{ie}{c} \mathbf{r} \mathbf{A}^{ext}(\mathbf{r}')\right) \tilde{S}(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.38)$$

де $\tilde{S}(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}')$ трансляційно інваріантною частиною $S(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Її вивід, використовуючи метод власного часу Швінгера (Schwinger), та розклад по полюсам, що відповідають рівням Ландау, описані у Додатку Г. Фур'є перетворення $\tilde{S}(x - y)$ у мацубарівському представленні має вигляд

$$S(i\omega_m, \mathbf{k}) = e^{-\frac{ck^2}{|eB|}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{S_n(i\omega_m, \mathbf{k})}{(i\omega_m)^2 - M_n^2}, \quad (3.39)$$

де

$$M_n = \sqrt{\Delta^2 + 2nv_F^2 |eB|/c} \quad (3.40)$$

це енергії релятивістських рівнів Ландау,

$$S_n(i\omega_m, \mathbf{k}) = 2(i\omega_m \gamma^0 + \Delta) \left[P_- L_n \left(\frac{2c\mathbf{k}^2}{|eB|} \right) - P_+ L_{n-1} \left(\frac{2c\mathbf{k}^2}{|eB|} \right) \right] - 4\mathbf{k}\boldsymbol{\gamma} L_{n-1}^1 \left(\frac{2c\mathbf{k}^2}{|eB|} \right), \quad (3.41)$$

та $P_{\pm} = (1 \pm i\gamma^1 \gamma^2 \text{sgn}(eB))/2$ є проекторами і $L_n^{\alpha}(z)$ є узагальненими поліномами Лагера. За означенням, $L_n(z) \equiv L_n^0(z)$ і $L_{-1}^{\alpha}(z) \equiv 0$. У виразі (3.40) покладено $\hbar = 1$, а відповідний енергетичний масштаб, пов'язаний з магнітним полем, у температурних та енергетичних одиницях має вигляд (див. також (2.42))

$$L^2(B) = \frac{2eBv_F^2}{c} \rightarrow \frac{2eB\hbar v_F^2}{c} \frac{1}{k_B^2} = 1.76957 \times 10^{-7} \text{K}^2 v_F^2 (\text{m/s}) B(T), \quad (3.42)$$

$$L^2(B) \approx 1314 \text{meV}^2 B[\text{T}], \quad L(B) \approx 36.3 \text{meV} \sqrt{B[\text{T}]},$$

де швидкість Фермі у графені задана у m/s і у другому рядку покладена $v_F \approx 10^6 \text{m/s}$, а магнітне поле B у Тесла.

Як і у випадку $B = 0$, далі нам знадобляться випереджувальна та запізнювальна ФГ (3.10), а також спектральна функція (3.9). Затухання квазічастинок $\Gamma_n(\omega)$ у відповідних виразах тепер залежить не тільки від енергії, температури, концентрації та типу домішок, а також і від зовнішнього поля та індексу рівня Ландау. Як і у випадку без магнітного поля, ми розглядаємо $\Gamma_n(\omega)$ як феноменологічний параметр. Нижче ми розглянемо два випадки:

(i) $\Gamma(\omega) = \Gamma_n(\omega)$ є незалежним від індексу n рівня Ландау;

(ii) $\Gamma_n = \Gamma_n(\omega)$ є незалежним від енергії ω .

При цих припущеннях оптична провідність може бути досліджена аналіти-

чно. Випереджувальна та запізнювальна $\Phi\Gamma$ набувають, відповідно, вигляд

$$S^{(R,A)}(\omega, \mathbf{k}) = e^{-\frac{c\mathbf{k}^2}{|eB|}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{S_n^{(R,A)}(\omega \pm i\Gamma_n(\omega), \mathbf{k})}{(\omega \pm i\Gamma_n(\omega))^2 - M_n^2}, \quad (3.43)$$

а спектральна густина дорівнює

$$A(\omega, \mathbf{k}) = e^{-\frac{c\mathbf{k}^2}{|eB|}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma_n(\omega)}{2\pi M_n} \times \left[\frac{(\gamma^0 M_n + \Delta) f_1(\mathbf{k}) + f_2(\mathbf{k})}{(\omega - M_n)^2 + \Gamma_n^2(\omega)} + \frac{(\gamma^0 M_n - \Delta) f_1(\mathbf{k}) - f_2(\mathbf{k})}{(\omega + M_n)^2 + \Gamma_n^2(\omega)} \right]. \quad (3.44)$$

У (3.44)

$$f_1(\mathbf{k}) = 2 \left[P_- L_n \left(\frac{2c\mathbf{k}^2}{|eB|} \right) - P_+ L_{n-1} \left(\frac{2c\mathbf{k}^2}{|eB|} \right) \right], \quad (3.45)$$

$$f_2(\mathbf{k}) = 4v_F \mathbf{k} \gamma L_{n-1}^1 \left(\frac{2c\mathbf{k}^2}{|eB|} \right),$$

а проектори $P_{\pm}$ та поліноми $L_n^{\alpha}(z)$ вже були визначені після (3.41).

3.3.2. Вирази для динамічної провідності.

Ми почнемо з випадку (і). У Додатку Д, написаному за роботою [2], одержано наступні вирази для діагональної провідності

$$\sigma_{xx}(\Omega) = \frac{e^2 N_f}{4\pi^2 \Omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [n_F(\omega) - n_F(\omega')] \times \text{Re} \left\{ \frac{2B}{\Delta^2 - (\omega + i\Gamma)^2} [\Xi_1(-B) - \Xi_2(-B)] + [\Xi_1(-B) + \Xi_1(+B) - \Xi_2(-B) - \Xi_2(+B)] \psi \left(\frac{\Delta^2 - (\omega + i\Gamma)^2}{2B} \right) + (\omega \leftrightarrow \omega', \Gamma \leftrightarrow \Gamma') \right\}, \quad (3.46)$$

та для холлівської провідності

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}(\Omega) = & -\frac{e^2 N_f \text{sgn}(eB)}{4\pi^2 \Omega} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left\{ [n_F(\omega) - n_F(\omega')] \right. \\
& \times \left[\Xi_2(-B) \frac{2B}{\Delta^2 - (\omega + i\Gamma)^2} + (\Xi_2(-B) - \Xi_2(B)) \psi \left(\frac{\Delta^2 - (\omega + i\Gamma)^2}{2B} \right) \right. \\
& \left. \left. + (\omega \leftrightarrow \omega', \Gamma \leftrightarrow \Gamma') \right] \right. \\
& \left. + [n_F(\omega) + n_F(\omega')] \left[\Xi_1(-B) \frac{2B}{\Delta^2 - (\omega + i\Gamma)^2} + (\Xi_1(-B) - \Xi_1(B)) \right. \right. \\
& \left. \left. \times \psi \left(\frac{\Delta^2 - (\omega + i\Gamma)^2}{2B} \right) - (\omega \leftrightarrow \omega', \Gamma \leftrightarrow \Gamma') \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Тут ψ — це дігамма функція, і ми позначили $B \equiv v_F^2 |eB|/c$, нагадаємо також, що $\omega' = \omega + \Omega$, $\Gamma = \Gamma(\omega)$, $\Gamma' = \Gamma(\omega')$. Також ми ввели наступні позначення

$$\begin{aligned}
\Xi_1(\pm B) & \equiv \Xi_1(\omega, \omega', \Gamma, \Gamma', \pm B) = \\
& \frac{(\omega' + i\Gamma')(\omega + i\Gamma) - \Delta^2}{[\omega - \omega' + i(\Gamma - \Gamma')][\omega + \omega' + i(\Gamma + \Gamma')] \pm 2B}, \\
\Xi_2(\pm B) & \equiv \Xi_2(\omega, \omega', \Gamma, \Gamma', \pm B) = \\
& \frac{(\omega' - i\Gamma')(\omega + i\Gamma) - \Delta^2}{[\omega - \omega' + i(\Gamma + \Gamma')][\omega + \omega' + i(\Gamma - \Gamma')] \pm 2B}.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Подібно до узагальнення (В.6) для рівняння (3.14) на випадок, коли присутня дійсна частина власної енергії Σ , вирази (3.46) та (3.47) також легко узагальнити відповідним чином (див. рівняння (7) роботи [8]).

Перевага (3.46) полягає в тому, що ψ функція містить у собі вклади від *усіх* переходів між сусідніми рівнями Ландау. При розгляді границі $B \rightarrow 0$ необхідно врахувати нескінченне число цих переходів, так що границя нульового поля може бути легко розглянута [2] на основі (3.46). Іншою важливою рисою (3.46) є те, що ми утримали залежне від частоти розсіяння

на домішках $\Gamma(\omega)$, яке дозволяє дослідити поведінку форми піка Друде у Розділі 3.2.2.1.

Зараз ми перейдемо до випадку (ii). У роботі [8] було одержано дуже прості наближені вирази для діагональної та холлівської провідності, які є дуже зручними при розгляді резонансних піків цих провідностей в інфрачервоному діапазоні. При аналізі експериментальних даних дуже корисно мати лоренціанівське представлення магніто-оптичної комплексної провідності, $\sigma_{\pm}(\Omega) = \sigma_{xx}(\Omega) \pm i\sigma_{xy}(\Omega)$, яке містить внутрішньо- та міжзонні переходи між відповідними рівнями Ландау [205]. У Додатку Д, написаному по додатку з роботи [8], одержані наступні вирази для комплексної діагональної провідності

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}(\Omega) = & -\frac{e^2 v_F^2 |eB|}{2\pi c i} \times \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{\Delta^2}{M_n M_{n+1}} \right) ([n_F(M_n) - n_F(M_{n+1})] + [n_F(-M_{n+1}) - n_F(-M_n)]) \right. \\
& \times \left(\frac{1}{M_n - M_{n+1} + \Omega + i(\Gamma_n + \Gamma_{n+1})} - \frac{1}{M_n - M_{n+1} - \Omega - i(\Gamma_n + \Gamma_{n+1})} \right) \\
& \times \frac{1}{M_{n+1} - M_n} \\
& + \left(1 + \frac{\Delta^2}{M_n M_{n+1}} \right) ([n_F(-M_n) - n_F(M_{n+1})] + [n_F(-M_{n+1}) - n_F(M_n)]) \\
& \times \frac{1}{M_{n+1} + M_n} \\
& \times \left. \left(\frac{1}{M_n + M_{n+1} + \Omega + i(\Gamma_n + \Gamma_{n+1})} - \frac{1}{M_n + M_{n+1} - \Omega - i(\Gamma_n + \Gamma_{n+1})} \right) \right\},
\end{aligned} \tag{3.49}$$

та для комплексної холлівської провідності

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}(\Omega) = & \frac{e^2 v_F^2 e B}{2\pi c} \sum_{n=0}^{\infty} ([n_F(M_n) - n_F(M_{n+1})] - [n_F(-M_{n+1}) - n_F(-M_n)]) \\
& \times \left\{ \left(1 - \frac{\Delta^2}{M_n M_{n+1}}\right) \frac{1}{M_{n+1} - M_n} \right. \\
& \times \left(\frac{1}{M_n - M_{n+1} + \Omega + i(\Gamma_n + \Gamma_{n+1})} + \frac{1}{M_n - M_{n+1} - \Omega - i(\Gamma_n + \Gamma_{n+1})} \right) \\
& - \left(1 + \frac{\Delta^2}{M_n M_{n+1}}\right) \frac{1}{M_{n+1} + M_n} \\
& \left. \times \left(\frac{1}{M_n + M_{n+1} + \Omega + i(\Gamma_n + \Gamma_{n+1})} + \frac{1}{M_n + M_{n+1} - \Omega - i(\Gamma_n + \Gamma_{n+1})} \right) \right\}. \tag{3.50}
\end{aligned}$$

Нагадаємо, що при виводі (3.49), (3.50) було припущено, що розсіяння залежить від індекса n рівня Ландау, але не від енергії ω . Це припущення дозволило усунути інтегрування по ω , яке присутнє в (3.46). Для того, щоб зберегти залежність від індекса рівня Ландау, сума за переходами між сусідніми рівнями Ландау була утримана в (3.49), (3.50).

Базуючись на (3.49) та (3.50), можна легко записати окремі вирази для $\text{Re } \sigma_{xx}(\Omega)$, $\text{Im } \sigma_{xx}(\Omega)$, $\text{Re } \sigma_{xy}(\Omega)$, $\text{Im } \sigma_{xy}(\Omega)$ і перевірити, що діагональна та недіагональна провідності задовольняють співвідношенням Крамерса-Кроніга. Великою перевагою (3.49) і (3.50) є те, що вони більш придатні для чисельного обрахунку. Навіть для відносно малих величин магнітного поля достатньо просумувати тільки декілька перших членів з суми. Також ці формули корисні для опису резонансних піків, коли залежність розсіяння на домішках від індексу рівня Ландау є більш важливою, ніж залежність від енергії, яка була прийнята до уваги в (3.46).

Усі рисунки нижче у Розділі 3.3.4 (див. також [8]) обраховані для випадку $\Gamma = \text{const}$ так, що для обчислення діагональної провідності ми використали (3.46) та перевірили, що воно дає результати майже ідентичні результатам, одержаним з (3.49). Оскільки відповідний повний вираз для

оптичної холлівської провідності (3.47) є досить складним для чисельного обрахунку, нижче всі результати для оптичної холлівської провідності обраховані з використанням (3.50). У випадку, коли нема залежності від індексу рівня Ландау $\Gamma_n = \text{const}$, рівняння (3.49) і (3.50) приймають ще простіший вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(\Omega) = & \frac{e^2 v_F^2 |eB| (\Omega + 2i\Gamma)}{\pi c i} \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{\Delta^2}{M_n M_{n+1}} \right) \right. \\ & \times \frac{[n_F(M_n) - n_F(M_{n+1})] + [n_F(-M_{n+1}) - n_F(-M_n)]}{(M_{n+1} - M_n)^2 - (\Omega + 2i\Gamma)^2} \frac{1}{M_{n+1} - M_n} \\ & + \left(1 + \frac{\Delta^2}{M_n M_{n+1}} \right) \\ & \times \left. \frac{[n_F(-M_n) - n_F(M_{n+1})] + [n_F(-M_{n+1}) - n_F(M_n)]}{(M_{n+1} + M_n)^2 - (\Omega + 2i\Gamma)^2} \frac{1}{M_{n+1} + M_n} \right\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

та

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(\Omega) = & -\frac{e^2 v_F^2 eB}{\pi c} \sum_{n=0}^{\infty} ([n_F(M_n) - n_F(M_{n+1})] - [n_F(-M_{n+1}) - n_F(-M_n)]) \\ & \times \left\{ \left(1 - \frac{\Delta^2}{M_n M_{n+1}} \right) \frac{1}{(M_{n+1} - M_n)^2 - (\Omega + 2i\Gamma)^2} \right. \\ & + \left. \left(1 + \frac{\Delta^2}{M_n M_{n+1}} \right) \frac{1}{(M_{n+1} + M_n)^2 - (\Omega + 2i\Gamma)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Можна побачити, що провідність $\sigma_{xx}(\Omega, \mu)$ є парною функцією μ , тоді як $\sigma_{xy}(\Omega, \mu)$ є непарною.

3.3.3. Магніто-лоренціанівська модель у границі малого поля.

Зараз ми перевіримо, що (3.51) і (3.52) мають правильну границю $B \rightarrow 0$.

Для $\sigma_{xx}(\Omega)$ ця границя одержується заміною $2n\hbar e^2 v_F^2 eB/c$ на неперервну

змінну x , що дає:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(\Omega) = & -\frac{e^2}{2\hbar i} \\ & \times \left[\frac{2}{\Omega + 2i\Gamma} \int_0^\infty dx \left(1 - \frac{\Delta^2}{x + \Delta^2} \right) \left(-\frac{\partial n_F(\sqrt{x + \Delta^2})}{\partial \sqrt{x + \Delta^2}} + \frac{\partial n_F(-\sqrt{x + \Delta^2})}{\partial \sqrt{x + \Delta^2}} \right) \right. \\ & + \int_0^\infty dx \left(1 + \frac{\Delta^2}{x + \Delta^2} \right) \frac{n_F(-\sqrt{x + \Delta^2}) - n_F(\sqrt{x + \Delta^2})}{\sqrt{x + \Delta^2}} \\ & \left. \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x + \Delta^2} + \Omega + 2i\Gamma} - \frac{1}{2\sqrt{x + \Delta^2} - \Omega - 2i\Gamma} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.53)$$

де ми відновили $\hbar = 2\pi\hbar$ у загальному префакторі, але не при частоті Ω . При $\Delta = 0$ після заміни $\omega = \sqrt{x}$ останній вираз переходить у вже відомий нам результат (3.34), тоді як при скінченному Δ ми одержуємо (3.37).

Таким само чином для холлівської провідності $\sigma_{xy}(\Omega)$ у режимі слабкого поля ми отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(\Omega) = & -\frac{e^2 v_F^2 e B}{2\pi c} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x + \Delta^2}} \left(\frac{\partial n_F(\sqrt{x + \Delta^2})}{\partial \sqrt{x + \Delta^2}} + \frac{\partial n_F(-\sqrt{x + \Delta^2})}{\partial \sqrt{x + \Delta^2}} \right) \\ & \times \left[\left(1 - \frac{\Delta^2}{x + \Delta^2} \right) \frac{1}{(\Omega + 2i\Gamma)^2} - \left(1 + \frac{\Delta^2}{x + \Delta^2} \right) \frac{1}{4(x + \Delta^2) - (\Omega + 2i\Gamma)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

або

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(\Omega) = & \frac{e^2 v_F^2 e B}{\pi c} \int_{\Delta}^\infty d\omega \left(\frac{\partial n_F(\omega)}{\partial \omega} + \frac{\partial n_F(-\omega)}{\partial \omega} \right) \\ & \times \left[-\frac{\omega^2 - \Delta^2}{\omega^2} \frac{1}{(\Omega + 2i\Gamma)^2} + \frac{\omega^2 + \Delta^2}{\omega^2} \frac{1}{4\omega^2 - (\Omega + 2i\Gamma)^2} \right], \end{aligned} \quad (3.55)$$

де знову ми відновили $\hbar = 2\pi\hbar$ у загальному префакторі, але не при частоті Ω . Дійсна частина холлівської провідності (3.55) при $\Omega = \Delta = T = 0$

(статична границя) зводиться до виразу (4.25), який розглянуто далі, у Розділі 4.2. При $T = 0$ з (3.34) та (3.55) ми одержуємо

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(\Omega) &= \frac{2ie^2}{h} \left[\frac{|\mu|}{\Omega + 2i\Gamma} + \frac{1}{4} \ln \frac{2|\mu| - (\Omega + 2i\Gamma)}{2|\mu| + (\Omega + 2i\Gamma)} \right], \\ \sigma_{xy}(\Omega) &= \frac{e^2 v_F^2 e B}{\pi c} \operatorname{sgn} \mu \left[\frac{1}{(\Omega + 2i\Gamma)^2} + \frac{1}{(\Omega + 2i\Gamma)^2 - 4\mu^2} \right].\end{aligned}\quad (3.56)$$

У протилежній границі великих частот (3.55) дає

$$\sigma_{xy}(\Omega) = \frac{e^2 v_F^2 e B}{\pi c (\hbar \Omega)^2} \left[\tanh \frac{\mu + \Delta}{2T} + \tanh \frac{\mu - \Delta}{2T} \right], \quad \Omega \rightarrow \infty. \quad (3.57)$$

де ми відновили $\hbar$ при частоті Ω . Ця поведінка також слідує з рівняння (3.50), яке є придатним у будь-яких полях B . Цікаво, що вираз (3.57) є чутливим до співвідношення між $|\mu|$ і Δ так, що ця властивість може бути використана для визначення присутності щілини [див. обговорення Рис. 3.5 та 3.6 далі]. Використавши (3.32) і (3.57) ми одержуємо холлівський опір у слабких полях

$$\begin{aligned}\rho_{xy}(\Omega) &= -\frac{\sigma_{xy}(\Omega)}{\sigma_{xx}^2(\Omega) + \sigma_{xy}^2(\Omega)} \\ &= -\frac{16v_F^2 B}{\pi e c \Omega^2} \left[\tanh \frac{\mu + \Delta}{2T} + \tanh \frac{\mu - \Delta}{2T} \right], \quad \Omega \gg \mu, \Delta, T.\end{aligned}\quad (3.58)$$

Відповідно, на високих частотах при $\Delta = 0$ і $T \rightarrow 0$ оптичний холлівський коефіцієнт

$$R_H(\Omega) = \frac{\rho_{xy}(\Omega)}{B} = -\frac{32v_F^2}{\pi e c \Omega^2} \operatorname{sgn}(\mu) \quad (3.59)$$

містить у собі інформацію про величину швидкості Фермі в графені.

Наприкінці, уявна частина $\sigma_{xy}(\Omega)$, яка слідує з (3.55), дається виразом

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} \sigma_{xy}(\Omega) &= \frac{4e^2 v_F^2 e B \Gamma \Omega}{\pi c} \int_{\Delta}^{\infty} d\omega \left(\frac{\partial n_F(\omega)}{\partial \omega} + \frac{\partial n_F(-\omega)}{\partial \omega} \right) \\ &\times \left[\frac{1}{(\Omega^2 - 4\Gamma^2)^2 + 16\Omega^2 \Gamma^2} + \frac{1}{(4\gamma^2 - \Omega^2 + 4\Gamma^2)^2 + 16\Omega^2 \Gamma^2} \right]\end{aligned}\quad (3.60)$$

який у границі високих частот набирає вигляду

$$\text{Im } \sigma_{xy}(\Omega) \simeq -\frac{4e^2 v_F^2 e B \Gamma}{\pi c (\hbar \Omega)^3} \left(\tanh \frac{\mu + \Delta}{2T} + \tanh \frac{\mu - \Delta}{2T} \right), \quad \Omega \rightarrow \infty. \quad (3.61)$$

Останнє рівняння демонструє, що у цій границі дійсна частина σ_{xy} , задана рівнянням (3.57), є основним членом.

3.3.4. Аналіз результатів для оптичної провідності.

3.3.4.1. Діагональна провідність. На Рис. 3.2 ми показали результати, які базуються на чисельних обрахунках повного виразу (3.46) для дійсної частини діагональної провідності $\text{Re } \sigma_{xx}(\Omega)$ в одиницях e^2/h як функції частоти записаної в одиницях cm^{-1} . Окрім довгоштрихової (червоної) лінії, яка була одержана у границі зникаючого магнітного поля (а саме $B = 10^{-4}\text{T}$) та показана для порівняння, інші три лінії обчислені для $B = 1\text{T}$. Вони відрізняються величиною хімічного потенціалу μ . В усіх випадках температура $T = 10\text{ K}$, розсіяння на домішках $\Gamma = 15\text{ K}$, та ексітонна щільність $\Delta = 0$. Для детальнішого опису ліній, частота $n = 1$ рівня Ландау $\Omega_1 = M_1(\Delta = 0) = 294\text{ cm}^{-1}[423\text{ K}]$, $\Omega_2 = M_2(\Delta = 0) = 415.8\text{ cm}^{-1}[598\text{ K}]$ та $\Omega_3 = M_3(\Delta = 0) = 509.2\text{ cm}^{-1}[733\text{ K}]$ так, що для штрих-пунктирної (чорної) лінії μ знаходиться нижче енергії рівня з $n = 1$ (див. ліву частину Рис. 3.3 (а)),⁴ для суцільної (блакитної) лінії μ знаходиться між рівнями з $n = 1$ і $n = 2$ (див. середину Рис. 3.3 (а)), та короткоштрихова (зелена) лінія знаходиться між рівнями з $n = 2$ і $n = 3$ (див. праву частину Рис. 3.3 (а)).

⁴Нагадаємо, що правило переходу від частоти у cm^{-1} до енергії у Кельвінах є наступним $\Omega[\text{K}] = 1.4387\text{ K} \cdot \text{cm} \Omega[\text{cm}^{-1}]$.

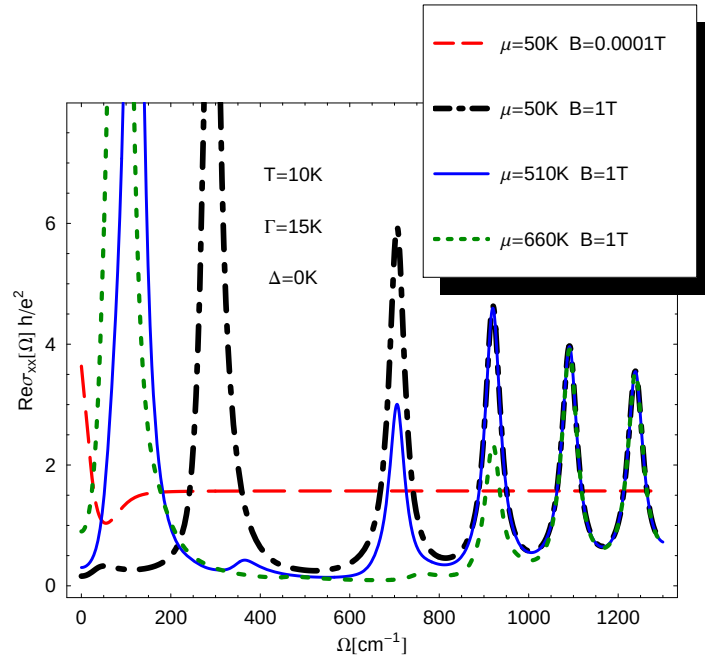


Рис. 3.2. (Кольоровий в електронній версії [8].) Дійсна частина поздовжньої провідності, $\text{Re } \sigma_{xx}(\Omega)$ в одиницях e^2/h від частоти Ω у cm^{-1} для температури $T = 10\text{K}$, розсіяння на домішках $\Gamma = 15\text{K}$. Довгоштрихова лінія – хімічний потенціал $\mu = 50\text{K}$ і магнітне поле $B = 10^{-4}\text{T}$ штрих-пунктирна лінія – $\mu = 50\text{K}$ і $B = 1\text{T}$, суцільна лінія – $\mu = 510\text{K}$ і $B = 1\text{T}$, короткоштрихова лінія – $\mu = 660\text{K}$ і $B = 1\text{T}$.

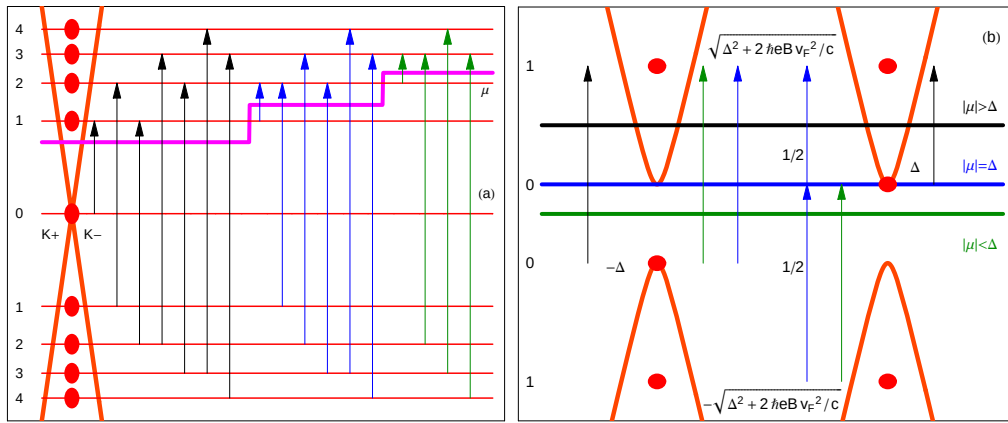


Рис. 3.3. (Кольоровий в електронних версіях [7, 8].) (а) Схематичне представлення дозволених переходів між рівнями Ландау з $n = 0, 1, \dots, 4$ показаними як суцільні (червоні) кола для додатних та від'ємних діраківських конусів. Пара діраківських конусів з вершинами у $\mathbf{K}_+$ і $\mathbf{K}_-$ точках зони Бріллюена графену (див. Рис. 3.3 (b) та Рис. 3.1) зібрана разом. Три величини хімічного потенціалу показані горизонтальною (фіолетовою) лінією. Ліворуч показані переходи для випадку, коли μ знаходиться між $n = 0$ і $n = 1$, посередині – між $n = 1$ і $n = 2$, та праворуч – між $n = 2$ і $n = 3$. Перша лінія ліворуч відповідає першому піку на штрих-пунктирній лінії на Рис. 3.2. Вона є незвичайною тим, що одночасно відповідає внутризонним та міжзонним переходам і одразу зникає зі зміною хімічного потенціалу, тоді як всі інші міжзонні лінії спочатку зменшують їхню інтенсивність наполовину і тільки потім, коли μ перетинають вищі енергетичні рівні, зникають повністю. (b) Можливі оптичні переходи між рівнями Ландау при наявності екситонної щілини Δ . Показано дві пари конусів у $\mathbf{K}_+$ і $\mathbf{K}_-$ точках. Зображено рівні Ландау для $n = 0$ з енергіями $-\Delta$ (у $\mathbf{K}_+$ точці) та Δ (у $\mathbf{K}_-$ точці), та для $n = 1$ з енергіями $\pm M_1$. Розглянуто три величини хімічного потенціалу: $|\mu| < \Delta$ (зелена), $\mu = \Delta$ (блакитна) і $|\mu| > \Delta$ (чорна). Для випадку $\mu = \Delta$ стан з енергією $E_0 = \Delta$ є зайнятим та вільним з ймовірністю $1/2$.

Енергії піків дорівнюють M_1 , $M_1 + M_2$, $M_2 + M_3$, і т. ін. та $M_2 - M_1$, $M_3 - M_2$, і т. ін. Відзначимо, що позиція та інтенсивність останніх двох піків на Рис. 3.2 (найбільша частота Ω) залишається тією ж самою для всіх обраних величин хімічного потенціалу μ . Коли μ знаходиться між M_2 і M_3 [короткоштрихова (зелена) лінія], інтенсивність третього з кінця піку зменшилась до половини від величини, яку він мав на суцільній (блакитній) лінії, тоді як четвертий і п'ятий з кінця піки на короткоштриховій лінії зовсім зникли. Цей останній, п'ятий з кінця пік, присутній тільки на штрих-пунктирній лінії. Також новий пік з'явився при $M_3 - M_2$, тоді як він був відсутнім на штрих-пунктирній лінії. Таким самим чином для μ між M_1 і M_2 [суцільна (блакитна) лінія] інтенсивність четвертого з кінця піку впала до половини інтенсивності, яку він мав на штрих-пунктирній лінії. Пік при M_1 є повністю відсутнім, а при $M_2 - M_1$ з'явився новий пік. Нарешті, коли μ менше за M_1 (штрих-пунктирна лінія), то пік нижче M_1 відсутній, а пік при M_1 завжди має повну інтенсивність. *При будь-якій величині μ ця лінія ніколи не матиме половинну інтенсивність, і ця властивість є характерною ознакою діраківських квазічастинок.*

Схема, яка допомагає зрозуміти тільки що описану поведінку ліній поглинання, показана на Рис. 3.3 (а). Ліворуч на Рис. 3.3 (а) ми показали енергії рівнів Ландау $E_n = \pm M_n$ з рівняння (3.40) суцільними (червоними) колами разом з їхніми квантовими числами $n = 0, 1, 2, \dots$. Три величини хімічного потенціалу показані на Рис. 3.3 (а) горизонтальною (фіолетовою) лінією. У кожному випадку можливі оптичні переходи, показані вертикальними стрілками, які зв'язують рівні n і $n \pm 1$. Дивлячись зліва направо ми спочатку бачимо один перехід з E_0 на $E_1 = M_1$, потім міжзонні переходи з $E_1 = -M_1$ на $E_2 = M_2$ та з $E_2 = -M_2$ на $E_1 = M_1$ за якими йде інша пара переходів з $E_2 = -M_2$ на $E_3 = M_3$ та з $E_3 = -M_3$ на $E_2 = M_2$ і т.д. Для набору ліній, що показано посередині, першим йде внутризонний перехід з $E_1 = M_1$ на $E_2 = M_2$, за яким йде одиночний міжзонний перехід

з $E_1 = -M_1$ на $E_2 = M_2$, а далі показана пара переходів з $E_2 = -M_2$ на $E_3 = M_3$ та з $E_3 = -M_3$ на $E_2 = M_2$ і т.д. Наприкінці, у наборі переходів, показаних праворуч, є внутризонний перехід з $E_2 = M_2$ з $E_3 = M_3$, за яким іде одиночний перехід з $E_2 = -M_2$ на $E_3 = M_3$ та пара переходів з $E_3 = -M_3$ на $E_4 = M_4$ та з $E_4 = -M_4$ на $E_3 = M_3$ і т.д. Це точно співпадає зі зразком, який ми побачили на Рис. 3.2. Відзначимо ще одну властивість лінії, яка відповідає переходу з $n = 0$ на $n = 1$ рівень Ландау. Це єдина лінія, яка не може бути однозначно приписана до між- або внутризонного переходу, оскільки стан з $n = 0$ знаходиться на перетині вершин діраківських конусів, що відповідають додатним та від'ємним енергіям і, таким чином, належить обом конусам.

Описана поведінка оптичних переходів може бути зрозуміла з виразів, наведених у Розділі 3.3.2, вище у границі $\Gamma \rightarrow 0$ та $T \rightarrow 0$. Взявши $\Delta = 0$, $\mu \geq 0$, і $\Omega \geq 0$ з (Д.21) одержуємо

$$\begin{aligned} \text{Re } \sigma_{xx}(\Omega) = \frac{e^2}{h} M_1^2 \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [2 - n_F(M_n) - n_F(M_{n+1})] \frac{\delta(M_n + M_{n+1} - \Omega)}{M_n + M_{n+1}} \right. \\ \left. + [n_F(M_n) - n_F(M_{n+1})] \frac{\delta(M_n - M_{n+1} + \Omega)}{M_{n+1} - M_n} \right\}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Для $\mu \in]M_N, M_{N+1}[$ термічні фактори при $T = 0$ дорівнюють

$$2 - n_F(M_n) - n_F(M_{n+1}) = \begin{cases} 0 & \text{for } n < N, \\ 1 & \text{for } n = N, \\ 2 & \text{for } n > N, \end{cases} \quad (3.63)$$

тоді як

$$n_F(M_n) - n_F(M_{n+1}) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = N, \\ 0 & \text{for } n \neq N. \end{cases} \quad (3.64)$$

Лінія у $\text{Re } \sigma_{xx}(\Omega)$ на частоті $M_n + M_{n+1}$ присутня тільки для $n \geq N$ з відсутніми іншими лініями. Далі лінія з $n = N$ має інтенсивність $1/(M_n + M_{n+1})$,

тобто половину від тієї інтенсивності, яку вона мала в іншому випадку, тоді як лінії з $n > N$ мають повну вагу $2/(M_n + M_{n+1})$. Відзначимо, що лінії з частотами, що дорівнюють різниці енергій рівнів Ландау, мають вагу $1/(M_{n+1} - M_n)$. Ці лінії завжди присутні, виключаючи випадок, коли μ знаходиться нижче M_1 . Тоді єдина лінія на частоті M_1 має вагу $2/M_1$. Підсумовуючи, ми побачили, що коли μ перетинає вищі й вищі величини M_N , лінії нижче за N зникають, а нова з'являється на частоті $M_{N+1} - M_N$. У той же час, лінія при $n = N$ втрачає половину інтенсивності, тоді як всі інші лінії не змінюються, виключаючи особливий випадок з хімічним потенціалом нижче рівня Ландау з енергією M_1 .

Ця поведінка була б зовсім іншою, якби замість $M_n \sim \sqrt{n}$ квантування рівнів Ландау мало б нерелятивістський характер $M_n = \omega_c(n + 1/2)$, де ω_c – це циклотронна частота. У цьому випадку положення лінії, яка відповідає різниці енергій рівнів Ландау (внутризонна) ніколи не зсувається по енергії. Окрім цього, лінії, які відповідають сумі енергій рівнів Ландау (міжзонні), припадають на регулярні інтервали енергій, а саме $2\omega_c, 4\omega_c, 6\omega_c, \dots$. Більш цього, коли μ зростає і перетинає різні рівні Ландау, всі лінії спочатку зменшують наполовину їхню інтенсивність перед тим, як зовсім зникнути. Для μ нижче першого рівня лінії на частоті ω_c немає. Також нема невизначеності, чи є лінія внутризонна або міжзонна, оскільки верхня та нижня зони не мають спільного рівня.

Ми встановили, що криві на Рис. 3.2 змінюються дуже мало, якщо хімічний потенціал змінюється в обмеженому діапазоні від M_N до M_{N+1} . Ми також перевірили, що для використаних значень параметрів $T = 10\text{K}$, $\Gamma = 15\text{K}$ перехід з половинної інтенсивності лінії $M_N + M_{N+1}$ майже до нульової інтенсивності відбувається досить різко в діапазоні енергій, що задані T та/або Γ . Це проілюстровано на Рис. 3.4, де показано, як повністю зникає пік для $\Omega = \Omega_1 = 294\text{cm}^{-1}$ (420 K) та зменшується наполовину наступний пік з 710cm^{-1} , коли хімічний потенціал μ проходить через

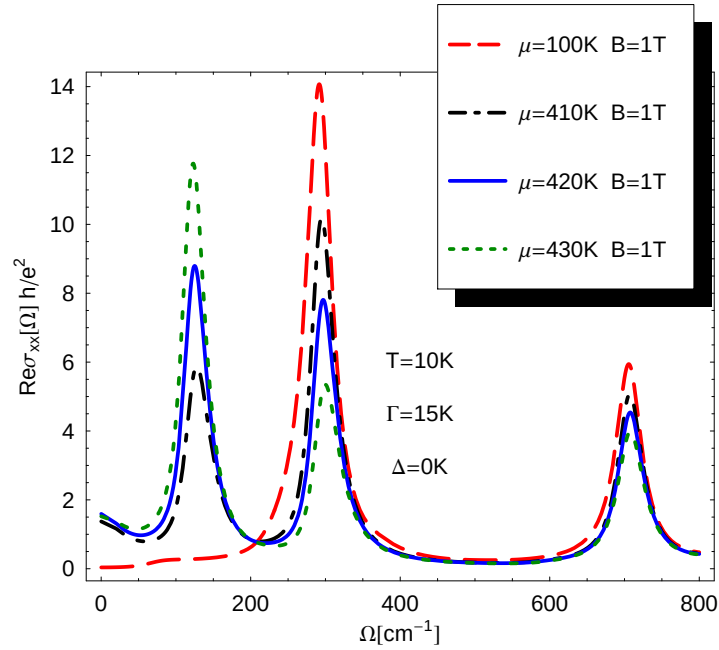


Рис. 3.4. (Кольоровий в електронній версії [8].) Дійсна частина поздовжньої провідності, $\text{Re } \sigma_{xx}(\Omega)$ в одиницях e^2/h від частоти Ω у cm^{-1} для температури $T = 10\text{K}$, розсіяння на домішках $\Gamma = 15\text{K}$ та магнітного поля $B = 1\text{T}$ для 4 величин хімічного потенціалу. Довгоштрихова лінія – $\mu = 100\text{K}$, штрих-пунктирна лінія – $\mu = 410\text{K}$, суцільна – $\mu = 420\text{K}$, короткоштрихова – $\mu = 430\text{K}$.

$n = 1$ рівень Ландау [$\Omega_1 = M_1(\Delta = 0)$]. Довгоштрихова (червона) крива, показана для порівняння, відповідає $\mu = 100\text{K}$ обраному далеко від точки переходу 420K . Штрих-пунктирна (чорна) лінія для $\mu = 410\text{K}$, що трохи нижче точки переходу, суцільна (блакитна) лінія для $\mu = 420\text{K}$ точно припадає на точку перетину, і короткоштрихова (зелена) лінія для $\mu = 430\text{K}$. Це припадає на $\pm 10\text{K}$ з обох сторін від Ω_1 , що набагато менше, ніж ширина піку $2\Gamma = 30\text{K}$. Зі зростанням μ вище 410K , ми спостерігаємо зростання піку при $\Omega = 122\text{cm}^{-1}$, зникання піку при 294cm^{-1} та зменшення піку наполовину при 710cm^{-1} . Повний переніс спектральної ваги між різними піками трапляється у досить малому порядку 30K , інтервал змін хімічного потенціалу навколо $\Omega_1 = 294\text{cm}^{-1}$ (420K) порядку 30K (на рисунку

не показано). Коли перехід закінчено, зразок розподілу спектральної ваги залишається незмінним, доки хімічний потенціал не стане близьким до енергії наступного рівня Ландау. Підкреслимо, що хоча Рис. 3.4 одержано з використанням повного виразу (3.46), ми перевірили, що результати одержані з використанням (Д.21) і (3.49) практично однакові. Нагадаємо ще раз, що у графенових пристроях з польовим ефектом хімічний потенціал може бути змінено прикладанням напруги до затвору. Це є найкращим способом для спостереження описаних ефектів.

Динамічна провідність може також бути використана, щоб одержати інформацію про можливе відкриття щілини, пов'язане з порушенням симетрії у графені (див. Розділи 2.5 та 5). На Рис. 3.5 ми показали результати для $\text{Re } \sigma_{xx}(\Omega)$ побудовані на основі чисельного обрахунку (3.46). Розглянуто чотири величини ексітонної величини Δ . Для $\Delta < |\mu|$ один пік при 294 cm^{-1} розщепився на два з однаковою інтенсивністю, при $|\mu| = \Delta$ нижній пік має приблизно $1/3$ інтенсивності верхнього піка, і при $\Delta > |\mu|$ спостерігається один пік з вищою енергією.

Рис. 3.3 (b) передає схематику відповідних рівнів Ландау та переходів між ними. Для зручності на Рис. 3.3 (b) ми зафіксували щілину і змінювали хімічний потенціал. Для $|\mu| < \Delta$ можливі обидва міжзонні переходи від $-M_0$ до M_1 (у лівому конусі) і від $-M_1$ до M_0 (у правому конусі), які мають одну й ту саму енергію, $M_1 + \Delta$, так що спостерігається тільки одна лінія, зсунута до вищої енергії. При $|\mu| = \Delta$ необхідно прийняти до уваги, що $n = 0$ стан $n = 0$ (у правому конусі) є зайнятим (вільним) з ймовірністю $1/2$. Можливими міжзонними переходами є від $-M_0$ до M_1 (лівий конус) з енергією $M_1 + \Delta$ і від $-M_1$ до M_0 з енергією $M_1 + \Delta$, та внутризонний перехід від M_0 до M_1 з енергією $M_1 - \Delta$ (правий конус), кожний з вагою $1/2$ замість 1. Це дає відношення 3 до 1 на користь лінії з більшою енергією. Наприкінці, для $|\mu| > \Delta$, міжзонний перехід від $-M_0$ до M_1 (зліва) має енергію $M_1 + \Delta$ та внутризонний перехід від M_0 до M_1 (справа) має енергію

$M_1 - \Delta$. Ці дві лінії мають приблизно однакову інтенсивність. Видно, що оптичні вимірювання надають гарну можливість для спостереження різних типів щілин, і розглянута тут ексітонна щілина була взята як приклад.

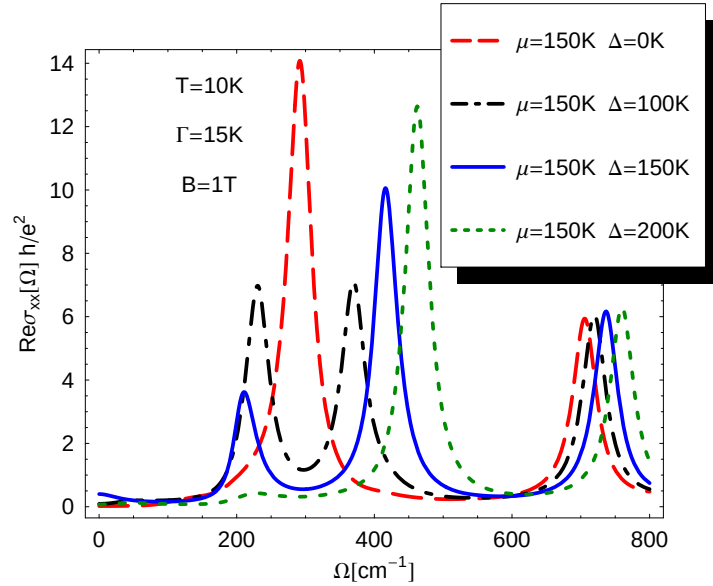


Рис. 3.5. (Кольоровий в електронній версії [8].) Дійсна частина поздовжньої провідності, $\text{Re } \sigma_{xx}(\Omega)$ в одиницях e^2/h від частоти Ω у cm^{-1} для температури $T = 10 \text{ K}$, $\Gamma = 15 \text{ K}$, $B = 1 \text{ T}$ та хімічного потенціалу $\mu = 150 \text{ K}$ для 4 величин ексітонної щілини Δ . Довгоштрихова лінія – $\Delta = 0 \text{ K}$, штрихпунктирна лінія – $\Delta = 100 \text{ K}$, суцільна – $\Delta = 150 \text{ K}$, короткоштрихова – $\Delta = 200 \text{ K}$.

3.3.4.2. Огляд експериментальних результатів магнітооптичних вимірювань. Jiang *et al.* [119] зробили перші вимірювання проходження світла у зовнішньому магнітному полі в одношаровому графені, який досліджувався також у [90]. В останній роботі було встановлено, що існує асиметрія між електронними та дірочними зонами, яка призводить до 5% різниці між швидкостями електронів та дірок при енергіях 125 meV (1450 K). Циклотронні резонанси у двошаровому графені досліджувалися у [206]. Ще раніше спектроскопія рівнів Ландау була зроблена на кількшарових

системах, а саме на ультратонкому епітаксialьному графені [207] (див. також нещодавню роботу [208]). У роботі [209] зроблено дослідження магніто-віддзеркалення у піролітичному графіті у полях до 18 Т. У цьому експерименті знайдено, що енергії рівнів Ландау лінійні по B , тоді як у графені та епітаксialьному графіті вони мають $\sqrt{B}$ залежність, яка узгоджується з діраківськими квазічастинками. Тоді як така поведінка очікувалась і спостерігається в одношаровому графені, ситуація не настільки ясна у багатшаровому випадку. Дані у цьому випадку аналізувались у [7], де були знайдені розбіжності з рівнянням (3.49). Зокрема, важко зрозуміти спостережуване співвідношення інтенсивностей першої та другої міжзонних ліній.

Зараз ми обговоримо дані з роботи [119], яка має пряме відношення до наших результатів для графену [7, 8, 25]. Зокрема, у [119] встановлено, що різниця між рівнями Ландау з енергіями $-M_1$ та M_2 є дещо більшою, ніж енергія, передбачена на основі моделі невзаємодіючих частинок, у рамках якої одержано (3.49). Для пояснення цього у [119] аналізується, досліджений у теоретичній роботі [210], вплив Кулонівської взаємодії на рівні Ландау та робиться попередній висновок, що цей вплив може пояснити дані. З іншого боку, автори [119] роблять спостереження, що модель зі щільною для $\nu = 0$ плато (див. Розділ 5.3.1), як це було включено у (3.49), не узгоджується з їхніми спостереженнями. Ця модель передбачає зменшення замість спостережуваного малого збільшення відстані між першою та другою міжзонними оптичними лініями. Однак на основі існуючих експериментальних даних зробити точний висновок про вплив кореляційних ефектів не можливо.⁵ На Рис. 3.6 ми показуємо результати для дійсної частини поздовжньої провідності $\text{Re } \sigma_{xx}(\Omega)$ для $B = 18$ Т, $T = 5$ К і двох можливих напівширин рівнів Ландау $\Gamma = 60$ К (що, приблизно, у 4 ра-

⁵Найновіші (на жовтень 2009 р.) результати групи Р. Kim [211] вже узгоджуються з відкриттям щільності для $\nu = 0$ плато (див. зноски у Розділі 5.3.1).

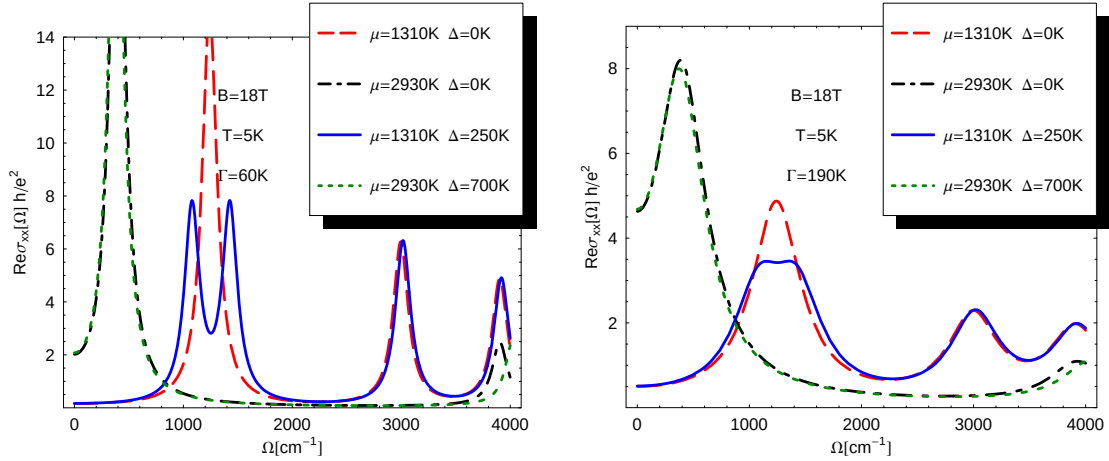


Рис. 3.6. (Кольоровий у електронній версії [8].) Дійсна частина поздовжньої провідності, $\text{Re } \sigma_{xx}(\Omega)$ в одиницях e^2/h від частоти Ω у cm^{-1} для поля $B = 18$ Т, температури $T = 5$ К. Довгоштрихова лінія – хімічний потенціал $\mu = 1310$ К та щілина $\Delta = 0$ К, штрих-пунктирна лінія – $\mu = 2930$ К та $\Delta = 0$ К, суцільна – $\mu = 1310$ К та $\Delta = 250$ К, короткоштрихова – $\mu = 2930$ К та $\Delta = 700$ К. На лівій панелі розсіювання $\Gamma = 60$ К і на правій панелі $\Gamma = 190$ К.

зи більше, ніж спостерігається у вимірюваннях на постійному струмі для $\nu = 4$ плато у роботі [117]) та $\Gamma = 190$ К, яке відповідає спостережуваний у [119]) напівширині піків 20 fs. Ми показуємо результати для двох величин хімічного потенціалу $\mu = 1310$ К та $\mu = 2930$ К. Перша величина відповідає лінії T_1 з [119], яка вимірювалася при факторі заповнення $\nu = 2$ з густиною (дисбалансом густини, див. рівняння (3.88)) носіїв $\rho = 9.4 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$, та знаходиться між енергіями рівнів Ландау M_0 і M_1 у позначеннях (3.49). Друга величина відповідає лінії T_2 з [119], $\nu = 10$ з густиною (дисбалансом густини) носіїв $\rho = 4.7 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ та знаходиться між енергіями рівнів Ландау⁶ M_2 і M_3 .

Довгоштрихова (червона) лінія відповідає випадку з відсутньою щіли-

⁶Насправді виміри у [119] були зроблені для дірок при $\nu = -2$ і -10 , але з теоретичної точки зору існує частинково-дірочна симетрія, оскільки провідність (3.49) є парною функцією μ .

ною Δ . Вона має міжзонний пік при $\Omega = 1248 \text{ cm}^{-1}$ відповідає переходу з $n = 0$ на $n = 1$ рівень, з другим піком при $\Omega = 3013 \text{ cm}^{-1}$ (з $-M_1$ на M_2 та з $-M_2$ на M_1), а третій при $\Omega = 3927 \text{ cm}^{-1}$ (з $-M_2$ на M_3 та з $-M_3$ на M_2) і т.д. Суцільна (блакитна) лінія для того ж самого випадку, але тепер введена щілина $\Delta = 250 \text{ K}$. Ми не бачимо змін при вищих енергіях, але пік при $\Omega = 1248 \text{ cm}^{-1}$ розщеплюється на два, один зсувається до нижчих енергій, а інший — до вищих. Кожний з піків уширений на напівширину $2\Gamma = 120 \text{ K}$ (ліва панель Рис. 3.6). Тоді як наші параметри, окрім Γ , було обрано з огляду на роботу [119], у цьому експерименті не спостерігалось розщеплення першої міжзонної лінії. Це узгоджується з тим, що значення Γ є набагато більшим. Якщо ми підвищимо Γ до величини, наведеної у [119], 190 K , то результат буде відповідати наведеному на правій панелі Рис. 3.6, яка відрізняється від лівої тільки величиною Γ . Ми бачимо ширші піки, які відповідають переходам між різними рівнями Ландау. Також уширення першої міжзонної лінії на суцільній (блакитній) кривій є тепер достатнім для того, щоб спостерігався тільки один пік. Однак тепер він не має лоренціанівської форми, яка була у штриховій (червоній) лінії. Є слабе подавлення інтенсивності на місці оригінального піку, плоска вершина і легке, відносно оригінальної, уширення лінії. Немає ніякого видимого збільшення відстані між першим і другим піками поглинання.

Ми також включили для порівняння на Рис. 3.6 результати для іншої величини хімічного потенціалу $\mu = 2930 \text{ K}$. Це відповідає випадку, коли μ знаходиться між другим та третім рівнями Ландау. Як описано вище, при описі Рис. 3.2, у цьому випадку перша міжзонна лінія зникла, як і друга, а третя лінія зменшила свою інтенсивність наполовину (у порівнянні з довгоштриховою (червоною) лінією). Все це видно з штрих-пунктирної (чорної) лінії, яка має $\Delta = 0$. Відзначимо, що новий пік з'явився при нижчій енергії $\Omega = 397 \text{ cm}^{-1}$, яка відповідає внутризонному переходу між другим та третім рівнями Ландау. Для того, щоб побачити навіть малу зміну цієї кривої

в області вище $\text{rf} \sim 3500 \text{ cm}^{-1}$, необхідно ввести велику щілину $\Delta = 700 \text{ K}$, як видно з короткоштрихової (зеленої) кривої.

Результати для холлівської провідності наведені та проаналізовані у Розділі 3.3 роботи [8].

3.4. Правила сум для оптичних поздовжньої та холлівської провідностей

Дуже корисно розглянути приклад, коли КЕД_{2+1} наближення недостатньо, і треба розглядати повну модель з сильним зв'язком (1.5). Цей приклад дається правилами сум для оптичної провідності, які були одержані у роботі [13] для одношарового графену та у [14] для двохшарового графену. Для ДГХ моделі відповідне правило сум та його особливості були досліджені у [15–17].

3.4.1. Загальна інформація про правила сум та необхідність їх узагальнення для графену. Дійсна частина частотно залежної оптичної провідності $\sigma_{xx}(\Omega)$ є її поглинаючою частиною. Розподіл її спектральної ваги як функції енергії ($\hbar\Omega$) містить інформацію про природу можливих електронних переходів, пов'язаних з поглинанням фотону. Хоча й зв'язок між провідністю та електронною структурою і транспортним часом не є прямим, з цих даних можна отримати багато істотної інформації. Зокрема, правило f -сум для дійсної частини $\sigma_{xx}(\Omega)$, яке у своїй найпростішій формі для нескінченної зони вільних електронів стверджує, що

$$\int_0^{\infty} d\Omega \text{Re}\sigma_{xx}(\Omega) = \frac{\omega_P^2}{8} \quad (3.65)$$

є особливо корисним. Тут ω_P це – плазмова частота, $\omega_P^2 = 4\pi n e^2 / m$, з густиною вільних носіїв n на одиничний об'єм, та m їх ефективна маса.

У цьому випадку права частина (3.65) є незалежною від температури та взаємодій.

У більш загальному випадку скінченної зони у наближенні сильного зв'язку оптична сума набирає вигляду

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\Omega_M} d\Omega \operatorname{Re} \sigma_{xx}(\Omega) = \frac{e^2}{\hbar^2 V} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} n_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{\partial^2 \epsilon_{\mathbf{k}}}{\partial k_x^2}, \quad (3.66)$$

з енергією обрізання Ω_M на границі зони, яка нас цікавить. Тут V це – об'єм кристалу, σ – спін, як і раніше, $\epsilon_{\mathbf{k}}$ це – електронна дисперсія, $\mathbf{k}$ – хвильовий вектор у зоні Бріллюена, та $n_{\mathbf{k}, \sigma}$ це – ймовірність заповнення стану $|\mathbf{k}, \sigma\rangle$. Якщо ми розглянемо дисперсію вільних електронів, $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m$, рівняння (3.66) негайно скорочується до (3.65) з $n = N/V$, де $N = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} n_{\mathbf{k}, \sigma}$ це – повне число електронів у зоні. Для моделі з перескоком між найближчими сусідами на квадратній ґратці легко показати, що права частина (3.66) дорівнює $e^2 / \hbar^2$, помножений на мінус половину кінетичної енергії, $W_{\text{К.Е.}}$ на атом. У цьому випадку оптичне правило сум може буди використане, щоб визначити зміну кінетичної енергії електронів як функції температури, або при відкритті щілини у спектрі квазічастинкових збуджень. Саме це питання було предметом нещодавніх досліджень ВТНП, див. огляди [87, 212, 213] та огляд автора про правило сум у ДГХ моделі [17].

У постійному зовнішньому магнітному полі $\mathbf{B}$ прикладеному до металевої системи вздовж z -напрямку, оптична провідність, окрім поздовжньої компоненти $\sigma_{xx}(\Omega)$, набуває поперечну компоненту $\sigma_{xy}(\Omega)$. Ця величина містить додаткову інформацію про те, як електронні властивості змінюються зовнішнім магнітним полем. Для цього випадку Drew та Coleman [214] одержали нове правило сум для оптичного холлівського кута $\theta_H(\Omega)$. Якщо ми визначимо цей кут так,

$$t_H(\Omega) \equiv \tan \theta_H(\Omega) = \frac{\sigma_{xy}(\Omega)}{\sigma_{xx}(\Omega)}, \quad (3.67)$$

тоді

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\Omega \text{Re} t_H(\Omega) = \omega_H, \quad (3.68)$$

де ω_H це – холлівська частота, яка відповідає циклотронній частоті $\omega_c = eB/mc$ для вільних електронів [див. також (4.1)].

Як ми вже відзначили, ефективний низькоенергетичний діраківський опис графену є недостатнім для одержання правил сум. Це легко зрозуміти, розглянувши два приклади. Права частина (3.66) звичайно зв'язується з [17, 87, 212, 213] діамагнітним членом, який визначається другою похідною гамільтоніана [див. рівняння (1.9) вище] по векторному потенціалу. Цей член дорівнює нулю в діраківському наближенні. З іншого боку, з того самого наближення слідує те, що у границі високих частот міжзонний вклад до провідності є константою, як було прямо видно з (3.32). Частота Ω є необмеженою у діраківському наближенні, хоча з фізичної точки зору Ω мусить бути нижче краю зони. Цей приклад показує, що, коли розглядаються правила сум, необхідно виходити за межі діраківського наближення. Відзначимо, однак, що у рамках цього наближення можна розглядати часткові правила сум при низьких енергіях [215].

Другий приклад полягає в тому, що циклотронна частота ω_c для діраківських квазічастинок [65] (див. також (4.27)) визначається іншим чином, $\omega_c = eBv_F^2/(c|\mu|)$. Як ми побачимо у Розділі 4.3.2.1 (див. також [2, 39, 40]), це означення пов'язано з тим, що фіктивна “релятивістська” маса $m_c = |\mu|/v_F^2$ грає роль циклотронної маси у температурному факторі формули Ліфшиця-Косевича для графену [3, 4]. Оскільки ця циклотронна частота розходитьсся при $\mu \rightarrow 0$, виникає питання, що слід використовувати в якості холлівської частоти у правій частині (3.68).

Всі ці проблеми розв'язуються, коли використовується модель сильного зв'язку, але, через специфіку графену, правило f -сум не може бути вгадано з (3.66), навіть якщо це рівняння застосувати для двохзонного випадку.

Перед тим, як почати розгляд обидвох правил сум для оптичних по-
здовжньої та холлівської провідностей, наведемо два корисних вирази, які
слідують [216] з представлення для кореляції струмів $\Pi_{\alpha\beta}(\Omega)$ [див. (3.2)]
через матричні елементи оператора струму $J_\alpha(t=0)$, у границі високих
частот, $\Omega \rightarrow \infty$ для холлівської провідності

$$\sigma_{xy}(\Omega) = \frac{i}{V\hbar\Omega^2} \left\{ \langle [J_x, J_y] \rangle + \frac{1}{(\hbar\Omega)^2} \langle [[[J_x, H], H] J_y] \rangle + O\left(\frac{1}{(\hbar\Omega)^4}\right) \right\}, \quad (3.69)$$

та для поздовжньої провідності

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{iV\Omega} \left\{ -\langle \tau_{xx} \rangle + \frac{1}{(\hbar\Omega)^2} \langle [[J_x, H], J_x] \rangle + O\left(\frac{1}{(\hbar\Omega)^4}\right) \right\}. \quad (3.70)$$

Тут $[,]$ означає комутатор. Далі, у Розділах 3.4.2 та 3.4.3 ми використаємо
формулу Кубо (3.1) та рівняння (3.69), (3.70) при виводі відповідних правил
сум.

3.4.2. Оптичне правило сум для діагональної провідності. Опти-
чне правило сум є наслідком калібрувальної інваріантності та причинності.
Калібрувальна інваріантність диктує шлях, яким векторний потенціал вхо-
дить до (1.5) та, відповідно, визначає діамагнітний та парамагнітний чле-
ни у розкладі (1.6), як і форму формули Кубо (3.1). Причинність призво-
дить до того, що провідність (3.1) задовольняє співвідношенню Крамерса-
Кроніга (Kramers-Krönig) (KK)

$$\sigma_{\alpha\beta}(\Omega) = \frac{1}{\pi i} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega \sigma_{\alpha\beta}(\omega)}{\omega - \Omega}. \quad (3.71)$$

Скомбінувавши разом високочастотну границю співвідношення KK (3.71),

$$\text{Im}\sigma_{\alpha\beta}(\Omega) = \frac{1}{\pi\Omega} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \text{Re}\sigma_{\alpha\beta}(\omega), \quad \Omega \rightarrow \infty, \quad (3.72)$$

та асимптотику (3.70), ми приходимо до правила сум

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \operatorname{Re} \sigma_{xx}(\Omega) = \frac{\langle \tau_{xx} \rangle}{V}. \quad (3.73)$$

Прийнявши до уваги, що $\operatorname{Re} \sigma_{xx}(\Omega)$ є парною функцією Ω , ми бачимо, що для однієї зони $\langle \tau_{\alpha\beta} \rangle / V$ відповідає правій частині (3.66). Визначивши також плазмову частоту ω_P через $\omega_P^2 / (4\pi) \delta_{\alpha\beta} \equiv \langle \tau_{\alpha\beta} \rangle / V$, ми можемо переписати правило сум (3.73) у формі (3.65). Нижче ми підрахуємо цей член для гамільтоніана (1.5) з перескоком між найближчими сусідами.

3.4.2.1. Явний вигляд діамагнітного члену. Згідно рівняння (3.4) діамагнітний тензор $\langle \tau_{\alpha\beta} \rangle$ у формулі Кубо (3.1) є температурним усередненням рівняння (1.9). Цей член обраховано у Додатку Е, де одержано

$$\frac{\langle \tau_{\alpha\alpha} \rangle}{V} = \frac{2e^2}{\hbar^2} \int_{BZ} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} [n_F(\epsilon(\mathbf{k})) - n_F(-\epsilon(\mathbf{k}))] \left[\frac{\partial^2}{\partial k_\alpha^2} - \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{k})}{\partial k_\alpha} \right)^2 \right] \epsilon(\mathbf{k}), \quad (3.74)$$

де $n_F(\omega)$, як і раніше, це розподіл Фермі. Інтегрування по імпульсам у (3.74) ведеться по повній зоні Бріллюена (BZ), а температурні фактори $n_F(\epsilon(\mathbf{k}))$ і $n_F(-\epsilon(\mathbf{k}))$ відносяться, відповідно, до верхнього та нижнього діраківських конусів. Треба відзначити, що просте узагальнення (3.66) на випадок двох зон призвело б до втрати члену з похідними фази $(\partial \varphi(\mathbf{k}) / \partial k_\alpha)^2$. Цей член виник через те, що заміна Пайерлса була зроблена у початкових гамільтоніанах (1.5) та (1.10), а не після діагоналізації рівняння (1.10). Іншим коментарем з приводу (3.74) [див. також (Е.4) у Додатку Е] є те, що $\langle \tau_{\alpha\alpha} \rangle$ зникає, якщо $\epsilon(\mathbf{k})$ береться у лінійному наближенні. Це проявляється у відсутності діамагнітного члена у діраківському наближенні. Правильним шляхом є спочатку взяти похідну у (3.74). Це зроблено у рівнянні (Е.5) у Додатку Е і призводить до кінцевого результату

$$\frac{\langle \tau_{\alpha\alpha} \rangle}{V} = -\frac{e^2 a^2}{3\hbar^2} \int_{BZ} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} [n_F(\epsilon(\mathbf{k})) - n_F(-\epsilon(\mathbf{k}))] \epsilon(\mathbf{k}). \quad (3.75)$$

Рівняння (3.75) еквівалентне рівнянню (3.74). Відзначимо, що $\langle \tau_{\alpha\alpha} \rangle$ завжди додатне і не залежить від довільного вибору знаку перед t у (1.5). Зараз (3.75) дорівнює $e^2/\hbar^2$ помножене на $-2/(3\sqrt{3})(\sim -0.39)$ кінетичної енергії на один атом, замість $-1/2$, як для звичайної квадратної ґратки. При нульовій температурі та при $\mu > 0$ (для визначеності) нижчий діраківський конус заповнений. Це означає, що тільки міжзонні переходи цих електронів роблять внесок у провідність. Подібним чином електрони з верхнього діраківського конусу можуть мати тільки внутризонні переходи. Саме у цьому сенсі при $T = 0$ перший температурний фактор у (3.75) відповідає міжзонним, а другий – внутрішньозонним переходам. Корисно явно виділити внесок $\langle \tau_{xx}(\mu = T = 0) \rangle$ діраківського моря у (3.75):

$$\langle \tau_{xx} \rangle = \langle \tau_{xx}(\mu = T = 0) \rangle + \langle \tau_{xx}^{eh}(\mu, T) \rangle, \quad (3.76)$$

де

$$\frac{\langle \tau_{xx}(\mu = T = 0) \rangle}{V} = -\frac{e^2 a^2}{3\hbar^2} \int_{BZ} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} (-\epsilon(\mathbf{k})) \quad (3.77)$$

є внеском діраківського моря (енергією заповненої зони валентності) та

$$\frac{\langle \tau_{xx}^{eh}(\mu, T) \rangle}{V} = -\frac{e^2 a^2}{3\hbar^2} \int_{BZ} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} [n_F(\epsilon(\mathbf{k})) + 1 - n_F(-\epsilon(\mathbf{k}))] \epsilon(\mathbf{k}) \quad (3.78)$$

є внеском електронів та дірок. Вирази (3.75), (3.77) та (3.78) містять енергію $\epsilon(\mathbf{k})$, яка має місце у випадку квадратної ґратки з перескоком між найближчими сусідами, як згадувалось у Розділі 3.4.1. Чисельний обрахунок вкладу діраківського моря (3.77) з повною дисперсією (1.12) дає

$$\frac{\langle \tau_{xx}(\mu = T = 0) \rangle}{V} = \alpha \frac{e^2 t}{\hbar^2}, \quad \alpha \approx 0.61. \quad (3.79)$$

Така ж відповідь витікає з лінеаризованого діраківського наближення з трикутною ГС (див. рівняння (6.5)), якщо ширину зони W обрано $W = \sqrt{\sqrt{3}\pi}t$, як у (1.39). Електронно-дірочний внесок (3.78) може бути оціне-

ний аналітично, якщо використати закон дисперсії у лінійному наближенні

$$\frac{\langle \tau_{xx}^{eh}(\mu, T) \rangle}{V} = \frac{2e^2 a^2 T^3}{3\pi \hbar^4 v_F^2} \left[\text{Li}_3(-e^{\mu/T}) + \text{Li}_3(-e^{-\mu/T}) \right], \quad (3.80)$$

де $\text{Li}_3(z)$ є полілогарифмічною функцією [217]. Це показує, що при $\mu = 0$ температурна залежність правила сум для діагональної провідності $\sim T^3$, на відміну від добре відомої T^2 залежності [17, 87, 212, 213]. Відзначимо, однак, що оскільки $\langle \tau_{xx}^{eh}(\mu = 0, T) \rangle / V \sim -T^3/t^2$ є малим, спостереження цієї T^3 поведінки є малоюмовірним. В іншому граничному випадку, використавши асимптотику полілогарифмічної функції при $|\mu| \gg T$, з (3.80) одержуємо

$$\frac{\langle \tau_{xx}^{eh}(\mu, T) \rangle}{V} = -\frac{e^2 a^2}{9\pi \hbar^4 v_F^2} [|\mu|^3 + \pi^2 |\mu| T^2]. \quad (3.81)$$

Ця $|\mu|^3$ поведінка при $T = 0$ легко зрозуміла з (3.78), оскільки у цьому випадку маємо інтеграл по енергії з 0 до μ від ГС, яка через лінійну дисперсію квазічастинок у графені пропорційна $|\epsilon|$ (див. рівняння (6.5)). Таким чином, підінтегральний вираз пропорційний ϵ^2 , прямо призводячи до $|\mu|^3$ залежності. При скінченій температурі саме внесок ГС у (3.78) у випадку, коли $\mu = 0$ забезпечує додатковий множник T , що і призводить до T^3 поведінки, замість T^2 поведінки, як у звичайному випадку. З іншого боку, якщо $|\mu| \gg T$, ГС може бути обчислена при енергії μ , що дає у результаті $|\mu|T^2$ залежність.

Відзначимо, що $|\mu|^3$ залежність можна було б спостерігати, змінюючи напругу на затворі. Використавши (3.88) для густини носіїв ρ , яка є пропорційною V_g , ми одержуємо, що $\langle \tau_{xx}^{eh}(V_g) \rangle / V \sim -|V_g|^{3/2}$. Як можна бачити з (3.81), електронно-дірочний внесок $\langle \tau_{xx}^{eh}(\mu, T) \rangle$ у (3.78) є від'ємним, і його необхідно додавати до внеску діраківського моря (3.77), щоб одержати додатний результат для оптичної суми. Якщо при $T = 0$ ми візьмемо хімічний потенціал на верхньому краю зони таким чином, що додатний діраківський конус буде повністю окупованим, рівняння (3.78) зведеться до

(3.77) за виключенням різниці у знаку. Обидва внески скоротяться, оскільки повна зона не може поглинати. Такий само результат витікає і з (3.81), якщо обрати μ рівним згаданому вище параметру обрізання, як у (1.39), $W = \sqrt{\sqrt{3}\pi}t$. З (3.81) ми також бачимо, що при $|\mu| \gg T$ ми одержуємо вже згадану T^2 залежність [17, 87, 212, 213].

3.4.3. Правило сум для холлівського кута. А зараз ми розглянемо оптичний холлівський кут (3.67), який грає роль функції відгуку на інжектований струм, а не на прикладене поле:

$$j_x(\Omega) = \sigma_{xy}(\Omega)E_y(\Omega) = t_H(\Omega)j_y(\Omega), \quad j_y(\Omega) = \sigma_{xx}(\Omega)E_y(\Omega). \quad (3.82)$$

Як було доведено у роботі [214], функція відгуку $t_H(\Omega)$ задовольняє КК співвідношенню

$$t_H(\Omega) = \frac{1}{\pi i} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega - \Omega} t_H(\omega). \quad (3.83)$$

Домноживши (3.83) на $-i\Omega$ та взявши границю $\Omega \rightarrow \infty$, ми одержуємо правило сум

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega t_H(\omega) = \omega_H, \quad (3.84)$$

з холлівською частотою

$$\omega_H \equiv \lim_{|\Omega| \rightarrow \infty} [-i\Omega t_H(\Omega)]. \quad (3.85)$$

Правило сум для холлівського кута (3.68) слідує з (3.84) після того, як ми приймемо до уваги, що дійсна та уявна частини $t_H(\omega)$ є, відповідно, парною та непарною функціями Ω . Мікроскопічний розгляд на основі формули Кубо (3.1) показує, що височастотна границя (3.85) існує і дається виразом

$$i\omega_H = \lim_{|\Omega| \rightarrow \infty} \frac{\Omega K_{xy}(\Omega)}{K_{xx}(\Omega)} = \frac{\langle [J_x(t=0), J_y(t=0)] \rangle}{\hbar \langle \tau_{xx} \rangle}, \quad (3.86)$$

де в останній рівності ми використали асимптотики для великих частот (3.69) та (3.70). Комутатор $I_{x,y} = \langle [J_x(t=0), J_y(t=0)] \rangle$ обчислено у Додатку Е, де ми одержали

$$I_{x,y} = -i \frac{e^2 a^4 t^2 \hbar e B}{4 \hbar^4 c} \epsilon_{xy} V \rho. \quad (3.87)$$

Тут ρ – це дисбаланс густини носіїв ($\rho = n_e - n_h$, де n_e та n_h є, відповідно, густинами електронів та дірок), та ϵ_{ab} – це антисиметричний тензор. Для вільних невзаємодіючих діраківських ферміонів з лінійною дисперсією $E = \pm \hbar v_F k$ при $B = T = 0$ виконується наступне співвідношення між хімічним потенціалом μ та густиною (дисбалансом густини) носіїв ρ для релятивістських квазічастинок:

$$\rho = \frac{\mu^2 \text{sgn} \mu}{\pi \hbar^2 v_F^2}. \quad (3.88)$$

У більш загальному випадку це співвідношення обговорюється у Розділі V В роботи [3], а також у Додатку С з [2]), див. також Додаток Е. Підставивши (3.87) та (3.79) у (3.86), одержуємо кінцевий результат

$$\omega_H = -\frac{1}{4\alpha} \frac{eB}{c} \frac{ta^2}{\hbar^2} \rho a^2. \quad (3.89)$$

Оскільки $ta^2/\hbar^2$ має розмірність оберненої маси, а ρa^2 – і безрозмірним, рівняння (3.89) має правильну розмірність циклотронної частоти. Підставивши (3.88) та висловивши v_F через t , одержуємо

$$\omega_H = -\frac{2 \text{sgn}(eB)}{9\pi\alpha} L^2(B) \frac{\mu^2 \text{sgn} \mu}{\hbar t^3}. \quad (3.90)$$

Тут $L(B) = \sqrt{2|eB|\hbar v_F^2/c}$ – це масштаб Ландау, введений у (2.42) та (3.42). Як обговорюється у Розділі 4.2.1.1, залежна від напруги на затворі циклотронна маса була введена у [39, 40] наступним чином $|\mu| = m_c v_F^2$. Якщо використати її у (3.90), ми одержимо

$$\omega_H = -\frac{eB}{cm_c} \left(\frac{\mu}{1.62t} \right)^3. \quad (3.91)$$

Оскільки заповнений верхній діраківський конус відповідає величині $\mu = W = \sqrt{\sqrt{3}\pi}t \simeq 2.33t$ (див. кінець Розділу 3.4.2.1), у цьому випадку формула (3.91) нагадує формулу $\omega_H = \omega_c = eB/mc$ з роботи [214] для 2DEГ з m_c , яка замінює вільну електронну масу m . Однак у графені m_c змінюється як квадратний корінь з дисбалансу густини носіїв $|\rho|$ так, що обидва випадки виглядають схожим чином тільки формально. Наприкінці відзначимо, що коли у спектрі присутня щілина $E = \sqrt{\hbar^2 v_F^2 (p_1^2 + p_2^2) + \Delta^2}$, дисбаланс густини носіїв дорівнює

$$\rho = \frac{1}{\pi \hbar^2 v_F^2} (\mu^2 - \Delta^2) \theta(\mu^2 - \Delta^2) \operatorname{sgn} \mu \quad (3.92)$$

Це означає, що присутність щілини Δ може бути встановлена зі зміни ω_H , одержаної з магнітооптичних вимірювань. Саме цей вид вимірювань, який виявив присутність щілини, був вже зроблений у недодопованому ВТНП $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+x}$ [218]. Недавні вимірювання, які ми вже обговорювали у Розділі 3.3.4.2, дають можливість сподіватися, що такий тип експерименту можливий і у графені.

РОЗДІЛ 4

КВАНТОВІ МАГНІТНІ ОСЦІЛЯЦІЇ ТА ЕФЕКТ НЕРНСТА ДЛЯ ДІРАКІВСЬКИХ ФЕРМІОНІВ

Для того чтобы убедиться, что дискретный ряд уровней энергии свободного электрона, движущегося в магнитном поле, не является одним из парадоксов, связанных с уравнением Дирака, а соответствует реальному физическому явлению, хотя еще и не обнаруженному экспериментально, полезно показать, что такое квантование неизбежно возникает во всякой форме квантовой теории — как в “полуквантовой” механике Бора, так и в волновой механике Шредингера и Дирака.

Квантование свободных электронов в магнитном поле.

М.П.БРОНШТЕЙН и Я. И. ФРЕНКЕЛЬ, ЖРФХО **62**,
485-494 (1930).

Матвей Петрович Бронштейн: 1906 - 1938.

Г.Е. ГОРЕЛИК, В.Я. ФРЕНКЕЛЬ, М.: НАУКА, 1990.

Цей Розділ написано за роботами [2–4, 6]. Як ми вже бачили, різниця між поведінкою частинок зі звичайним параболическим спектром та лінійним, діраківським спектром стає особливо яскравою у зовнішньому квантуючому магнітному полі B . Нагадаємо, що для вільних нерелятивістських електронів з масою m і циклотронною частотою ω_c^{NR} енергії рівнів Ландау дорівнюють

$$E_n = \hbar \omega_c^{\text{NR}} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad \omega_c^{\text{NR}} = \frac{eB}{mc} \quad (4.1)$$

тоді як для “релятивістських” безмасових частинок з (2.38) або (2.41) (див. також (2.42) та (3.42)) ми маємо

$$E_n = \pm \sqrt{\frac{e\hbar v_F^2 B 2n}{c}} \approx \pm 421 \sqrt{n} \sqrt{B[\text{T}]} \text{K} \approx \pm 36.3 \sqrt{n} \sqrt{B[\text{T}]} \text{meV}, \quad (4.2)$$

з $n = 0, 1, \dots$. Нагадаємо, що це відповідає значенню $v_F \approx 10^6$ м/с. Одна з найяскравіших кількісних різниць між цими спектрами вже була згадана у Розділі 2.6. Наприклад, у магнітному полі $B = 1$ Т відстань між E_1 і E_0 для релятивістських рівнів дорівнює у температурних одиницях 421 К, тоді як для нерелятивістських електронів $E_1 - E_0 = 1.4$ К. Навіть досить слабкого поля величиною $B \sim 10$ Т достатньо, щоб перевести “релятивістську” систему до екстремального квантового режиму [219], який призводить, наприклад, до такого явища як квантовий магнітоопір.

Іншою яскравою кількісною та якісною відзнакою діраківських квазічастинок є незвичайна форма квазікласичної умови квантування рівнів у магнітному полі

$$S(\epsilon) = \frac{2\pi eB}{\hbar c}(n + \gamma), \quad (4.3)$$

де S – площа перетину орбіти у $\mathbf{k}$ просторі, n – велике ціле число ($n > 0$), та γ – константа ($0 \leq \gamma \leq 1$). Для параболічного закону дисперсії $\gamma = 1/2$, що є загальноновживаною величиною при описі магнітних осциляцій (МО) у металах [220] так, що відповідна фаза Бері, $\gamma - 1/2$ дорівнює нулю. Як було вказано ще у класичній роботі Ліфшица та Косевича [221], у загальному випадку γ може відрізнятися від $1/2$. Однак, для діраківських квазічастинок фаза Бері є нетривіальною [222] і $\gamma = 0$ так, що загальноновживані вирази [220] потребують модифікації. Це значення $\gamma = 0$ було одержано в роботі [3], де ми дослідили МО густини станів (ГС), термодинамічного потенціалу, і намагніченості у КЕД₂₊₁ моделі зі спектром (2.38), який є узагальненням спектру (4.2). У наступній роботі [4] було розглянуто осциляції електричної провідності та теплопровідності.

Найбільш прозорим буде почати наш розгляд МО з густини станів.

4.1. Осциляції густини станів

Ми почнемо з розрахунку квазічастинкової ГС $D_0(\epsilon)$ у відсутності розсіяння на домішках ($\Gamma = 0$). Ця ГС виражається через спектральну густину (3.44) наступним чином

$$D_0(\epsilon) = \int_{\text{DC}} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \text{tr} [\gamma_0 A(\epsilon, \mathbf{p})], \quad (4.4)$$

де інтегрування ведеться по діраківському конусу DC так, щоб відповідно до (1.39) зберегти число станів у зоні Бріллюена. При $\Gamma_n(\omega) \rightarrow 0$ спектральна густина (3.44) набуває форму

$$A(\omega, \mathbf{p}) = \exp \left(-\frac{\mathbf{p}^2}{|eB|} \right) \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{(\gamma^0 M_n + \Delta) f_1(\mathbf{p}) + f_2(\mathbf{p})}{2M_n} \delta(\omega - M_n) + \frac{(\gamma^0 M_n - \Delta) f_1(\mathbf{p}) - f_2(\mathbf{p})}{2M_n} \delta(\omega + M_n) \right], \quad (4.5)$$

де ми поклали не тільки $\hbar = k_B = 1$, а також і $c = v_F = 1$ так, що $M_n = \sqrt{\Delta^2 + 2eBn}$. Як і раніше, у (4.4) ми також приймаємо, що сума по спіновим станам, які співпадають при відсутності зееманівського члену, вже включена в означення tr у $D_0(\epsilon)$. Це враховується відповідною величиною N_f .

Обчислюючи tr та розширюючи границі інтегрування по імпульсах до ∞ , ми одержуємо ГС як суму дельта функцій, відповідаючих рівням Ландау

$$D_0(\epsilon) = \frac{N_f eB}{2\pi} \left[\delta(\epsilon - \Delta) + \delta(\epsilon + \Delta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\delta(\epsilon - M_n) + \delta(\epsilon + M_n)) \right]. \quad (4.6)$$

Те, що зона Бріллюена має скінчений об'єм, якщо необхідно, може бути прийнятий до уваги далі, використавши скінчені границі інтегрування

та/або використавши те, що ГС $D(\epsilon)$ домножується $\theta(W - |\epsilon|)$, де W – параметр обрізання, наведений у (1.39).

Порівняння (3.44) з (4.5) показує, що уширення рівнів Ландау через розсіяння може бути враховано за правилом (див. також Розділ 3.3.1 і на початку Розділу 3.2)

$$\delta(\omega \pm M_n) \rightarrow \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{(\omega \pm M_n)^2 + \Gamma^2}. \quad (4.7)$$

Легко бачити, що це правило відповідає конволюції густини станів $D_0(\epsilon)$ з розподілом Лоренца $P_\Gamma(\omega) = \Gamma/[\pi(\omega^2 + \Gamma^2)]$

$$D(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega P_\Gamma(\omega - \epsilon) D_0(\omega), \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\omega P_\Gamma(\omega) = 1. \quad (4.8)$$

Взагалі кажучи, для феноменологічного врахування уширення рівнів Ландау замість розподілу Лоренца може бути використано будь-який інший розподіл ймовірності [220]. Далі ми використаємо розподіл Лоренца, який дозволяє аналітичні розрахунки. Фізично, розподіл Лоренца відповідає дуже сильному безладу, оскільки всі моменти цього розподілу розбігаються. Квазічастинкова ГС на поверхні Фермі може бути обчислена з (4.8) при $\epsilon = \mu$. Рівняння (4.6) можна також переписати як

$$\begin{aligned} D_0(\epsilon) &= \frac{N_f e B |\epsilon|}{\pi} \left[\delta(\epsilon^2 - \Delta^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta(\epsilon^2 - \Delta^2 - 2eBn) \right] \\ &= \frac{NeB}{2\pi} \text{sgn}(\epsilon) \frac{d}{d\epsilon} \left[\theta(\epsilon^2 - \Delta^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \theta(\epsilon^2 - \Delta^2 - 2eBn) \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

де θ – це сходинова функція. Відзначимо, що $N_f e B / (2\pi)$ – це густина рівнів Ландау. Використавши формулу сумування Пуассона

$$\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(x) dx + 2\text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} F(x) e^{2\pi i k x} dx, \quad (4.10)$$

ми знаходимо суму по рівням Ландау

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta(\epsilon^2 - \Delta^2 - 2eBn) = \theta(\epsilon^2 - \Delta^2) \left[-\frac{1}{2} + \frac{\epsilon^2 - \Delta^2}{2eB} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\pi k \frac{\epsilon^2 - \Delta^2}{eB}\right)}{\pi k} \right]. \quad (4.11)$$

Тепер, підставивши останній вираз у (4.9), ми одержуємо кінцевий вираз для ГС з нульовим уширенням рівнів, який може бути записаний у трьох еквівалентних формах

$$D_0(\epsilon) = \frac{N_f}{2\pi} \text{sgn}(\epsilon) \frac{d}{d\epsilon} \left\{ \theta(\epsilon^2 - \Delta^2) \left[\epsilon^2 - \Delta^2 + 2eB \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k(\epsilon^2 - \Delta^2)}{eB}\right) \right] \right\} \quad (4.12a)$$

$$= \frac{N_f}{2\pi} \text{sgn}(\epsilon) \frac{d}{d\epsilon} \left\{ \theta(\epsilon^2 - \Delta^2) \left[\epsilon^2 - \Delta^2 + \frac{2eB}{\pi} \tan^{-1} \left(\cot \left(\frac{\pi(\epsilon^2 - \Delta^2)}{2eB} \right) \right) \right] \right\} \quad (4.12b)$$

$$= \frac{N_f}{2\pi} \text{sgn}(\epsilon) \frac{d}{d\epsilon} \left\{ \theta(\epsilon^2 - \Delta^2) \left[\epsilon^2 - \Delta^2 - 2eB B_1 \left(\frac{\epsilon^2 - \Delta^2}{2eB} \right) \right] \right\}. \quad (4.12c)$$

Сума у (4.12b) була обчислена за формулою

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x)}{n} = \tan^{-1} \left(\frac{\sin(\pi x)}{1 - \cos(\pi x)} \right), \quad (4.13)$$

а рівняння (4.12c) записано з використанням поліномів Бернуллі $B_n(x)$, періодично продовжених поза інтервал $[0, 1]$:

$$B_n(x) = -\frac{2 \cdot n!}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \cos \left(2\pi k x - \frac{n\pi}{2} \right), \quad (4.14)$$

$$n \geq 2, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad n = 1, \quad 0 < x < 1.$$

Усі поліноми Бернуллі, які тут розглядаються, залежать від дробової частини $\text{mod}[x]$ їхнього аргументу x , тобто, $B_n(\text{mod}[x])$ (тут $\text{mod}[x]$ – це коротке позначення для $x \bmod 1$, тобто $\text{mod}[x] = x - [x]$, де $[x]$ це – найбільше ціле, що задовольняє $[x] \leq x$). Для скорочення ми опускаємо $\text{mod}[]$ і просто записуємо $B_n(x)$.

4.1.1. ГС у присутності розсіяння. У присутності розсіяння Γ густина станів теж може бути записана у формі східної до (4.12а) і відповідний вираз був одержаний у роботі [3]:

$$D(\epsilon) = \frac{N_f}{2\pi} \text{sgn}(\epsilon) \frac{d}{d\epsilon} \left\{ \theta(\epsilon^2 - \Delta^2 - \Gamma^2) \left[\epsilon^2 - \Delta^2 - \Gamma^2 + 2eB \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \sin \frac{\pi k(\epsilon^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)}{eB} \exp \left(-\frac{2\pi k|\epsilon|\Gamma}{eB} \right) \right] \right\}. \quad (4.15)$$

4.1.2. Порівняння МО у графені та 2D електронному газі. Ідентифікація діраківських квазічастинок з вимірювань фази ШдГ осциляцій. А зараз ми порівняємо (4.15) з відповідним виразом¹ (13) для ГС у 2D електронному газі з роботи [223] (в одиницях з $\hbar = 1$):

$$D^{\text{NR}}(\epsilon) = 2N_0 \left[1 + 2 \sum_{l=1}^{+\infty} (-1)^l \cos \left(2\pi l \frac{\epsilon}{\omega_c^{\text{NR}}} \right) \exp \left(-2\pi l \frac{\Gamma}{\omega_c^{\text{NR}}} \right) \right], \quad (4.16)$$

де $N_0 = m/(2\pi)$ – це ГС на один спін у 2D електронному газі.

4.1.2.1. Фаза МО. Ідентифікація діраківських квазічастинок з вимірювань фази ШдГ осциляцій. Легко побачити, що головна різниця між релятивістським та нерелятивістським випадками у факторі $(-1)^k$. Цей фактор у (4.16) з'явився через присутність нульової енергії, $E_0 = \omega_c/2$ у спектрі (4.1). З його урахуванням відповідний осцилюючий фактор дорівнює

$$D_{\text{osc}}^{\text{NR}}(\epsilon) \sim \sum_{l=1}^{+\infty} \cos \left[2\pi l \left(\frac{\epsilon}{\omega_c^{\text{NR}}} + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (4.17)$$

Взагалі, осцилюючий фактор, який входить у ГС, або в інші величини, що описують МО (див. також далі формулу (4.43), яка описує осциляції ШдГ), можна записати у наступній формі

$$D_{\text{osc}} \sim \sum_{k=1}^{+\infty} \cos \left[2\pi k \left(\frac{B_F}{B} + \frac{1}{2} + \beta \right) \right], \quad (4.18)$$

¹Цей вираз також містить спіновий фактор $R_s = \cos \left(2\pi l \frac{\mu_B B}{\omega_c} \right)$, який ми опускаємо через те, що він стає важливим тільки у великих полях.

де B_F – це частота осциляцій по $1/B$, а β – це їх фаза ($0 < \beta < 1$). Видно, що значення фази $\beta = 0$ (або $\beta = 1$) відповідає нерелятивістському 2D електронному газу (4.17), тоді як діраківські ферміони у (4.15) відповідають значенню $\beta = 1/2$.

Саме той факт, що виміри фази осциляцій ШдГ у графені [39,40] показали, що $\beta = 1/2$ і дозволив стверджувати, що квазічастинки у графені є діраківськими.

Далі, у Розділі 4.3.2.1 ми розглянемо різницю між амплітудами МО у 2D електронному газі і графені, що пов'язана з фактором Дінгла, $\exp(-2\pi l\Gamma/\omega_c)$, який вже присутній у формулах (4.15) і (4.16), та зі скінченністю температури.

4.2. Повздовжня та холлівська статичні провідності

Для розгляду осциляцій Шубнікова - де Гааза у Розділі 4.3 та квантового ефекту Холла у Розділі 5 нам потрібні вирази для статичних провідностей σ_{xx} і σ_{xy} . Ми почнемо з $\sigma_{xx}(\Omega \rightarrow 0)$, яка знову задана рівнянням (3.19), але вже з $\mathcal{A}_L(\omega, B, \Gamma, \Delta)$, що тепер залежить від поля B

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_L(\omega, B, \Gamma, \Delta) = & \frac{1}{\pi^2} \frac{\Gamma^2}{(v_F^2 e B / c)^2 + (2\omega\Gamma)^2} \\ & \times \left\{ 2\omega^2 + \frac{(\omega^2 + \Delta^2 + \Gamma^2)(v_F^2 e B / c)^2 - 2\omega^2(\omega^2 - \Delta^2 + \Gamma^2)v_F^2 |eB| / c}{(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)^2 + 4\omega^2\Gamma^2} \right. \\ & \left. - \frac{\omega(\omega^2 - \Delta^2 + \Gamma^2)}{\Gamma} \text{Im}\psi \left(\frac{\Delta^2 - (\omega + i\Gamma)^2}{2v_F^2 |eB| / c} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Розсіяння $\Gamma(\omega)$ у цьому виразі залишається Частотозалежним. Вираз (3.19) з ядром (4.19) був одержаний у роботах [6, 60] (див. [224], де це ядро було одержано при виведенні теплопровідності) за припущенням, що $\Gamma(\omega) = \text{const}$.

Таким же чином можна одержати статичну границю $\Omega \rightarrow 0$ у (3.47):

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(\mu, B, T) = & \frac{e^2 N_f \text{sgn}(eB)}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left\{ (-n_F(\omega))' \frac{B(\Gamma^2 - \Delta^2 + \omega^2)}{B^2 + 4\omega^2 \Gamma^2} \right. \\ & \times \left[\frac{2\omega\Gamma(B + \Gamma^2 + \Delta^2 - \omega^2)}{[\Gamma^2 + (\Delta - \omega)^2][\Gamma^2 + (\Delta + \omega)^2]} + \text{Im}\psi \left(\frac{\Delta^2 - (\omega + i\Gamma)^2}{2B} \right) \right] \\ & + n_F(\omega) \text{Im} \left[(1 + i\Gamma') \left(\frac{2(\omega + i\Gamma)}{B} + \frac{2(\omega + i\Gamma)}{\Delta^2 - (\omega + i\Gamma)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(\omega + i\Gamma)(\Delta^2 - (\omega + i\Gamma)^2)}{B^2} \psi' \left(\frac{\Delta^2 - (\omega + i\Gamma)^2}{2B} \right) \right) \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

Член з $n_F(\omega)$ можна проінтегрувати по частинам, що дає

$$\sigma_{xy} = e^2 N_f \text{sgn}(eB) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [-n_F'(\omega)] \mathcal{A}_H(\omega, B, \Gamma, \Delta), \quad (4.21)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_H(\omega, B, \Gamma, \Delta) = & \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \frac{B(\Gamma^2 - \Delta^2 + \omega^2)}{B^2 + 4\omega^2 \Gamma^2} \frac{2\omega\Gamma(B + \Gamma^2 + \Delta^2 - \omega^2)}{[\Gamma^2 + (\Delta - \omega)^2][\Gamma^2 + (\Delta + \omega)^2]} \right. \\ & + \frac{2\omega\Gamma}{B} + \arctan \frac{\Delta + \omega}{\Gamma} - \arctan \frac{\Delta - \omega}{\Gamma} - 2\text{Im} \ln \Gamma \left(\frac{\Delta^2 - (\omega + i\Gamma)^2}{2B} \right) \\ & \left. + \text{Im} \left[\left(\frac{B(\Gamma^2 - \Delta^2 + \omega^2)}{B^2 + 4\omega^2 \Gamma^2} + \frac{\Delta^2 - (\omega + i\Gamma)^2}{B} \right) \psi \left(\frac{\Delta^2 - (\omega + i\Gamma)^2}{2B} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Нагадаємо, що $B \equiv v_F^2 |eB|/c$. Оскільки ми розглядаємо Невзаємодіючі квазічастинки, температурна та μ залежності провідностей (3.19) і (4.21) містяться тільки у похідних Фермі розподілу. Спектральна функція (4.22) для холлівської провідності є більш складною, ніж відповідна функція (4.19) для σ_{xx} . Через це корисно розглянути прості граничні випадки, щоб встановити відповідність між нашими відповідями та результатами інших авторів.

4.2.1. Граничні випадки для σ_{xx} і σ_{xy} .

4.2.1.1. Класична границя $|eB|v_F^2/c \ll \Gamma^2, \mu^2$. Формула Друде-Зенера. Ми почнемо розгляд з класичної границі $B \rightarrow 0$ (або точніше, з $|eB|v_F^2/c \ll \Gamma^2, \mu^2$), коли квантування Ландау неважливе. Використавши асимптотичні вирази

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(z) &= \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + O\left(\frac{1}{z^5}\right), \\ \psi(z) &= \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} + O\left(\frac{1}{z^6}\right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

ми одержуємо для $\Delta = 0$ і $B \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_H(\omega, B, \Gamma, 0) &= \\ \frac{1}{2\pi^2} \frac{B\Gamma}{1 + B^2/(4\omega^2\Gamma^2)} \frac{(3\Gamma^4 - 8\Gamma^2\omega^2 - 3\omega^4)\Gamma\omega - 3(\Gamma^2 + \omega^2)^3 \arctan \frac{\omega}{\Gamma}}{6\Gamma^3\omega^2(\Gamma^2 + \omega^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Відповідно, при $T = 0$ ми знаходимо, що провідність дорівнює

$$\sigma_{xy}(\mu, B, 0) = -\frac{e^2 v_F^2 N_f e B \mu^2 \operatorname{sgn} \mu}{2\pi c} \frac{1}{(v_F^2 e B/c)^2 + 4\mu^2 \Gamma^2}, \quad \Gamma \ll |\mu|, \quad (4.25)$$

де ми відновили ev_F^2/c . У тій же самій границі діагональна провідність (3.19) дорівнює

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2}, \quad \sigma_0 = \frac{e^2 N_f |\mu|}{4\pi \Gamma}, \quad (4.26)$$

де середній час вільного пробігу квазічастинок $\tau = 1/2\Gamma$ увійшов замість транспортного часу, τ_{tr} оскільки ми знехтували вершинними поправками.

Також ми ввели циклотронну частоту,

$$\omega_c = \frac{|eB|v_F^2}{c|\mu|} = \frac{|eB|}{cm_c}, \quad m_c = \frac{|\mu|}{v_F^2}. \quad (4.27)$$

Тут у другій рівності ω_c записано через фіктивну “релятивістську” масу m_c , яка грає роль циклотронної маси у формулі Ліфшиця-Косевича [39] (див. Розділ 4.3). Це означення m_c показує, що в графені хімічний потенціал $|\mu|$ має також зміст циклотронної маси так, що остання легко контролюється зміною напруги на затворі [39].

Відповідно, холлівська провідність (4.25) також може бути переписана у формі Друде-Зенера

$$\sigma_{xy} = -\frac{\omega_c \tau \sigma_0 \operatorname{sgn}(eB) \operatorname{sgn} \mu}{1 + (\omega_c \tau)^2}, \quad (4.28)$$

Цей результат узгоджується з рівнянням (23) роботи [65], якщо взяти $\tau_{tr} = \tau = 1/2\Gamma$ та $N_f = 1$. При $N_f = 2$ всі наші результати для провідностей вдвічі більші, ніж відповідні результати з робіт [65, 181]. Для холлівського опору з (4.26) і (4.28) ми одержуємо

$$\rho_{xy} = -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} = \frac{B}{ec\rho}, \quad (4.29)$$

де ми також використали співвідношення (3.88) між хімічним потенціалом μ та густиною (дисбалансом густини) носіїв ρ . Таким чином, у слабких магнітних полях ми одержуємо стандартний вираз для коефіцієнта Холла $R_H = 1/ec\rho$, який не залежить від механізму розсіяння та використовується для виміру густини носіїв.

4.2.1.2. Границя $T \ll |\mu| \ll \sqrt{|eB|v_F^2/c}$, Г. Інший цікавий та придатний для аналітичного дослідження випадок: $T \ll |\mu| \ll \sqrt{|eB|}$, Г. Оскільки при $T \rightarrow 0$ похідна $-n'_F(\omega) \rightarrow \delta(\omega - \mu)$, холлівська провідність σ_{xy} прямо висловлюється через (4.22) так, що нам потрібно тільки мати

$$\mathcal{A}_H(\mu, B, \Gamma, 0) \simeq \frac{\mu B \Gamma}{2\pi^2} \left(\frac{4(B + \Gamma^2)}{B^2 \Gamma^2} - \frac{2\Gamma^2}{B^3} \psi' \left(\frac{\Gamma^2}{2B} \right) \right), \quad |\mu| \ll \sqrt{B}, \Gamma. \quad (4.30)$$

Підставивши в (4.30) асимптотичний розклад $\psi'(z)$, одержаний з (4.23), у границі $\sqrt{|eB|} \ll \Gamma$ ми маємо

$$\mathcal{A}_H(\mu, B, \Gamma, 0) \simeq -\frac{4\mu B}{3\pi^2 \Gamma^3}. \quad (4.31)$$

Наприкінці, відновивши множник ev_F^2/c , ми маємо

$$\sigma_{xy} = -\frac{4e^2 v_F^2 N_f e B \mu}{3\pi^2 c \Gamma^3}, \quad |\mu| \ll \sqrt{|eB|v_F^2/c} \ll \Gamma. \quad (4.32)$$

Як вже розглянуто у Розділі 3.2.1, рівняння (3.21), у той же самій границі провідність σ_{xx} стає універсальною.

У протилежній границі, $\sqrt{|eB|} \gg \Gamma$ ми знаходимо з (4.30), що $\mathcal{A}_H \simeq -2\mu/(\pi^2\Gamma)$ і, відповідно,

$$\sigma_{xy} = -\frac{2N_f e^2 \mu}{\pi^2 \Gamma}, \quad |\mu| \ll \Gamma \ll \sqrt{|eB|} v_F^2 / c. \quad (4.33)$$

Ця границя описує режим сильних полів з малою густиною носіїв.

4.3. Ефект Шубнікова - де Гааза

Осциляції Шубнікова - де Гааза в електричній провідності $\sigma_{xx}(\Omega)$ можуть бути знайдені з рівняння (3.19) де відповідна функція $\mathcal{A}_L(\omega, B, \Gamma, \Delta)$ задана рівнянням (4.19).

4.3.1. Одержання осциляцій з $\mathcal{A}$ з використанням властивостей ψ -функції. Осциляції $\mathcal{A}$ по $1/B$ можуть бути отримані використовуючи наступне співвідношення для ψ функції

$$\psi(-z) = \psi(z) + \frac{1}{z} + \pi \cot \pi z, \quad (4.34)$$

з якого слідує вираз

$$\begin{aligned} & \psi \left(\frac{\Delta^2 - (\epsilon + i\Gamma)^2}{2eB} \right) = \\ & \psi \left(\frac{\Delta^2 - (\epsilon + i\Gamma)^2}{2eB} \right) [\theta(\epsilon^2 - \Delta^2 - \Gamma^2) + \theta(\Delta^2 + \Gamma^2 - \epsilon^2)] \\ & = \text{Re} \psi \left(\frac{|\epsilon^2 - \Delta^2 - \Gamma^2| - 2i\epsilon\Gamma}{2eB} \right) \\ & - i \text{sgn}(\epsilon^2 - \Delta^2 - \Gamma^2) \text{Im} \psi \left(\frac{|\epsilon^2 - \Delta^2 - \Gamma^2| - 2i\epsilon\Gamma}{2eB} \right) \\ & + \theta(\epsilon^2 - \Delta^2 - \Gamma^2) \left[\frac{2eB}{\epsilon^2 - \Delta^2 - \Gamma^2 + 2i\epsilon\Gamma} + \pi \cot \pi \frac{\epsilon^2 - \Delta^2 - \Gamma^2 + 2i\epsilon\Gamma}{2eB} \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Знайшовши уявну частину останнього рівняння, ми одержуємо

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\psi \left(\frac{\Delta^2 - (\omega + i\Gamma)^2}{2eB} \right) = \\ - \operatorname{sgn}(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2) \operatorname{Im}\psi \left(\frac{|\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2| - 2i\omega\Gamma}{2eB} \right) \\ - \theta(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2) \times \\ \left[\frac{4eB\omega\Gamma}{(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)^2 + 4\omega^2\Gamma^2} + \pi \frac{\sinh(2\pi\omega\Gamma/eB)}{\cosh(2\pi\omega\Gamma/eB) - \cos[\pi(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)/eB]} \right]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Далі підставивши (4.36) у (4.19) ми маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_L(\omega, B, \Gamma, \Delta) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\Gamma^2}{(eB)^2 + (2\omega\Gamma)^2} \times \\ \left\{ 2\omega^2 + \frac{(eB)^2/2}{(\omega + \Delta)^2 + \Gamma^2} + \frac{(eB)^2/2}{(\omega - \Delta)^2 + \Gamma^2} - \frac{2\omega^2(\omega^2 - \Delta^2 + \Gamma^2)eB}{(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)^2 + 4\omega^2\Gamma^2} \right. \\ + \frac{\omega(\omega^2 - \Delta^2 + \Gamma^2)}{\Gamma} \left[\operatorname{sgn}(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2) \operatorname{Im}\psi \left(\frac{|\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2| - 2i\omega\Gamma}{2eB} \right) \right. \\ + \theta(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2) \left(\frac{4eB\omega\Gamma}{(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)^2 + 4\omega^2\Gamma^2} \right. \\ \left. \left. + \pi \frac{\sinh(2\pi\omega\Gamma/eB)}{\cosh(2\pi\omega\Gamma/eB) - \cos[\pi(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)/eB]} \right) \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

де осциляції містяться у останньому члені (4.37). Відзначимо, що дійсна частина аргументу ψ функції у (4.37) вже додатня і знаки перед ψ у (4.19) і (4.37) різними.

При $\omega^2 > \Delta^2 + \Gamma^2$ використавши співвідношення

$$\operatorname{Re} \frac{e^{-(a-ib)}}{1 - e^{-(a-ib)}} = \frac{\cos b - e^{-a}}{2(\cosh a - \cos b)}, \quad (4.38)$$

ми можемо розкласти

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(2\pi|\omega|\Gamma/eB)}{\cosh(2\pi\omega\Gamma/eB) - \cos[\pi(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)/eB]} = \\ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos[\pi k(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)/eB] \exp(-2\pi k|\omega|\Gamma/eB) \end{aligned} \quad (4.39)$$

та одержати кінцевий вираз для осцилюючої частини $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{osc}}(\omega, B, \Gamma, \Delta) = & \frac{2\omega\Gamma(\omega^2 - \Delta^2 + \Gamma^2)\theta(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)}{\pi((eB)^2 + (2\omega\Gamma)^2)} \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\pi k(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)}{eB} \exp\left(-\frac{2\pi k|\omega|\Gamma}{eB}\right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

4.3.1.1. Границя малих полів без осциляцій. Рівняння (4.37) може бути спрощено у границі малих полів:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_L(\omega, B, \Gamma, \Delta) = & \frac{1}{2\pi^2} \left[1 - \frac{\omega^2 - \Delta^2 + \Gamma^2}{2|\omega|\Gamma} \text{sign}(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2) \arctan \frac{2|\omega|\Gamma}{|\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2|} \right. \\ & + \theta(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2) \\ & \times \left. \frac{\pi(\omega^2 - \Delta^2 + \Gamma^2)}{2\omega\Gamma} \frac{\sinh(2\pi\omega\Gamma/eB)}{\cosh(2\pi\omega\Gamma/eB) - \cos[\pi(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)/eB]} \right], \end{aligned} \quad (4.41)$$

де ми утримали B тільки в осцилюючій частині $\mathcal{A}_L$. При $\omega^2 < \Delta^2 + \Gamma^2$, після використання співвідношення

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}, \quad x > 0, \quad (4.42)$$

останнє рівняння зводиться до вже відомого виразу (3.20).

4.3.2. Осцилююча частина електричної провідності. Ідентифікація діраківських квазічастинок з вимірювань температурного фактору ШдГ осциляцій. Підставивши (4.40) у (3.19), ми одержуємо вираз для осцилюючої частини провідності

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{osc}} = & \frac{4e^2|\mu|\Gamma(\mu^2 - \Delta^2 + \Gamma^2)\theta(\mu^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)}{\pi((eB)^2 + (2\mu\Gamma)^2)} \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left[\frac{\pi k(\mu^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)}{eB} \right] R_T(k, \mu) R_D(k, \mu), \end{aligned} \quad (4.43)$$

де ми ввели *температурний амплітудний фактор*

$$R_T(k, \mu) \equiv R_T(t_k) = \frac{t_k}{\sinh t_k}, \quad t_k = \frac{2\pi^2 k T \mu}{eB} \quad (R_T(0) = 1), \quad (4.44)$$

та фактор Дінгла

$$R_D(k, \mu) = \exp \left[-\frac{2\pi k |\mu| \Gamma}{eB} \right]. \quad (4.45)$$

При одержанні (4.43) ми зробили наступні припущення: (i) Спінове розщеплення не враховується, та (ii) Розглядається границя низьких температур, $T \rightarrow 0$. Для того, щоб одержати температурний фактор (4.44), після зсуву $\omega \rightarrow \omega + \mu$ та заміни $\omega \rightarrow 2T\omega$, утримуючи тільки лінійні по T члени в осцилюючій частині подінтегрального виразу, ми використали інтеграл

$$\int_0^\infty dx \frac{\cos bx}{\cosh^2 x} = \frac{\pi b/2}{\sinh \pi b/2} \quad (4.46)$$

Якщо ми розглянемо границю $B \rightarrow 0$, в якій функція

$$\frac{1}{\sinh[2\pi^2 k T |\mu| / (eB)]} \sim \exp \left[-\frac{2\pi^2 k T |\mu|}{eB} \right].$$

Порівняння цієї експоненти з експонентою у (4.45) дозволяє ввести *температуру Дінгла*

$$T_D = \frac{\Gamma}{\pi}, \quad (4.47)$$

таким чином, зменшення амплітуди через розсіяння квазічастинок на домішках може інтерпретуватись як ефективне підвищення температури з істинної температури T до $T + T_D$, тобто система не може бути охолоджена нижче мінімальної температури T_D . Відзначимо, що незважаючи на різницю між факторами Дінгла (4.45) та (4.48), сама величина T_D є однаковою в обидвох випадках.

4.3.2.1. Ідентифікація діраківських квазічастинок з вимірювань температурного фактору. Як і зсув фази, який обговорювався у Розділі 4.1.2.1, специфічна поведінка температурного фактора також допомогла встановити діраківський характер носіїв у графені. Суттєвим є те, що фактор Дінгла та температурний фактор для нерелятивістських систем

$$R_D^{\text{NR}}(k) = \exp \left(-2\pi k \frac{\Gamma}{\hbar \omega_c^{\text{NR}}} \right), \quad R_T^{\text{NR}}(k) = \frac{2\pi^2 k T / \hbar \omega_c^{\text{NR}}}{\sinh 2\pi^2 k T / \hbar \omega_c^{\text{NR}}} \quad (4.48)$$

з нерелятивістською циклотронною частотою (4.1) не залежать від концентрації носіїв, тоді як (4.45) та (4.44) залежать від концентрації через присутність μ (див. також вирази з [3], які описують дГВА ефект). Формально, виразам (4.45) та (4.44) можна також надати звичайну форму, якщо замінити $\hbar\omega_c^{\text{NR}}$ на релятивістську циклотронну частоту (енергією), $\hbar\omega_c = v_F^2 \hbar e B / (|\mu| c)$ у якій ми відновили величини $\hbar$, c і v_F . Більш того, навіть самій циклотронній частоті ω_c можна надати вигляд виразу (4.1), якщо (див. рівняння (4.27) вище) переписати її через “релятивістську” масу $m_c = |\mu|/v_F^2$. Якщо тепер використати співвідношення (3.88) між хімічним потенціалом μ та густиною (дисбалансом густини) носіїв ρ для релятивістських квазічастинок, то можна одержати, що циклотронна маса у графені, $m_c = (\pi \hbar^2 |\rho|/v_F^2)^{1/2}$ залежить від густини носіїв. Сама така залежність $m_c \sim \sqrt{|\rho|}$ була встановлена у роботах [39] (див. Рис. 3 d) та [40] (див. праву вставку на Рис. 3 а) при вимірюваннях концентраційної залежності R_T . Це стало доказом того, що квазічастинки в графені мають лінійний закон дисперсії.

4.4. Холлівський кут та коефіцієнт Нернста

Розвинений у дисертації підхід також дозволяє обрахувати інші транспортні коефіцієнти, такі як тензори теплопровідності $\kappa_{ij}(B, \Gamma, \Delta)$ [див. [4, 6, 224], де вивчалась діагональна теплопровідність] та Пельтьє (теплоелектричної) провідності $\beta_{ij}(B, \Gamma, \Delta)$. Обрахунок недіагональних коефіцієнтів має деякі тонкощі, оскільки звичайні вирази Кубо повинні бути змінені [225–227] щоб прийняти до уваги вплив магнетизації на електричний транспорт у зовнішньому полі. При низьких температурах можна використати розклад Зоммерфельда та виразити термоелектричний тензор через тензор провідності

$$\beta_{ij} = -\frac{\pi^2 T}{3 e} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \mu}. \quad (4.49)$$

Сигнал Нернста, який вимірюється у відсутності електричного струму, виражається через σ_{ij} та β_{ij} наступним чином

$$e_y(T, B) \equiv -\frac{E_y}{\nabla_x T} = \frac{\sigma_{xx}\beta_{xy} - \sigma_{xy}\beta_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}. \quad (4.50)$$

Оскільки у низькотемпературній границі дійсне рівняння (4.49), сигнал Нернста (4.50) може бути знайдено з похідної холлівського кута

$$\Theta_H = \arctan \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} \quad (4.51)$$

з співвідношення

$$e_y(T, B) = -\frac{\pi^2 T}{3e} \frac{\partial \Theta_H}{\partial \mu}. \quad (4.52)$$

4.4.1. Границі Друде-Зенера $|eB|v_F^2/c \ll \Gamma^2 \ll \mu^2$ та $T \ll |\mu| \ll \sqrt{|eB|v_F^2/c} \ll \Gamma$. У класичній границі (див. Розділ 4.2.1.1) σ_{xy} та σ_{xx} наведені, відповідно, у (4.28) та (4.26). Таким чином,

$$\Theta_H \simeq \tan \Theta_H = -\omega_c \tau \operatorname{sgn}(eB) \operatorname{sgn} \mu = -\frac{v_F^2 e B}{2c \Gamma \mu}. \quad (4.53)$$

Холлівський кут (4.28) є розбіжним при $\mu \rightarrow 0$, але треба розглядати тільки скінченні величини μ , оскільки цей вираз одержаний за припущенням $|eB|v_F^2/c \ll \Gamma^2 \ll \mu^2$. Відповідно, коли μ є малим, рівняння (4.28) дійсне тільки у дуже малих полях B . Коли характер носіїв змінюється з діркового ($\mu < 0$) на електронний ($\mu > 0$), холлівський кут також змінюється з від'ємного на додатний. Поведінка сигналу Нернста

$$e_y = -\frac{\pi^2 k_B^2 T v_F^2 B}{3 \cdot 2c \Gamma \mu^2} \quad (4.54)$$

віддзеркалює розбіжність холлівського кута при $\mu \rightarrow 0$, але $e_y < 0$ незалежно від знаку μ . [Постійна Больцмана k_B відновлена у (4.54).] Рівняння (4.53) та (4.54) узгоджуються з результатами [228], де у рамках теорії Больцмана був розглянутий ДГХ стан. Це не дивує, оскільки саме ця границя описується теорією Друде-Зенера.

Оскільки в іншому режимі $T \ll |\mu| \ll \sqrt{|eB|v_F^2/c} \ll \Gamma$ провідності σ_{xx} та σ_{xy} задані, відповідно, рівняннями (3.21) та (4.32), холлівський кут дорівнює

$$\Theta_H = -\frac{4v_F^2 e B \mu}{3c \Gamma^3}. \quad (4.55)$$

Таким чином, сигнал Нернста є додатним і дорівнює

$$e_y \simeq \frac{4\pi^2 k_B^2 T v_F^2 B}{9 c \Gamma^3}. \quad (4.56)$$

У чистих системах сигнал Нернста (4.56) може бути дуже великим, оскільки $e_y \sim \tau^3 \sim \Gamma^{-3}$ [228]. Цей режим є досяжним у графені, оскільки змінюючи напругу на затворі, можна наблизитися до точки Дірака, де $\mu \approx 0$. *Тобто великий та додатний сигнал Нернста є ще однією відзнакою діраківських квазічастинок, передбаченою у дисертації.* Відзначимо, що саме така поведінка сигналу Нернста мала місце у найновіших експериментах [45–47], де спостерігався дуже великий пік Нернста ($50 \mu\text{V/K}$ при 8 Т) у точці Дірака. У немагнітних металах цей сигнал дуже малий ($\sim 10 \text{ nV/K}$ на tesla), а у феромагнетиках спін-орбітальна взаємодія може привести до великого спонтанного сигналу Нернста. Наприкінці відзначимо, що оскільки діраківські квазічастинки виникають у сценаріях з незвичайними зарядовими хвилями [126, 229], у роботі [229] великий і додатний сигнал e_y розглядається як ознака таких зарядових хвиль.

4.4.2. Ілюстрації аналітичних результатів та визначення щільності Δ з вимірювань холлівського кута. На Рис. 4.1 ми показуємо залежність холлівського кута (4.51) від μ для двох різних величин поля B . Випадок малих полів B , показаний на Рис. 4.1 ліворуч, узгоджується з аналітичними виразами, які обговорювались вище. Дійсно, коли $|\mu|$ зменшується, Θ_H спочатку зростає [див. (4.53)], а потім перетинає нуль [див. (4.55)]. На Рис. 4.2 ми показуємо поведінку сигналу Нернста. Коли $|\mu|$ є великим, а B малим, то $e_y < 0$ досить мале. Однак, коли $|\mu|$ зменшується, то e_y

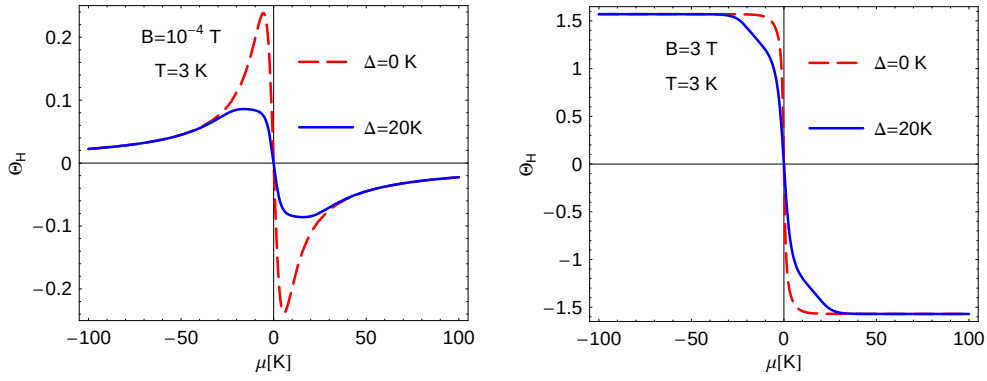


Рис. 4.1. (Кольоровий в електронній версії [2].) Холлівський кут Θ_H як функція хімічного потенціалу μ для двох різних значень Δ при $T = 3$ К, $\Gamma = 1$ К та $eB \rightarrow (4.5 \times 10^4 \text{ K}^2)B(\text{T})$. Ліворуч: $B = 10^{-4}$ Т. Праворуч: $B = 3$ Т.

стає додатним та великим ($\sim 100\mu\text{V/K}$) у згоді з (4.56). Коли поле B підвищується, величина $e_y(\mu = 0)$ ще зростає і для скінченного μ є осциляції $e_y(\mu)$. Проаналізувавши Рис. 4.1 та 4.2, можна побачити іншу цікаву властивість, а саме у присутності скінченої щілини Δ залежність $\Theta_H(\mu, \Delta)$ на Рис. 4.1 поблизу $\mu \approx 0$ не настільки крута, якщо порівнювати з випадком $\Delta = 0$. Відповідно, ця властивість відображається у сигналі Нернста так, що скінчене Δ проявляється у залежності $e_y(\mu, \Delta)$ як заглиблення. Таким чином, ми бачимо, що уважне дослідження сигналу Нернста $e_y(\mu, \Delta)$ може допомогти виявити ненульову щілину у графені.

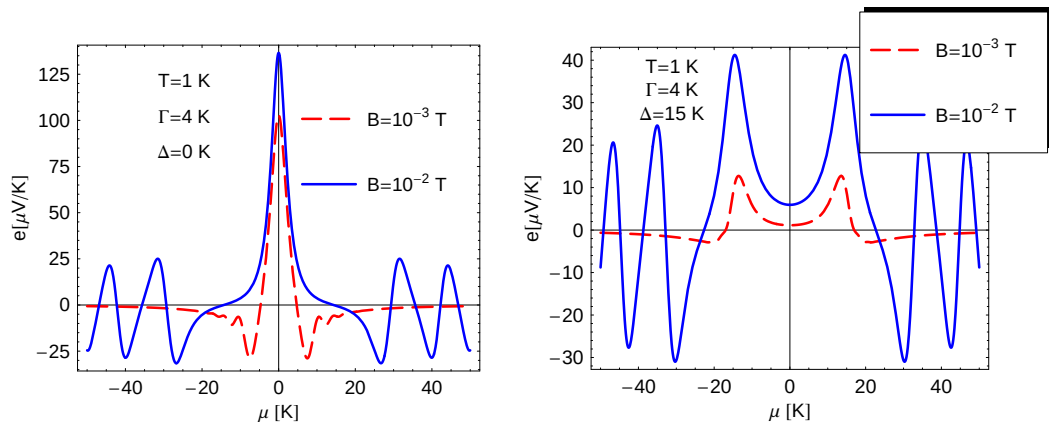


Рис. 4.2. (Кольоровий у електронній версії [2].) Сигнал Нернста e_y у $\mu\text{V/K}$ як функція хімічного потенціалу μ для двох різних значень B при $T = 3 \text{ K}$, $\Gamma = 1 \text{ K}$ та $eB \rightarrow (4.5 \times 10^4 \text{ K}^2)B(\text{T})$. Зліва: $\Delta = 0 \text{ K}$. Справа: $\Delta = 15 \text{ K}$.

РОЗДІЛ 5

КВАНТОВИЙ ЕФЕКТ ХОЛЛА У ГРАФЕНІ

More Is Different.

P.W. ANDERSON, SCIENCE **177**, 393 (1972).

Цей Розділ написано за роботами [1, 2], де вивчався напівцілий,¹ або аномальний КЕХ у графені. У подальших роботах [9–12] досліджувався КЕХ у сильних полях, коли з’являються нові плато з факторами заповнення $\nu = 0, \pm 1$. Ми почнемо з розгляду напівцілого КЕХ (1.1) у Розділах 5.1 та 5.2, а потім у Розділі 5.3 перейдемо до розгляду крайових станів у КЕХ для випадку сильних полів.

5.1. Теоретичне підґрунтя

Походження фундаментального виразу

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{h}n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.1)$$

для квантованої холлівської провідності дуже часто пояснюється з використанням нерелятивістських моделей. Проте цього, у [232, 233] було розглянуто (3+1) вимірне рівняння Дірака для обмеженого у площині електронного газу і показано, що релятивістські поправки до (5.1) відсутні. Однак, істотний прогрес, який привів до створення графену [35, 48], поставив таке ж саме питання, але вже у набагато практичнішій площині. Як ми бачили у Розділах 1 та 2, графен добре описується ефективною низькоенергетичною безмасовою 2 + 1-вимірною теорією Дірака [34]. З кількісної

¹Ця назва походить від того, що квантування (1.1) можна вважати напівцілим, якщо винести множник 4, пов’язаний з долинним та спіновим виродженням. Тільки у 2009 у підвішеному графені побачили [230, 231] справжній дробний КЕХ з фактором виродження $\pm 1/3$.

енергетичної точки зору, як ми вже обговорювали на початку Розділу 4, оскільки відстань між рівнями Ландау для діраківських ферміонів є на порядки більшою ніж для звичайних масивних електронів, КЕХ у графені повинен спостерігатися при набагато вищих температурах і нижчих магнітних полях, ніж у звичайних надпровідниках [див. рівняння (3.42) та (4.2)]. З якісної точки зору, у Розділі 4.1.2.1 ми бачили, що фаза МО для діраківських ферміонів зсунута на π відносно фази осциляцій 2D електронному газі. Відповідно до сказаного, можна задати питання як ця фундаментальна різниця між властивостями рівнів Ландау у теорії Дірака (див. рівняння (4.2), а також Розділ 2.6) та теорії Шрьодінгера (див. рівняння (4.1)) може спостерігатись експериментально у ЦКЕХ? Головна мета цього Розділу показати як діраківська динаміка у графені призводить до виникнення незвичайного квантування холлівської провідності, яке описується рівнянням (1.1) (див. огляд у Розділі 1.1). У роботі [1] ми довели, що правило квантування (4.2) пов'язано з *квантовою аномалією* НРЛ з $n = 0$, тобто з тим, що цей рівень має *вдвічі менше виродження* ніж рівні з $n > 0$ (див. Розділ 2.6 і Рис. 2.1) та його енергія не залежить від магнітного поля.

5.2. Незвичайне (напівціле) квантування холлівської провідності у графені

Є два шляхи одержати вираз для σ_{xy} у чистій границі. Перший варіант полягає у тому, щоб перейти до границі $\Gamma \rightarrow 0$ прямо у рівнянні (3.11), як було зроблено у [60]. Друга можливість, розглянута у Додатку Ж полягає у використанні загального виразу (4.21) і дає (тут поки що $\hbar = 1$):

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2 N_f \text{sgn}(eB)}{4\pi} \times \left[\tanh \frac{\mu + \Delta}{2T} + \tanh \frac{\mu - \Delta}{2T} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tanh \frac{\mu + M_n}{2T} + \tanh \frac{\mu - M_n}{2T} \right) \right]. \quad (5.2)$$

Відзначимо, що σ_{xy} є непарною функцією μ . Перегрупувавши члени (5.2) і використавши $\tanh(\omega - \mu)/2T = 1 - 2n_F(\omega)$, можна переписати (5.2) через розподіли Фермі

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2 N_f \text{sgn}(eB)}{2\pi} \times \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) [n_F(M_n) + n_F(-M_n) - n_F(M_{n+1}) - n_F(-M_{n+1})], \quad (5.3)$$

де енергія M_n задана у (3.40). Це представлення для σ_{xy} є еквівалентом рівняння (18) з роботи [234], яке було одержано для ідеального двовимірного електронного газу (2DEG)

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) [n_F(\omega_n^{\text{NR}}) - n_F(\omega_{n+1}^{\text{NR}})], \quad \omega_n^{\text{NR}} = \frac{eB}{mc} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (5.4)$$

де m – це ефективна маса носіїв з параболічним законом дисперсії [див. також (4.1)]. Різниця між положенням та виродженням рівнів Ландау для діраківських квазічастинок та для нерелятивістського електронного газу закодована у енергіях $E_n = \pm M_n \sim \pm \sqrt{n}$ [див. (4.2)] та $\omega_n^{\text{NR}} \sim (n + 1/2)$ [див. (4.1)] з $n = 0, 1, 2, \dots$, та у відмінних факторах $2n + 1$ та $n + 1$ у рівняннях Eqs. (5.3) та (5.4), відповідно.

А зараз ми перепишемо (5.2) наступним чином [60]

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2 N_f \text{sgn}(eB) \text{sgn}\mu}{2\pi\hbar} \nu_B, \quad (5.5)$$

з фактором заповнення²

$$\text{sgn}\mu \nu_B = \frac{1}{2} \left[\tanh \frac{\mu + \Delta}{2T} + \tanh \frac{\mu - \Delta}{2T} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tanh \frac{\mu + M_n}{2T} + \tanh \frac{\mu - M_n}{2T} \right) \right]. \quad (5.6)$$

²Оскільки член Зеємана є малим, наше визначення [1,2] фактору заповнення $\nu_B = 2\pi\hbar c|\rho|/(N_f|eB|)$ також включає спінове виродження так, що для $N_f = 2$ він дорівнює половині від звичайно використовуваного [235] фактору заповнення, $\nu = 2\pi\hbar c|\rho|/|eB|$. У Розділі 5.3, де розглядаються сильні поля і зеєманівське розщеплення стає істотним, ми також переходимо на стандартне означення фактору заповнення.

Оскільки ми розглядаємо квантовану холлівську провідність, ми відновимо постійну Планка $h = 2\pi\hbar$ у (5.5) і далі. Обравши для визначеності $\mu > 0$, $\Delta = 0$ та використавши, що $\tanh(\omega/2T) = \text{sgn}(\omega)$ при $T \rightarrow 0$, ми одержуємо з (5.5), що

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= -\frac{e^2 N_f \text{sgn}(eB)}{2\pi\hbar} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \theta(\mu - M_n) \right] \\ &= -\frac{e^2 N_f \text{sgn}(eB)}{h} \left(1 + 2 \left[\frac{\mu^2 c}{2\hbar |eB| v_F^2} \right] \right),\end{aligned}\quad (5.7)$$

де $[x]$ означає цілу частину x . Звичайна феноменологічна аргументація (див., наприклад, [235]) про появу плато у ЦКЕХ стверджує, що у присутності безпорядку залежність хімічного потенціалу від густини (дисбалансу густини) носіїв $\mu(\rho)$ стає гладкою функцією, тоді як функція $\sigma_{xy}(\mu)$ залишається сходишко-подібною. Відповідно, коли у (5.7) враховано спінове виродження і обрано $N_f = 2$, ми одержуємо правило холлівського квантування (1.1). Класична провідність (див. також (4.29))

$$\sigma_{xy} = -\frac{ec\rho}{B}. \quad (5.8)$$

співпадає з квантовою холлівською провідністю (5.7) тільки при непарних факторах заповнення, $\nu_B = 2n + 1$ як це показано на Рис. 5.1), де для порівняння також побудована залежність $\sigma_{xx}(\nu_B)$. У Розділі 4 було показано, що осцилююча частина діагональної провідності (4.43) має вигляд

$$\sigma_{xx} \propto \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left[\frac{\pi k \mu^2}{\hbar v_F^2 |eB|/c} \right] R_T(k) R_D(k) R_s(k), \quad (5.9)$$

де R_T , R_D і R_s є, відповідно, температурним, Дінгла та спіновим факторами. Використавши співвідношення (3.88) дійсне при $T = \Gamma = B = 0$, а саме $\mu^2 = \pi \hbar^2 v_F^2 |\rho|$ можна, як і очікувалося, побачити, що мінімуми σ_{xx} , також припадають на фактори заповнення $\nu_B = 2n + 1$,³ тоді як піки σ_{xx}

³Саме це спостереження надихнуло експериментаторів на пошук незвичайного КЕХ у графені, оскільки позиції мінімумів σ_{xx} відповідають густинам при котрих рівні Ландау заповнені і вказують на позиції майбутніх плато у КЕХ.

співпадають зі сходами $\sigma_{xy}(\nu_B)$.

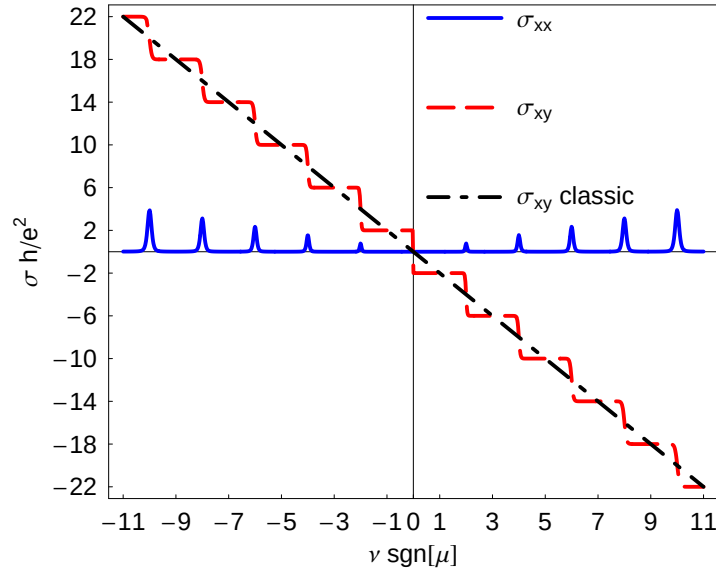


Рис. 5.1. (Кольоровий у електронній версії [2].) Холлівська провідність σ_{xy} та діагональна провідність σ_{xx} у одиницях e^2/h як функція фактору заповнення ν_B при $T = 2\text{K}$, $\Gamma = 1\text{K}$ та $B = 2\text{T}$. Ми використовуємо $eB \rightarrow (4.5 \times 10^4 \text{K}^2)B(\text{T})$ та приймаємо, що $\Delta = 0$. Прямая лінія відповідає класичній залежності $\sigma_{xy} = -ec|\rho|\text{sgn}\mu/B$ [див. (5.8)].

Поява непарних чисел у (1.1) замість усіх цілих заповнень пов'язана з тим, що виродження $n = 0$ рівня Ландау дорівнює тільки половині виродження рівнів з $n > 0$. Як ми вже обговорювали у Розділі 2.6 (див. також Додатки А та Б) найнижчий рівень Ландау у незвідному представленні $2+1$ вимірної діраківської теорії є спеціальним, оскільки залежно від того яке з двох нееквівалентних незвідних представлень використано, цей рівень заповнений або електронами (ферміонами), або дірками (антиферміонами), тоді як при $n \geq 1$ існують розв'язки рівняння Дірака, які описують як електрони так і дірки. діраківський лагранжіан (1.51) (а також (2.30)), який включає пару незалежних **K** точок на поверхні Фермі графену, записано з використанням зберігаючого парність 4×4 звідного представлення γ ма-

триць (див. Розділ 2.3.1), яке містить в собі два незвідних представлення з різними парностями. Таким чином, рівні Ландау пов'язані з цими $\mathbf{K}$ точками об'єднуються у повний спектр діраківських ферміонів у графені [див. Рис. 3.1, рівняння (2.38) та Додатки А та Б]. Суперпозиція обидвох спектрів, які відповідають двом нееквівалентним незвідним представленням, ясно пояснює половинне заповнення найнижчого рівня Ландау у графені, оскільки цей рівень може бути зайнятим дірками з $\mathbf{K}_+$ точки (коли $\mu < 0$) та електронами з $\mathbf{K}_-$ точки (коли $\mu > 0$). Ця властивість НРЛ з $n = 0$ не залежить від того чи має щілина Δ скінчену величину, або $\Delta = 0$. З іншого боку, на вищих рівнях можуть знаходитися або електрони (коли $\mu > 0$), або дірки (коли $\mu < 0$) з обидвох $\mathbf{K}_+$ та $\mathbf{K}_-$ точок. Інша цікава властивість квантування (5.7) (див. також Рис. 5.1) полягає у тому, що $\sigma_{xy} = \pm 2e^2/h$ при заповненні $\nu_B < 1$ так, що σ_{xy} перетинає нуль тільки коли μ змінює знак. В протилежність цьому, у звичайному ЦКЕХ $\sigma_{xy} = 0$ при $\nu_B < 1$.

Як вже говорилося, інший спосіб пояснити походження “дивних” непарних (або напівцілих, якщо винести за дужки фактор виродження 4) пов'язаний з положеннями мінімумів осциляцій σ_{xx} . У Розділі 4 ми показали, що ці незвичайні положення спричиняються зсувом фази на π між квантовими магнітними осциляціями релятивістських і нерелятивістських квазічастинок. Можна одержати більш глибокий погляд на цей зсув, якщо розглянути оператор $\mathbb{S} = (1/2) \int d^2r [\Psi^\dagger(t, \mathbf{r}), S_z \Psi(t, \mathbf{r})]$, де $[\cdot, \cdot]$ це – комутатор, а матриця [зараз ми користуємося представленням γ -матриць (1.49)]

$$S_z = I_2 \otimes (\sigma_3/2) = \begin{pmatrix} \sigma_3/2 & 0 \\ 0 & \sigma_3/2 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Оператор $\mathbb{S}$ генерує обертання спінорів у площині на кут ϕ , що описуються оператором $U(\phi) = \exp(i\phi\mathbb{S})$. Природньо інтерпретувати $\mathbb{S}$ як оператор *псевдоспіну*, оскільки ми використовуємо спінори пов'язані з двома підгратками у графені (див. Розділ 1.1.2). Кожна $\mathbf{K}$ точка на поверхні Фермі

графену характеризується двохкомпонентним спінором і існує дві нееквівалентних $\mathbf{K}_{\pm}$ точки. Є спокуса скористатися прямою аналогією між оператором *псевдоспіну* $\mathbb{S}$ і оператором *спіну* у $3 + 1$ вимірній теорії Дірака. Це, однак, вводить в оману оскільки само поняття спіну у $2 + 1$ та $3 + 1$ вимірах змістовне тільки для масивної частинки. Як ми вже обговорювали у Розділі 2.2, для безмасової частинки у $3 + 1$ вимірі замість спіну вводиться спіральність, яка характеризує проекцію її спіну на напрямок імпульсу. Оскільки у $2 + 1$ вимірі нема можливості зробити обертання навколо лежачого у двовимірній площині напрямку імпульсу квазічастинки, концепція спіральності у цьому випадку втрачає сенс. Дійсно, можна перевірити, що оператор псевдоспіну $\mathbb{S}$ тотожно дорівнює нулю для безмасових діраківських частинок.

Незважаючи на це, нижче ми покажемо, що для безмасових квазічастинок у графені у зовнішньому магнітному полі псевдоспін набуває новий зміст, близько пов'язаний з фазою Беррі, яка у іншому контексті обговорювалась у [40, 236]. Особливо відзначимо (роботу [237], де досліджується зв'язок між напівкласичною фазою адіабатичною фазою Беррі і показано, що вони співпадають для лінійної діраківської дисперсії, але відрізняються якщо у діраківський точці відкривається щілина.

Можна одержати (див. Додаток Б) при $eB > 0$ та $N_f = 1$, що

$$\mathbb{S} = \frac{1}{2} \left[\sum_{m=-\infty}^0 \left(b_{0m}^{\dagger} b_{0m} - c_{0m}^{\dagger} c_{0m} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^n \frac{\Delta}{M_n} \left(a_{nm}^{\dagger} a_{nm} + b_{nm}^{\dagger} b_{nm} - c_{nm}^{\dagger} c_{nm} - d_{nm}^{\dagger} d_{nm} \right) \right], \quad (5.11)$$

де a_{nm} (b_{nm}) це – оператори знищення ферміонів з енергіями M_n , які задані у (3.40) (антиферміонів з енергіями $-M_n$) у $\mathbf{K}_+$ точці та c_{nm} (d_{nm}) це – оператори знищення ферміонів (антиферміонів) у $\mathbf{K}_-$ точці. Квантове число $m \leq n$ у (5.11) відображує виродження кожного з рівней по кутовому

моменту. Цікаво, що у границі $\Delta \rightarrow 0$ тільки рівень з $n = 0$ дає внесок у $\mathbb{S}$ так, що поняття псевдоспіну має зміст тільки для станів з найнижчого рівня Ландау, тобто для нульових мод.

Розглянемо обертання на кут $\phi = 2\pi$ квазічастинкового стану $|n = 0\rangle = b_{0m}^\dagger|0\rangle$, який знаходиться на $n = 0$ рівні. Тут $|0\rangle$ є вакуумним станом. При $\Delta = 0$ можна показати, що $U(2\pi)|n = 0\rangle = \exp(i\pi)|n = 0\rangle$, тобто після обертання на 2π квазічастинковий стан з НРЛ змінює свою фазу на π . З іншого боку, стани з рівнів з $n \geq 1$ залишаються інваріантними, оскільки при $\Delta = 0$ оператор $U(\phi)$ не містить у собі операторів, які діють на ці стани. Саме через цей зсув фази Беррі для безмасових квазічастинок з $n = 0$ рівня у зовнішньому полі, носії у графені не можуть розглядатися просто у якості легких носіїв зі скінченною масою (див. також Розділ 4.1.2.1). Відзначимо, що у $3 + 1$ вимірній теорії Дірака всі ферміонні стани набувають зсув по фазі π після обертання на $\phi = 2\pi$.

Якби $n = 0$ рівень мав би таке ж саме виродження, як і вищі рівні, холлівська провідність мала б більш звичайне квантування

$$\sigma_{xy}^{\text{semicond}} = -\frac{4e^2}{h}n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.12)$$

яке можна очікувати для двозонного [перша зона відповідає електронам з $\omega_n = M_n - \mu$ та друга зона, відповідно, діркам з $\omega_n = -M_n - \mu$], дводолинного [відповідаючого $\mathbf{K}_+$ and $\mathbf{K}_-$ точкам] напівпровідника. Знову, у (5.12) припущено, що $e, B, \mu > 0$. Таким чином, можна прямо побачити що вдвічі менша висота плато з $\sigma_{xy} = \pm 2e^2/h$ прямо вказує на те, що НРЛ з $E_n = 0$ містить в собі тільки половину звичайного числа станів з зони провідності, а другу половину бере з зони валентності. Це й призводить до зсуву на $1/2$ у виразі (1.1) для ЦКЕХ у графені відносно звичайного ЦКЕХ (5.12).

5.3. Квантовий ефект Холла у графені у сильних магнітних полях: крайові стани, масові та спінові щілини у графені

За всю почти двадцатилетнюю историю исследования краевых состояний в режиме квантового эффекта Холла так и не было опубликовано обзоров на русском языке.

Э.В. ДЕВЯТОВ, УФН **177**, 207 (2007).

Як вже було вказано на початку цього Розділу, ця частина написана за роботами [9–12] і почнемо ми її з огляду головних експериментальних результатів та літератури.

5.3.1. Короткий огляд літератури по порушенню симетрії в графені та формулювання проблеми. Тоді як досі багато незвичайних властивостей графену було пояснено у рамках невзаємодіючої теорії Дірака, ефекти взаємодії між квазічастинками є істотними. Саме вони відповідають за появу нових плато у КЕХ з факторами заповнення $\nu = 0, \pm 1, \pm 4$, які були повідомлені у [117] при досить сильних магнітних полях, $B \gtrsim 20$ Т (див. також [118, 172, 238–241]).

У 2006 році ми запропонували [9] динамічний механізм, який базується на феномені *магнітного каталізу* [242] що може пояснити $\nu = 0$ і $\nu = \pm 1$ плато у холлівській провідності графену [117]. Подальші експерименти [118, 172] виявили декілька додаткових властивостей $\nu = 0$ та $\nu = \pm 1$ плато, які, здається, потребують модифікації сценарію [9]. Найбільш важливою серед них є досить спеціальна дисипативна природа діагонального транспорту на $\nu = 0$ плато. Це факт інтерпретується таким чином, що $\nu = 0$ плато пов'язується зі спіноюю щілиною, а не щілиною, яка зв'язана з масою [118, 162]. Цей висновок підтримується тим фактом, що енергія активації для $\nu = 0$ плато зникає [118, 172]. Відзначимо, однак, найновішу роботу [240], де вказано, що ця енергія скінчена. Крім цього, у

[118, 162] пропонується, що у діагональному транспорті домінують безщілинні крайові стани, які повинні існувати якщо НРЛ розщеплений великою спіновою щільною.

Що стосується $\nu = \pm 1$ плато, вимірювання енергії термічної активації $\Delta E(\nu = \pm 1)$ вказують на його зв'язок з орбітальною динамікою. Дійсно, енергія термічної активації залежить тільки від перпендикулярної компоненти магнітного поля [117, 172]. На динамічну природу $\nu = \pm 1$ плато також наштовхує той факт, що $\Delta E(\nu = \pm 1)$ є проційним $\sqrt{B}$ [117, 172].⁴

Відзначимо, що на відміну від попереднього, $\nu = \pm 4$ пов'язані з зеєманівським розщепленням $n = 1$ рівня Ландау. Відповідна енергія активації $\Delta E(\nu = \pm 4)$ лінійно залежить від повного магнітного поля і має таку ж саму величину як енергія Зеємана [117, 172]

$$E_Z = \frac{g_L}{2} \mu_B B \simeq 0.67 B[\text{T}] \text{ K}, \quad (5.13)$$

де $\mu_B = e\hbar/(2mc)$ це – магнетон Бора та $g_L \simeq 2$ – фактор Ланде у графені.

З теоретичної точки зору, $\nu = 0$ та $\nu = \pm 1$ плато походять від зняття наближеного виродження чотирьох підрівнів, що входять до НРЛ. Це виродження є наслідком “ароматної” $U(4)$ симетрії континуального низькоенергетичного опису графену у відсутності зеєманівської взаємодії (див. рівняння (1.51) та Розділ 2.1.2). Нагадаємо, що ця симетрія оперує у просторах підгратка-долина та спіну. Якщо ми приймемо, що $\nu = 0$ плато пов'язано зі спіновою щільною, тоді $\nu = \pm 1$ плато повинні пов'язуватись з порушенням симетрії підгратка-долина. Здається, це узгоджується зі спостереженнями у [172].

⁴Слід зауважити, що на найсучасніший момент (жовтень 2009) окрім групи N. Ong [240], ще дві експериментальні групи очолені E. Andrei [230] та P. Kim [231] надійшли до висновку, що $\nu = 0$ плато має скінчену енергію активації. Це означає, що відповідна щільна така зв'язана з масою і, ймовірно, з порушенням симетрії між підгратками. Група A. Geim, однак, підтверджує наявність безщілинних станів. Оскільки всі ці результати одержані при дещо різних умовах вимірювань, остаточний консенсусу щодо природи $\nu = 0, \pm 1$ станів ще не досягнуто.

Існує два суттєво різних підходи, які розглядають різні можливості порушення наближеної $U(4)$ симетрії у графені (див. короткий огляд [79]).

- (i) Сценарій квантового холлівського феромагнетизму (КХФ) [120, 163, 165], який пов'язаний з теорією спінового розщеплення рівнів Ландау за рахунок обмінної взаємодії [243]. Цей сценарій використовує аналогію між чотирикратним виродженням рівнів Ландау у графені, що пов'язано з $U(4)$ симетрією, та $SU(4)$ феромагнетизмом, який раніше вивчався у двошарових КЕХ системах [244]. У обидвох випадках $SU(4)$ симетрія пов'язана з псевдоспіновим ступенем свободи, але у графені псевдоспін пов'язаний з індексом підгратки, тоді як у двошарових КЕХ системах псевдоспін пов'язаний з шаровим індексом. У сценарії КХФ можливі плато КЕХ, які відповідають усім цілим значенням фактора заповнення ν , якщо зразки достатньо чисті. Відповідні параметри порядку описуються густинами зберігаючихся струмів, які зв'язані з діагональними генераторами $SU(4) \subset U(4)$ групи симетрій.
- (ii) Сценарій магнітного каталізу [2, 107, 108, 166–168, 173] який використовує ідею спонтанного порушення симетрії через ексітонну (кіральну) конденсацію [58–60, 105, 106, 242, 245–247]. Така конденсація створює ненульовий член з діраківською масою у низькоенергетичній теорії графену. Відзначимо, що спочатку дослідження сценарію магнітного каталізу в графені були мотивовані експериментальними дослідженнями піролітичного графіту, див., наприклад, роботи [248–250].

Як підкреслено у [9], плато $\nu = 0$ може з'явитися або завдяки підсиленій спіновій щілині, або масовому члену. Підсилена спінова щілина порушує наближену $U(4)$ симетрію до $U(2)_- \times U(2)_+$ підгрупи, яка діє у просторі підгратка-долина і не переміщує стани зі спином вгору ($\sigma = +$) та вниз ($\sigma = -$). Ненульовий член з діраківською масою порушує симетрію до

іншої $U(2) \times U(2)'$ підгрупи, яка діє у спіновому просторі. Будьякого з них досить для того щоб частково зняти чотирьохкратне виродження НРЛ, як це необхідно для появи КЕХ стану з $\nu = 0$. Структура енергетичних підрівнів для НРЛ у випадку ненульової спінової щільності показана на лівій частині Рис. 5.2.

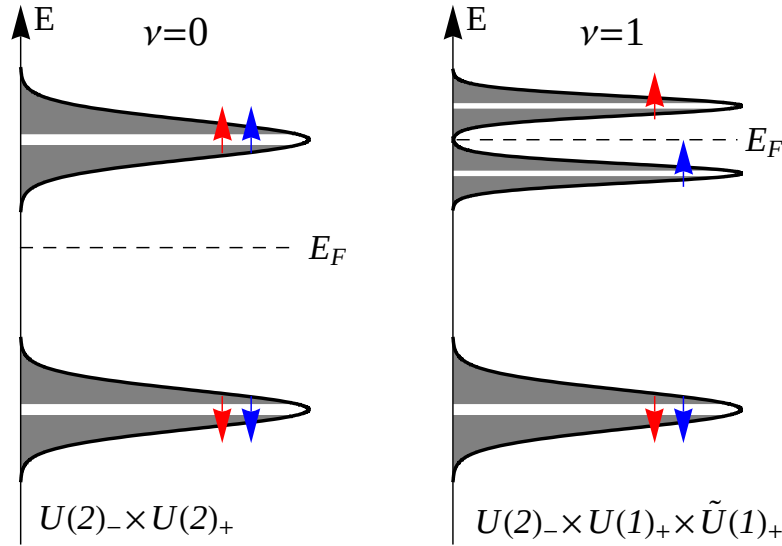


Рис. 5.2. (Кольоровий у електронній версії [10].) Ілюстрація розщеплення найнижчого рівня Ландау (НРЛ), яке необхідно щоб пояснити існування $\nu = 0$ та $\nu = 1$ плато у КЕХ у графені.

Для того, щоб пояснити КЕХ плато з $\nu = \pm 1$, необхідні два різні параметри порядку. (Відзначимо, що вибір двох параметрів порядку з заданими симетрійними властивостями не є однозначним [170, 171].) Це вже видно з симетрійних аргументів. Наприклад, найпростіша з можливих структура енергетичних підрівнів для $\nu = +1$ стану показана правій частині Рис. 5.2. Відповідне розщеплення можливо тільки якщо $U(2)_- \times U(2)_+$ симетрія подальше зменшується, наприклад, щонайменше до підгрупи $U(2)_- \times U(1)_+ \times \tilde{U}(1)_+$. Це, однак, є неможливим без наявності додаткових параметрів порядку, які порушують симетрію підгратка-долина, яка описується простою групою Лі $SU(2)_+ \subset U(2)_+$.

Підхід, який комбінує обидва механізми КХФ та магнітного каталізу

в одній схемі був нещодавно запропонований у [170, 171]. За допомогою багатопараметричного варіаційного анзацу для пропагатора квазічастинок було знайдено, що параметри порядку для КХФ (μ_σ і $\tilde{\mu}_\sigma$) та магнітного каталізу (Δ_σ і $\tilde{\Delta}_\sigma$) з необхідністю співіснують. У симетрійних термінах, параметри порядку першого типу, тобто μ_σ та Δ_σ з нерівними величинами для $\sigma = \pm$, порушують $U(4)$ симетрію до $U(2)_- \times U(2)_+$ як це робить член Зеємана. Параметри порядку іншого типу $\tilde{\mu}_\sigma$ та $\tilde{\Delta}_\sigma$ є триплетами відносно групи $SU(2)_\sigma$, яка є найбільшою неабелевою підгрупою $U(2)_\sigma$. Таким чином, коли або $\tilde{\mu}_\sigma$, або $\tilde{\Delta}_\sigma$ мають ненульове вакуумне середнє, $SU(2)_\sigma$ симетрія порушена до $U(1)_\sigma$.

Мотивацією робіт [10–12] було вивчити питання про сумісність мікроскопічної динаміки, описаної у [170, 171] з присутністю безщільних крайових станів, які у роботах [118, 172] вважались необхідними у стані з $\nu = 0$. Головні результати наступні.

У випадку графеновій напівплощини [10, 11] (графенова стрічка також розглядалась у [12]) з зигзагоподібною границею безщільні крайові стани у спектрі є тільки коли спінова щілина більша ніж масова щілина. У випадку кріслоподібної границі існування безщільних крайових станів залежить від специфічного типу масової щілини.

Далі цей Розділ організовано наступним чином. У Розділі 5.3.2 ми представляємо модельний лагранжевіан, який описує найбільш загальну динамічну ситуацію з параметрами порядку для КХФ та магнітного каталізу, яка була запропонована у [170, 171]. Спектр відповідного рівняння Дірака розглядається у Розділі 5.3.3. Крайові стани на зигзагоподібному краю обговорюються у Розділі 5.3.4. Отримані результати обговорюються у Розділі 5.3.5.

5.3.2. Модель з динамічними щілинами. Квадратична частина лагранжевіану для квазічастинок може бути записана у наступній формі (див.

Розділ 1.1.4.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{\sigma=\pm} \hbar \bar{\Psi}_{\sigma}(t, \mathbf{r}) \left(i\gamma^0 \partial_t + iv_F \gamma^1 D_x + iv_F \gamma^2 D_y \right) \Psi_{\sigma}(t, \mathbf{r}) + \mathcal{L}_{\text{mass}} \\ & + \sum_{\sigma=\pm} (\mu_{\sigma} \rho_{\sigma} + \tilde{\mu}_{\sigma} \tilde{\rho}_{\sigma}), \end{aligned} \quad (5.14)$$

де $\Psi_{\sigma}^T = (\psi_{K_+A\sigma}, \psi_{K_+B\sigma}, \psi_{K_-B\sigma}, \psi_{K_-A\sigma})$, як було визначено у Розділі 1.1.4.1 в рівнянні (1.40). Як звичайно, $\bar{\Psi}_{\sigma} = \Psi_{\sigma}^{\dagger} \gamma^0$ – діраківськи спряжений спіно́р, а оператори $\rho_{\sigma} \equiv \bar{\Psi}_{\sigma} \gamma^0 \Psi_{\sigma}$ та $\tilde{\rho}_{\sigma} \equiv \bar{\Psi}_{\sigma} \gamma^0 \gamma^5 \Psi_{\sigma}$ – відповідні густини для зберегаючихся зарядів, відповідно, пов’язані з хімічними потенціалами μ_{σ} та $\tilde{\mu}_{\sigma}$ ($\sigma = \pm$). 4×4 матриці γ^{ν} належать до редукованого кірального представлення діраківської алгебри (1.44).

Загальні вирази для масового члену $\mathcal{L}_{\text{mass}}$ у густині лагранжіану можуть включати як синглетний (Δ_{σ}) так і триплетний ($\tilde{\Delta}_{\sigma}$) внески відносно долинної групи симетрії $SU(2)_{\sigma}$. Поява масового члену може бути пов’язана, наприклад, з механізмом магнітного каталізу. У представленні з Розділу 1, його явна форма має вигляд [10]

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = \sum_{\sigma=\pm} \bar{\Psi}_{\sigma}(t, \mathbf{r}) \left(\Delta_{\sigma} \gamma^3 \gamma^5 - \tilde{\Delta}_{\sigma} \gamma^3 \right) \Psi_{\sigma}(t, \mathbf{r}). \quad (5.15)$$

Згідно то Таблиці 2.1 з Розділу 2, оператори, пов’язані з масами Δ_{σ} та $\tilde{\Delta}_{\sigma}$ є, відповідно, непарними і парними відносно обернення часу. Що стосується триплетного масового члену $\tilde{\Delta}_{\sigma} \bar{\Psi}_{\sigma} \gamma^3 \Psi_{\sigma}$, то він також може бути записаний у інших еквівалентних формах $\tilde{\Delta}_{\sigma} \bar{\Psi}_{\sigma} i \gamma^5 \Psi_{\sigma}$ or $\tilde{\Delta}_{\sigma} \bar{\Psi}_{\sigma} \Psi_{\sigma}$.⁵ Усі ці представлення є еквівалентними, оскільки вони зв’язані перетвореннями $SU(2)_{\sigma}$ групи. Для наших цілей, однак, найбільш зручна форма (5.15) котра, як показано у Розділі 2.5.1, має інтерпретацію у означеннях первинної моделі сильного зв’язку.

⁵Строго кажучи, для того щоб зберігти $SU(2)_{\sigma}$ долинну симетрію моделі, всі три компоненти триплету повинні ввійти в густину лагранжіану рівним чином. Основний стан, однак, відповідає специфічному “вакуумного стану”, тобто характеризується незникаючим вакуумним середнім оператору $\bar{\Psi}_{\sigma} \gamma^3 \Psi_{\sigma}$.

Хімічні потенціали μ_s та $\tilde{\mu}_s$ у лагранжевій густині (5.14) дозволяють включити параметри порядку, які відповідають КХФ у динамічну модель [170, 171]. Для зручності подальшого розгляду і фізичної інтерпретації мас і хімічних потенціалів нагадаємо явні вирази відповідних операторів у лагранжевій густині в термінах окремих блохівських компонент спінорів, які вже були виписані у Розділі 2.5.1:

$$\tilde{\Delta}_\sigma : \quad \bar{\Psi}_\sigma \gamma^3 \Psi_\sigma = \psi_{K_+A\sigma}^\dagger \psi_{K_+A\sigma} + \psi_{K_-A\sigma}^\dagger \psi_{K_-A\sigma} - \psi_{K_+B\sigma}^\dagger \psi_{K_+B\sigma} - \psi_{K_-B\sigma}^\dagger \psi_{K_-B\sigma}, \quad (5.16)$$

$$\Delta_\sigma : \quad \bar{\Psi}_\sigma \gamma^3 \gamma^5 \Psi_\sigma = \psi_{K_+A\sigma}^\dagger \psi_{K_+A\sigma} - \psi_{K_-A\sigma}^\dagger \psi_{K_-A\sigma} - \psi_{K_+B\sigma}^\dagger \psi_{K_+B\sigma} + \psi_{K_-B\sigma}^\dagger \psi_{K_-B\sigma}, \quad (5.17)$$

$$\tilde{\mu}_\sigma : \quad \bar{\Psi}_\sigma \gamma^0 \gamma^5 \Psi_\sigma = \psi_{K_+A\sigma}^\dagger \psi_{K_+A\sigma} - \psi_{K_-A\sigma}^\dagger \psi_{K_-A\sigma} + \psi_{K_+B\sigma}^\dagger \psi_{K_+B\sigma} - \psi_{K_-B\sigma}^\dagger \psi_{K_-B\sigma}, \quad (5.18)$$

$$\mu_\sigma : \quad \bar{\Psi}_\sigma \gamma^0 \Psi_\sigma = \psi_{K_+A\sigma}^\dagger \psi_{K_+A\sigma} + \psi_{K_-A\sigma}^\dagger \psi_{K_-A\sigma} + \psi_{K_+B\sigma}^\dagger \psi_{K_+B\sigma} + \psi_{K_-B\sigma}^\dagger \psi_{K_-B\sigma}. \quad (5.19)$$

Ці оператори входять у (5.14) разом з параметрами Δ_σ , $\tilde{\Delta}_\sigma$, μ_σ , та $\tilde{\mu}_\sigma$, які грають роль множників Лагранжа. Таким чином, величини мас та хімічних потенціалів відносні концентрації електронів у різних підгратках та долинах. Вони визначаються рівняннями для щілин з робот [170, 171]. Як видно з рівняння (5.16) (див. також (2.33)), тріплетна маса $\tilde{\Delta}_s$ пов'язана з дисбалансом густини на A та B підгратках.

Величина синглетної діраківської маси Δ_σ [див. (5.17)] контролює змішаний дисбаланс густини у двох долинах та підгратках. Східним чином, хімічний потенціал $\tilde{\mu}_\sigma$ пов'язаний з дисбалансом густини між двома долинами. Наприкінці, μ_σ це – звичайний хімічний потенціал, пов'язаний з повною густиною носіїв з певним спіном.

Взагалі кажучи, у зразку зі скінченими розмірами величина обмінної та Хартрі взаємодій, яка визначає величини параметрів Δ_σ , $\tilde{\Delta}_\sigma$, μ_σ , та $\tilde{\mu}_\sigma$, повинна залежати від відстані до країв і, відповідно, обчислюватись само-

узгодженим чином. Цей дослід крайових станів зроблено за припущенням, що щілини та хімічні потенціали є однорідними. Ми сподіваємося, що цей ідеалізований розгляд є достатнім для якісного (але не кількісного) опису крайових станів.

5.3.3. Рівняння Дірака у зовнішньому полі. У цьому Розділі ми розглянемо низькоенергетичний квазічастинковий спектр для найбільш загального набору параметрів. Δ_σ , $\tilde{\Delta}_\sigma$, μ_σ , та $\tilde{\mu}_\sigma$. Наш розгляд узагальнює розв'язок рівняння Дірака наведене у Додатку А. Відповідне рівняння Дірака приймає вигляд:

$$\left[i\gamma^0 \hbar \partial_t + i\hbar v_F \gamma^1 D_x + i\hbar v_F \gamma^2 D_y + \mu \gamma^0 + \tilde{\mu} \gamma^0 \gamma^5 + \Delta \gamma^3 \gamma^5 - \tilde{\Delta} \gamma^3 \right] \Psi(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (5.20)$$

Для скорочення позначень, ми опускаємо спіновий індекс тут і далі. Для розв'язку з власною енергією $\Psi(t, \mathbf{r}) = e^{-iEt/\hbar} \Psi(\mathbf{r})$, Це рівняння спрощується до

$$\left[\hbar v_F (-\alpha_1 i D_x - \alpha_2 i D_y) - \mu - \tilde{\mu} \gamma^5 - i\Delta \gamma^1 \gamma^2 + \tilde{\Delta} \alpha_3 \right] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}), \quad (5.21)$$

де α -матриці $\alpha_i = \gamma^0 \gamma^i$ явно виписані у (1.42). Таким чином, подібно до (А.5) та (А.6), ми, відповідно, маємо

$$\begin{pmatrix} -\mu^{(+)} - \Delta^{(-)} & -\hbar v_F (iD_x + D_y) \\ -\hbar v_F (iD_x - D_y) & -\mu^{(+)} + \Delta^{(-)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{AK_+} \\ \psi_{BK_+} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_{AK_+} \\ \psi_{BK_+} \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

та

$$\begin{pmatrix} -\mu^{(-)} - \Delta^{(+)} & \hbar v_F (iD_x + D_y) \\ \hbar v_F (iD_x - D_y) & -\mu^{(-)} + \Delta^{(+)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{BK_-} \\ \psi_{AK_-} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_{BK_-} \\ \psi_{AK_-} \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Тут ми ввели наступні позначення: $\mu^{(\pm)} \equiv \mu \pm \tilde{\mu}$ та $\Delta^{(\pm)} \equiv \Delta \pm \tilde{\Delta}$. У кожній системі рівнянь ми можемо виразити B -компоненти спінів через

A -компоненти,

$$\begin{aligned}\psi_{BK_+} &= -\frac{\hbar v_F (iD_x - D_y)}{E + \mu^{(+)} - \Delta^{(-)}} \psi_{AK_+}, \\ \psi_{BK_-} &= \frac{\hbar v_F (iD_x + D_y)}{E + \mu^{(-)} + \Delta^{(+)}} \psi_{AK_-}.\end{aligned}\quad (5.24)$$

Тоді, у K_+ та K_- долинах, двохкомпонентні спінори можуть бути записані наступним чином:

$$\begin{aligned}\psi_{K_+} &= A_1 \begin{pmatrix} \psi_{AK_+} \\ -\frac{\hbar v_F (iD_x - D_y)}{E + \mu^{(+)} - \Delta^{(-)}} \psi_{AK_+} \end{pmatrix}, \\ \psi_{K_-} &= A_2 \begin{pmatrix} \frac{\hbar v_F (iD_x + D_y)}{E + \mu^{(-)} + \Delta^{(+)}} \psi_{AK_-} \\ \psi_{AK_-} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (5.25)$$

Константи $A_{1,2}$ в (5.25) визначаються за допомогою умов нормування (А.9) з Додатку А, де k, k' and n, n' є квантовими числами (наприклад, хвильовим вектором вздовж x або y напрямку та індекс рівня Ландау), які характеризують власні стани діраківських квазічастинок у магнітному полі.

Як слідує з (5.22) та (5.23), A -компоненти спінорів задовольняють наступним рівнянням другого порядку:

$$\begin{aligned}(-l^2 D_x^2 - l^2 D_y^2 + 1) \psi_{AK_+} &= 2\lambda_+ \psi_{AK_+}, \\ (-l^2 D_x^2 - l^2 D_y^2 - 1) \psi_{AK_-} &= 2\lambda_- \psi_{AK_-}.\end{aligned}\quad (5.26)$$

Тут ми ввели два безрозмірних параметри $\lambda_{\pm} \equiv \left[(E + \mu^{(\pm)})^2 - (\Delta^{(\mp)})^2 \right] / \epsilon_0^2$ (порівняй з (А.12)), а $\epsilon_0 \equiv \sqrt{2\hbar v_F^2 |eB| / c}$ це – енергетичний масштаб Ландау та магнітна довжина $l \equiv \sqrt{\hbar c / |eB|}$.

У наступному калібруванні Ландау $(A_x, A_y) = (-By, 0)$, диференційні рівняння (5.26) не залежать явним чином від координати x і, таким чином, хвильові функції є плоскими хвилями у x -напрямку,

$$\begin{aligned}\psi_{AK_+}(\mathbf{r}, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} e^{ikx} u_+(y, k), & \psi_{BK_+} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} e^{ikx} v_+(y, k), \\ \psi_{AK_-}(\mathbf{r}, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} e^{ikx} u_-(y, k), & \psi_{BK_-} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} e^{ikx} v_-(y, k),\end{aligned}\quad (5.27)$$

де функції $u_{\pm}(y, k)$ залежать тільки від однієї безрозмірної комбінації змінних, $\xi = y/l - kl$, та задовольняють наступним рівнянням:

$$(\partial_{\xi}^2 - \xi^2 \mp 1 + 2\lambda_{\pm}) u_{\pm}(\xi) = 0. \quad (5.28)$$

Згідно з (5.25), усунені компоненти $v_{\pm}(y, k) \equiv v_{\pm}(\xi)$ задаються виразом

$$v_{\pm}(\xi) = \frac{\epsilon_0 (\partial_{\xi} \mp \xi) u_{\pm}(\xi)}{\sqrt{2}(E + \mu^{(\pm)} \mp \Delta^{(\mp)})}. \quad (5.29)$$

Як ми вже бачили у Додатку А, у нескінченій системі, яка немає границь, нормованні розв'язки рівняння (5.28) висловлюються через поліноми Герміта, $u(\xi), v(\xi) \propto e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)$, при умові, що параметри $\lambda_{\pm}$ приймають цілі невід'ємні значення, тобто

$$\lambda_{\pm} = n, \quad \text{де } n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.30)$$

Відзначимо, що Відзначимо, що величина енергії $E = -\mu^{(+)} + \Delta^{(-)}$ відповідає нормованому НРЛ стану з K_+ долини. Для такого стану очевидна сингулярність у $v_+(\xi)$ компоненті хвильової функції [див. (5.29)] прибирається відповідним переозначенням константи нормування. Це, однак, це не так для енергії $E = -\mu^{(-)} - \Delta^{(+)}$ з K_- долини. Прямий аналіз, зроблений у Додатку А показує що єдиний стан з $n = 0$ у K_+ долині має енергію $E = -\mu^{(+)} + \Delta^{(-)}$ і розташований тільки на B підгратці, тоді як у K_- долині цей стан з $n = 0$ має енергію $E = -\mu^{(-)} + \Delta^{(+)}$ та розташований на A підгратці.

5.3.4. Крайові стани для зигзагоподібного краю. Існує багато досліджень крайових станів у графені при різних умовах [66, 109–111, 118, 162, 251–256]. Тут ми розглянемо моношар з графену на напівплощині $y > 0$ з зигзагоподібним краєм, який паралельний x , саме як показано на Рис. 5.3.

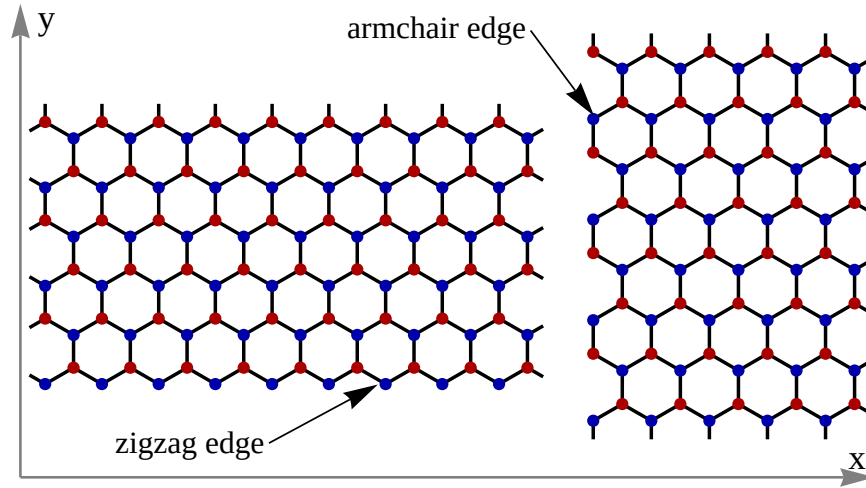


Рис. 5.3. (Кольоровий у електронній версії [10].) Графенова гратка з зигзагоподібним та кріслоподібним краями.

Для того щоб одержати енергетичний спектр необхідно доповнити диференціальні рівняння для функцій $u_{\pm}(y, k)$ та $v_{\pm}(y, k)$ відповідними граничними умовами. Такі умови можуть бути одержані з моделі сильного зв'язку [109, 118, 162, 251, 254, 255]. Наприклад, для зигзагоподібного краю паралельного осі x , хвильова функція на A атомах повинна зникати при $y = 0$,

$$u_{+}(y = 0) = u_{-}(y = 0) = 0. \quad (5.31)$$

Загальний розв'язок (5.28) записується через функції параболічного циліндру (Вебера) $U(a, z)$ та $V(a, z)$ [257]

$$u_{+}(\xi) = C_1 \frac{E + \mu^{(+)} - \Delta^{(-)}}{\epsilon_0} U\left(\frac{1 - 2\lambda_{+}}{2}, \sqrt{2}\xi\right) + C_2 V\left(\frac{1 - 2\lambda_{+}}{2}, \sqrt{2}\xi\right), \quad (5.32a)$$

$$u_{-}(\xi) = C_3 U\left(-\frac{1 + 2\lambda_{-}}{2}, \sqrt{2}\xi\right) + C_4 \frac{E + \mu^{(-)} + \Delta^{(+)}}{\epsilon_0} V\left(-\frac{1 + 2\lambda_{-}}{2}, \sqrt{2}\xi\right). \quad (5.32b)$$

Тут для зручності подальшого аналізу константи інтегрування C_1 та C_4 введені разом з додатковими факторами $(E + \mu^{(+)} - \Delta^{(-)})/\epsilon_0$ та

$(E + \mu^{(-)} + \Delta^{(+)}) / \epsilon_0$, відповідно.

У нескінченій системі без країв нормовані хвильові функції містять тільки одну функцію $U(a, z)$ параболічного циліндру, яка є обмеженою при $z \rightarrow \pm\infty$, при умові $a = -n - 1/2$ з невід'ємним цілим n . У цьому випадку дійсне наступне співвідношення: $U(-n - 1/2, z) = 2^{-n/2} e^{-z^2/4} H_n(z/\sqrt{2})$, де $H_n(z)$ це – поліноми Герміта. Таким чином, як вказано у Розділі 5.3.3, спектр дорівнює $\lambda_{\pm} = n$, де $n = 0, 1, 2, \dots$ (Особлива природа НРЛ повинна бути врахована: при $n = 0$ є тільки два, а не чотири можливих значення власної енергій, які відповідають нормованим станам.)

Використовуючи наступні рекурентні співвідношення [257] для функцій параболічного циліндру

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} + \frac{z}{2}\right) U(a, z) &= -\left(a + \frac{1}{2}\right) U(a + 1, z), \\ \left(\frac{d}{dz} - \frac{z}{2}\right) U(a, z) &= U(a - 1, z), \\ \left(\frac{d}{dz} + \frac{z}{2}\right) V(a, z) &= V(a + 1, z), \\ \left(\frac{d}{dz} - \frac{z}{2}\right) V(a, z) &= \left(a - \frac{1}{2}\right) V(a - 1, z), \end{aligned} \tag{5.33}$$

а також рівняння (5.29), ми одержуємо $v_{\pm}(\xi)$ функції,

$$v_+(\xi) = -C_1 U\left(-\frac{1 + 2\lambda_+}{2}, \sqrt{2}\xi\right) - C_2 \frac{E + \mu^{(+)} + \Delta^{(-)}}{\epsilon_0} V\left(-\frac{1 + 2\lambda_+}{2}, \sqrt{2}\xi\right), \tag{5.34a}$$

$$v_-(\xi) = C_3 \frac{E + \mu^{(-)} - \Delta^{(+)}}{\epsilon_0} U\left(\frac{1 - 2\lambda_-}{2}, \sqrt{2}\xi\right) + C_4 V\left(\frac{1 - 2\lambda_-}{2}, \sqrt{2}\xi\right). \tag{5.34b}$$

На напівплощині нормовані хвильові функції також записуються тільки через $U(a, z)$ -функцію, яка експоненційно спадає при $z \rightarrow +\infty$, тоді як фун-

кція $V(a, z)$ експоненційно зростає у обидвох напрямках $z \rightarrow \pm\infty$. Таким чином, ми маємо, що $C_2 = 0$ та $C_4 = 0$. Але на відміну від нескінченної площини, на напівплощині немає обмеження на параметр a , щоб він був від'ємним напівцілим.

При $C_2 = C_4 = 0$, зигзагоподібні граничні умови [(5.31)] ведуть до системи рівнянь

$$\begin{aligned} C_1 \left(E + \mu^{(+)} - \Delta^{(-)} \right) D_{\lambda_+-1}(-\sqrt{2}kl) &= 0, \\ C_3 D_{\lambda_-}(-\sqrt{2}kl) &= 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Тут ми ввели іншу функцію параболічного циліндру, $D_\nu(z)$ [257], яка зв'язана з функцією $U(a, z)$ простим чином,

$$U(a, z) = D_{-a-1/2}(z). \quad (5.36)$$

Існує два типи нетривіальних розв'язків, які задовольняють граничним умовам (5.35). По-перше, взявши $C_1 \neq 0$ та $C_3 = 0$, ми знаходимо, що рівняння на власні значення зводиться до $E = -\mu^{(+)} + \Delta^{(-)}$, або

$$\text{I.} \quad D_{\lambda_+-1}(-kl\sqrt{2}) = 0. \quad (5.37)$$

Розв'язки цього типу мають хвильові функції розташовані у K_+ долині,

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad u_+(\xi) &= C_1 \frac{E + \mu^{(+)} - \Delta^{(-)}}{\epsilon_0} D_{\lambda_+-1}(\sqrt{2}\xi), \\ v_+(\xi) &= -C_1 D_{\lambda_+}(\sqrt{2}\xi), \end{aligned} \quad (5.38)$$

та $u_-(\xi) = v_-(\xi) = 0$. Інший клас розв'язків є таким, що $C_1 = 0$ та $C_3 \neq 0$, а власні значення енергії задовольняють рівнянню:

$$\text{II.} \quad D_{\lambda_-}(-kl\sqrt{2}) = 0. \quad (5.39)$$

Хвильові функції цього типу розв'язків не зникають тільки у K_- долині, тобто

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad u_-(\xi) &= C_3 D_{\lambda_-}(\sqrt{2}\xi), \\ v_-(\xi) &= C_3 \frac{E + \mu^{(-)} - \Delta^{(+)}}{\epsilon_0} D_{\lambda_--1}(\sqrt{2}\xi), \end{aligned} \quad (5.40)$$

та $u_+(\xi) = v_+(\xi) = 0$. Використавши загальні властивості функції $D_\nu(z)$, ми можемо зрозуміти деякі якісні властивості енергетичного спектру не розв'язуючи рівняння чисельно. Нам потрібно тільки знати, що для дійсних ν та z , функція $D_\nu(z)$ не має дійсних нулів якщо ν є від'ємним, та має точно $[\nu + 1]$ дійсний нуль, коли ν є невід'ємним [258]. Тут $[\nu + 1]$ означає цілу частину $\nu + 1$. Маючи на увазі цю властивість, бачимо, що необхідною умовою для того, щоб рівняння (5.37) задовольнялось, є $\lambda_+ \geq 1$. Включаючи також можливість існування бездисперсійної моди, яка визначається умовою $E = -\mu^{(+)} + \Delta^{(-)}$, ми бачимо, що повний спектр у K_+ долині (розв'язки типу I) має наступну загальну структуру:

$$\begin{aligned} E_0(k) &= -\mu^{(+)} + \Delta^{(-)}, \\ E_n(k) &= -\mu^{(+)} \pm \sqrt{\lambda_+(kl, n)\epsilon_0^2 + (\Delta^{(-)})^2}, \quad \text{де } \lambda_+(kl, n) \geq 1, \end{aligned} \quad (5.41)$$

де $n = 1, 2, \dots$ це – індекс який нумерує гілки розв'язків. Використавши асимптотичну поведінку функцій параболічного циліндру, можна показати, що $\lambda_+(kl, n) \simeq n$ коли $kl \gg 1$. Саме це й очікується, оскільки великі значення kl відповідають станам усередині, з хвильовими функціями локалізованими поблизу від $\xi \simeq 0$, або еквівалентно $y/l \simeq kl$. (У системах без країв індекс n співпадає зі звичайним індексом рівня Ландау.)

Східним чином ми можемо визначити структуру спектру у K_- долині (розв'язки типу II). Необхідною умовою існування дійсного розв'язку рівняння (5.39) є $\lambda_- \geq 0$. Таким чином, енергетичний спектр у K_- долині має наступну загальну структуру:

$$E_n(k) = -\mu^{(-)} \pm \sqrt{\lambda_-(kl, n)\epsilon_0^2 + (\Delta^{(+)})^2}, \quad \text{where } \lambda_-(kl, n) \geq 0, \quad (5.42)$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$. Знову, можна показати, що $\lambda_-(kl, n) \simeq n$ коли $kl \gg 1$. Наші чисельні результати для $\lambda_\pm$ як функцій kl представлені на Рис. 5.4. Суцільна та штрихова лінії, відповідно, показують λ_+ та λ_- . Як очікується, існує нескінченний набір розв'язків, який відповідає нескінченному

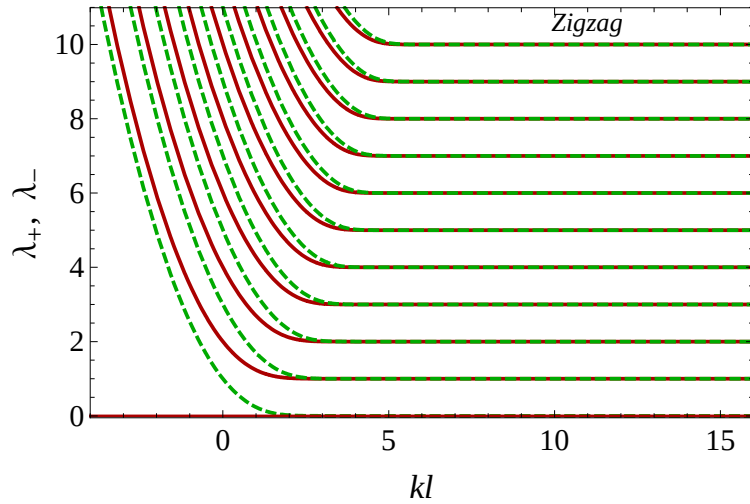


Рис. 5.4. (Кольоровий у електронній версії [10].) Чисельні розв'язки рівняння (5.37) для безрозмірного параметру λ_+ (суцільна лінія) та рівняння (5.39) для безрозмірного параметру λ_- (штрихова лінія) у випадку зигзагоподібної границі. Суцільна лінія при $\lambda_+ = 0$ відповідає тільки розв'язку $E = -\mu^{(+)} + \Delta^{(-)}$.

набору рівнів Ландау на напівплощині. На Рис. 5.4 ми показуємо тільки перші 11 розв'язків. Ми також добавили постійний розв'язок $\lambda_+ = 0$, який, строго кажучи, представляє тільки бездисперсійну моду з енергією $E = -\mu^{(+)} + \Delta^{(-)}$ [див. перший вираз у (5.41)]. (Формально, $\lambda_+ = 0$ може також означати, що $E = -\mu^{(+)} - \Delta^{(-)}$, але це *не* є власною енергією.)

Аналізуючи структуру спектру разом з залежністю $\lambda_{\pm}$ від хвильового вектора, ми можемо визначити коли існують безщільні моди у спектрі графену на напівплощині з зигзагоподібним краєм. З рівнянь (5.41) та (5.42) ми бачимо, що необхідною умовою існування стану з нульовою енергією є виконання щонайменше однієї з нерівностей:

$$K_{+}\text{долина:} \quad |\mu^{(+)}| \geq \sqrt{\epsilon_0^2 + (\Delta^{(-)})^2}, \quad (5.43a)$$

$$K_{-}\text{долина:} \quad |\mu^{(-)}| \geq |\Delta^{(+)}|. \quad (5.43b)$$

З того факту, що існують гілки з $\lambda_+ \simeq 1$ та $\lambda_- \simeq 0$ при $kl \gg 1$, ми бачимо, що ця умова також є достатньою.

Важливо підкреслити, що присутність скінченої маси не запобігає існуванню безщілинних крайових станів, якщо абсолютна величина $\Delta^{(+)}$ є меншою ніж абсолютна величина $\mu^{(-)}$ що найменше для однієї з спінових компонент. Це дуже схоже з умовами для графенової стрічки зі скінченою шириною [12], виключаючи те, що зараз ми маємо тільки один край. Наші результати узагальнюють попередні дослідження напівплощини [118, 162], де розглядався випадок тільки одного (або маси, або спінової щілини) ненульового параметру порядку. Два приклади щілинних та безщілинних

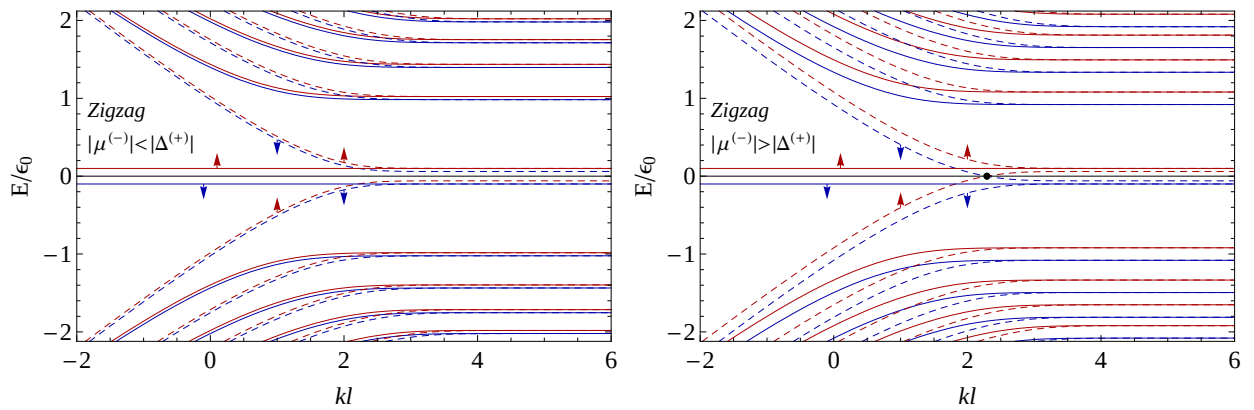


Рис. 5.5. (Кольоровий у електронній версії [10].) Чисельні результати для енергетичного спектру перших декількох рівнів Ландау поблизу від зигзагоподібного краю графену у випадку ненульового спінового розщеплення та ненульової *синглетної* маси. Значення параметрів наступні $\mu_{\pm} = \mp 0.02\epsilon_0$ і $\Delta_{\pm} = \pm 0.08\epsilon_0$ на лівій панелі, та $\mu_{\pm} = \mp 0.08\epsilon_0$ і $\Delta_{\pm} = \pm 0.02\epsilon_0$ на правій. (Індекс $\pm$ у $\mu_{\pm}$ та $\Delta_{\pm}$ означає орієнтацію спіна.) У першому випадку $|\mu^{(-)}| < |\Delta^{(+)}|$ і безщілинні моди відсутні, у другому випадку $|\mu^{(-)}| > |\Delta^{(+)}|$ і безщілинні моди присутні. Стани зі спіном вверх та вниз позначені червоним ($s = +$) та синім ($s = -$) кольорами. На підрівнях з найнижчою енергією спіни також позначені стрілочками. Спектри поблизу від K_+ (K_-) точки показані суцільною (штриховою) лінією.

мод наведені на Рис. 5.5. На лівій панелі показані декілька нижчих рівнів Ландау у випадку коли присутня мала спінова щілина, яка моделюється

$\mu_{\pm} = \mp 0.02\epsilon_0$ з індексом, що позначає спін, та велика *синглетна* маса, яка дорівнює $\Delta_{\pm} = \pm 0.08\epsilon_0$. Оскільки $|\mu^{(-)}| < |\Delta^{(+)}|$, безщілинні моди у цьому випадку відсутні. На правій панелі Рис. 5.5 низькоенергетичний спектр показано для іншого набору параметрів, $\mu_{\pm} = \mp 0.08\epsilon_0$ та $\Delta_{\pm} = \pm 0.02\epsilon_0$, який задовольняє умові (5.43b). Як і очікується, у цьому випадку є безщілинні стани. Приймаючи до уваги те, що групові швидкості безщілинних мод $v_x = \partial E / \partial k|_{E=0}$ мають протилежні знаки вздовж x -напрямку, стани зі спином вгору та вниз відповідають протилежно напрямленим струмам [118, 162]. Ці безщілинні стани є кіральними, оскільки вони належать одній долині (K_-).

Приклади спектрів, показані на Рис. 5.5 можуть мати пряме відношення для опису графену у сильному магнітному полі, оскільки відповідні параметри з синглетними масами були обрані у формі, запропонований у динамічній моделі [170, 171] для опису основного стану поблизу від діраківської точки. У випадку триплетних мас ці спектри виглядають майже так само, за винятком загального зсуву бездисперсійних мод, який залежить не тільки від абсолютної величини, але й також від знаку масових членів.

5.3.5. Обговорення результатів. У Розділі 5.3 ми дослідили спектри крайових станів на графеновій напівплощині з зигзагоподібною граничною умовою та одержали умови існування безщілинних крайових станів для різних типів мас та хімічних потенціалів, які можуть спонтанно генеруватись у КЕХ при появі $\nu = 0$ і $\nu = \pm 1$ плато. За детальним описом крайових станів на кріслоподібному краю, а також у нанострічках ми відсилаємо читача до оригінальних робіт [10–12], а зараз ми підведемо підсумки.

Наш аналіз синглетних та триплетних діраківських мас [відносно долинної групи симетрії $SU(2)_s$] показав, що спектральні властивості зигзагоподібних та кріслоподібних країв залежать від (i) відносної амплітуди мас та хімічних потенціалів, та (ii) типів мас. Зокрема, ми встановили наступні

критерії існування безщілинних крайових станів у спектрі.

- (i) *Зигзагоподібний край*: необхідною і достатньою умовою наявності безщілинного стану є виконання щонайменше однієї з наступних нерівностей:

$$|\mu_s^{(+)}| \geq \sqrt{\epsilon_0^2 + \left(\Delta_s^{(-)}\right)^2}, \quad (5.44)$$

$$|\mu_s^{(-)}| \geq |\Delta_s^{(+)}|. \quad (5.45)$$

- (ii) *Кріслоподібний край*:

- (a) безщілинні крайові стани завжди є коли присутні *синглетні* діраківські маси, незалежно від співвідношення між масами та хімічними потенціалами;
- (b) у випадку *триплетних* діраківських мас, безщілинні крайові стани існують якщо exist if $|\mu_{\pm}| > |\tilde{\Delta}_{\pm}|$, та не існують у протилежному випадку.

Одержані умови узгоджуються з двома граничними випадками, проаналізованими у [162].

Наведені вище критерії одержані для ідеальних гладких країв та для графену без безпорядку. У дійсності, графені зразки містять безпорядок та не мають ідеальних зигзагоподібних та кріслоподібних країв. Через це відповідні граничні умови можуть відрізнитись від використаних нами. Таким чином, важливо дослідити вплив різноманітних типів безпорядку у графені, що, однак, виходить за межі цього Розділу.

РОЗДІЛ 6

ЕЛЕКТРОН-ФОНОННА ВЗАЄМОДІЯ У ГРАФЕНІ

Дело в том, что он [Игорь Евгеньевич Тамм] проквантовал упругие колебания по образцу квантования электромагнитного поля, произведенного Гейзенбергом и Паули. В результате коллективные колебания частиц решетки предстали как газ “упругих квантов” – квазичастиц, каждая из которых включает движение всех частиц решетки. Я.И. Френкель предложил назвать их фононами.

Е.Л. ФЕЙНБЕРГ, УФН **165**, 811 (1995).

Цей Розділ написано за роботами [22, 23].

6.1. Огляд особливостей ЕФВ у графені

Як і у випадку звичайних металів, електрон-фононна взаємодія [259, 260] (ЕФВ) перенормує голі зони та змінює властивості графену. Тут ми розглянемо, зокрема, густину станів ГС (DOS). У металах, де ГС практично не залежить від енергії на масштабах енергій фононів, існує добре відомий результат, що електрон-фононна власна енергія цілком зникає з проблеми, і ГС зберігає своє голе значення. У графені, як ми побачимо, це не трапляється, і ЕФВ має відбиток у перенормованій ГС. Таку поведінку можна очікувати для систем, де ГС змінюється на масштабах енергій, порівнюваних з енергіями фононів [261], а також у системах зі скінченною зоною, де верх та низ зони модифікуються взаємодією з фононами [262].

Іншим відомим результатом є те, що у простих металах ренормалізація ЕФВ [259, 260, 263] випадає з виразу для ДС провідності, але значно

ренормалізує її АС величину, що робить можливими фононні холстейнівськи процеси. ДС провідність у графені, яка пов'язана як із внутрішньо-, так і з міжзонними переходами (див. Розділ 3.2.2), також не змінюється у присутності ЕФВ. Однак, внутрішньозонний АС Друде внесок має спектральну вагу зменшену на фактор $(1 + \lambda_{eff})$, де λ_{eff} – це ефективний параметр ренормалізації маси (залежний від хімічного потенціалу). Ширина піку Друде також зменшується на такий же фактор. Оптична спектральна вага пересувається до додаткової фононної холстейнівської зони, яка утворюється завдяки інкогерентній частині електронної спектральної густини. Міжзонні переходи, які сильно подавлені блокадою Паулі нижче подвійного перенормованого хімічного потенціалу, також мають додаткові фононні холстейнівські зони, які роблять внесок у холстейнівські процеси, коли енергія фотонів більше за енергію фонона. Завдяки ЕФВ величина оптичної провідності менша ніж універсальна величина $\pi e^2/(2h)$, яка обговорювалась у Розділі 3.2.2.2 [див. рівняння (3.32)]. План подальшого розгляду є наступним. У Розділі 6.2 ми введемо модель Парка *та ін.* (Park *et al.*) [264–266] для ЕФВ у графені, яку ми запишемо у більш загальному вигляді, який включає внесок самоузгодженої ГС у власну енергію. Ми розглянемо, як ЕФВ перенормує рух електронів на поверхні Фермі через наявність фактору $(1 + \lambda_{eff})$. Зокрема, змінюється значення хімічного потенціалу по відношенню до його значення в голій зоні. Також ЕФВ змінює відносне положення діраківської точки. Ми закінчуємо цю главу розглядом впливу ЕФВ на оптичну провідність графену у Розділі 6.3.

6.2. Модель для ЕФВ у графені

Спектральна функція $A(\epsilon, \omega)$ (див. (3.9)), яка описує квазічастинки у графені, висловлюється через власну енергію $\Sigma(\omega)$ наступним чином:

$$A(\epsilon, \omega) = \frac{1}{\pi} \frac{-\text{Im}\Sigma(\omega)}{[\omega - \text{Re}\Sigma(\omega) + \mu - \epsilon]^2 + [\text{Im}\Sigma(\omega)]^2}. \quad (6.1)$$

Зони валентності та провідності обидві входять до (6.1) і відповідають від'ємним та додатним значенням ϵ : $\epsilon_{\mathbf{k}} = \pm \hbar v_0 |\mathbf{k}|$, де v_0 – це гола (неперенормована фононами) швидкість Фермі. За означеннями цього Розділу (порівняй з (3.8), а також з Додатком В, де використано інше означення), власна енергія $\Sigma(\omega)$ визначена так, що $\omega = 0$ відповідає поверхні Фермі, а μ – це хімічний потенціал взаємодіючої системи. ЕФВ у графені обговорювалась багатьма авторами [264, 267, 268]. Тут ми вважаємо зручним наслідувати формулювання роботи Парка *та ін.* [264], яка пізніше була узагальнена на випадок двохшарового графену та графіту [265]. Ці автори зробили *ab initio* обчислення електронних зон у наближенні локальної густини. Також автори обрахували фононні частоти і поляризацію, а також електрон-фононні матричні елементи, з яких вони сконструювали електронну власну енергію. Важливість цієї роботи для нас полягає в тому, що у ній була запропонована спрощена модель для власної енергії, яка описує всі суттєві елементи, одержані у складних чисельних обрахунках. У цій роботі було показано, що у гарному наближенні можна розглядати електрони як зв'язані з єдиною фононною гілкою з частотою $\omega_E = 200 \text{ meV}$, а також знайдено величину константи зв'язку. Власна енергія є незалежною від електронного імпульсу, як і від зонного (електронного або дірочного) індексу. Це спрощення у [265] пов'язане з діраківською природою електронних станів у графені.

На основі цих спрощень ми починаємо з власної енергії, яка при $T = 0$ має форму

$$\Sigma(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{N(\omega')}{N_0} \frac{A}{W} \left[\frac{\theta(\omega')}{\omega - \omega' - \omega_E + i0^+} + \frac{\theta(-\omega')}{\omega - \omega' + \omega_E + i0^+} \right]. \quad (6.2)$$

У (6.2) ω_E – це енергія ейнштейнівського осцилятора, ω має одиниці енергії, A – константа зв'язку, $\theta(\omega)$ – ступенева функція Хевісайда, та $N_0 = 2/\pi \hbar^2 v_0^2$. $W = \sqrt{\pi \sqrt{3} t}$ – це параметр обрізання, визначений у (1.39). При значенні параметру перескоку між найближчими сусідами $t \approx 3 \text{ eV}$ маємо,

що $W \simeq 7000 \text{ meV}$. У (6.2) ми маємо додатковий елемент, який не приймався до уваги у попередній роботі [264], але може бути важливим для графену: $N(\omega)$ є *самоузгодженою* електронною ГС

$$\frac{N(\omega)}{N_0} = \int_{-W}^W d\epsilon \frac{|\epsilon|}{\pi} \frac{-\text{Im}\Sigma(\omega)}{[\omega - \text{Re}\Sigma(\omega) + \mu - \epsilon]^2 + [\text{Im}\Sigma(\omega)]^2}. \quad (6.3)$$

Обчислення останнього виразу дає

$$\begin{aligned} \frac{N(\omega)}{N_0} = & -\frac{\tilde{\omega}}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{\tilde{\omega} - W}{\Gamma}\right) + \arctan\left(\frac{\tilde{\omega} + W}{\Gamma}\right) - 2 \arctan\left(\frac{\tilde{\omega}}{\Gamma}\right) \right] \\ & + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{[(\tilde{\omega} - W)^2 + \Gamma^2][(\tilde{\omega} + W)^2 + \Gamma^2]}{(\tilde{\omega}^2 + \Gamma^2)^2}\right), \end{aligned} \quad (6.4)$$

де $\Gamma = -\text{Im}\Sigma(\omega)$ і $\tilde{\omega} = \omega - \text{Re}\Sigma(\omega) + \mu$. У добрих металах у діапазоні енергій важливого для електрон-фононої взаємодії поблизу від поверхні Фермі електронна ГС майже не змінюється. Тільки її значення при хімічному потенціалі є важливим. У таких системах лінійний по ϵ фактор $|\epsilon|$ відсутній у (6.3) і розширення границь інтегрування до нескінченності дає константу, незалежну від $\text{Im}\Sigma(\omega)$ і $\text{Re}\Sigma(\omega)$. У більш складних системах, таких як, наприклад, Al_5 сполуки, раніше було встановлено, що це наближення не працює [261]. У цьому випадку саме самоузгоджена ГС [262, 269, 270] входить у (6.2), як у роботі Енглсберга та Шріффера (Engelsberg and Schrieffer) [271]. Те ж саме стосується систем зі скінченними зонами [262, 269, 270]. У графені гола ГС лінійна по енергії, а не константа, і таким чином ми очікуємо, що значні зміни можуть трапитися у $\Sigma(\omega)$, коли рівняння (6.2) та (6.3) ітеруються до збіжності. Ми перевіримо це далі.

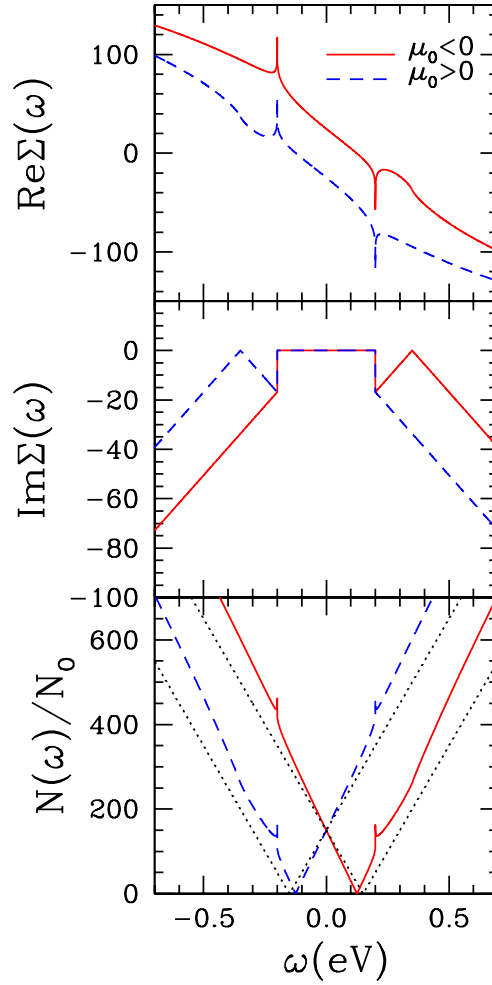


Рис. 6.1. (Кольоровий в електронній версії [23].) Дійсна (зверху) та уявна (посередині) частини власної енергії $\Sigma(\omega)$ та густина станів $N(\omega)/N_0$ (знизу) (всі у meV одиницях) як функції ω у eV при $|\mu_0| = 150$ meV. Штрихова лінія для $\mu_0 > 0$ та суцільна лінія для $\mu_0 < 0$. Гола ГС показана лінією з короткими штрихами.

6.2.1. ЕФВ у першому наближенні, без самоузгодження. У першому наближенні ми можемо замінити $N(\omega)$ у (6.2) на її голу невзаємодіючу величину, яка дається виразом

$$\frac{N(\omega)}{N_0} = \begin{cases} |\omega + \mu_0|, & -W - \mu_0 < \omega < W - \mu_0, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (6.5)$$

де μ_0 – це голий хімічний потенціал, тобто без електрон-фононної ренормалізації. Всі стани з $\omega < 0$ зайняті і з $\omega > 0$ незайняті так, що $\omega = 0$ знаходиться на границі між зайнятими і незайнятими енергіями, і за нашим вибором ця властивість залишається навіть у випадку, коли є взаємодії. Відзначимо, що величина μ_0 встановлює величину допінгу ρ (на одиничну площину) з $\rho = \text{sgn}(\mu_0)\mu_0^2/(\pi\hbar^2v_0^2)$ (див. (3.88)), з $\mu_0 < 0$ для дірок та $\mu_0 > 0$ для електронів. Це показано на нижній панелі Рис. 6.1 чорними лініями з короткими штрихами для випадку $|\mu_0| = 150 \text{ meV}$.

Діраківська точка знаходиться при -150 meV ($+150 \text{ meV}$) відповідає електронному (дірочному) допінгу та нульовій ГС або $\omega = -\mu_0$ з рівняння (6.5). Для цієї голої ГС $N(\omega)$ можна обчислити аналітично власну енергію (6.2). При $\mu_0 > 0$ (позначивши $\Sigma_{\mu_0>0}(\omega)$) маємо

$$\begin{aligned} \text{Re}\Sigma_{\mu_0>0}(\omega) = \frac{A}{W} \left\{ \omega_E \ln \left| \frac{(W + \omega_E - \omega - \mu_0)(\mu_0 + \omega + \omega_E)^2}{(\omega^2 - \omega_E^2)(W + \omega + \omega_E + \mu_0)} \right| \right. \\ \left. - (\mu_0 + \omega) \ln \left| \frac{(W + \omega_E - \omega - \mu_0)(W + \omega + \omega_E + \mu_0)(\omega + \omega_E)}{(\omega - \omega_E)(\omega + \mu_0 + \omega_E)^2} \right| \right\}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

а при $\mu_0 < 0$ маємо

$$\text{Re}\Sigma_{\mu_0<0}(\omega) = -\text{Re}\Sigma_{|\mu_0|}(-\omega). \quad (6.7)$$

Ця симетрія між додатними та від'ємними величинами хімічного потенціалу також має місце у випадку, коли повністю самоузгоджена ГС $N(\omega')$ використана у (6.2). Перед тим, як показати це явно, відзначимо, що

$$-\text{Im}\Sigma(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi A}{W} |\omega - \omega_E + \mu_0|, & \omega_E < \omega < W - \mu_0 + \omega_E, \\ \frac{\pi A}{W} |\omega + \omega_E + \mu_0|, & -\omega_E > \omega > -W - \mu_0 - \omega_E, \end{cases} \quad (6.8)$$

і є нульовим зовні цих інтервалів. Для негативних величин μ_0 відзначимо

$$\text{Im}\Sigma_{\mu_0<0}(\omega) = \text{Im}\Sigma_{|\mu_0|}(-\omega). \quad (6.9)$$

Використовуючи (6.7) та (6.9) у (6.3) для самоузгодженої ГС, ми бачимо, що

$$N_{\mu_0 < 0}(\omega) = N_{|\mu_0|}(-\omega). \quad (6.10)$$

Це співвідношення означає, що симетрії (6.7) та (6.9) мають місце навіть коли повна самоузгоджена ГС використана у рівнянні (6.2) для власної енергії.

На Рис. 6.1, ми показуємо результати для $\text{Re}\Sigma(\omega)$ (верхня панель), $\text{Im}\Sigma(\omega)$ (середня панель) та $N(\omega)/N_0$ (нижня панель), де $N(\omega)$ – це перша ітерація рівняння (6.2), якої повинно бути достатньо, коли електрон-фононна взаємодія є малою. Штрихова (блакитна) лінія для $\mu_0 > 0$ (електронний допінг), та суцільна (червона) лінія для $\mu_0 < 0$ (дірковий допінг). Лінія з короткими штрихами (чорна) на нижній панелі, яка показана для порівняння, відповідає голій ГС. Значення хімічного потенціалу μ_0 дорівнює $|\mu_0| = 150 \text{ meV}$, $W = 7000 \text{ meV}$ та значення ω_E обрано 200 meV як [264]. Значення електрон-фононного параметру A взято 250 meV . Відповідне спектральне підсилення маси $\lambda \equiv 2A/\omega_E = 2.5$. Як ми побачимо, цей параметр дуже сильно відрізняється від справжнього підсилення маси, яке ми позначаємо λ^{eff} і яке у графені описує ренормалізацію швидкості, оскільки носії є безмасовими.

Відзначимо, що симетрія включена у (6.7), задовольняється для $\text{Re}\Sigma(\omega)$ на верхній панелі Рис. 6.1. Ми бачимо логарифмічні сингулярності [269] при $\omega = \pm\omega_E$, але вони розмазуються, якщо замість моделі Ейнштейна буде використано розподілений спектр. Логарифмічна сингулярність пов'язана з фактором $(\omega \pm \omega_E)$ в аргументі (6.6), що призводить до появи різкої структури в електронній ГС. Відзначимо важливе виключення. При $\mu_0 = 0$, у (6.6) має місце скорочення, і сингулярності зникають. $\text{Re}\Sigma(\omega = 0)$ є не нульовим і дорівнює -24.7 meV ($+24.7 \text{ meV}$) при $\mu_0 > 0$ ($\mu_0 < 0$). Ця величина зв'язує взаємодіючий (μ) і невзаємодіючий (μ_0) хімічні потенціали

[261, 271, 272] наступним чином

$$\mu = \mu_0 + \text{Re}\Sigma(\omega = 0). \quad (6.11)$$

Для спрощення ми припустимо, що всі три енергетичні масштаби ω , μ , та ω_E є набагато меншими, ніж параметр обрізання W . Тоді (6.6) для $\text{Re}\Sigma(\omega)$ дає при $\omega = 0$ ($\mu_0 > 0$)

$$\text{Re}\Sigma(\omega = 0) = \frac{2A}{W} \left\{ \omega_E \ln \left| \frac{\mu_0 + \omega_E}{\omega_E} \right| - \mu_0 \ln \left| \frac{W}{\mu_0 + \omega_E} \right| \right\}. \quad (6.12)$$

Зсув між взаємодіючим і невзаємодіючим хімічними потенціалами дорівнює нулю тільки у випадку $\mu_0 = 0$ (електронно-дірочна симетрія). При $\mu_0 \ll \omega_E$ маємо

$$\text{Re}\Sigma(\omega = 0) \simeq -\frac{2A}{W_C} \mu_0 \left[\ln \left(\frac{W_C}{\omega_E} \right) - 1 \right]. \quad (6.13)$$

Рівняння (6.13) містить у собі W так, що границя $W \rightarrow \infty$ не може бути взята, і $\text{Re}\Sigma(\omega = 0)$ дорівнює частині μ_0 оскільки A/W є малим. Це відношення A/W можна висловити через спектральне $\lambda = 2A/\omega_E$, яке було введено вище: $2A/W_C = \lambda(\omega_E/W_C)$ з $\omega_E/W_C \sim 1/35$, для реалістичних значень параметрів, що відповідають графену.

Для малих, але скінчених значень ω , з (6.6) у таких же границях ми одержуємо ($|\mu_0| < \omega_E$),

$$\text{Re}\Sigma(\omega) \simeq -\frac{2A}{W_C} \omega \left[\ln \left| \frac{W_C}{\mu_0 + \omega_E} \right| - \left(1 - \frac{|\mu_0|}{\omega_E} \right) \right] + \text{Re}\Sigma(\omega = 0). \quad (6.14)$$

Позначивши ефективну ренормалізацію маси завдяки ЕФВ як λ^{eff} , у границі $\omega \rightarrow 0$ маємо, що власна енергія дорівнює

$$\text{Re}\Sigma(\omega) = -\lambda^{\text{eff}} \omega + \text{Re}\Sigma(\omega = 0). \quad (6.15)$$

Перенормована енергія (E_k), яка вимірюється, наприклад, у фотоемісійній спектроскопії з кутовим вирішенням (ARPES), зв'язана з голою енергією

наступним чином:

$$E_k = \frac{\epsilon_k - \epsilon_{k_F}}{1 + \lambda^{\text{eff}}} = \frac{\pm \hbar v_0 (k - k_F)}{1 + \lambda^{\text{eff}}}, \quad (6.16)$$

де $\hbar k_F$ – це імпульс Фермі голої зони, тобто $\mu_0 = \pm \hbar v_0 k_F$, зі знаком $+$ для електронів та $-$ для дірок. Ми бачимо, що взаємодія перенормує голу ефективну швидкість світла з v_0 до $v_0^* = v_0/(1 + \lambda^{\text{eff}})$. Для того, щоб побачити це, ми повернемося до спектральної густини (6.1). Ми відзначимо, що гола та перенормована енергії поблизу від поверхні Фермі одержуються, коли вираз у перших дужках у знаменнику дорівнює нулю:

$$E_k + \lambda^{\text{eff}} E_k - \text{Re}\Sigma(\omega = 0) + \mu = \epsilon_k, \quad (6.17)$$

що дає (6.16) з малим $(k - k_F)$. При $\mu_0 \ll \omega_E$ ми одержуємо

$$\lambda^{\text{eff}} = \frac{2A}{W_C} \left[\ln \left| \frac{W_C}{\omega_E} \right| - 1 \right], \quad (6.18)$$

що дорівнює ~ 0.19 для параметрів Рис. 6.1. Ця величина є більшою, ніж обчислена теоретично [264], але меншою, ніж вимірюється експериментально [273]. Відзначимо, що у позначеннях рівняння (6.18), рівняння (6.13) може бути переписано так

$$\text{Re}\Sigma(\omega = 0) = -\mu_0 \lambda^{\text{eff}} \quad (6.19)$$

так, що прийнявши до уваги (6.11)

$$\mu = \mu_0 (1 - \lambda^{\text{eff}}) \simeq \frac{\mu_0}{1 + \lambda^{\text{eff}}}, \quad (6.20)$$

оскільки λ^{eff} є малим. Таким чином у цій границі фактор $(1 + \lambda^{\text{eff}})$ також перенормує величину голого хімічного потенціалу.

На середній панелі Рис. 6.1 показано результат першої ітерації для уявної частини ($\text{Im}\Sigma(\omega)$) власної енергії, яка задовольняє симетрії (6.9). $\text{Im}\Sigma(\omega)$ дорівнює нулю при $-\omega_E < \omega < \omega_E$, а на границях цього інтервалу

стрибає до скінченного значення, оскільки стає можливим розпад квазі-частинок завдяки утворенню бозонів. У звичайних металах це розсіяння залишалось би постійним вище ω_E , оскільки густина електронних станів при $\omega - \omega_E$ є постійною. Це не так у графені, де $N(\omega - \omega_E)$ змінюється, і розсіяння відображає енергетичну залежність зонної структури, яку ми бачимо на нижній панелі Рис. 6.1 (чорна лінія з короткими штрихами). Ми бачимо з поведінки червоної суцільної лінії, що при енергіях більших за ω_E , величина $|\text{Im}\Sigma(\omega)|$ лінійно зростає з ω , як робить і $N_0(\omega)$, а при $\omega < -\omega_E$ ми бачимо спочатку падіння до нуля, після якого слідує лінійне зростання, яке відображає поведінку голої ГС, саме як і описує рівняння (6.8). У більш реалістичних обрахунках існує також скінченний внесок у власну енергію від акустичних фононів так, що $\text{Im}\Sigma(\omega)$ ніколи б не дорівнювала нулю, як ми маємо зараз. У графені їхній внесок, однак, є малим [264]. Наприкінці ми відзначимо, що при фіксованій величині $\pm\mu_0$, $\text{Im}\Sigma(\omega)$ є несиметричним відносно заміни $\omega \rightarrow -\omega$, як це було б у хороших металах. У нашому випадку симетрія є тільки коли $\mu_0 = 0$.

На нижній панелі Рис. 6.1 ми показуємо результат однієї ітерації для ГС $N(\omega)$ (суцільна червона лінія для $\mu_0 < 0$ і штрихова синя лінія для $\mu_0 > 0$) та порівнюємо його з голим випадком (чорні лінії з короткими штрихами). $N(\omega)$ є несиметричним відносно $\omega = 0$ і перенормування є різним для електронних та дірочних гілок. Також діраківська точка зсунута при $\mu_0 > 0$ до вищої енергії у порівнянні з її положенням у випадку голої зони і до нижчої енергії при $\mu_0 < 0$. Цей зсув стає більшим зі зростанням допінгу. Іншою властивістю, яку слід відзначити, є те, що гола та перенормована ГС мають одне й теж значення при $\omega = 0$, яке за означенням відповідає положенню енергії Фермі в обидвох випадках. Це має сенс, оскільки уявна частина $\Sigma(\omega)$ при $\omega = 0$ завжди дорівнює нулю так, що лоренціани у (6.3)

стають дельта-функціями і, наприклад, при $\mu_0 > 0$

$$\frac{N(\omega = 0)}{N_0} = \mu - \text{Re}\Sigma(\omega = 0) = \mu_0, \quad (6.21)$$

що дорівнює величині ГС при голому хімічному потенціалі. Величина ГС на поверхні Фермі залишається зафіксованою її невзаємодіючою величиною. Ще однією важливою властивістю результатів для ГС є фононні структури, які чітко видні як піки на кривій. Вони будуть розмазані у випадку, коли у (6.2) замість ейнштейнівської моди буде використано розподілений спектр. Відзначимо, що наші результати для $N(\omega)$ сильно відрізняються від знайдених у звичайних металах. В останніх ГС поблизу від поверхні Фермі є постійною на масштабі енергій у декілька фононних енергій, та ренормалізація ГС завдяки ЕФВ є відсутньою. Далі, у звичайних металах енергетичні зони жорстко заповнюються при зміні хімічного потенціалу. У графені, коли ЕФВ включена, зони перенормуються по-різному для кожного значення хімічного потенціалу μ_0 . Це не є жорсткі зони.

Тепер ми розглянемо, як положення діраківської точки зсувається у присутності взаємодії по відношенню до його голого значення $\omega = -\mu_0$. У взаємодіючій системі діраківська точка все ще може ідентифікуватись з нульовим імпульсом $k = 0$, який відповідає $\epsilon = 0$, оскільки $\epsilon = \pm \hbar v_0 |\mathbf{k}|$. Якщо нема уширення (у дійсності, воно завжди є), спектральна функція має нескінченні піки при $\omega - \text{Re}\Sigma(\omega) + \mu = 0$. Якщо ми запишемо

$$\text{Re}\Sigma(\omega) = \text{Re}\Sigma(\omega = 0) + \text{Re}\delta\Sigma(\omega) \quad (6.22)$$

де $\text{Re}\delta\Sigma(\omega) = 0$ при $\omega = 0$ за означенням, то одержимо трансцендентне рівняння

$$\omega - \text{Re}\Sigma(\omega = 0) + \mu - \text{Re}\delta\Sigma(\omega) = 0, \quad (6.23)$$

яке необхідно розв'язувати, щоб одержати енергію діраківської точки у взаємодіючій системі. Для однієї ітерації $\text{Re}\Sigma(\omega)$ задається рівнянням (6.6),

з якого може бути легко знайдена $\text{Re}\delta\Sigma(\omega)$. Приймаючи до уваги (6.11), рівняння (6.23) спрощується до

$$\omega_d = -\mu_0 + \text{Re}\delta\Sigma(\omega_d), \quad (6.24)$$

де ω_d – це енергія діраківської точки у взаємодіючій системі.

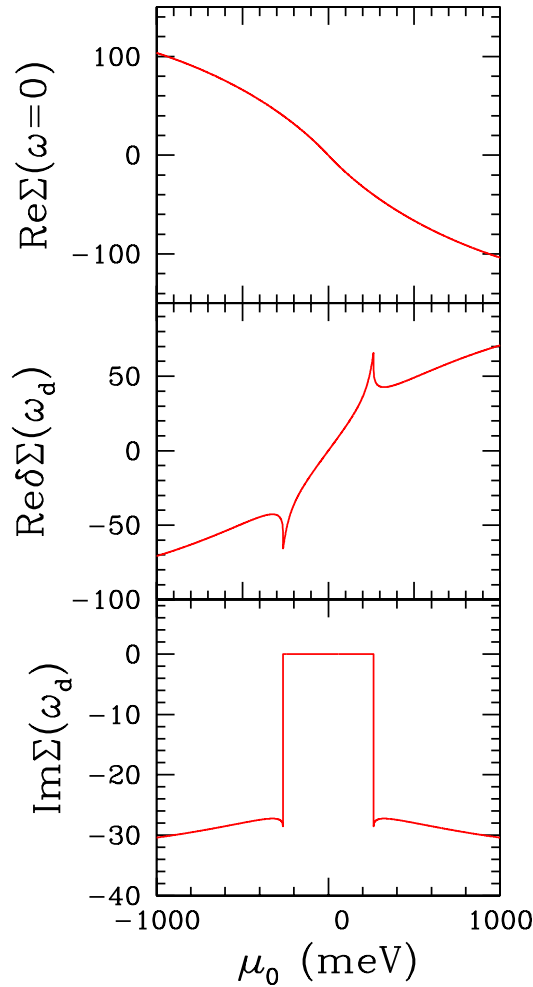


Рис. 6.2. (Кольоровий в електронній версії [23].) Результати першої ітерації для зсуву хімічного потенціалу $\text{Re}\Sigma(\omega = 0)$ (верхня панель), зсув положення діраківської точки $\text{Re}\delta\Sigma(\omega_d)$ (середня панель) та уявна частина власної енергії $\text{Im}\Sigma(\omega_d)$ у діраківській точці (нижня панель). Всі величини мають одиниці meV.

Для голої зони $\text{Re}\delta\Sigma(\omega_d)$ у (6.24) дорівнює нулю, і ми одержуємо відомий результат, що діраківська точка знаходиться в $-\mu_0$. $\text{Re}\delta\Sigma(\omega_d)$, яку ми намалювали як функцію μ_0 на середній панелі Рис. 6.2, дає зсув ω_d від $-\mu_0$, який є результатом ЕФВ. Вона має той же самий знак, що й μ_0 і, таким чином, зсуває діраківську точку направо від її голої величини при $\mu_0 > 0$ і наліво при $\mu_0 < 0$, саме як ми вже відзначали. На верхній панелі Рис. 6.2 ми показуємо пов'язану величину, а саме $\text{Re}\Sigma(\omega = 0)$, яка є

зсувом хімічного потенціалу (μ) від його голої величини (μ_0). Він має протилежний до μ_0 знак і, таким чином, зсуває μ наліво від μ_0 для додатних μ_0 , або навпаки для від'ємних μ_0 . Цей зсув хімічного потенціалу є очікуваним, оскільки взаємодії змінюють густину станів і, таким чином, для того, щоб утримати густину носіїв незмінною, положення рівня Фермі повинно змінитись. Зсув у положенні діраківської точки може спостерігатись у фотоемісійній спектроскопії з кутовим вирішенням (ARPES) [273] та у сканувальній тунельній мікроскопії (STM) [274]. Відзначимо, що ЕФВ робить тільки малий внесок у вимірювані повні квазічастинкові розсіяння [266], які спостерігаються у графені так, що для їх розуміння необхідно враховувати електрон-електронну взаємодію, тобто електрон-дірочні та плазмонні збудження [266]. Будь-яке порівняння з експериментом повинно включати в себе ці додаткові взаємодії так, що тут ми не будемо намагатись зробити порівняння з експериментальними даними.

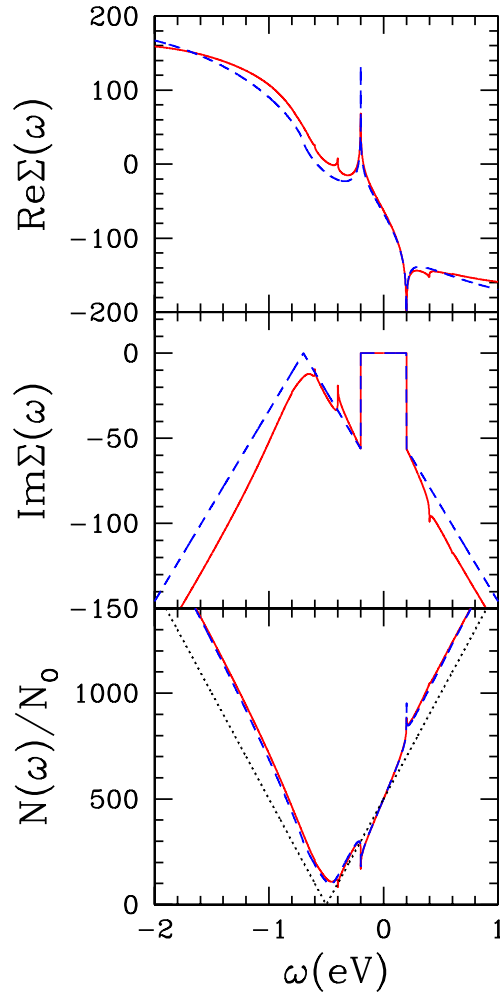


Рис. 6.3. (Кольоровий в електронній версії [23].) Такі ж величини, як і на Рис. 6.1, але тепер власна енергія та густина станів були самоузгоджено ітеровані. Також $\mu_0 = 500 \text{ meV}$, що є більшим ніж ω_E . Суцільні лінії відповідають ітерованому випадку, штрихові дають початкові неітеровані результати. Лінія з короткими штрихами відповідає голій ГС. Всі величини по y-осі у meV.

Відзначимо, що при $\mu_0 \ll \omega_E$ можна показати, що

$$\omega_d \simeq -\frac{\mu_0}{1 + \lambda^{\text{eff}}} \quad (6.25)$$

як слідує з (6.24) де $\text{Re}\delta\Sigma(\omega_d)$ замінено на $\text{Re}\delta\Sigma(-\mu_0)$. Знову у першому наближенні фактор $(1 + \lambda^{\text{eff}})$ перенормує положення по енергії діраківської точки. У цьому наближенні абсолютна величина ω_d , тобто $|\omega_d|$ дорівнює аб-

солотній величині перенормованого хімічного потенціалу $|\mu|$. Окрім яскраво вираженої фононої структури на середній панелі Рис. 6.2, яка відсутня на верхній панелі, величини $|\text{Re}\delta\Sigma(\omega_d)|$ та $|\text{Re}\Sigma(\omega = 0)|$ не дуже сильно відрізняються по величині, якщо порівнювати їх з величиною μ . Таким чином, перенормовані значення $|\omega_d|$ та $|\mu|$ близькі між собою, навіть при будь-яких значеннях хімічного потенціалу.

6.2.2. Вплив самоузгодження на ЕФВ. На Рис. 6.3 ми розглядаємо випадок $\mu_0 = 500 \text{ meV}$ та порівнюємо результати однієї ітерації, показані штриховою лінією, з результатами (суцільні лінії), які одержані коли ГС (див. рівняння (6.3)) та власна енергія (6.2)) ітеруються до збіжності. Ми бачимо деякі зміни у дійсній та уявних частинах $\Sigma(\omega)$, які наведені, відповідно, на верхній та середній панелях. Ми бачимо, однак, що нахил $\text{Re}\Sigma(\omega)$ поблизу нуля на суцільній лінії не дуже змінився, а це означає, що перша ітерація дає добру оцінку ефективного перенормування маси λ^{eff} . Результати для залежності λ^{eff} від μ_0 показані на Рис. 6.4. Величина λ^{eff} збільшується майже вдвічі при зміні μ_0 у діапазоні, показаному на Рис. 6.4.

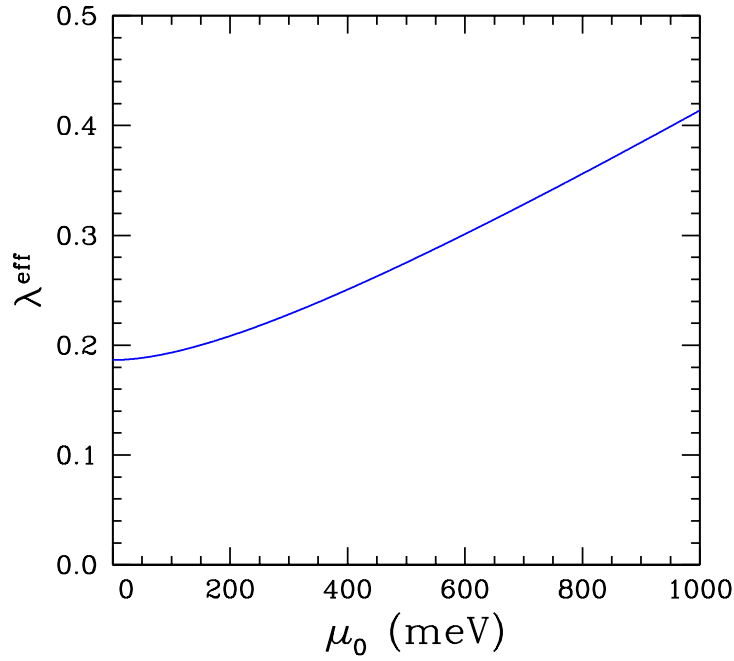


Рис. 6.4. (Кольоровий у електронній версії [23].) Параметр ренормалізації маси λ^{eff} на поверхні Фермі, як функція голого хімічного потенціалу μ_0 .

6.3. Оптична провідність

На основі рівняння (В.6) можна записати наступний вираз для оптичної провідності

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}(\Omega) = & \frac{e^2}{\pi^2 \Omega} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [n_F(\omega) - n_F(\omega + \Omega)] \\
 & \times \left[\left(\frac{(\omega - \Sigma(\omega))(\omega' - \Sigma(\omega')) - \Delta^2}{[\Sigma(\omega') - \Sigma(\omega) - \Omega][2\omega + \Omega - \Sigma(\omega) - \Sigma(\omega')]} - \right. \right. \\
 & \left. \frac{(\omega - \Sigma(\omega))(\omega' - \Sigma^*(\omega')) - \Delta^2}{[\Sigma^*(\omega') - \Sigma(\omega) - \Omega][2\omega + \Omega - \Sigma(\omega) - \Sigma^*(\omega')]} \right) \ln[\Delta^2 - (\omega - \Sigma(\omega))^2] \\
 & \left. + (\omega \leftrightarrow \omega') \right],
 \end{aligned}
 \tag{6.26}$$

який залежить від комплексної власної енергії $\Sigma(\omega)$. Відзначимо, що коли відповідна власна енергія підставляється у (6.26), її залежність від енергії повинна бути зсунута відповідним чином $\omega \rightarrow \omega - \mu$ (див. підстрочний коментар щодо спектральної функції у рівнянні (3.9). Наприклад, уявна частина власної енергії (6.8) з моделі [264] тоді записується та

$$\text{Im}\Sigma(\omega, \mu) = -G|\omega - \text{sgn}(\omega - \mu)\omega_0| \theta[(\omega - \mu)^2 - \omega_0^2], \quad (6.27)$$

де ми поклали $W \rightarrow \infty$, а енергію оптичного фонону ω_E позначили як $\omega_0 = 0.2 \text{ eV}$, а константу зв'язку $\pi A/W$ як G .

На Рис. 6.5а порівняно результати для динамічної провідності $\text{Re}\sigma_{xx}(\Omega)$ як функції Ω з верхнім значенням 800 meV з та без фононів при двох значеннях температури $T = 10 \text{ K}$ та $T = 100 \text{ K}$. При $T = 10 \text{ K}$ штрих-пунктирна (чорна) лінія була обчислена для голої зони, постійного остаточного розсіювання $\Gamma = 0.5 \text{ meV}$ та хімічного потенціалу $\mu = 190 \text{ meV}$. Цю криву треба порівнювати з довгоштриховою (червоною) лінією, яка включає фонони з $G = 0.1$, $\omega_0 = 0.2 \text{ eV}$ та такою ж температурою. Для регуляризації обчислення у випадку, коли власна енергія $\text{Im}\Sigma(\omega, \mu)$, що задається (6.27), обертається у нуль, ми використали таку ж саму величину остаточного розсіювання $\Gamma = 0.5 \text{ meV}$. Тоді як у випадку голої зони основне підвищення провідності до універсального значення має місце при енергії 2μ , електрон-фононна ренормалізація, відповідно до (6.11), зсунула це підвищення до значення перенормованого хімічного потенціалу при $2\tilde{\mu}$, яке є суттєво меншим. Відзначимо, що при вищих значеннях енергії гола провідність зростає до свого універсального значення, тоді як перенормована залишається трохи меншою ніж 1 в обраних одиницях. Підвищення константи зв'язку G ще більше зменшує цю величину провідності, як можна побачити з Рис. 2 у роботі [178]. Ми знайшли, що при $G = 5$ (що напевно більше, ніж очікується у графені) при $\Omega = 800 \text{ meV}$ значення провідності зменшується до 0.87. Це зменшення можна було очікувати на фізичних підставах, оскільки

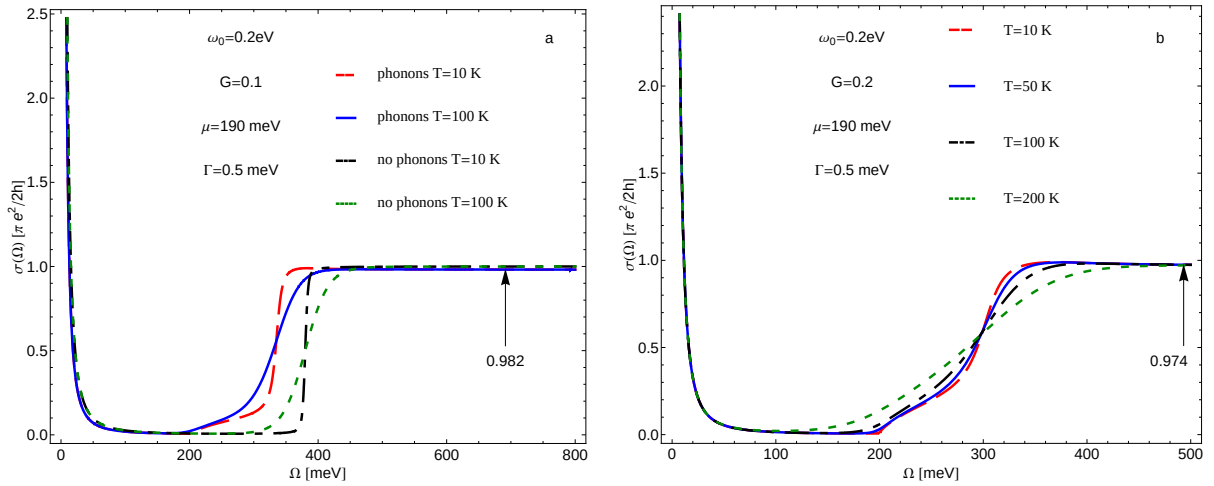


Рис. 6.5. (Кольоровий у електронній версії [22].) (а) Провідність $\text{Re}\sigma_{xx}(\Omega)$ в одиницях $\pi e^2/2h$ (універсального значення) для голої зони: штрих-пунктирна (чорна) лінія при $T = 10\text{ K}$ та короткоштрихова (зелена) лінія при $T = 100\text{ K}$. Лінії з фононами ($\omega_0 \equiv \omega_E = 0.2\text{ eV}$ і $G = 0.1$) – довгоштрихова (червона) з $T = 10\text{ K}$ та суцільна (блакитна) з $T = 100\text{ K}$. В усіх випадках $\mu = 190\text{ meV}$ і $\Gamma = 0.5\text{ meV}$. (б) Провідність з фононами, така сама як в (а), за виключенням $G = 0.2$, при різних температурах: $T = 10\text{ K}$ – довгоштрихова (червона) лінія, $T = 50\text{ K}$ – суцільна (блакитна) лінія, $T = 100\text{ K}$ – штрих-пунктирна (чорна) лінія та $T = 200\text{ K}$ – короткоштрихова (зелена) лінія.

фонони зсувають оптичну спектральну вагу за межі границі голої зони на декілька фононних енергій. Для того, щоб зберегти правило сум, ця спектральна вага повинна перейти з нижчих енергій, і ми дійсно бачимо, що зменшення провідності має місце при $\Omega > |\mu|$. Також ми бачимо, що піки з надлишковою провідністю, пов'язані зі стоксовою та антистоксовою лініями, які були показані у [202, 203], відсутні. Цей наш результат узгоджується з [178], де було показано, що ці піки відсутні, якщо включити у розгляд дійсну частину власної енергії. Зменшення значення універсальної провідності, яке ми виявили, є важливим, оскільки воно вказує, що дина-

мічна провідність графену не може давати метрологічно точне значення постійної фон Клітцінга (von Klitzing) h/e^2 , хоча й дає гарну оцінку. Другою властивістю довгоштрихової (червоної) одягнутої лінії у порівнянні з короткоштриховою (зеленою) кривою для голої зони є область, яка починається при $\Omega = \omega_0$ і продовжується приблизно до $2\tilde{\mu}$ (подвійний одягнутий хімічний потенціал). У випадку голої неперенормованої зони провідність у цій області повністю пласка і мала, але одягнута крива має додаткове поглинання, яке починається з $\Omega = \omega_0$ та суттєво зростає, коли Ω наближається до $2\tilde{\mu}$. Це пов'язано з поглинанням за участю холстейнівського бозону, коли утворюються пара з дірки та частинки, і у кінцевому стані також присутній фонон. Такі процеси є добре відомими у звичайних металах і відповідають некогерентній частині електронної спектральної функції, яка виникає завдяки зв'язку з фононами. У той же час, когерентний внесок Друде з центром $\Omega = 0$ зменшується на фактор $1 + \lambda_{eff}$ та містить тільки $1/(1 + \lambda_{eff})$ частину спектральної ваги, тоді як залишок $\lambda_{eff}/(1 + \lambda_{eff})$ знаходиться у некогерентній холстейнівській підзоні [259]. Короткоштрихова (зелена) та суцільна (блакитна) лінії показують результати при $T = 100$ К. По-перше, відзначимо, що підвищення температури не змінює значно величину $\text{Re}\sigma_{xx}(\Omega)$ при великих Ω так, що значення динамічної провідності є стабільним по відношенню до зміни температури. В області головного зростання поблизу подвоєних голого (для короткоштрихової лінії) та перенормованого (для суцільної лінії) температура, однак, призводить до уширення. Для голої зони це уширення є більш симетричним відносно подвоєного хімічного потенціалу, ніж у випадку, коли присутнє перенормування фононами в області енергій вище ω_0 та нижче $2\tilde{\mu}$.

Порівняння довгоштрихової (червоної) при $T = 10$ К з кривою при $T = 100$ К показує, що фононні структури розмиваються температурою і найкраще спостерігаються при низькій температурі. Це краще видно на Рис. 6.5b, де ми показуємо перенормовану фононами величину $\text{Re}\sigma_{xx}(\Omega)$

при чотирьох значеннях температури $T = 10 \text{ K}, 50 \text{ K}, 100 \text{ K}, 200 \text{ K}$. При $T = 200 \text{ K}$ короткоштрихова (зелена) лінія стає гладкою, без фононних структур, але уширення при $\Omega = 2\tilde{\mu}$ все ще залишається асиметричним і все ще містить інформацію про фононну ренормалізацію.

РОЗДІЛ 7

НАДПРОВІДНА ГУСТИНА ТА КОНКУРУЮЧІ ПАРАМЕТРИ ПОРЯДКУ У d -ХВИЛЬОВИХ НАДПРОВІДНИКАХ

Как-то получилось, что исследования в области высокотемпературной сверхпроводимости оказались немодными (слово “мода” здесь с полным основанием употребляется без кавычек, ибо в научной деятельности и научной среде именно мода играет иногда большую роль). Трудно чего-либо добиться уговорами. Обычно лишь какой-то явный успех (или сообщение в печати, пусть и неточное, о таком успехе) может совершенно, и притом быстро, изменить ситуацию. Почувствовав “запах жареного”, вчерашние скептики или даже хулители способны превратиться в рьяных сторонников нового направления. Но это другая тема – скорее из области психологии и социологии научной и технической деятельности.

В.Л. Гинзбург, УФН **161**, 1 (1991).

Цей розділ написано за роботами [18, 19]. Також використані матеріали огляду [24] та методи обрахунку у вузловому наближенні, розвинені у попередніх роботах автора [20, 21].

7.1. Формулювання проблеми параметрів порядку конкуруючих з d НП

Залежність надпровідної густини $\rho_s(x, T)$ від допінгу та температури та її кореляція з критичною температурою T_c у ВТНП інтенсивно досліджу-

валася майже з їх відкриття [275]. Відомий рисунок з цієї роботи зветься рисунком Уемури (Uemura). Він детально обговорюється в огляді автора [24]. В останні 5-6 років були зроблені нові спостереження [276–279], зокрема для недодопованої частини фазової діаграми [280–283]. Особлива увага приділена надпровідній густині. Немає нічого дивовижного, тому що всі властивості $\rho_s(x, T)$, згадані вище, показують, що ВТНП значно відрізняються від вже відомих надпровідників. Важливим прикладом є температурна залежність внутрішньої глибини проникнення $\lambda(T)$,¹ яка забезпечила перший сильний аргумент [284] на користь незвичайної симетрії спарювання та важливої ролі безщільних збуджень.

Іншою цікавою характеристикою ρ_s є її залежність від зовнішнього магнітного поля. H . Ця залежність містить інформацію про квазічастинки та їх взаємодію з вихорами, які присутні у вихровому стані ВТНП. Оскільки ВТНП є сильно вираженими надпровідниками II-типу, вихрова фаза великого розміру простягається від нижнього критичного поля, $H_{c1} \sim 10 - 100$ Gauss до верхнього критичного поля, $H_{c2} \sim 100$ T. Головний член у польовій залежності $\rho_s(H) \sim \sqrt{H}$ вже добре зрозумілий [18, 285, 286] у рамках локального наближення для доплерівського зсуву. Це дуже корисне наближення було запропоновано Воловіком (Volovik) [287], який передбачив, що, на відміну від звичайних надпровідників, у d -хвильових системах головний внесок у ГС дають делокалізовані квазічастинкові стани, а не зв'язані стани, пов'язані з центрами вихорів. Було показано, що у прикладеному магнітному полі H ГС для делокалізованих квазічастинкових станів $N(\omega = 0, H) \sim \sqrt{H}$, а не $\sim H$, як у звичайному випадку. Область застосування наближення доплерівського зсуву обговорювалася у [288, 289] з використанням квазікласичних рівнянь Ейленбергера (Eilenberger). У [289] було показано, що для надпровідної густини це наближення працює добре

¹Віднормована надпровідна густина зв'язана з $\lambda(T)$ наступним чином $\rho_s(T)/\rho_s(0) = \lambda^2(0)/\lambda^2(T)$.

при низьких температурах.

Характерна $\sqrt{H}$ поведінка спостерігалась у теплоємності та теплопровідності (див. [290] з оглядом експериментів. Залежність $\rho_s(H)$ також може бути одержана з вимірювань на базі техніки взаємної індуктивності [281, 291, 292] або, наприклад, з вимірювань обертання мюонного спіну (μ SR) (див. огляд [293]). Великою перевагою попереднього методу є те, що він безпосередньо дає бажану залежність $\rho_s(H)$. Окрім того, вимірювана індуктивність безпосередньо пов'язана з надпровідною густиною таким чином, що на відміну від теплопровідності, яка обговорюється нижче, немає ніякої необхідності віднімати внесок фононів від необроблених даних [290]. З іншого боку, аналіз μ SR експериментів залучає додаткові припущення щодо розподілу внутрішнього магнітного поля у вихровому стані [293], яке міститься в залежній від моделі функції $f(H)$. Ця важлива залежна від поля функція входить у співвідношення $\sigma(H) = f(H)\rho_s(H)$ між вимірюваною швидкістю мюонної деполяризації $\sigma(H)$ і $\rho_s(H)$.

Ще з 1997 продовжується дискусія (див. огляд у [294]) про залежність теплопровідності $\kappa(H)$ та її відхиленнях від очікуваної $\sim \sqrt{H}$ поведінки. Головним фактом є те, що, коли магнітне поле прикладено перпендикулярно до CuO_2 площин, теплопровідність має перехід від залежного від поля режиму $\kappa(H) \sim \sqrt{H}$ до незалежного від поля плато-подібного режиму. Експерименти у недодопованому $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ (LSCO) [295, 296] при $H = 0$ у діапазоні $0 \leq x \leq 0.22$ та [297, 298] при $0 < H < 16\text{T}$ у діапазоні $0.06 \leq x \leq 0.22$ інтерпретуються у [299] із залученням *конкуруючого порядку із хвиль спінової густини* у недодопованому режимі.

Теоретична основа для цієї інтерпретації була запропонована [139], де було показано, що у присутності хвиль спінової густини зі щільною² m для

²Як підкреслено у [139], на відміну від електричної та спінової провідностей, теплопровідність є сліпою відносно квантових чисел, які розрізняють субдомінантні надпровідні щілини (наприклад, is and id_{xy}) та щілини, пов'язані з хвилями спінової густини.

$H = 0$ при $T \rightarrow 0$

$$\frac{\kappa}{T} = \frac{k_B^2 v_F^2 + v_\Delta^2}{3 v_F v_\Delta} \frac{\Gamma_0^2}{\Gamma_0^2 + m^2}. \quad (7.1)$$

Тут v_F це – Фермі швидкість, v_Δ – щілинна швидкість та Γ_0 – затухання квазічастинок, яке у [139] вважається незалежним від щілини m (знову ми обираємо одиниці $\hbar = c = 1$, якщо не стверджується протилежне, а також від Розділу 7.2 ми також покладемо $k_B = 1$).

Як можна побачити з (7.1), при $m = 0$ і $v_F = v_\Delta$ мінімальна величина теплопровідності дорівнює $\kappa_{min}/T = 2k_B^2/3$. Відкриття щілини m веде до подавлення теплопровідності і дозволяє мати величини κ/T , які є меншими за κ_{min}/T , що дійсно спостерігається у LSCO з $x = 0.06$ [296]. Присутність ненульової залежної від поля щілини $m(H)$ дозволяє також пояснити поведінку $\kappa(H, m(H))$, яка спостерігається у недодопованому LSCO [297, 298].

Є два додаткові експерименти, які підтримують ідею присутності конкуруючого параметру порядку в LSCO. Перший – це дослідження на основі фотоемісійної спектроскопії з кутовим вирішенням (ARPES) [300], яке вказує на існування скінченної щілини скрізь усю зону Бріллюена, включаючи $d_{x^2-y^2}$ вузлову лінію в LSCO при $x < 0.03$. І навіть більш захоплююче спостереження було зроблене для зразка LSCO з $x = 0.144$ і $T_c = 37\text{K}$ за допомогою еластичного розсіяння нейтронів [301]. Воно показало, що статичне впорядкування на основі хвиль спінової густини розвивається вище за критичне поле $H_0 \approx 3\text{T}$. Цю картину підтримують вимірювання [302] зроблені на зразку з таким же допіном, які показали, що $\kappa(H)/T$ зростає при $0 < H \lesssim 0.5\text{T}$ і зменшується у вищих полях. Проте, більше сильно допований зразок LSCO з $x = 0.15$ не показує ніякого зменшення $\kappa(H)/T$ аж до 17T . Всі ці спостереження стимулюють інтерес до дослідження конкуруючих порядків.

У цьому Розділі досліджується вплив конкуруючих параметрів порядку на надпровідну густину ρ_s та її залежність від зовнішнього поля. Ми демон-

струємо, що дуже важливим є врахування впливу відкриття щілини спінової густини m на значення розсіяння на домішках $\Gamma(m)$. Коли цей ефект береться до уваги, результуюча залежність $\rho_s(H, m(H), \Gamma(m(H)))$ нагадує експериментальні результати одержані на дуже тонких плівках LSCO [292].

Хоча й останні експерименти у LSCO [301, 302] здебільшого інтерпретуються [299] у рамках конкуруючого впорядкування з хвилями спінової густини (ХСГ), ранні експерименти на BSCO (див. посилання у [294] та [303]) були також інтерпретовані з використанням *комплексної* d_{xy} компоненти, яка генерується у d -хвильових надпровідниках у магнітному полі [304, 305]. Зникнення d -хвильового вузла в оптимально допованому YBCO у магнітному полі спостерігалось у внутріплощинній тунельній провідності [306]. Автори [306] інтерпретують своє спостереження за допомогою конкуруючого id_{xy} або is параметру порядку. Тому тут ми також розглядаємо вплив конкуруючих id_{xy} та is порядків на надпровідну густину ρ_s . Ця проблема вже розглядалась Модре *та ін.* (Modre *et al.*) [307], які обчислили лондонівську глибину проникнення для змішаного надпровідного порядку у нульовому магнітному полі. Підкреслимо, що надпровідна густина ρ_s може дозволити розрізнити ХСГ та надпровідні впорядкування.

Розділ організовано наступним чином. У Розділі 7.2 ми вводимо 4×4 діраківський формалізм, зручний для опису впорядкувань, які конкурують з основною d НП. Загальне представлення для надпровідної густини записано у Розділі 7.3, а у Розділі 7.3.1 розглядається різниця між $\rho_s(T = 0)$ для конкуруючих (з d -хвильовою надпровідністю) надпровідного та ХСГ параметрів порядку. Залежність розсіяння на домішках Γ від величин конкуруючих щілин у борнівський та унітарній границях розглядається у Розділі 7.4. У Розділі 7.5 ми одержуємо аналітичні вирази для $\rho_s(T)$ у присутності конкуруючих параметрів порядку при $H = 0$ у низькотемпературній границі. Головні результати для залежності від поля величини $\rho_s(H)$ при $T = 0$ представлені у Розділі 7.6, а висновки наведені у Розділі 5.3.5.

7.2. Діраківський формалізм для опису конкуруючих параметрів порядку у d НП

Ми почнемо з дії для d НП (див. Розділ 1.2.3.2), записаної у формалізмі уявного часу

$$S = - \int d\tau \int d\mathbf{k} \psi^\dagger(\tau, \mathbf{k}) \left[\hat{I} \partial_\tau + \tau_3 \xi(\mathbf{k}) - \tau_1 \Delta(\mathbf{k}) \right] \psi(\tau, \mathbf{k}), \quad (7.2)$$

де

$$\Psi^\dagger(\tau, \mathbf{k}) = (c_\uparrow^\dagger(\tau, \mathbf{k}), c_\downarrow(\tau, -\mathbf{k})) \quad (7.3)$$

– це спіно́р Намбу та $c_\sigma^\dagger(\tau, \mathbf{k})$ і $c_\sigma(\tau, \mathbf{k})$ з $\sigma = \uparrow, \downarrow$ є, відповідно, операторами утворення і знищення. Здебільшого ми будемо використовувати вузлове наближення так, що точна форма закону дисперсії квазічастинок $\xi(\mathbf{k})$ та d -хвильової надпровідної щілини не має значення.

Неможливо розглядати інші, ніж is конкуруючі порядки, якщо продовжити використовувати 2×2 формалізм. Залежно від зроблених фізичних припущень щодо природи конкуруючого порядку, існують різні можливості конструювання зі спіно́рів Намбу чотирьох-компонентних спіно́рів та переходу до 4×4 формалізму (див., наприклад, [137, 138]). Оскільки нас цікавить конкуруюча хвиля спінової густини сформована поверх надпровідного стану, ми оберемо спіно́ри так, як було зроблено у [138, 139]

$$\Psi_i^\dagger(t, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} c_\uparrow^\dagger(t, \mathbf{k}) & c_\downarrow(t, -\mathbf{k}) & c_\uparrow^\dagger(t, \mathbf{k} - \mathbf{Q}_i) & c_\downarrow(t, -\mathbf{k} + \mathbf{Q}_i) \end{pmatrix}, \quad (7.4)$$

де $\mathbf{Q}_i = 2\mathbf{K}_i$ – це хвильовий вектор, який зв’язує вузли в діагональній парі $i = 1, 2$. Оскільки далі нас цікавлять низькотемпературні ($T \ll T_c$) властивості системи, ми розглянемо тільки оточення вузлів $\mathbf{k} = \mathbf{K}_i + \mathbf{q}$ з $|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{K}_i|$ як показано на Рис. 7.1. Використавши, що $\xi(\mathbf{k}) = -\xi(\mathbf{k} - \mathbf{Q}_i)$, та $\Delta(\mathbf{k}) = -\Delta(\mathbf{k} - \mathbf{Q}_i)$ при $\mathbf{k} \approx \mathbf{K}_i$, і далі лінеаризуючи спектр $\xi(\mathbf{k}) = v_F q_x + O(q^2)$ та $\Delta(\mathbf{k}) = v_\Delta q_y + O(q^2)$, одержуємо низькоенергетичну дію

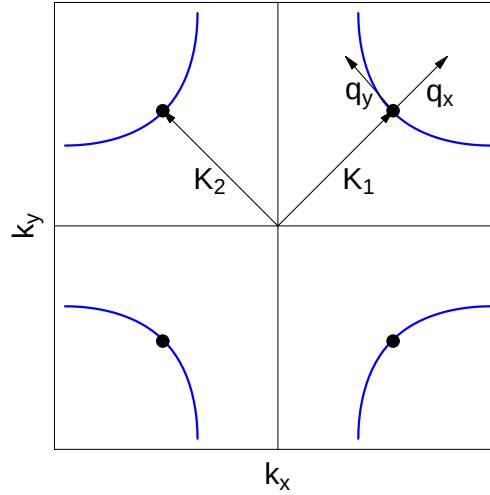


Рис. 7.1. (Кольоровий в електронній версії [19].) Схематичний рисунок Фермі поверхні з векторами $\mathbf{K}_i$, $i = 1, 2$, та $\mathbf{q}$. Вектори ХСГ – це $\mathbf{Q}_i = 2\mathbf{K}_i$.

[138]

$$S = - \int d\tau \int d\mathbf{k} \Psi_1^\dagger(\tau, \mathbf{k}) \left[\hat{I}_4 \partial_\tau + M_1 v_F q_x + M_2 v_\Delta q_y \right] \Psi_1(\tau, \mathbf{k}) \quad (7.5)$$

$$+ (1 \longrightarrow 2, x \longleftrightarrow y),$$

де, відповідно, $M_1 = \sigma_3 \otimes \tau_3$ та $M_2 = -\sigma_3 \otimes \tau_1$. Як і у випадку з графеном, корисно переформулювати модель (7.5) у вигляді КЕД₂₊₁, оскільки це дозволить використовувати алгебраїчні властивості 4×4 редукованого представлення γ -матриць, яке задовольняє алгебрі Дірака (Кліффорда)

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\hat{I}_4 g_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1), \quad \mu, \nu = 0, 1, 2. \quad (7.6)$$

Як ми вже бачили у Розділі 2.5, іншою перевагою КЕД₂₊₁ формулювання є те, що воно дозволяє прокласифікувати різні конкуруючі порядки як різні діраківські маси [137–139]. Ми вводимо діраківський спряжений спінор $\bar{\Psi}_i = \Psi_i^\dagger \gamma_0$, де γ_0 – це 4×4 матриця, яка антикомутує з M_1 та M_2 , а також задовольняє $\gamma_0^2 = \hat{I}_4$. Цей вибір не є єдиним, але ми використаємо такі ж позначення, як у [138, 139] та оберемо $\gamma_0 = \sigma_1 \otimes \tau_0$. Відповідно, ми визначимо $\gamma_{1,2}$ так $M_1 = \gamma_0 \gamma_1$ і $M_2 = \gamma_0 \gamma_2$ так, що $\gamma_1 = -i\sigma_2 \otimes \tau_3$ і $\gamma_2 = i\sigma_2 \otimes \tau_1$

задовольняють визначенню (7.6). Таким чином, ми одержуємо дію

$$S = - \int d\tau \int d\mathbf{k} \bar{\Psi}_1(\tau, \mathbf{k}) [\gamma_0 \partial_\tau + \gamma_1 v_F q_x + \gamma_2 v_\Delta q_y] \Psi_1(\tau, \mathbf{k}) + (1 \longrightarrow 2, x \longleftrightarrow y). \quad (7.7)$$

Подібно до (2.31), можна розглянути квазічастинкові щілини m_i різної природи, яка закодована у їх матричній структурі $O_i = (\hat{I}_4, i\gamma_5, \gamma_3, \gamma_3\gamma_5)$. Як звичайно, матриці γ_3 та γ_5 антикомутують з матрицями γ_ν , і дорівнюють

$$\gamma_3 = i\sigma_2 \otimes \tau_2, \quad \gamma_5 = \sigma_3 \otimes \hat{I}_2. \quad (7.8)$$

Таким чином, різні щілини m_i відповідають різним типам діраківських мас, які додаються до дії (7.7). Зокрема, маса m_1 з $O_1 = \hat{I}_4$ описує (несумірну) $\cos$ ХСГ, а маса m_2 з $O_2 = i\gamma_5$ описує $\sin$ ХСГ. Маси m_3 і m_4 з $O_3 = \gamma_3$ і $O_4 = \gamma_3\gamma_5$ описують, відповідно, id_{xy} - та is -спарювання та [138, 139]. У цьому розділі ми здебільшого розглядаємо щілину СГХ, $m_1 \equiv m$ з відповідною голою мацубарівською ФГ

$$G_0(i\omega_n, \mathbf{k}) = - \frac{i\omega_n \gamma_0 - v_F k_1 \gamma_1 - v_\Delta k_2 \gamma_2 + m \hat{I}}{\omega_n^2 + v_F^2 k_1^2 + v_\Delta^2 k_2^2 + m^2} \quad (7.9)$$

та id_{xy} щілину, $m_3 = \Delta_{d_{xy}}$ з відповідною ФГ

$$G_0(i\omega_n, \mathbf{k}) = - \frac{i\omega_n \gamma_0 - v_F k_1 \gamma_1 - v_\Delta k_2 \gamma_2 - \Delta_{d_{xy}} \gamma_3}{\omega_n^2 + v_F^2 k_1^2 + v_\Delta^2 k_2^2 + \Delta_{d_{xy}}^2}. \quad (7.10)$$

Також ми визначили у 4×4 формалізмі оператор електричного струму. У формалізмі Намбу він дорівнює

$$\mathbf{j}(\tau, \mathbf{q} = 0) = e \int d\mathbf{k} \mathbf{v}_F(\mathbf{k}) \psi^\dagger(\tau, \mathbf{k}) \hat{I}_2 \psi(\tau, \mathbf{k}), \quad \mathbf{v}_F(\mathbf{k}) \equiv \frac{\partial \xi(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}, \quad d\mathbf{k} \equiv \frac{d^2 k}{(2\pi)^2}, \quad (7.11)$$

і оскільки $\xi(\mathbf{k}) = -\xi(\mathbf{k} - \mathbf{Q}_i)$, ми одержуємо вираз

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\tau, \mathbf{q} = 0) &= e \int_{\text{HBZ}} d\mathbf{k} \mathbf{v}_F(\mathbf{k}) \Psi^\dagger(\tau, \mathbf{k}) \sigma_3 \otimes \hat{I}_2 \Psi(\tau, \mathbf{k}) \\ &= e \int_{\text{HBZ}} d\mathbf{k} \mathbf{v}_F(\mathbf{k}) \bar{\Psi}(\tau, \mathbf{k}) \gamma_0 \gamma_5 \Psi(\tau, \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (7.12)$$

де інтегрування іде по половині зони Бріллюена (HBZ - halved Brillouin zone), тобто по області з $k_y > 0$ на Рис. 7.1. Це означає, що після того, як використано вузлове наближення, треба включити лише інтегрування по двом сусіднім вузлам, як відображено у (7.7), оскільки протилежні вузли вже включені в 4×4 формалізм.

7.3. Загальне представлення для надпровідної густини

Надпровідна жорсткість (stiffness) (або густина поділена на масу носіїв m^*) задається виразом [308]

$$\Lambda_s^{ij}(T, H) \equiv \frac{\rho_s^{ij}}{m^*} = \tau_{ij} - \Lambda_n^{ij}(T, H), \quad (7.13)$$

де τ_{ij} – це діамагнітний тензор, пов’язана з лондонівською глибиною проникнення λ_L стандартним чином $\Lambda_s = c^2/(4\pi e^2 \lambda_L^2)$. У (7.13) Λ_n – густина нормальної рідини поділена на масу носіїв, обчислена, як і у Розділі 3, у “bubble approximation” з одягнутими ферміонними пропагаторами (тобто з власною енергією Σ що містить внесок завдяки розсіянню на домішках), але нехтуючи вершинними та фермі-рідинними поправками,

$$\Lambda_n^{ij} = -T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\text{HBZ}} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} v_{Fi}(\mathbf{k}) v_{Fj}(\mathbf{k}) \text{tr}[G(i\omega_n, \mathbf{k}) \gamma_0 \gamma_5 G(i\omega_n, \mathbf{k}) \gamma_0 \gamma_5]. \quad (7.14)$$

Як показано у [308], вершинними поправками можна знехтувати, якщо потенціал розсіяння на домішках є ізотропним у $\mathbf{k}$ -просторі. Фермі рідинні поправки можуть бути включені подібно до того, як було зроблено у [308]. Коли $\Sigma = 0$, у (7.14) зручно починати з суми по мацубарівським частотам, як зроблено у Розділі 7.3.1 далі. У більш загальному випадку $\Sigma \neq 0$ інтегрування по імпульсам робиться спочатку. Використовуючи спектральне представлення ФГ $G(i\omega_n, \mathbf{k})$ зі спектральною густиною (3.9), яка задається стрибком ФГ, можна легко знайти суму по мацубарівським частотам

у (7.14) та представити Λ_n у наступній формі [21]

$$\Lambda_n^{ij} = \int_{\text{HBZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tanh \frac{\omega}{2T} \frac{v_{Fi} v_{Fj}}{4\pi i} \times \text{tr}[G_A(\omega, \mathbf{k}) \gamma_0 \gamma_5 G_A(\omega, \mathbf{k}) \gamma_0 \gamma_5 - G_R(\omega, \mathbf{k}) \gamma_0 \gamma_5 G_R(\omega, \mathbf{k}) \gamma_0 \gamma_5], \quad (7.15)$$

яка є більш зручною для інтегрування по $\mathbf{k}$. Нагадаємо, що у (3.9) і (7.15) $G_{R,A}(\omega, \mathbf{k}) = G(i\omega_n \rightarrow \omega \pm i0, \mathbf{k})$ – це запізнювальна та випереджувальна ФГ.

7.3.1. Властивості Λ_s для різних конкуруючих параметрів порядку. Для того, щоб спростити формальний розгляд, у цьому Розділі ми припустимо, що існує повний нестінг, $\xi(\mathbf{k}) = -\xi(\mathbf{k} - \mathbf{Q}_i)$ та $\Delta(\mathbf{k}) = -\Delta(\mathbf{k} - \mathbf{Q}_i)$ для всіх величин імпульсу $\mathbf{k}$, а не тільки поблизу від вузлів. Тоді діамагнітний тензор дорівнює

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\text{HBZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{tr}[\sigma_3 \otimes \tau_3 G(i\omega_n, \mathbf{k}) \gamma_0] \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{k})}{\partial k_i \partial k_j} \\ &= - \int_{\text{HBZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{k})}{\partial k_i \partial k_j} \frac{2\xi(\mathbf{k})}{E(\mathbf{k})} \tanh \frac{E(\mathbf{k})}{2T}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

де, залежно від виду конкуруючого порядку, енергія

$E(\mathbf{k}) = \sqrt{\xi^2(\mathbf{k}) + \Delta^2(\mathbf{k}) + m^2 + \{\Delta_{d_{xy}}^2\}}$. Тут і нижче позначення $m^2 + \{\Delta_{d_{xy}}^2\}$ означає, що розглядається або конкуруюче ХСГ впорядкування зі щільною, або id_{xy} порядок зі щільною $\Delta_{d_{xy}}$.

Обчислюючи слід у (7.14), яке входить у другий член (7.13), ми одержуємо

$$\Lambda_n^{ij} = -T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\text{HBZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} v_{Fi}(\mathbf{k}) v_{Fj}(\mathbf{k}) \frac{4[-\omega_n^2 - m^2 + \{\Delta_{d_{xy}}^2\} + \xi^2(\mathbf{k}) + \Delta^2(\mathbf{k})]}{[\omega_n^2 + \xi^2(\mathbf{k}) + \Delta^2(\mathbf{k}) + m^2 + \{\Delta_{d_{xy}}^2\}]^2}. \quad (7.17)$$

Можна побачити, що є важлива різниця між випадками ХСГ та id_{xy} , яка

полягає у знаку перед m^2 і $\Delta_{d_{xy}}^2$ у чисельнику мацубарівських сум. Спочатку обчисливши суму для $\Delta_{d_{xy}}^2$ випадку, ми одержуємо

$$\Lambda_n^{ij} = \int_{\text{HBZ}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} v_{Fi}(\mathbf{k}) v_{Fj}(\mathbf{k}) \frac{1}{T} \frac{1}{\cosh^2 \frac{E(\mathbf{k})}{2T}}, \quad E(\mathbf{k}) = \sqrt{\xi^2(\mathbf{k}) + \Delta^2(\mathbf{k}) + \Delta_{d_{xy}}^2}. \quad (7.18)$$

Відзначимо, що такий же результат має місце для is впорядкування. Проінтегрувавши по частинам, можна перевірити, що надпровідна густина ρ_s залишається скінченною, коли $\Delta(\mathbf{k}) = 0$, оскільки друга щілина є також надпровідною, і $\rho_s = 0$ тільки коли обидві щілини дорівнюють нулю, $\Delta(\mathbf{k}) = \Delta_{d_{xy}} = 0$.

Для конкуруючого ХСГ впорядкування

$$\Lambda_n^{ij} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} v_{Fi}(\mathbf{k}) v_{Fj}(\mathbf{k}) \left[\frac{2m^2}{E^3(\mathbf{k})} \tanh \frac{E(\mathbf{k})}{2T} + \frac{\xi^2(\mathbf{k}) + \Delta^2(\mathbf{k})}{T E^2(\mathbf{k})} \frac{1}{\cosh^2 \frac{E(\mathbf{k})}{2T}} \right], \quad (7.19)$$

Легко бачити, що при $\Delta(\mathbf{k}) = 0$, але скінченній m , надпровідна густина ρ_s зануляється. На відміну від надпровідної густини, теплопровідність сліпа відносно квантових чисел, які розрізняють щілини m та $\Delta_{d_{xy}}$ (Δ_s) так, що (7.1) лишається придатним для всіх конкуруючих ХСГ, is і id_{xy} впорядкувань.

Використавши вузлове наближення [308] можна оцінити, що виснаження конденсату через утворення ХСГ при $T = 0$ дорівнює

$$\Lambda_n = \frac{v_F}{\pi v_\Delta} |m| \approx N(0) v_F^2 \frac{|m|}{\Delta}, \quad (7.20)$$

де $N(0)$ – це ГС на один спін у нормальному стані, а Δ – амплітуда d -хвильової щілини.

7.4. Вплив відкриття вторинної щілини на розсіяння на домішках

У цьому Розділі ми розглянемо вплив немагнітних домішок на залишкове розсіяння на домішках у присутності конкуруючого параметру порядку. Ми починаємо з гамільтоніана, записаного у формалізмі Намбу

$$H_{imp} = \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \Psi^\dagger(\tau, \mathbf{k}) \tau_3 \Psi(\tau, \mathbf{k}'), \quad (7.21)$$

який описує взаємодію $V(\mathbf{r}) = \sum_i V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, де $\mathbf{r}_i$ – це позиції випадкового розподілу домішок. Відповідно, у 4×4 формалізмі

$$\begin{aligned} H_{imp} &= \int_{\text{HBZ}} d\mathbf{k} \int_{\text{HBZ}} d\mathbf{k}' V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \Psi^\dagger(\tau, \mathbf{k}) \hat{I}_2 \otimes \tau_3 \Psi(\tau, \mathbf{k}') \\ &= \int_{\text{HBZ}} d\mathbf{k} \int_{\text{HBZ}} d\mathbf{k}' V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \bar{\Psi}(\tau, \mathbf{k}) (-\gamma_5 \gamma_1) \Psi(\tau, \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Таким чином, система рівнянь для домішкової власної енергії записується наступним чином:

$$G_0^{-1}(i\omega, \mathbf{k}) = i\omega\gamma_0 - \xi(\mathbf{k})\gamma_1 - \Delta(\mathbf{k})\gamma_2 - m\hat{I}_4 - \{\Delta_{d_{xy}}\gamma_3\}, \quad (7.23a)$$

$$G^{-1}(i\tilde{\omega}, \mathbf{k}) = G_0^{-1}(i\tilde{\omega}, \mathbf{k}) - \Sigma(i\tilde{\omega}), \quad (7.23b)$$

$$\Sigma(i\tilde{\omega}) = \Gamma_{imp}(-\gamma_5\gamma_1)[c + g(i\tilde{\omega})\gamma_5\gamma_1]^{-1}, \quad (7.23c)$$

$$g(i\tilde{\omega}) = \frac{1}{\pi N(0)} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} G(i\tilde{\omega}, \mathbf{k}), \quad (7.23d)$$

де $c = 1/(\pi N(0)V)$ – параметр, який контролює силу розсіяння на домішках та $\Gamma_{imp} = n_{imp}/(\pi N(0))$ з концентрацією домішок n_{imp} . Оскільки ми використали нерозкладену дисперсію $\xi(\mathbf{k})$ та d -хвильову щілину $\Delta(\mathbf{k})$, інтегрування у (7.23d) робиться по повній зоні Бріллюена для того, щоб правильно врахувати внесок від усіх вузлів.

Розклавши власну енергію Σ та $g(i\tilde{\omega})$ по γ -матрицям

$$\begin{aligned} \Sigma(i\tilde{\omega}) &= \Sigma^0(i\tilde{\omega})\gamma_0 + \Sigma^2(i\tilde{\omega})\gamma_2 + \Sigma^I(i\tilde{\omega})\hat{I}_4 + \{\Sigma^3(i\tilde{\omega})\gamma_3\}, \\ g(i\tilde{\omega}) &= g^0(i\tilde{\omega})\gamma_0 + g^2(i\tilde{\omega})\gamma_2 + g^I(i\tilde{\omega})\hat{I}_4 + \{g^3(i\tilde{\omega})\gamma_3\}, \end{aligned} \quad (7.24)$$

можна одержати систему самоузгоджених рівнянь для

$$\begin{aligned}
 i\tilde{\omega} &= i\omega - \Sigma^0(i\tilde{\omega}), \\
 \tilde{\Delta}(\mathbf{k}, i\tilde{\omega}) &= \Delta(\mathbf{k}) + \Sigma^2(i\tilde{\omega}), \\
 \tilde{m}(i\tilde{\omega}) &= m + \Sigma^I(i\tilde{\omega}), \\
 \left\{ \tilde{\Delta}_{d_{xy}}(\mathbf{k}, i\tilde{\omega}) &= \Delta_{d_{xy}}(\mathbf{k}) + \Sigma^3(i\tilde{\omega}) \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{7.25}$$

Для спрощення припустивши наявність електронно-діркової симетрії, маємо нульову ренормалізацію ξ . Зокрема, у відсутності конкуруючих параметрів порядку, система рівнянь зводиться до T -матричних рівнянь для d -хвильового надпровідника, які досліджувались, наприклад, у [309]. Оскільки у цьому випадку усереднення по поверхні Фермі дає $g^2(i\tilde{\omega}) = 0$, залишається тільки одне рівняння для $\tilde{\omega}$ або Σ^0 .

Нашою метою є прийняття до уваги впливу конкуруючого параметру порядку на $\tilde{\omega}$. Розвинення конкуруючого параметру порядку впливає як на вже згадане рівняння для $\tilde{\omega}$ (Σ^0), так і на нове рівняння для $\Sigma^I(i\tilde{\omega})$ $\{\Sigma^3(i\tilde{\omega})\}$. Однак, оскільки ми не маємо явного рівняння для щілини m $\{\Delta_{d_{xy}}\}$, далі ми припускаємо, що залежність $\tilde{m}(\tilde{\omega}(\omega = 0))$ задається феноменологічним чином, і не будемо розглядати рівняння для $\Sigma^I(i\tilde{\omega})$ $\{\Sigma^3(i\tilde{\omega})\}$. Це припущення означає, що ми не розрізняємо величини $\tilde{m}(\tilde{\omega}(\omega = 0))$ і m так, що надалі ми позначимо щілини конкуруючих порядків як m , $\Delta_{d_{xy}}$ та Δ_s . Ці щілини вже включають в себе ефекти домішок і магнітного поля та відповідають їхнім феноменологічним значенням, знайденим з експерименту. Хоча й надалі ми не розглядаємо рівняння для $\Sigma^I(i\tilde{\omega})$, корисно підкреслити аналогію між впливом немагнітних домішок на впорядкування ХСГ, та магнітними домішками у звичайних s -хвильових надпровідниках [310], яка веде до скінченої густини станів всередині щілини. Фізично це означає, що розсіяння на випадкових домішках робить систему більш однорідною, замиваючи неоднорідну структуру ХСГ [311].

Ми робимо два інших важливих припущення:

(i) Ми зацікавлені у величині розсіяння на домішках при нульовій енергії, $\Gamma = -\text{Im}\Sigma_R^0(\tilde{\omega}(\omega \rightarrow 0))$ і не розглядаємо ефекти, пов'язані з залежністю власної енергії від енергії $\Sigma^0(\tilde{\omega}(\omega))$, які вивчались у [312]. Це припущення виправдано тим, що з'єднання LSCO є внутрішньо більш брудною системою, ніж YBCO, яке було розглянуто в [312].

(ii) Хоча ми розглядаємо залежні від поля конкуруючі щілини, наприклад, $m = m(H)$, ми не включаємо вплив доплерівського зсуву на Γ [180,312,313].

7.4.1. T -матричне рівняння для конкуруючого ХСГ параметру порядку. Ми почнемо з рівняння для Σ^0 для конкуруючого ХСГ параметру порядку

$$\Sigma_R^0(\tilde{\omega}) = \frac{\Gamma_{imp}}{4} \left[\frac{1}{c - g^0(\tilde{\omega}) - g^I(\tilde{\omega})} + \frac{1}{-c - g^0(\tilde{\omega}) + g^I(\tilde{\omega})} + \frac{1}{c - g^0(\tilde{\omega}) + g^I(\tilde{\omega})} - \frac{1}{c + g^0(\tilde{\omega}) + g^I(\tilde{\omega})} \right] \quad (7.26)$$

яке одержане з (7.23с) з $g(i\tilde{\omega} \rightarrow \tilde{\omega})$, що задане у (7.23d) використовуючи розклад (7.25). Оскільки нас цікавить величина $\Sigma^0(\tilde{\omega})$ з $\tilde{\omega} = \omega - \Sigma^0(\tilde{\omega})$ при $\omega = 0$, нам потрібні тільки функції $g^0(\tilde{\omega})$ та $g^I(\tilde{\omega})$ обчислені при $\tilde{\omega} = i\Gamma$. Використовуючи вузлове наближення, ми одержуємо

$$g^0(i\Gamma) = \frac{1}{\pi N(0)} \frac{1}{\pi v_F v_\Delta} \ln \frac{m^2 + \Gamma^2}{p_0^2} i\Gamma, \quad (7.27a)$$

$$g^I(i\Gamma) = \frac{1}{\pi N(0)} \frac{1}{\pi v_F v_\Delta} \ln \frac{m^2 + \Gamma^2}{p_0^2} m, \quad (7.27b)$$

де введено ультрафіолетовий параметр обрізання p_0 . Відзначимо, що при $p_0 \sim 4\Delta$ та $(v_F v_\Delta)^{-1} \sim \pi N(0)/\Delta$, де Δ – це амплітуда d -хвильової щілини $\Delta(\mathbf{k}) = \Delta/2(\cos k_x a - \cos k_y a)$, функція $g(\omega)$ обчислена у вузловому наближенні, узгоджується з виразами, наведеними у [309, 312, 313]. У рівнянні (7.26) борнівська границя відповідає $V \rightarrow 0$ ($c \rightarrow \infty$), а унітарна границя відповідає $V \rightarrow \infty$, тобто $c \rightarrow 0$.

7.4.1.1. Борнівська границя. У борнівській границі (7.26) спрощується до

$$\Sigma_R^0(\tilde{\omega}) = \Gamma_{imp} c^{-2} g^0(\tilde{\omega}). \quad (7.28)$$

Оскільки тільки g^0 входить до (7.28), борнівська границя виявляється однакою для ХСГ та надпровідного порядків, оскільки g^0 залежить або від m^2 , або від Δ_{dxy}^2 .

Підставивши (7.27а) у рівняння (7.28) та розв'язуючи його відносно Γ , ми одержуємо [314]

$$\Gamma^2 = p_0^2 \exp \left[-\frac{c^2 \pi^2 v_F v_\Delta N(0)}{\Gamma_{imp}} \right] - m^2. \quad (7.29)$$

Для заданої концентрації домішок цей розв'язок є ненульовим тільки якщо $m < m_{cr}$, де $m_{cr} = p_0 \exp[-c^2 \pi^2 v_F v_\Delta N(0)/(2\Gamma_{imp})]$. Оскільки розглядається борнівська границя, величина m_{cr} є експоненційно малою. Незважаючи на це, в унітарній границі є можливість мати як скінчене Γ , так і досить великі величини m .

7.4.1.2. Унітарна границя. LSCO сполука є сама по собі більш брудною системою, ніж інші купрати, тому для неї унітарна границя є більш релевантною. Більш того, плівки, досліджені у [292], мають особливо великі значення $\Gamma \sim 6 \div 50\text{K}$, що також вказує на релевантність унітарної границі. Коли $c \rightarrow 0$, то (7.26) зводиться до

$$\Sigma_R^0(\tilde{\omega}) = \Gamma_{imp} \frac{g^0(\tilde{\omega})}{[g^I(\tilde{\omega})]^2 - [g^0(\tilde{\omega})]^2}. \quad (7.30)$$

Тепер, оскільки g^I все ще входить до (7.30), трансцендентне рівняння для Γ має форму

$$\Gamma^2 = \Gamma_{imp} \pi^2 N(0) v_F v_\Delta \left[\ln \frac{p_0^2}{\Gamma^2 + m^2} \right]^{-1} - m^2, \quad (7.31)$$

яка відрізняється від рівняння у роботі [314] останнім m^2 членом. Через його наявність залежність $\Gamma(m)$ є досить сильною (див. Рис. 7.2) і, як і

в борнівській границі, існує критична величина m_{cr}^{unit} така, що $\Gamma(m) = 0$ при $m > m_{cr}^{unit}$. Як ми аргументуємо нижче, відхилення у залежності $\rho_s(H)$ (або $\Lambda_s(H)$) від $\sim \sqrt{H}$ поведінки у сильних полях можуть бути пов'язані з тим, що залежність від поля величини $m(H)$ впливає на поведінку $\rho_s(H)$ через залежність $\Gamma(m(H))$. Наприкінці ми відзначимо, що у випадку конкуруючого *is* порядку також описується за допомогою (7.31).

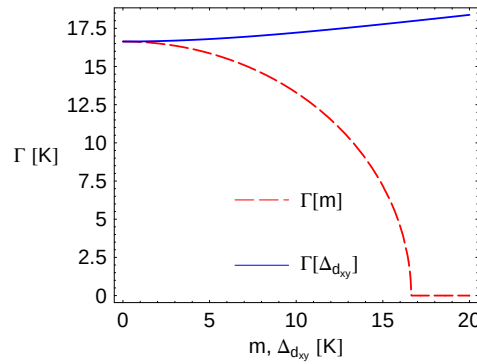


Рис. 7.2. (Кольоровий в електронній версії [19].) Залежність розсіяння на домішках Γ від величин щілин m та $\Delta_{d_{xy}}$ розвиваючихся ХСГ та id_{xy} порядків. При $m > m_{ct}$ величина $\Gamma(m) = 0$.

7.4.2. T -матричне рівняння для конкуруючого id_{xy} параметру порядку. Подібно до (7.26) для конкуруючого id_{xy} параметру порядку ми одержуємо

$$\Sigma_R^0(\tilde{\omega}) = \Gamma_{imp} \frac{g^0(\tilde{\omega})}{c^2 - [g^0(\tilde{\omega})]^2 + [g^3(\tilde{\omega})]^2}, \quad (7.32)$$

де $g^0(i\Gamma)$ задається виразом (7.27а), тоді як для d_{xy} порядку $g^3 = 0$, аналогічно з функцією g^2 у $d_{x^2-y^2}$ випадку.

7.4.2.1. Борнівська границя. Як ми вже згадували в Розділі 7.4.1.1, у борнівській границі немає різниці між розглядом конкуруючих ХСГ та id_{xy} порядку так, що можна просто замінити щілину m на $\Delta_{d_{xy}}$ у відповідних рівняннях. Більш того, цей розгляд також є дійсним для конкуруючого *is* параметру порядку.

7.4.2.2. Унітарна границя. Оскільки $g^3 = 0$, замість (7.31) ми одержуємо рівняння [314]

$$\Gamma^2 = \Gamma_{imp} \pi^2 N(0) v_F v_\Delta \left[\ln \frac{p_0^2}{\Gamma^2 + \Delta_{d_{xy}}^2} \right]^{-1}. \quad (7.33)$$

Його розв'язок $\Gamma(\Delta_{d_{xy}})$ показано на Рис. 7.2. Ми бачимо, що конкуруючий id_{xy} порядок не змінює значно величину Γ у порівнянні з випадком $\Delta_{d_{xy}} = 0$, коли він зводиться до наступної форми [315]

$$\Gamma^2 = \frac{\pi}{2} n_{imp} v_F v_\Delta \left[\ln \frac{p_0}{\Gamma} \right]^{-1}. \quad (7.34)$$

7.5. Надпровідна густина при $H = 0$

У Розділі 7.3.1 ми розглянули більш формальним чином, як різні конкуруючі порядки впливають на надпровідну густина. Зараз ми сконцентруємось на простих аналітичних виразах, які описують залежність Λ_n від розсіяння на домішках Γ та конкуруючих щілин m та $\Delta_{d_{xy}}$. У вузловому наближенні представлення (7.15) набуває вигляд зручний для аналітичних обрахунків

$$\Lambda_n = -\frac{v_F}{2\pi v_\Delta} J, \quad (7.35)$$

де

$$J = -\int_0^\infty d\omega \tanh \frac{\omega}{2T} \tilde{I}(\omega) \quad (7.36)$$

з

$$\tilde{I}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{p_0} p dp [I_A(\omega, p) - I_R(\omega, p)] \quad (7.37)$$

та

$$I_{R,A}(\omega, p) \equiv \text{tr}[G_{R,A}(\omega, p) \gamma_0 \gamma_5 G_{R,A}(\omega, p) \gamma_0 \gamma_5]. \quad (7.38)$$

Тут $p = \sqrt{v_F^2 k_1^2 + v_\Delta^2 k_2^2}$ це – закон дисперсії квазічастинок у вузловому наближенні. J у рівнянні (7.35) є вдвічі більшим, ніж у роботі [21], оскільки

використовується 4×4 формалізм. Зазаз ми розглянемо конкуруючі ХСГ, id_{xy} та is порядки.

7.5.1. Конкуруючий ХСГ порядок. Підставивши ФГ (7.9) з власною енергією $\text{Im}\Sigma_{R,A}(\omega = 0) = \mp\Gamma$ у (7.38) ми одержуємо

$$I_{R,A}(\omega, p) = \frac{4[(\omega \pm i\Gamma)^2 + p^2 - m^2]}{[(\omega \pm i\Gamma)^2 - p^2 - m^2]^2}. \quad (7.39)$$

Далі, інтегруючи по енергії p , ми одержуємо

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\omega) = & -\frac{2}{\pi} \left[\arctan \frac{p_0^2 + \Gamma^2 + m^2 - \omega^2}{2\Gamma\omega} - \arctan \frac{\Gamma^2 + m^2 - \omega^2}{2\Gamma\omega} \right. \\ & \left. - \frac{p_0^2\Gamma}{\sqrt{p_0^2 + m^2}} \frac{1}{(\omega - \sqrt{p_0^2 + m^2})^2 + \Gamma^2} + \frac{p_0^2\Gamma}{\sqrt{p_0^2 + m^2}} \frac{1}{(\omega + \sqrt{p_0^2 + m^2})^2 + \Gamma^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Наприкінці, проінтегрувавши по ω при $\Gamma \gg T$ (також $p_0 \gg m, \Gamma$) ми одержуємо

$$\begin{aligned} \Lambda_n = & \frac{v_F}{\pi^2 v_\Delta} \\ & \times \left[\Gamma \ln \frac{p_0^2}{m^2 + \Gamma^2} + m \arctan \frac{2m\Gamma}{\Gamma^2 - m^2} + \pi|m|\theta(m^2 - \Gamma^2) + \frac{\pi^2}{3} \frac{T^2\Gamma}{\Gamma^2 + m^2} \right], \end{aligned} \quad (7.41)$$

де θ це – ступенева функція. Перший член (7.41) можна інтерпретувати як внесок ГС у вичерпання конденсату навіть при $T = 0$, оскільки ГС (на один спін) у брудному d -хвильовому надпровіднику зі скінченною щільною m записується [139]

$$N_m(0) = \frac{2}{\pi^2 v_F v_\Delta} \Gamma \ln \frac{p_0}{\sqrt{\Gamma^2 + m^2}}. \quad (7.42)$$

Другий та третій члени (7.41) описують вичерпання конденсату завдяки появі ХСГ порядку, і при $\Gamma \rightarrow 0$ ці члени зводяться до розглянутого вище рівняння (7.20). Наприкінці, останній член (7.41), який $\sim T^2$ показує, що

характеристична для d -хвильових надпровідників лінійна T залежність величини Λ_n змінюється у присутності домішок і стає $\sim T^2$. Така поведінка дійсно спостерігалась у тонких плівках [292] у широкому діапазоні температур. Використовуючи наведене нижче рівняння (7.43), було знайдено, що у деяких плівках величина Γ може бути настільки великою, як $\approx 46.6\text{K}$ [292]. Коли $m \rightarrow 0$, (7.41) зводиться до відомого виразу [21, 316]

$$\Lambda_n(T) = \frac{v_F}{\pi v_\Delta} \left[\frac{2\Gamma}{\pi} \ln \frac{p_0}{\Gamma} + \frac{\pi}{3} \frac{T^2}{\Gamma} - O\left(\frac{T^4}{\Gamma^3}\right) \right]. \quad (7.43)$$

Знову перший член (7.43) пропорційний Γ С брудного d -хвильового надпровіднику [308].

Також повчально розглянути границю $\Gamma \rightarrow 0$, коли очікується, що T -залежність Λ_n змінюється з квадратичної на лінійну. Для одержання цього випадку треба виділити сингулярну частину $\tilde{I}(\omega)$ у границі $\Gamma \rightarrow 0$, тобто

$$\tilde{I}(\omega) = -\text{sgn}\omega [\text{sgn}(p_0^2 - \omega^2) - \text{sgn}(m^2 - \omega^2)] + 2p_0[\delta(\omega - p_0) - \delta(\omega + p_0)], \quad (7.44)$$

де ми знову взяли $p_0 \gg m, \Gamma$. Далі

$$J(m) = -4T \ln \left(2 \cosh \frac{m}{2T} \right). \quad (7.45)$$

Очевидно при $m = 0$ ми отримуємо відомий вираз [308]

$$\Lambda_n = \frac{2 \ln 2}{\pi} \frac{v_F}{v_\Delta} T. \quad (7.46)$$

При $|m| \gg T$ ми одержуємо

$$\Lambda_n = \frac{v_F}{\pi v_\Delta} [|m| + 2T \exp(-|m|/T)], \quad (7.47)$$

де перший член співпадає з (7.20). При $|m| \ll T$, ми одержуємо вираз

$$\Lambda_n = \frac{2 \ln 2}{\pi} \frac{v_F}{v_\Delta} T \left[1 + \frac{1}{8 \ln 2} \frac{m^2}{T^2} \right]. \quad (7.48)$$

7.5.2. Конкуруючі id_{xy} та is параметри порядку. Різниця між конкуруючими ХСГ та надпровідними порядками полягає у протилежному знаку перед членом з m^2 у чисельнику (7.39) та у відповідному знаку перед $\Delta_{d_{xy}}^2$ у формулі

$$I_{R,A}(\omega, p) = \frac{4[(\omega \pm i\Gamma)^2 + p^2 + \Delta_{d_{xy}}^2]}{[(\omega \pm i\Gamma)^2 - p^2 - \Delta_{d_{xy}}^2]^2} \quad (7.49)$$

яка пов'язана з іншою γ -матрицею перед $\Delta_{d_{xy}}$ у (7.10). Відзначимо, що для конкуруючого is порядку рівняння (7.49) виявляється таким же так, що ці порядки відрізняються впливом надпровідних щілин $\Delta_{d_{xy}}$ і Δ_s на розсіяння на домішках Γ (див. Розділ 7.4.1.2) в унітарній границі. Інтегруючи по p , одержуємо

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\omega) = -\frac{2}{\pi} & \left[\arctan \frac{p_0^2 + \Gamma^2 + \Delta_{d_{xy}}^2 - \omega^2}{2\Gamma\omega} - \arctan \frac{\Gamma^2 + \Delta_{d_{xy}}^2 - \omega^2}{2\Gamma\omega} \right. \\ & + \frac{\Gamma\Delta_{d_{xy}}}{(\omega - \Delta_{d_{xy}})^2 + \Gamma^2} - \frac{\Gamma\Delta_{d_{xy}}}{(\omega + \Delta_{d_{xy}})^2 + \Gamma^2} \\ & \left. - \frac{\Gamma\sqrt{p_0^2 + \Delta_{d_{xy}}^2}}{(\omega - \sqrt{p_0^2 + \Delta_{d_{xy}}^2})^2 + \Gamma^2} + \frac{\Gamma\sqrt{p_0^2 + \Delta_{d_{xy}}^2}}{(\omega + \sqrt{p_0^2 + \Delta_{d_{xy}}^2})^2 + \Gamma^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Наприкінці, інтегруючи по ω при $\Gamma \gg T$ (також при $p_0 \gg \Delta_{d_{xy}}, \Gamma$) одержуємо

$$\Lambda_n = \frac{v_F}{\pi^2 v_\Delta} \left[\Gamma \ln \frac{p_0^2}{\Delta_{d_{xy}}^2 + \Gamma^2} + \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Delta_{d_{xy}}^2} + \frac{2\Delta_{d_{xy}}^2 \Gamma}{(\Gamma^2 + \Delta_{d_{xy}}^2)^2} \right) T^2 \right]. \quad (7.51)$$

Подібно до (7.44) у границі $\Gamma \rightarrow 0$ з (7.50) одержуємо

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\omega) = -\operatorname{sgn}\omega [\operatorname{sgn}(p_0^2 - \omega^2) - \operatorname{sgn}(\Delta_{d_{xy}}^2 - \omega^2)] \\ + 2p_0 [\delta(\omega - p_0) - \delta(\omega + p_0)] - 2\Delta_{d_{xy}} [\delta(\omega - \Delta_{d_{xy}}) - \delta(\omega + \Delta_{d_{xy}})], \end{aligned} \quad (7.52)$$

де ми знову взяли $p_0 \gg \Delta_{d_{xy}}, \Gamma$. Тоді

$$J(\Delta_{d_{xy}}) = 2\Delta_{d_{xy}} \tanh \frac{\Delta_{d_{xy}}}{2T} - 4T \ln \left(2 \cosh \frac{\Delta_{d_{xy}}}{2T} \right), \quad (7.53)$$

що відрізняється від (7.45) членом з $\tanh$. При $\Delta_{d_{xy}} = 0$ ми знову одержуємо (7.46). При $\Delta_{d_{xy}} \gg T$ залежність $\Lambda_n(T)$ стає термічно активованою завдяки вторинній щілині

$$\Lambda_n = \frac{2 v_F}{\pi v_\Delta} \Delta_{d_{xy}} \exp(-\Delta_{d_{xy}}/T), \quad (7.54)$$

тоді як при $\Delta_{d_{xy}} \ll T$ головний член $\Lambda_n(T)$ співпадає з (7.46)

$$\Lambda_n = \frac{2 \ln 2 v_F}{\pi v_\Delta} T \left[1 - \frac{1}{8 \ln 2} \frac{\Delta_{d_{xy}}^2}{T^2} \right]. \quad (7.55)$$

Порівнюючи останнє рівняння з (7.48), можна побачити, що вони відрізняються знаком перед членом з T^2 .

7.6. Надпровідна густина у вихровому стані

Присутність циркулюючих надструмів навкруги вихорів у змішаному стані може бути прийнята до уваги у семікласичному підході за допомогою введення доплерівського зсуву квазічастинкових енергій, $\omega \rightarrow \omega - \mathbf{v}_s(\mathbf{r})\mathbf{k}$ [287]. Тут $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$ це – надпровідна швидкість, залежна від розподілу вихорів, у позиції $\mathbf{r}$, та $\mathbf{k}$ це – імпульс квазічастинок, в якості якого можна наближено взяти його значення у вузлі [315]. Цей розподіл вихорів описується функцією

$$\mathcal{P}(\epsilon) = \frac{1}{A} \int d^2 r \delta(\epsilon - \mathbf{v}_s(\mathbf{r})\mathbf{k}), \quad (7.56)$$

де інтегрування ведеться по одиничній комірці вихрової ґратки з площею $A = \pi R^2$. Декілька можливих варіантів вибору функції $\mathcal{P}(\epsilon)$ обговорюється у [315]. Серед цих розподілів є розподіл для вихрової рідини [315]

$$\mathcal{P}(\epsilon) = \frac{E_H^2}{2(\epsilon^2 + E_H^2)^{3/2}}, \quad (7.57)$$

який є найбільш зручним для аналітичних обрахунків, та розподіл для повністю неупорядкованого вихрового стану [315, 317]

$$\mathcal{P}(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi} E_H} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{E_H^2}\right). \quad (7.58)$$

Характерний масштаб енергії E_H у (7.57) і (7.58), пов'язаний з доплерівським зсувом енергії у вихровому стані

$$E_H(H) = a \frac{\hbar v_F}{2R} = a \frac{\hbar v_F}{2} \sqrt{\frac{\pi H}{\Phi_0}}, \quad (7.59)$$

де a – це геометричний фактор порядку одиниці і H це – магнітне поле, прикладене перпендикулярно до ab площини. У другій рівності ми використали позначення роботи [315] (див. також [318] та посилання [33] у цій роботі) таке, що при $a = 1$ є один квант потоку $\Phi_0 = hc/2e$ на одиничну комірку вихрової ґратки, яка наближена кругом радіусу $R = (\Phi_0/\pi H)^{1/2}$. Кінцеві результати залежать від вибору функції розподілу та величини a , але якісні результати від цього не залежать. Далі ми використовуємо величину $v_F = 2.5 \times 10^7 \text{ cm/s}$ [296], яка відповідає $E_H[\text{K}] = 38 \text{ K} \cdot \text{T}^{-1/2} \sqrt{H[\text{T}]}$ [139] (порівняй з Розділом 2.6).

Ефект доплерівського зсуву може бути включений у формалізм функцій Гріна, який вже містить в собі розсіяння на домішках, за допомогою усереднення по розподілу $\mathcal{P}(\epsilon)$ [315, 319]

$$\begin{aligned} \Lambda_n^{ij}(H) = & \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \mathcal{P}(\epsilon) \int_{\text{HBZ}} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tanh \frac{\omega}{2T} v_{Fi} v_{Fj} \frac{1}{4\pi i} \\ & \times \text{tr}[G_A(\omega - \epsilon, \mathbf{k}) \gamma_0 \gamma_5 G_A(\omega - \epsilon, \mathbf{k}) \gamma_0 \gamma_5 - G_R(\omega - \epsilon, \mathbf{k}) \gamma_0 \gamma_5 G_R(\omega - \epsilon, \mathbf{k}) \gamma_0 \gamma_5]. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Відзначимо, що у 2×2 формалізмі Намбу заміна $\omega \rightarrow \omega - \epsilon$ в аргументі ФГ, за допомогою якої включається зсув Доплера, є точною. У 4×4 формалізмі відповідна ФГ описує два протилежних вузли з протилежним знаком доплерівського зсуву. Незважаючи на це, можна перевірити, що і у останньому випадку просте правило $\omega \rightarrow \omega - \epsilon$ є дійсним приблизно, якщо знехтувати членами $\sim \epsilon t$. У вузловому наближенні подібно до (7.35)

можна записати

$$\Lambda_n(H) = -\frac{v_F}{2\pi v_\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \mathcal{P}(\epsilon) J(m(H); \epsilon), \quad (7.61)$$

де функція $J(\epsilon; m(H))$ наведена нижче. Польова залежність $\Lambda_n(H)$, однак, ще визначена не повністю, оскільки ще необхідно визначити, як щілина $m(H)$ $\{\Delta_{d_{xy}}(H)\}$ залежить від поля. Ми повернемося до цього питання у Розділі 7.6.2.

7.6.1. Результати для польової залежності надпровідної густини при $m, \Delta_{d_{xy}}, \Gamma = \text{const.}$ При $T = 0$ і $p_0 \gg m, \Delta_{d_{xy}}, \Gamma$ у випадку ХСГ одержуємо

$$\begin{aligned} J(m, T = 0; \epsilon) = & -\frac{2}{\pi} \left[\epsilon \arctan \frac{\epsilon^2 - m^2 - \Gamma^2}{2\epsilon\Gamma} + \frac{\pi}{2} |\epsilon| \right. \\ & + \Gamma \ln \frac{p_0^2}{\sqrt{[\Gamma^2 + (m - \epsilon)^2][\Gamma^2 + (m + \epsilon)^2]}} \\ & \left. + m \arctan \frac{2m\Gamma}{\Gamma^2 + \epsilon^2 - m^2} + \pi |m| \theta(m^2 - \Gamma^2 - \epsilon^2) \right] \end{aligned} \quad (7.62)$$

та у id_{xy} випадку

$$\begin{aligned} J(\Delta_{d_{xy}}, T = 0; \epsilon) = & -\frac{2}{\pi} \left[\epsilon \arctan \frac{\epsilon^2 - \Delta_{d_{xy}}^2 - \Gamma^2}{2\epsilon\Gamma} + \frac{\pi}{2} |\epsilon| \right. \\ & \left. + \Gamma \ln \frac{p_0^2}{\sqrt{[\Gamma^2 + (\Delta_{d_{xy}} - \epsilon)^2][\Gamma^2 + (\Delta_{d_{xy}} + \epsilon)^2]}} \right]. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Перед тим, як зробити чисельні обрахунки, корисно розглянути аналітично границю $\Gamma \rightarrow 0$. Можна побачити, що у цій границі різниця між випадками ХСГ та id_{xy} полягає в останніх двох членах $\sim m$ у (7.62). Через це ми розглянемо спочатку id_{xy} випадок, а далі розглянемо роль цих членів. З (7.63) ми одержуємо, що

$$J(\Delta_{d_{xy}}, T = 0; \epsilon) = -2|\epsilon| \theta(\epsilon^2 - \Delta_{d_{xy}}^2). \quad (7.64)$$

Підставивши (7.63) у (7.61) та використавши розподіл (7.57) для вихрової рідини, ми одержуємо

$$\Lambda_n(H) = \frac{v_F}{\pi v_\Delta} \frac{E_H^2}{\sqrt{E_H^2 + \Delta_{d_{xy}}^2}}. \quad (7.65)$$

Це означає, що, незважаючи на присутність щілини для вузлових квазічастинок, внесок Λ_n все ще поводить себе як $\sim \sqrt{H}$, якщо $\Delta_{d_{xy}}(H) \lesssim \sqrt{H}$. Ця безщілинна поведінка пов'язана з тим, що доплерівський зсув квазічастинкової енергії $E - \mathbf{k}\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$ залежний від положення. Таким чином, є області, де цей зсув є більшим за мінімальну щілину в спектрі $\Delta_{d_{xy}}$, що веде до скінчених ГС і Λ_n . Ця властивість ГС була підкреслена у [320], де наголошено, що, незалежно від ступеня, який входить у залежність щілини від поля $\Delta_{d_{xy}} \sim H^\alpha$, у малих полях головний внесок у ГС завжди $\sqrt{H}$, якщо $\alpha \geq 1/2$. Таким чином, у чистій системі $\Lambda_n(H)$ залишається $\sim \sqrt{H}$ навіть у присутності ненульової щілини $\Delta_{d_{xy}} \propto H^\alpha$ з $\alpha \geq 1/2$. Як ми вже згадували, у випадку ХСГ останні два члени (7.62) дають внесок у Λ_n . Однак, якщо ХСГ щілина $m(H) \propto \sqrt{H}$ пропорційна $\sqrt{H}$ поведінка величини $\Lambda_n(H)$ залишатиметься, оскільки внесок двох останніх членів (7.62) дорівнює $v_F/(\pi v_\Delta) m^2(H)/\sqrt{E_H^2 + m^2(H)}$. На Рис. 7.3 ми побудували залежність $\Lambda_s(H)$ для постійних незалежних від поля щілин m , $\Delta_{d_{xy}}$ для чистого випадку, $\Gamma = 0$ (зліва) та при $\Gamma = 16\text{K}$. Ця залежність отримана чисельно з (7.61), використовуючи розподіл (7.58). Ми використали значення $v_F/v_\Delta = 30$ та грубу оцінку діаманітного члену $\tau = 1500\text{K}$ з рисунка Уемури. У чистій границі $\Gamma = 0$ при нульовій температурі, відкриття щілини залишає конденсат без змін, якщо ця щілина надпровідна, але вичерпує його, у випадку ХСГ. Прикладення зовнішнього магнітного поля H перпендикулярно до площин з оксиду міді створює квазічастинки і зменшує густину конденсату у порівнянні з величиною в нульовому полі. У порівнянні з чистою $d_{x^2-y^2}$ надпровідністю, зменшення конденсату при заданій

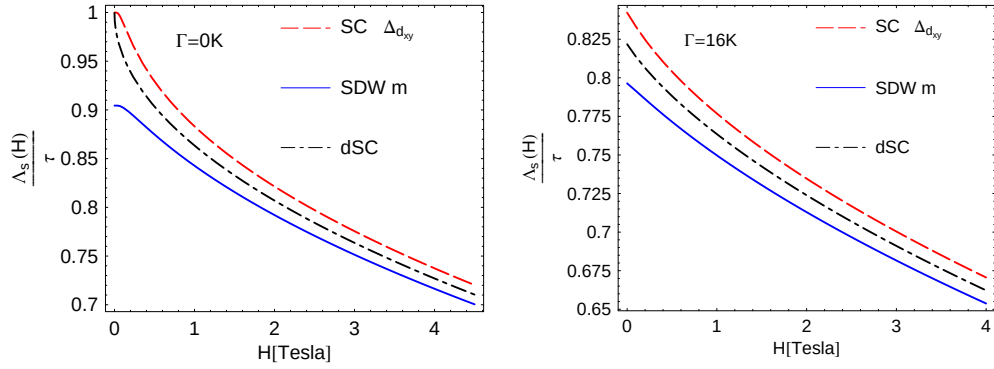


Рис. 7.3. (Кольоровий в електронній версії [19].) Залежність $\Lambda_s(H))/\tau$ при $T = 0$ для d -хвильового надпровідника з додатковими ХСГ і id_{xy} щілинами $\Delta_{d_{xy}} = m = 15$ К, а також без будь-якого конкуруючого порядку. Зліва: чиста границя, $\Gamma = 0$ К. Справа: постійне $\Gamma = 16$ К.

величині H є меншим у присутності додаткової id_{xy} (is) щілини і навіть ще меншим у випадку ХСГ. Однак оскільки в останньому випадку величина при $H = 0$ вже витоншена у порівнянні з $d_{x^2-y^2}$ випадком, густина конденсату залишається меншою при всіх розглянутих значеннях H . Дивлячись на Рис. 7.3 (зліва) можна уявити, що випадки конкуруючих id_{xy} та ХСГ можна легко розрізнити на експерименті. Ситуація, однак, є більш складною, оскільки на практиці розглядається залежність $\Lambda_s(H) - \Lambda_s(H = 0)$ у якій вже важко розрізнити конкуруючі порядки. Окрім цього, в усіх випадках введення розсіяння на домішках зменшує густину конденсату і робить H конденсат більш схожим (Рис. 7.3 праворуч).

7.6.2. Анзац для щілини $m(H)$. Взагалі кажучи, конкуруюча щілина та її залежність від допінгу повинні бути одержані з самоузгодженої системи рівнянь для головної d -хвильової щілини та вторинних щілин (див., наприклад, [282]). Однак, оскільки походження вторинної щілини невідомо, ми слідуємо феноменологічному підходу [139], де було припущено, що

$$m(H, x) = (1 - x/0.16)^{1/2} \theta(0.16 - x) (m_0 + bE_H), \quad (7.66)$$

де x це – допінг, m_0 та b – вільні параметри.

У [139] було показано, що експериментальні данні з робіт [297, 298] можуть бути зрозумілі якісно з використанням щілини (7.66), яка генерується нижче критичного допінгу $x_{cr} = 0.16$ і залежить від магнітного поля як $\sqrt{H}$ [304]. Як вже було сказано у Розділі 7.1, цей дослід мотивовано експериментами [301, 302], зробленими на зразку LSCO з $x = 0.144$, де ХСГ щілина відкривається вище критичного поля $H_0 \approx 3\text{T}$. Оскільки ми не розглядаємо залежність щілини від допінгу, а більше зацікавлені в ефектах, зв'язаних з критичним полем, ми припускаємо, що

$$m(H) = bE_H(H - H_0). \quad (7.67)$$

Окрім цього, оскільки в [139] використана досить велика величина $b = 2.2$, ми розглянемо випадок малої величини $b = 0.17$ так, що $m(H) \ll E_H$. Залежність $m(H)$ показана на Рис. 7.4 (зліва), де ми також показали залежність $\Gamma(H)$, одержану з розв'язку рівняння (7.31) для $\Gamma(m)$ при $p_0 = 250\text{ K}$ та $\pi^2\Gamma_{imp}N(0)v_Fv_\Delta = 1500\text{ K}^2$.

7.6.3. Результати для польової залежності надпровідної густини для залежних від поля щілини та Γ . Підставивши в (7.62) величини $m(H)$ і $\Gamma(H)$ показані зліва на Рис. 7.4 для сценарія ХСГ, а також у (7.64) величини $\Delta_{d_{xy}}(H) = m(H)$ і $\Gamma = \text{const} = \Gamma(\Delta_{d_{xy}}(H = 0))$ у id_{xy} випадку, та використавши (7.61), після чисельного інтегрування з розподілом $\mathcal{P}(\epsilon)$, який задано в (7.58), ми одержуємо результати показані на Рис. 7.4 праворуч. Ми використовуємо $v_F/v_\Delta = 30$ та τ наведене вище. Вище $H = 3\text{T}$ різниця між $\rho_s(H)$ обчисленої без конкуруючого порядку і $\rho_s(H)$ для id_{xy} порядку, оскільки ми використали малу величину $b = 0.17$. Проте для ХСГ порядку $\rho_s(H)$ у великих полях значно відхиляється від $\sqrt{H}$ поведінки. Цей ефект спричиняється зростанням $\Gamma(H)$, яке видно зліва на Рис. 7.4. Ми підкреслимо, що схожа поведінка $\Lambda_s(H) - \Lambda_s(H = 0)$

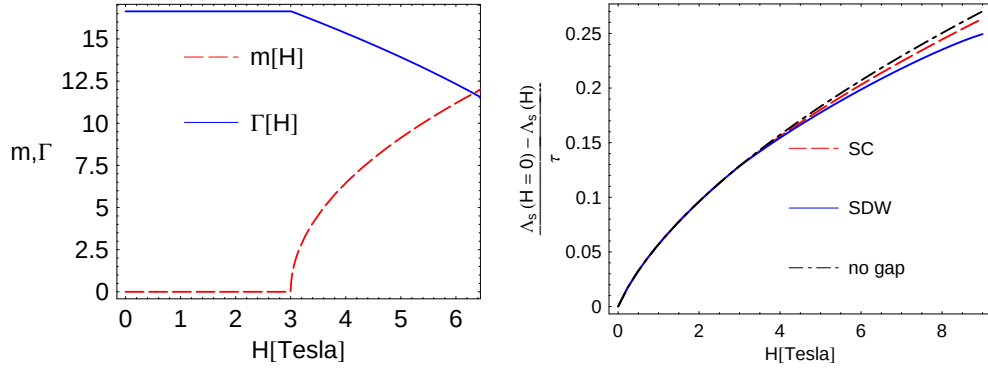


Рис. 7.4. (Кольоровий в електронній версії [19].) Зліва: Модельна залежність щілини m від прикладеного поля H та результуюча залежність розсіяння на домішках Γ від m . Справа: Залежність $(\Lambda_s(0) - \Lambda_s(H))/\tau$ при $T = 0$ для d -хвильового надпровідника з вторинними ХСГ, id_{xy} щілинами (див. (7.67) та ліву панель цього рисунку), а також у відсутності конкуруючого порядку.

з кросовером з $\sqrt{H}$ поведінки у низьких полях на $\ln H$ залежність у великих полях спостерігалась на одному зі зразків з найнижчою T_c , який досліджувався у [292].

На відміну від [139], де зменшення теплопровідності $\kappa(H)$ прямо пов'язується з відкриттям щілини і, відповідно, потребує досить великих значень b , представлені тут результати для $\rho_s(H)$ пов'язані з непрямым впливом щілини, яка відкривається, на залежність $\Gamma(m(H))$, що у свою чергу веде до відхилень у залежності $\rho_n(H)$ від простої $\sim \sqrt{H}$ поведінки.

7.7. Обговорення результатів

Ми дослідили вплив відкриття вторинної щілини на залежність надпровідної густини від магнітного поля $\mathbf{H}$, прикладеного перпендикулярно до CuO_2 площини. Ми встановили, що наявність конкуруючих порядків спричиняє відхилення польової залежності надпровідної густини $\rho_s(H)$ від простої $\sqrt{H}$ залежності, яку зазвичай пов'язують з доплерівським зсувом

квазічастинкової енергії. Новим і досить важливим висновком є те, що такий ефект пов'язаний не тільки з розвиненням конкуруючого порядку, але і з його впливом на остаточне розсіяння на домішках при нульовій енергії. З експериментальної точки зору надпровідна густина напряду вимірюється [281, 291, 292] так, що розглянуті тут ефекти можуть бути досліджені експериментально. Іншою перевагою надпровідної густини є те, що, на відміну від теплопровідності, вона розрізняє різні види конкуруючих порядків. Однак, з теоретичної точки зору, на відміну від теплового транспорту, зарядовий транспорт перенормується вершинними та фермі-рідинними поправками [308], які ми не приймали до уваги. Відповідно, величини v_F , v_Δ , Γ і m , встановлені з вимірювань надпровідної густини, можуть не узгоджуватись зі значеннями, знайденими з вимірювань теплопровідності.

ВИСНОВКИ

У дисертації наведено теоретичне вирішення наукової проблеми щодо електронних властивостей двовимірних систем з діраківським енергетичним спектром. Для цього в дисертаційній роботі указані та досліджені ті фізичні ефекти, за допомогою яких можна експериментально виявити існування діраківських квазічастинок у графені та визначити їх властивості. Також в дисертації розвинуто опис діраківських квазічастинок у надпровідному стані високотемпературних d -хвильових надпровідників у присутності вторинного параметру порядку.

На основі детальних висновків, зроблених у кожному розділі дисертації, можна виділити найбільш суттєві результати отримані в роботі:

1. Циклотронна маса для діраківських ферміонів, яка входить у температурний фактор у відповідному виразі для амплітуди осциляцій Шубнікова – де Гааза, у графені залежить від хімічного потенціалу лінійним, а від густини носіїв кореневим чином. Експериментальне спостереження [39, 40] цієї залежності довело, що закон дисперсії квазічастинок у графені є лінійним.
2. Фаза квантових магнітних осциляцій для діраківських ферміонів (зокрема, осциляцій Шубнікова – де Гааза) зсунута на π по відношенню до відповідної фази для електронів у нерелятивістському двовимірному електронному газі. Цей зсув фази дорівнює π як для безмасових частинок, коли він співпадає з адіабатичною фазою Беррі для них, так і для масивних частинок, коли фаза Беррі починає залежати від маси. Зсув фази на π магнітних осциляції для діраківських ферміонів обумовлений тим, що енергія найнижчого рівня Ландау не залежить від магнітного поля. Експериментальне

дослідження [39,40] діаграми Ландау дозволило встановити, що фаза осциляцій Шубнікова – де Гааза) зсунута на π по відношенню до відповідної фази у звичайних матеріалах, що доводить діраківський характер квазічастинок у графені.

3. Квантовий ефект Холла для діраківських ферміонів у графені є аномальним (напівцілим) з фактором заповнення $\nu = \pm 4(n + 1/2)$, $n = 0, 1, \dots$. Аномальність КЕХ викликана тим, що виродження найнижчого рівня Ландау дорівнює половині виродження вищих рівнів. Головним доказом існування діраківських ферміонів у графені стало саме спостереження незвичайного квантового ефекту Холла [39,40], передбачене у роботі здобувача.
4. Сформульовано критерій існування безщілинних крайових станів у енергетичному спектрі в режимі із фактором заповнення $\nu = 0$.
5. Універсальна оптична (динамічна) провідність для невзаємодіючих діраківських ферміонів, при енергіях фотонів $\Omega \gg T, \mu$ (T – температура, а μ – хімічний потенціал) визначається величиною $\sigma_{opt} = \pi e^2 / (2h)$, де e – це заряд електрона, а h – постійна Планка. Поведінка оптичної провідності має пороговий характер, який залежить від концентрації носіїв, що нагадує ефект Бурштейна-Мосса у напівпровідниках. При $\Omega < 2|\mu|$ оптична провідність майже відсутня, через блокування Паулі, а при $\Omega > 2|\mu|$ провідність виходить на своє універсальне значення σ_{opt} . Саме така поведінка оптичної провідності спостерігалася у експериментальних роботах [41–44].
6. Поблизу діраківської точки сигнал Нернста стає великим та додатним, сягаючи $1 \mu\text{V/K}$ на 1 Tesla, що в 100 разів більше, ніж у звичайних системах. Така поведінка сигналу Нернста мала місце у експериментах [45–47], де спостерігався дуже великий пік Нернста ($50 \mu\text{V/K}$ при 8 T) у точці Дірака.
7. По еволюції ліній поглинання електромагнітних хвиль при зміні хі-

мічного потенціалу в графені можна здобути відомості про наявність аномального (найнижчого) діраківського рівня Ландау. При цьому перша лінія поглинання, яка пов'язана з цим рівнем, завжди має або повну інтенсивність, або цілком відсутня, тоді як всі інші лінії зникають у два кроки. Хоча й буквально описана еволюція ліній поглинання не спостерігалась, існуючі експерименти [119] по магнітооптиці узгоджуються з виразом для діагональної динамічної магнітопровідності, який одержано у дисертації.

8. Одержані правила сум для діагональної та холлівської оптичної провідностей у графені. Як нам стало відомо, автори роботи [43] зараз обробляють свої експериментальні результати з використанням часткової спектральної ваги так, що можна сподіватися, що представлені у дисертації результати для правила сум знайдуть своє використання.
9. У присутності електрон-фононної взаємодії величина оптичної провідності стає меншою, ніж розрахована універсальна величина σ_{opt} . На даний час експериментальні вимірювання цієї величини не мають такої точності, щоб можна було побачити відхилення від σ_{opt} , пов'язані з взаємодією.
10. У присутності параметру порядку іншої природи, який конкурує з d -хвильовою надпровідністю, залежність надпровідної густини від зовнішнього магнітного поля H відрізняється від простої $\sim \sqrt{H}$ залежності, яку зазвичай пов'язують з доплерівським зсувом енергії квазічастинок.

ПОДЯКИ

Я хотів би щиро подякувати

- Моїм Вчителям, постійним співавторам і консультантам Валерію Павловичу Гусиніну та Вадиму Михайловичу Локтеву за цікаву і плідну співпрацю на протязі багатьох років та корисні поради і підтримку при написанні дисертації.
- Моїм керівникам постдоків та співавторам, у яких я, сподіваюсь, теж багато чому навчився: Хансу Беку (Hans Beck), Джулсу Карботте (Jules P. Carbotte), Райчел Квік (Rachel M. Quick) та Володимиру Адольфовичу Міранському.
- Моїм співавторам і гарним товаришам: Ларі Бенфатто (Lara Benfatto), Ігорю Шовковому та Наташі Андреначчі (Nataschia Andrenacci).
- Мою дружину Марту за її моральну підтримку та професійну допомогу з перекладом на українську мову і редагуванням дисертації.
- Моїм дітям Клавдії та Йосипу Никодиму за те, що постійно нагадували мені: в житті є багато цікавішого, ніж ця дисертація, а також Йосипу Никодиму за спроби допомогти мені написати цей текст швидше і стати його співавтором.
- Моїм батькам за підтримку і спроби довести мені, що навіть зараз ступінь доктора наук має певну цінність.
- Моїм колегам та друзям за гарні поради з власного досвіду написання дисертацій та підтримку: Едуарду Горбару, Максиму Женіровському, Ярославу Золотарюку, а також іншим співробітникам відділів Нелінійної фізики конденсованого стану, Квантової електроніки та Астрофізики та елементарних частинок за доброзичливу атмосферу.

- Не тільки людям, з якими мені довелося працювати в інших країнах, але й відповідним національним фондам (National Research Foundation Pretoria, Swiss National Science Foundation, Natural Science and Engineering Research Council of Canada, Canadian Institute for Advanced Research), які достойно оплачували мою роботу, а також зробили можливими чисельні поїздки на міжнародні конференції та можливість знайомитися із сучасною науковою літературою. Без цієї підтримки моє професійне зростання, навіть сама робота за фахом, та ця дисертація були б просто неможливими.
- Олександра Барановського за те, що він розробив та здійснив підтримку стилю `vakthesis`³ для $\text{\LaTeX}$, у якому написана ця дисертація.

³Стиль та документація до нього знаходяться тут <http://www.imath.kiev.ua/~baranovskyi/tex/vakthesis/>

Додаток А

Рівняння Дірака у зовнішньому магнітному полі: калібрування
Ландау

Рівняння Дірака з масовим членом γ^3 має вигляд:

$$[i\gamma^0\hbar\partial_t + i\hbar v_F\gamma^1 D_x + i\hbar v_F\gamma^2 D_y - \Delta\gamma^3] \Psi(t, \mathbf{r}) = 0, \quad (\text{A.1})$$

де коваріантна похідна

$$D_i = \partial_i + \frac{ie}{\hbar c} A_i, \quad i = x, y, \quad A_i = (A_x, A_y), \quad (\text{A.2})$$

та матриці γ^i належать до кірального представлення (1.44). Магнітне поле $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = (0, 0, B_z)$, яке можна задовольнити у обраному калібруванні Ландау $(A_x, A_y) = (0, Bx)$. Легко перевірити, що комутатор

$$[D_x, D_y] = \frac{i}{l^2}, \quad (\text{A.3})$$

де ми ввели магнітну довжину $l = \sqrt{\hbar c / |eB|}$. Для розв'язків типу $\Psi_\sigma(t, \mathbf{r}) = e^{-iEt/\hbar} \Psi(\mathbf{r})$ рівняння (A.1) набуває вигляд

$$[\hbar v_F (-\alpha_1 i D_x - \alpha_2 i D_y) + \Delta \alpha_3] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}), \quad \alpha_i = \gamma^0 \gamma^i \quad (\text{A.4})$$

де матриці α_i наведені у (1.42). Дуже зручною властивістю цього представлення рівняння Дірака є те, що рівняння для різних долин ($\mathbf{K}_\pm$ точок) розділяються:

$$\begin{pmatrix} \Delta & \hbar v_F (-iD_x - D_y) \\ \hbar v_F (-iD_x + D_y) & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{AK+} \\ \psi_{BK+} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_{AK+} \\ \psi_{BK+} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{pmatrix} \Delta & \hbar v_F (-iD_x - D_y) \\ \hbar v_F (-iD_x + D_y) & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{BK-} \\ \psi_{AK-} \end{pmatrix} = -E \begin{pmatrix} \psi_{BK-} \\ \psi_{AK-} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

При умові $E \neq -\Delta$ можна виразити B -компоненти ψ_{BK_+}, ψ_{BK_-} через A -компоненти:

$$\begin{aligned}\psi_{BK_+} &= \frac{\hbar v_F}{E + \Delta} (-iD_x + D_y) \psi_{AK_+}, \\ \psi_{BK_-} &= \frac{\hbar v_F}{E + \Delta} (iD_x + D_y) \psi_{AK_-}.\end{aligned}\tag{A.7}$$

Таким чином двокомпонентні спінори для $\mathbf{K}_{\pm}$ долин можуть бути записані у формі:

$$\psi_{K_+} = A_1 \begin{pmatrix} \psi_{AK_+} \\ \frac{\hbar v_F (-iD_x + D_y)}{E + \Delta} \psi_{AK_+} \end{pmatrix}, \quad \psi_{K_-} = A_2 \begin{pmatrix} \frac{\hbar v_F (iD_x + D_y)}{E + \Delta} \psi_{AK_-} \\ \psi_{AK_-} \end{pmatrix}.\tag{A.8}$$

Константи $A_{1,2}$ в (A.8) визначаються за допомогою умов нормування

$$\int d^2r \psi_{K_{\pm}}^{\dagger}(\mathbf{r}, k, n) \psi_{K_{\pm}}(\mathbf{r}, k', n') = \delta_{n,n'} \delta(k - k'),\tag{A.9}$$

де k, k' and n, n' є квантовими числами (у обраному калібруванні хвильовий вектор повздовж y -напрямку та індекс рівня Ландау), що характеризують власні стани діраківських квазічастинок у магнітному полі. Як слідує з (A.5) і (A.6), A -компоненти спінорів ψ_{AK_+}, ψ_{AK_-} задовольняють наступним рівнянням:

$$(-iD_x - D_y)(-iD_x + D_y) \psi_{AK_+} = \frac{E^2 - \Delta^2}{\hbar^2 v_F^2} \psi_{AK_+},\tag{A.10}$$

$$(-iD_x + D_y)(-iD_x - D_y) \psi_{AK_-} = \frac{E^2 - \Delta^2}{\hbar^2 v_F^2} \psi_{AK_-},\tag{A.11}$$

Ці рівняння другого порядку можна ще спростити, якщо ввести безрозмірний параметр $\lambda \equiv (E^2 - \Delta^2) / \epsilon_0^2$, де енергетичний масштаб Ландау $\epsilon_0 \equiv \sqrt{2\hbar v_F^2 |eB| / c}$. Тоді (A.10) та (A.11) набувають вигляд

$$\begin{aligned}(-l^2 D_x^2 - l^2 D_y^2 + 1) \psi_{AK_+} &= 2\lambda \psi_{AK_+}, \\ (-l^2 D_x^2 - l^2 D_y^2 - 1) \psi_{AK_-} &= 2\lambda \psi_{AK_-}.\end{aligned}\tag{A.12}$$

У обраному калібруванні Ландау $(A_x, A_y) = (0, Bx)$, диференціальні рівняння (A.12) не мають явної залежності від координати y . Таким чином, відповідні розв'язки (A.12) трансляційно інваріантні в y -напрямку, що задовольняється, якщо хвильові функції є плоскими хвилями у y -напрямку,

$$\begin{aligned}\psi_{AK_+}(\mathbf{r}, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} e^{iky} u_+(x, k), & \psi_{BK_+} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} e^{iky} v_+(x, k), \\ \psi_{AK_-}(\mathbf{r}, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} e^{iky} u_-(x, k), & \psi_{BK_-} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} e^{iky} v_-(x, k).\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

де функції $u_{\pm}(x, k)$ залежать тільки від однієї безрозмірної комбінації змінних, $\xi = x/l + kl$, та задовольняють наступним рівнянням:

$$(\partial_{\xi}^2 - \xi^2 \mp 1 + 2\lambda) u_{\pm}(\xi) = 0. \quad (\text{A.14})$$

У відповідності з (A.8), усунуті компоненти $v_{\pm}(x, k) \equiv v_{\pm}(\xi)$ дорівнюють

$$v_{\pm}(\xi) = \mp i \frac{\epsilon_0 (\partial_{\xi} \mp \xi) u_{\pm}(\xi)}{\sqrt{2}(E + \mu^{(\pm)} \mp \Delta^{(\mp)})}. \quad (\text{A.15})$$

(Відмітимо, що $x_0 \equiv -kl^2$ може бути інтерпретований як центр локалізації хвильової функції у x -напрямку.)

Ліва частина умови (A.9) може бути переписана, наприклад, для A_1 :

$$\begin{aligned}& |A_1|^2 \int d^2\mathbf{r} \left[\psi_{AK_+}^{\dagger}(\mathbf{r}, k) \psi_{AK_+}(\mathbf{r}, k') \right. \\ & \quad \left. + \frac{\hbar^2 v_F^2}{(E + \Delta)^2} [(-iD_x + D_y) \psi_{AK_+}(\mathbf{r}, k)]^{\dagger} (-iD_x + D_y) \psi_{AK_+}(\mathbf{r}, k') \right] \\ &= |A_1|^2 \int d^2\mathbf{r} \left[\psi_{AK_+}^{\dagger}(\mathbf{r}, k) \psi_{AK_+}(\mathbf{r}, k') \right. \\ & \quad \left. - \frac{\hbar^2 v_F^2}{(E + \Delta)^2} \psi_{AK_+}^{\dagger}(\mathbf{r}, k) (iD_x + D_y) (-iD_x + D_y) \psi_{AK_+}(\mathbf{r}, k') \right] = \\ &= |A_1|^2 \int d^2\mathbf{r} \left[\psi_{AK_+}^{\dagger}(\mathbf{r}, k) \psi_{AK_+}(\mathbf{r}, k') + \frac{E^2 - \Delta^2}{(E + \Delta)^2} \psi_{AK_+}^{\dagger}(\mathbf{r}, k) \psi_{AK_+}(\mathbf{r}, k') \right] \\ &= |A_1|^2 \int d^2\mathbf{r} \frac{2E}{E + \Delta} \psi_{AK_+}^{\dagger}(\mathbf{r}, k) \psi_{AK_+}(\mathbf{r}, k'),\end{aligned}\quad (\text{A.16})$$

де у четвертій лінії ми використали рівняння (A.10). Таким чином, $A_1 = \sqrt{\frac{|E+\Delta|}{2|E|}}$. За допомогою цього виразу умови нормування (A.16) для функцій $u_{\pm}(x, k)$ приймають вигляд

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{l} u_{\pm}^{\dagger}(x, k) u_{\pm}(x, k) = 1, \quad C_{1,2} = \sqrt{\frac{|E + \Delta|}{2|E|}}. \quad (\text{A.17})$$

Можна легко побачити, що диференціальне рівняння другого порядку (A.14) співпадає з відповідним рівнянням, яке виникає при розгляді таких загальновідомих задачах, як опис гармонійного осцилятора та нерелятивістських електронів у магнітному полі. Також ми можемо використати рівняння (10.13.13) з книги [258], яке стверджує, що обмежені розв'язки рівняння

$$z'' + (2n + 1 - x^2)z = 0 \quad (\text{A.18})$$

виражаються через поліноми Герміта:

$$z_n(x) = [\pi^{1/2} 2^n n!]^{-1/2} \exp(-x^2/2) H_n(x). \quad (\text{A.19})$$

Розв'язок (A.19) включає в себе нормуючі фактори. Таким чином, обмежені розв'язки (A.14) існують коли $2\lambda = (2n + 1 \pm 1)$, $n = 0, 1, \dots$ і дорівнюють:

$$\begin{aligned} u_+(\xi) &= w_n(\xi), & \lambda &= n + 1; \\ u_-(\xi) &= w_n(\xi), & \lambda &= n, \quad n = 0, 1, \dots, \\ w_n(\xi) &= (\pi^{1/2} 2^n n!)^{-1/2} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), & \int_{-\infty}^{\infty} d\xi w_n(\xi) w_m(\xi) &= \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Відзначимо, що власні функції $u_-(\xi)$, що відповідають $n = 0$ і $E = -\Delta$ повинні бути виключені з цього списку та розглянуті окремо.

Зараз ми повернемося до розгляду випадку, коли $E = -\Delta$. У цьому випадку рівняння у $\mathbf{K}_+$ точці приймає форму

$$\hbar v_F (-iD_x + D_y) \psi_{AK_+} = 0, \quad (\text{A.21a})$$

$$\hbar v_F (-iD_x - D_y) \psi_{BK_+} = -2\Delta \psi_{AK_+} \quad (\text{A.21b})$$

Нетривіальним розв'язком рівняння (A.21a) є

$$\psi_{AK_+} \sim e^{iky} e^{\frac{1}{2}(x/l+kl)^2}, \quad (\text{A.22})$$

яке є квадратично неінтегрованим. Через це $\psi_{AK_+} = 0$. Рівняння (A.21b) дає

$$\psi_{BK_+} \sim e^{iky} e^{-\frac{1}{2}(x/l+kl)^2}. \quad (\text{A.23})$$

Таким же самим чином у $\mathbf{K}_-$ точці

$$\hbar v_F (-iD_x - D_y) \psi_{AK_-} = 0, \quad (\text{A.24a})$$

$$\hbar v_F (-iD_x + D_y) \psi_{BK_-} = 2\Delta \psi_{AK_-}. \quad (\text{A.24b})$$

Подібно до розгляду $\mathbf{K}_+$ точки, і для ψ_{BK_-} ми одержуємо $\psi_{AK_-} = \psi_{BK_-} = 0$.

Таким чином, при $eB, \Delta > 0$ ми маємо наступні розв'язки з позитивною ($\psi_{K_+}^{(+)}$) і негативною ($\psi_{K_+}^{(-)}$) енергією у $\mathbf{K}_+$ точці:

$$\begin{aligned} \psi_{K_+}^{(+)}(x, y; n, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} e^{-i|E_n|t+iky} \frac{1}{\sqrt{2|E_n|}} \begin{pmatrix} \sqrt{|E_n| + \Delta} w_{n-1}(\xi) \\ i\sqrt{|E_n| - \Delta} w_n(\xi) \end{pmatrix}, \quad n \geq 1, \\ \psi_{K_+}^{(-)}(x, y; n, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} e^{i|E_n|t+iky} \frac{1}{\sqrt{2|E_n|}} \begin{pmatrix} \sqrt{|E_n| - \Delta} w_{n-1}(\xi) \\ -i\sqrt{|E_n| + \Delta} w_n(\xi) \end{pmatrix}, \quad n \geq 1, \\ \psi_{K_+}^{(-)}(x, y; n = 0, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} e^{i|E_0|t+iky} \begin{pmatrix} 0 \\ -iw_0(\xi) \end{pmatrix}, \quad n = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

та у $\mathbf{K}_-$ точці:

$$\begin{aligned}\psi_{K_-}^{(+)}(x, y; n = 0, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} e^{-i|E_0|t +iky} \begin{pmatrix} 0 \\ iw_0(\xi) \end{pmatrix}, \quad n = 0, \\ \psi_{K_-}^{(+)}(x, y; n, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} e^{-i|E_n|t +iky} \frac{1}{\sqrt{2|E_n|}} \begin{pmatrix} \sqrt{|E_n| - \Delta} w_{n-1}(\xi) \\ i\sqrt{|E_n| + \Delta} w_n(\xi) \end{pmatrix}, \quad n \geq 1, \\ \psi_{K_-}^{(-)}(x, y; n, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} e^{i|E_n|t +iky} \frac{1}{\sqrt{2|E_n|}} \begin{pmatrix} -\sqrt{|E_n| + \Delta} w_{n-1}(\xi) \\ i\sqrt{|E_n| - \Delta} w_n(\xi) \end{pmatrix}, \quad n \geq 1,\end{aligned}\tag{A.26}$$

де

$$E_n = \pm \sqrt{\Delta^2 + \hbar v_F^2 2n|eB|/c},\tag{A.27}$$

та ми визначили $w_{-1}(\xi) \equiv 0$. Найнижчий рівень Ландау (НРЛ) є незвичайним: тоді як при $n \geq 1$ існують розв'язки що відповідають як і електронним ($E_n > 0$) так і дірковим ($E_n < 0$) станам у обидвох $\mathbf{K}_+$ і $\mathbf{K}_-$ точках, розв'язок з $n = 0$ описує дірки у $\mathbf{K}_+$ точці та електрони у $\mathbf{K}_-$ точці. Підкреслимо також, що стани з нульового рівня Ландау з долини $\mathbf{K}_+$ знаходяться тільки на B підгратці, тоді як відповідні стани з долини $\mathbf{K}_-$ знаходяться тільки на A підгратці. (Нагадаємо, що для $\mathbf{K}_-$ долини компоненти спінору переставлені між собою, якщо порівнювати зі спінором визначеним для $\mathbf{K}_+$ долини.)

Додаток Б

Рівняння Дірака у зовнішньому магнітному полі: симетричне калібрування

Рівняння Дірака зі звичайним масовим членом має вигляд:

$$\left[i\tilde{\gamma}^0 \hbar \partial_t + iv_F \tilde{\gamma}^1 \left(\hbar \partial_x + i \frac{e}{c} A_x \right) + iv_F \tilde{\gamma}^2 \left(\hbar \partial_y + i \frac{e}{c} A_y \right) - \Delta \right] \psi(t, \mathbf{r}) = 0, \quad (\text{Б.1})$$

де у симетричному калібруванні $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2)$, так, що як і у Додатку А магнітне поле $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ направлене повздовж позитивного напрямку z осі.

Як ми вже відзначали у Розділі 2.2 у $2 + 1$ вимірі існує два нееквівалентних представлення алгебри Дірака, наприклад, обраних як у роботі [132]:

$$\tilde{\gamma}^0 = \sigma_3, \tilde{\gamma}^1 = i\sigma_1, \tilde{\gamma}^2 = i\sigma_2 \quad (\text{Б.2})$$

and

$$\tilde{\gamma}^0 = -\sigma_3, \tilde{\gamma}^1 = -i\sigma_1, \tilde{\gamma}^2 = -i\sigma_2. \quad (\text{Б.3})$$

Представлення γ -матриць $\hat{\gamma}^0 = \sigma_3, \hat{\gamma}^1 = i\sigma_2, \hat{\gamma}^3 = -i\sigma_1$ наведене у (1.49), яким ми користувалися у роботах [1,2,9], пов'язано з представленням (Б.2), $(\sigma_3, i\sigma_1, i\sigma_2)$ унітарним перетворенням $U = (\hat{I} + i\sigma_3)/\sqrt{2}$.

Хоча й кінцеві результати обчислень не залежать ні від представлення γ -матриць ні від калібрування, проміжні вирази залежать від цього вибору. Оскільки представлення (Б.2), (Б.3) також часто використовуються у літературі, у цьому Додатку ми розв'яжемо рівняння Дірака (Б.1) і одержимо оператор (5.11) використовуючи це представлення. Ми почнемо з розгляду представлення (Б.2). Як ми вже знаємо з Додатку А, енергетичний спектр

задачі (Б.1) залежить від знаків eB та Δ . Як і раніше, ми припустимо, що $eB, \Delta > 0$.

У цьому випадку ми одержуємо, що спектр знову має вигляд:

$$\begin{aligned} E_0 &= -M_0 = -\Delta, \\ E_n &= \pm M_n = \pm \sqrt{\Delta^2 + 2n|eB|\hbar v_F^2/c}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

де M_n визначені у (3.40) (з $\hbar = 1$). Загальний розв'язок має вигляд

$$\psi(x) = \sum_{n,m} [a_{nm}u_{nm}(x) + b_{nm}^+v_{nm}(x)], \quad (\text{Б.5})$$

де

$$\begin{aligned} u_{nm} &= \frac{1}{l\sqrt{2\pi}} \exp(-iM_nt) \frac{1}{\sqrt{2M_n}} \begin{pmatrix} \sqrt{M_n + \Delta} J_{m-1}^{n-m}(\xi) e^{i(m-1)\theta} \\ \sqrt{M_n - \Delta} J_m^{n-m}(\xi) e^{im\theta} \end{pmatrix}, \\ n &\geq 1, \quad m \leq n, \\ v_{0m} &= \frac{1}{l\sqrt{2\pi}} \exp(iM_0t) \begin{pmatrix} 0 \\ J_m^{-m}(\xi) e^{im\theta} \end{pmatrix}, \quad n = 0, \quad m \leq 0, \\ v_{nm} &= \frac{1}{l\sqrt{2\pi}} \exp(iM_nt) \frac{1}{\sqrt{2M_n}} \begin{pmatrix} -\sqrt{M_n - \Delta} J_{m-1}^{n-m}(\xi) e^{i(m-1)\theta} \\ \sqrt{M_n + \Delta} J_m^{n-m}(\xi) e^{im\theta} \end{pmatrix}, \\ n &\geq 1, \quad m \leq n. \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

Ці розв'язки ми записали з використанням функцій [321]

$$\begin{aligned} J_\nu^n(\xi) &= \left[\frac{n!}{(n+\nu)!} \right]^{1/2} e^{-\xi/2} \xi^{\nu/2} L_n^\nu(\xi), \\ J_m^{-m}(\xi) &= \frac{(-1)^m}{\sqrt{(-m)!}} e^{-\xi/2} \xi^{-m/2} \quad (m \leq 0), \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

де $L_n^m(\xi)$ це – поліноми Лагера ($L_n^m(\xi) \equiv 0$ при $n \leq -1$), $l \equiv (\hbar c/|eB|)^{1/2}$, як було вже визначено, магнітна довжина, $\xi = \mathbf{r}^2/2l^2$, а квантове число $m \leq n$ відображає виродженість кожного рівня по кутовому моменту. Спінори u_{nm} та v_{nm} нормуються наступним чином:

$$\int d^2x u_{n'm'}^\dagger(x) u_{nm}(x) = \int d^2x v_{n'm'}^\dagger(x) v_{nm}(x) = \delta_{n',n} \delta_{m',m}. \quad (\text{Б.8})$$

Таким чином, НРЛ з $n = 0$ є особливим: тоді як при $n \geq 1$ існують розв'язки, що відповідають як і ферміонним ($E_n = M_n$) так і антиферміонним ($E_n = -M_n$) станам, розв'язок з $n = 0$ описує тільки антиферміонні стани.

У випадку використання представлення (Б.3) для Діраківських матриць, загальний розв'язок задається рівнянням (Б.5), де $u_{nm}(x)$, $v_{nm}(x)$ замінені на $v_{nm}(-x)$, $u_{nm}(-x)$:

$$\psi(x) = \sum_{n,m} [c_{nm}v_{nm}(-x) + d_{nm}^\dagger u_{nm}(-x)] . \quad (\text{Б.9})$$

Розв'язок v_{0m} відповідає НРЛ з додатною енергією $E_0 = \Delta$, тоді як розв'язки v_{nm}, u_{nm} з $n \geq 1$ відповідають енергіям $E_n = \pm M_n$ (порівняй з (Б.4)). Відповідно, коли спектри двох нееквівалентних представлень об'єднані разом, виродження НРЛ з $n = 0$ дорівнює половині виродження рівнів з $n \geq 1$. Чотирьохкомпонентний спіно́р Ψ скомбінований з двох двохкомпонентних спіно́рів (Б.5) та (Б.9) і з нього ми одержуємо вираз (5.11) для генератора псевдоспінових обертань.

Додаток В

Динамічна провідність без магнітного поля

Для обчислення провідності ми використаємо представлення (3.13) куди підставимо випереджаюча та запізнювальна ФГ

$$G^{(R,A)}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\gamma_0(\omega \pm i\Gamma(\omega)) - \mathbf{k}\boldsymbol{\gamma} + \Delta}{(\omega \pm i\Gamma(\omega))^2 - \mathbf{k}^2 - \Delta^2}, \quad (\text{B.1})$$

де для скорочення ми поклали $v_F = 1$. Обчислюючи tr^1 і проінтегрувавши по кутам ми одержуємо

$$\begin{aligned} \Pi_{xx}^R(\Omega + i0) = & \frac{e^2 N_f}{2\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega n_F(\omega) \int_0^{\infty} d\epsilon \\ & \left[\frac{(\omega + i\Gamma(\omega))(\omega - \Omega - i\Gamma(\omega - \Omega)) - \Delta^2}{[(\omega + i\Gamma(\omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon][(\omega - \Omega - i\Gamma(\omega - \Omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon]} \right. \\ & + \frac{(\omega + i\Gamma(\omega))(\omega + \Omega + i\Gamma(\omega + \Omega)) - \Delta^2}{[(\omega + i\Gamma(\omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon][(\omega + \Omega + i\Gamma(\omega + \Omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon]} \\ & - \frac{(\omega - i\Gamma(\omega))(\omega - \Omega - i\Gamma(\omega - \Omega)) - \Delta^2}{[(\omega - i\Gamma(\omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon][(\omega - \Omega - i\Gamma(\omega - \Omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon]} \\ & \left. - \frac{(\omega - i\Gamma(\omega))(\omega + \Omega + i\Gamma(\omega + \Omega)) - \Delta^2}{[(\omega - i\Gamma(\omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon][(\omega + \Omega + i\Gamma(\omega + \Omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon]} \right], \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

де $\epsilon = \mathbf{k}^2$. Сзунувши змінну $\omega \rightarrow \omega + \Omega$ у першому і третьому члені та поєднавши перший та четвертий члени вираз (B.2) можна переписати у

¹Наведений результат відповідає $(\Pi_{11} + \Pi_{22})/2$. Також ми вважаємо, що об'єм $V = 1$.

формі

$$\begin{aligned}
\Pi_{xx}^R(\Omega + i0) = & \frac{e^2 N_f}{2\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} d\epsilon \left[[n_F(\omega + \Omega) - n_F(\omega)] \right. \\
& \times \frac{(\omega - i\Gamma(\omega))(\omega + \Omega + i\Gamma(\omega + \Omega)) - \Delta^2}{[(\omega - i\Gamma(\omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon][(\omega + \Omega + i\Gamma(\omega + \Omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon]} \\
& + n_F(\omega) \frac{(\omega + i\Gamma(\omega))(\omega + \Omega + i\Gamma(\omega + \Omega)) - \Delta^2}{[(\omega + i\Gamma(\omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon][(\omega + \Omega + i\Gamma(\omega + \Omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon]} \\
& \left. - n_F(\omega + \Omega) \frac{(\omega - i\Gamma(\omega))(\omega + \Omega - i\Gamma(\omega + \Omega)) - \Delta^2}{[(\omega - i\Gamma(\omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon][(\omega + \Omega - i\Gamma(\omega + \Omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon]} \right].
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Відзначимо, що друга та третя дріб перед n_F є комплексноспряженими так, що їх дійсні частини дорівнюють одна одній. Таким чином, для дійсної частини провідності одержуємо

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}(\Omega) = & \frac{e^2 N_f}{2\pi^2 \Omega} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [n_F(\omega) - n_F(\omega + \Omega)] \\
& \times \int_0^{\infty} d\epsilon \left[\frac{(\omega - i\Gamma(\omega))(\omega + \Omega + i\Gamma(\omega + \Omega)) - \Delta^2}{[(\omega - i\Gamma(\omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon][(\omega + \Omega + i\Gamma(\omega + \Omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon]} \right. \\
& \left. - \frac{(\omega + i\Gamma(\omega))(\omega + \Omega + i\Gamma(\omega + \Omega)) - \Delta^2}{[(\omega + i\Gamma(\omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon][(\omega + \Omega + i\Gamma(\omega + \Omega))^2 - \Delta^2 - \epsilon]} \right]
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Проінтегрувавши по ϵ ми одержуємо

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}(\Omega) = & \frac{e^2 N_f}{2\pi^2 \Omega} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [n_F(\omega) - n_F(\omega + \Omega)] \\
& \times \left[\frac{(\omega - i\Gamma)(\omega' + i\Gamma') - \Delta^2}{[\omega - \omega' - i(\Gamma + \Gamma')][\omega + \omega' - i(\Gamma - \Gamma')]} \ln \frac{\Delta^2 - (\omega' + i\Gamma')^2}{\Delta^2 - (\omega - i\Gamma)^2} \right. \\
& \left. - \frac{(\omega + i\Gamma)(\omega' + i\Gamma') - \Delta^2}{[\omega - \omega' + i(\Gamma - \Gamma')][\omega + \omega' + i(\Gamma + \Gamma')]} \ln \frac{\Delta^2 - (\omega' + i\Gamma')^2}{\Delta^2 - (\omega + i\Gamma)^2} \right].
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Скомбінувавши логарифми і знову використавши властивість $\text{Re}A = \text{Re}A^*$ ми одержуємо (3.14). Узагальненням (3.14), яке необхідне щоб урахувати

також дійсну частину власної енергії Σ , є наступний вираз

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(\Omega) = \frac{e^2 N_f}{2\pi^2 \Omega} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [n_F(\omega) - n_F(\omega + \Omega)] \\ \left[\left(\frac{(\tilde{\omega} + i\Gamma)(\tilde{\omega}' + i\Gamma') - \Delta^2}{[\tilde{\omega} - \tilde{\omega}' + i(\Gamma - \Gamma')][\tilde{\omega} + \tilde{\omega}' + i(\Gamma + \Gamma')]} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(\tilde{\omega} + i\Gamma)(\tilde{\omega}' - i\Gamma') - \Delta^2}{[\tilde{\omega} - \tilde{\omega}' + i(\Gamma + \Gamma')][\tilde{\omega} + \tilde{\omega}' + i(\Gamma - \Gamma')]} \right) \ln[\Delta^2 - (\tilde{\omega} + i\Gamma)^2] \right. \\ \left. + (\omega \leftrightarrow \omega', \Gamma \leftrightarrow \Gamma') \right], \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

де ми ввели позначення $\tilde{\omega}(\omega) = \omega - \operatorname{Re} \Sigma(\tilde{\omega})$, $\tilde{\omega}' = \tilde{\omega}(\omega + \Omega)$, $\Gamma = \Gamma(\tilde{\omega})$, $\Gamma' = \Gamma(\tilde{\omega}')$.

Додаток Г

ФГ у зовнішньому магнітному полі

У координатному просторі ферміонний пропагатор має наступну форму у формалізмі власного часу

$$\begin{aligned} S(x, y) &= (i\hat{D} + \Delta)_x \langle x | \frac{-1}{\Delta^2 + \hat{D}^2} | y \rangle \\ &= -i(i\hat{D} + \Delta)_x \int_0^\infty ds \langle x | \exp[-is(\Delta^2 + \hat{D}^2)] | y \rangle, \end{aligned} \quad (\text{Г.1})$$

де $\hat{D} = \gamma^\nu D_\nu$ та подовжені похідні D_ν визначені рівнянням (1.52). Для зручності ми поклали $c = \hbar = v_F = 1$. Матричний елемент $\langle x | \exp[-is(\Delta^2 + \hat{D}^2)] | y \rangle$ може бути обчислено використовуючи метод власного часу Швінгера [322] (див. також педагогічний огляд [323]). Головна ідея цього методу базується на інтерпретації $\langle x | \exp[-is\hat{D}^2] | y \rangle$ як координатного представлення “еволюційного оператора” власного часу $U(s) = \exp[-iHs]$, де ми ввели “гамільтоніан”

$$H = \hat{D}^2 = D^2 - \frac{e}{2} \sigma^{\rho\nu} F_{\rho\nu}, \quad F_{\rho\nu} = \partial_\rho A_\nu - \partial_\nu A_\rho, \quad \sigma^{\rho\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\rho, \gamma^\nu]. \quad (\text{Г.2})$$

Матричний елемент еволюційного оператора може бути обрахований [323], наприклад, з використанням операторного формалізму або функціонального інтегрування:

$$\begin{aligned} \langle x | U(s) | y \rangle &= \frac{e^{-i\pi/4}}{8(\pi s)^{3/2}} \exp \left[ie \int_y^x d\xi_\nu A^\nu(\xi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{4} (x - y) f(s) (x - y) - L(s) + i \frac{e}{2} \sigma \mathbb{F} s \right], \end{aligned} \quad (\text{Г.3})$$

3

$$f(s) \equiv e\mathbb{F} \coth(e\mathbb{F}s), \quad L(s) \equiv \frac{1}{2} \text{tr} \ln \left(\frac{\sinh e\mathbb{F}s}{e\mathbb{F}s} \right), \quad (\text{Г.4})$$

де ми використали матричні позначення, тобто, $F_{\rho\nu} \equiv (\mathbb{F})_{\rho\nu}$ та інтеграл з A_ν обчислюється повздовж прямої лінії. Цей оператор відрізняється від чотирьохвимірної версії $\langle x|U(s)|y\rangle$ [323] ступінню залежності від власного часу та чисельними множниками. Підставивши (Г.3) до (Г.1) ми одержуємо

$$\begin{aligned} S(x, y) = & \exp \left(ie \int_y^x d\xi_\nu A^\nu(\xi) \right) \\ & \times \frac{e^{-i3\pi/4}}{8\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{3/2}} \left[\Delta - \frac{1}{2} \gamma^\rho [f(s) + e\mathbb{F}]_{\rho\nu} (x - y)^\nu \right] \\ & \times \exp \left[-i\Delta^2 s + \frac{i}{4} (x - y) f(s) (x - y) - L(s) + i\frac{e}{2} \sigma \mathbb{F} s \right]. \end{aligned} \quad (\text{Г.5})$$

Наприкінці, щоб зробити обчислення для потрібного нам випадку, треба знайти $f(s)$, $L(s)$ та $\exp[i(e/2)\sigma\mathbb{F}s]$ для $\mathbb{F}$, що містить тільки магнітне поле B . Відповідні вирази для цих величин такими

$$\begin{aligned} f(s)_{\rho\nu} = & -\frac{1}{s} \left[g_{\rho\nu} + \frac{(\mathbb{F}^2)_{\rho\nu}}{B^2} (1 - eBs \cot(eBs)) \right], \\ \exp[-L(s)] = & \frac{eBs}{\sin eBs}, \\ \exp \left[i\frac{e}{2} \sigma \mathbb{F} s \right] = & \cos eBs + \gamma^1 \gamma^2 \sin eBs. \end{aligned} \quad (\text{Г.6})$$

У мацубарівському частотно-імпульсному представленні це дає

$$\begin{aligned} \tilde{S}(i\omega, \mathbf{p}) = & - \int_0^\infty ds \exp \left[-s \left(\Delta^2 - (i\omega)^2 + \mathbf{p}^2 \frac{\tanh(eBs)}{eBs} \right) \right] \\ & \times \left[\left(i\omega \gamma^0 - p_1 \gamma^1 - p_2 \gamma^2 + \Delta + \frac{1}{i} (p_2 \gamma^1 - p_1 \gamma^2) \tanh(eBs) \right) \right. \\ & \times \left. \left(1 + \frac{1}{i} \gamma^1 \gamma^2 \tanh(eBs) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{Г.7})$$

Також зручно записати альтернативну форму ферміонного пропагатору у магнітному полі як сумму по полюсам, що відповідають рівням Ландау.

У цьому виводі ми слідуємо роботам [245, 324]. Вводячи короткі позначення ми переписуємо рівняння (Г.7) наступним чином,

$$\begin{aligned} \tilde{S}(i\omega, \mathbf{p}) = & - \int_0^\infty ds \exp \left[-s \left(a + \mathbf{p}^2 \frac{\tanh(eBs)}{eBs} \right) \right] \\ & \times [(b + c \tanh(|eBs|)) (1 + d \tanh(|eBs|))], \end{aligned} \quad (\text{Г.8})$$

де

$$\begin{aligned} a = \Delta^2 - (i\omega)^2, \quad b = i\omega\gamma^0 - p_1\gamma^1 - p_2\gamma^2 + \Delta, \\ c = -i(p_2\gamma^1 - p_1\gamma^2)\text{sgn}(eB), \quad d = -i\gamma^1\gamma^2\text{sgn}(eB). \end{aligned} \quad (\text{Г.9})$$

Використавши тотожність $\tanh x = 1 - 2 \exp(-2x)/[1 + \exp(-2x)]$ та співвідношення [325]

$$(1 - z)^{-(\alpha+1)} \exp \left(\frac{xz}{z-1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) z^n, \quad |z| < 1, \quad (\text{Г.10})$$

з $z = -\exp(-2|eB|s)$, $x = 2\frac{\mathbf{p}^2}{|eB|}$, ми одержуємо вираз

$$\begin{aligned} \tilde{S}(i\omega, \mathbf{p}) = & - \exp \left(-\frac{\mathbf{p}^2}{|eB|} \right) \int_0^\infty ds \exp \left[-sa + \frac{2\mathbf{p}^2}{|eB|} \frac{z}{z-1} \right] \\ & \times \left[(b+c)(1+d) + (4cd + 2c + 2bd) \frac{z}{1-z} + 4cd \frac{z^2}{(1-z)^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{Г.11})$$

Потім використавши тотожність $L_n^{\alpha-1}(x) = L_n^\alpha(x) - L_{n-1}^\alpha(x)$ і означення

$L_n \equiv L_n^0$, $L_{-1}^\alpha = 0$ ми одержуємо

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(i\omega, \mathbf{p}) &= -\exp\left(-\frac{\mathbf{p}^2}{|eB|}\right) \int_0^\infty ds \exp(-sa) \left[(b+c)(1+d) \sum_{n=0}^\infty L_n(x) z^n \right. \\
&\quad \left. + (-(b+c)(1+d) + 2c + 2bd) \sum_{n=0}^\infty L_{n-1}(x) z^n + 4cd \sum_{n=0}^\infty L_{n-1}^1(x) z^n \right] \\
&= -\exp\left(-\frac{\mathbf{p}^2}{|eB|}\right) \int_0^\infty ds \exp(-sa) \left\{ (\Delta + i\omega\gamma^0) \right. \\
&\quad \times \left[(1 - \text{sgn}(eB)i\gamma^1\gamma^2) \sum_{n=0}^\infty L_n(x) z^n - (1 + \text{sgn}(eB)i\gamma^1\gamma^2) \sum_{n=0}^\infty L_{n-1}(x) z^n \right] \\
&\quad \left. + 4(p_1\gamma^1 + p_2\gamma^2) \sum_{n=0}^\infty L_{n-1}^1(x) z^n \right\}.
\end{aligned}
\tag{Г.12}$$

Наприкінці, проінтегрувавши по s та відновивши v_F і c ми одержуємо рівняння (3.39).

Додаток Д

Діагональна та холлівська динамічна провідності у магнітному полі

Для обчислення провідності ми використаємо представлення (3.13), з якого після відповідного зсуву змінних можна одержати наступний вираз для дійсної частини провідності

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(\Omega) = & \frac{e^2 v_F^2}{2\pi\Omega} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \operatorname{tr} \{ [n_F(\omega) - n_F(\omega + \Omega)] \\ & \times \gamma^\alpha S^R(\omega + \Omega, \mathbf{k}) \gamma^\beta S^A(\omega, \mathbf{k}) - n_F(\omega) \gamma^\alpha S^R(\omega + \Omega, \mathbf{k}) \gamma^\beta S^R(\omega, \mathbf{k}) \\ & + n_F(\omega + \Omega) \gamma^\alpha S^A(\omega + \Omega, \mathbf{k}) \gamma^\beta S^A(\omega, \mathbf{k}) \} . \end{aligned} \quad (\text{Д.1})$$

Використавши вирази (3.43) для запізнювальної та випереджувальної ФГ ми одержуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(\Omega) = & \frac{e^2 v_F^2}{2\pi\Omega} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{-\frac{\mathbf{c}\mathbf{k}^2}{|eB|}} \sum_{n,m=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \\ & \times \operatorname{tr} \left\{ [n_F(\omega) - n_F(\omega + \Omega)] \frac{\gamma^\alpha S_n^R(\omega + \Omega) \gamma^\beta S_m^A(\omega)}{[(\omega + \Omega + i\Gamma(\omega + \Omega))^2 - M_n^2][(\omega - i\Gamma(\omega))^2 - M_m^2]} \right. \\ & - n_F(\omega) \frac{\gamma^\alpha S_n^R(\omega + \Omega) \gamma^\beta S_m^R(\omega)}{[(\omega + \Omega + i\Gamma(\omega + \Omega))^2 - M_n^2][(\omega + i\Gamma(\omega))^2 - M_m^2]} \\ & \left. + n_F(\omega + \Omega) \frac{\gamma^\alpha S_n^A(\omega + \Omega) \gamma^\beta S_m^A(\omega)}{[(\omega + \Omega - i\Gamma(\omega + \Omega))^2 - M_n^2][(\omega - i\Gamma(\omega))^2 - M_m^2]} \right\} , \end{aligned} \quad (\text{Д.2})$$

де $S_n^{(R,A)}$ є чисельниками у (3.43), які одержуються з рівняння (3.41) для $S_n(i\omega_n, \mathbf{k})$ за допомогою правила $S_n^{(R,A)}(\omega, \mathbf{k}) = S_n(i\omega_n \rightarrow \omega \pm i\Gamma(\omega))$. Таким чином ми враховуємо залежне від частоти розсіяння на домішках $\Gamma(\omega)$.

Сліди у (Д.2) легко обчислюються

$$\begin{aligned}
& \text{tr} \left[\gamma^\alpha S_n^{(R,A)}(\omega') \gamma^\beta S_m^{(R,A)}(\omega) \right] = -8N_f [(\omega' \pm i\Gamma')(\omega \pm i\Gamma) - \Delta^2] \\
& \times [\delta_{\alpha\beta} (L_n(x)L_{m-1}(x) + L_{n-1}(x)L_m(x)) \\
& + i\epsilon_{\alpha\beta} \text{sgn}(eB) (L_n(x)L_{m-1}(x) - L_{n-1}(x)L_m(x))] \\
& - 64N_f(2k_\alpha k_\beta - \delta_{\alpha\beta} \mathbf{k}^2) L_{n-1}^1(x) L_{m-1}^1(x),
\end{aligned} \tag{Д.3}$$

де $\epsilon_{\alpha\beta}$ є антисиметричним тензором ($\epsilon_{12} = 1$) і аргумент поліномів Лагера дорівнює $x = 2c\mathbf{k}^2/|eB|$. Після інтегрування по імпульсу ми одержуємо

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta}(\Omega) &= \frac{e^2 v_F^2 |eB| N_f}{2\pi^2 c \Omega} \\
&\times \text{Re} \sum_{n,m=0}^{\infty} (-1)^{n+m+1} [\delta_{\alpha\beta} (\delta_{n,m-1} + \delta_{n-1,m}) + i\epsilon_{\alpha\beta} \text{sgn}(eB) (\delta_{n,m-1} - \delta_{n-1,m})] \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\frac{[n_F(\omega) - n_F(\omega')][(\omega' + i\Gamma')(\omega - i\Gamma) - \Delta^2]}{[(\omega' + i\Gamma')^2 - M_n^2][(\omega - i\Gamma)^2 - M_m^2]} \right. \\
&\left. - \frac{n_F(\omega)[(\omega' + i\Gamma')(\omega + i\Gamma) - \Delta^2]}{[(\omega' + i\Gamma')^2 - M_n^2][(\omega + i\Gamma)^2 - M_m^2]} + \frac{n_F(\omega')[(\omega' - i\Gamma')(\omega - i\Gamma) - \Delta^2]}{[(\omega' - i\Gamma')^2 - M_n^2][(\omega - i\Gamma)^2 - M_m^2]} \right].
\end{aligned} \tag{Д.4}$$

Наявність Символів Кронекера у (Д.4), пов'язаних з ортогональністю поліномів Лагера,

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} x^\alpha L_m^\alpha(x) L_n^\alpha(x) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} \delta_{mn}, \tag{Д.5}$$

показує що у провідність дають вклад тільки переходи між сусідніми рівнями Ландау. Останній член (Д.3) зникає після інтегрування по кутам.

Дійсна частина рівняння (Д.4) записується

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(\Omega) = & \frac{e^2 v_F^2 |eB| N_f}{2\pi^2 c \Omega} \sum_{n,m=0}^{\infty} (-1)^{n+m+1} \\ & \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left\{ \delta_{\alpha\beta} (\delta_{n,m-1} + \delta_{n-1,m}) [n_F(\omega) - n_F(\omega')] \operatorname{Re}[\Pi_{n,m}^1(\omega, \omega') - \Pi_{n,m}^2(\omega, \omega')] \right. \\ & - \epsilon_{\alpha\beta} \operatorname{sgn}(eB) (\delta_{n,m-1} - \delta_{n-1,m}) \left[[n_F(\omega) - n_F(\omega')] \operatorname{Im}\Pi_{n,m}^1(\omega, \omega') \right. \\ & \left. \left. - [n_F(\omega) + n_F(\omega')] \operatorname{Im}\Pi_{n,m}^2(\omega, \omega') \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{Д.6})$$

де ми ввели

$$\begin{aligned} \Pi_{n,m}^1(\omega, \omega') &= \frac{(\omega' + i\Gamma')(\omega - i\Gamma) - \Delta^2}{[(\omega' + i\Gamma')^2 - M_n^2][(\omega - i\Gamma)^2 - M_m^2]}, \\ \Pi_{n,m}^2(\omega, \omega') &= \frac{(\omega' + i\Gamma')(\omega + i\Gamma) - \Delta^2}{[(\omega' + i\Gamma')^2 - M_n^2][(\omega + i\Gamma)^2 - M_m^2]}. \end{aligned} \quad (\text{Д.7})$$

Виводячи (Д.6) ми використали факт, що дійсна $\Pi_{n,m}^{1,2}$ не змінюється при одночасній заміні $i\Gamma \rightarrow -i\Gamma$ та $i\Gamma' \rightarrow -i\Gamma'$, тоді як уявна частина змінює знак. Ці властивості $\sigma_{\alpha\beta}(\Omega)$ також використані нижче, коли (3.46) та (3.47) переписані у симетричній формі. Сума по m у (Д.6) легко обчислюється використовуючи символи Кронекера,

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(\Omega) = & \frac{e^2 v_F^2 |eB| N_f}{2\pi^2 c \Omega} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left\{ \delta_{\alpha\beta} [n_F(\omega) - n_F(\omega')] \right. \\ & \operatorname{Re}[\Pi_{n,n+1}^1(\omega, \omega') + \Pi_{n+1,n}^1(\omega, \omega') - \Pi_{n,n+1}^2(\omega, \omega') - \Pi_{n+1,n}^2(\omega, \omega')] \\ & - \epsilon_{\alpha\beta} \operatorname{sgn}(eB) \left[[n_F(\omega) - n_F(\omega')] \operatorname{Im}[\Pi_{n,n+1}^1(\omega, \omega') - \Pi_{n+1,n}^1(\omega, \omega')] \right. \\ & \left. \left. - [n_F(\omega) + n_F(\omega')] \operatorname{Im}[\Pi_{n,n+1}^2(\omega, \omega') - \Pi_{n+1,n}^2(\omega, \omega')] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Д.8})$$

Подальше сумування по n може бути зроблено, якщо розкласти $\Pi^{1,2}$ на дроби,

$$\begin{aligned}\Pi_{n,m}^1(\omega, \omega') &= \frac{(\omega' + i\Gamma')(\omega - i\Gamma) - \Delta^2}{[\omega - \omega' - i(\Gamma + \Gamma')][\omega + \omega' - i(\Gamma - \Gamma')] + 2B(n - m)} \\ &\times \left[\frac{1}{(\omega' + i\Gamma')^2 - M_n^2} - \frac{1}{(\omega - i\Gamma)^2 - M_m^2} \right], \\ \Pi_{n,m}^2(\omega, \omega') &= \frac{(\omega' + i\Gamma')(\omega + i\Gamma) - \Delta^2}{[\omega - \omega' + i(\Gamma - \Gamma')][\omega + \omega' + i(\Gamma + \Gamma')] + 2B(n - m)} \\ &\times \left[\frac{1}{(\omega' + i\Gamma')^2 - M_n^2} - \frac{1}{(\omega + i\Gamma)^2 - M_m^2} \right],\end{aligned}\tag{Д.9}$$

де для скорочення ми позначили $B \equiv v_F^2 |eB|/c$. Результуючі суми виражені через дігама функцію за допомогою формули

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{A}{n+a} + \frac{B}{n+b} + \frac{C}{n+c} + \frac{D}{n+d} \right] \\ = -[A\psi(a) + B\psi(b) + C\psi(c) + D\psi(d)],\end{aligned}\tag{Д.10}$$

де для збіжності $A + B + C + D = 0$. Таким чином ми одержуємо кінцеві вирази для провідностей (3.46) та (3.47). У границі зникаючого магнітного поля холлівська провідність зникає, тоді як для повздовжньої провідності ми знову одержуємо (3.14).

А зараз ми одержимо вирази (3.49) і (3.50). Ми розглянемо комплексну провідність $\sigma_{\pm}(\Omega) = \sigma_{xx}(\Omega) \pm i\sigma_{xy}(\Omega)$. Підставивши спектральну функцію (3.44) в (3.11) після обчислення tr та інтегрування по $\mathbf{k}$ [див. рівняння (Д.3), (Д.4) та (Д.5) вище] ми одержуємо

$$\begin{aligned}\sigma_{\pm}(\Omega) &= \\ \frac{e^2 N_f v_F^2 |eB|}{4\pi c \Omega i} &\int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \frac{n_F(\omega') - n_F(\omega)}{\omega - \omega' - \Omega - i0} [\psi_1(\omega, \omega') \mp \text{sgn}(eB)\psi_2(\omega, \omega')],\end{aligned}\tag{Д.11}$$

де функції $\psi_1(\omega, \omega')$ і $\psi_2(\omega, \omega')$ дорівнюють:

$$\psi_{1,2}(\omega, \omega') = \sum_{n,m=0}^{\infty} (-1)^{n+m+1} (\delta_{n,m-1} \pm \delta_{m,n-1}) \psi_{n,m}(\omega, \omega') \quad (\text{Д.12})$$

З

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(\omega, \omega') = & \left(1 - \frac{\Delta^2}{M_n M_m}\right) (A_n(\omega) A_m(\omega') + B_n(\omega) B_m(\omega')) \\ & + \left(1 + \frac{\Delta^2}{M_n M_m}\right) (A_n(\omega) B_m(\omega') + B_n(\omega) A_m(\omega')), \end{aligned} \quad (\text{Д.13})$$

та

$$A_n(\omega) = \frac{\Gamma_n}{\pi[(\omega - M_n)^2 + \Gamma_n^2]}, \quad B_n(\omega) = \frac{\Gamma_n}{\pi[(\omega + M_n)^2 + \Gamma_n^2]}. \quad (\text{Д.14})$$

Можна легко перевірити, що

$$\psi_1(\omega, \omega') = \psi_1(\omega', \omega), \quad \psi_2(\omega, \omega') = -\psi_2(\omega', \omega). \quad (\text{Д.15})$$

Використавши цю симетрію можна переписати (Д.11) у формі

$$\begin{aligned} \sigma_{\pm}(\Omega) = & -\frac{e^2 N_f v_F^2 |eB|}{4\pi c \Omega i} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega n_F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \left\{ \left[\frac{1}{\omega - \omega' + \Omega + i0} + \frac{1}{\omega - \omega' - \Omega - i0} \right] \psi_1(\omega, \omega') \right. \\ & \left. \pm \operatorname{sgn}(eB) \left[\frac{1}{\omega - \omega' + \Omega + i0} - \frac{1}{\omega - \omega' - \Omega - i0} \right] \psi_2(\omega, \omega') \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Д.16})$$

Тепер використавши (Д.12) ми одержуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{\pm}(\Omega) = & -\frac{e^2 N_f v_F^2 |eB|}{4\pi c \Omega i} \sum_{n,m=0}^{\infty} (-1)^{n+m+1} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega n_F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \psi_{n,m}(\omega, \omega') \\ & \times \left\{ \left[\frac{1}{\omega - \omega' + \Omega + i0} + \frac{1}{\omega - \omega' - \Omega - i0} \right] (\delta_{n,m-1} + \delta_{m,n-1}) \right. \\ & \left. \pm \operatorname{sgn}(eB) \left[\frac{1}{\omega - \omega' + \Omega + i0} - \frac{1}{\omega - \omega' - \Omega - i0} \right] (\delta_{n,m-1} - \delta_{m,n-1}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Д.17})$$

Для типового інтегрування по ω' ми одержуємо

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' \psi_{n,m}(\omega, \omega')}{\omega - \omega' + \Omega + i0} \\ &= \left(1 - \frac{\Delta^2}{M_n M_m}\right) \left(\frac{A_n(\omega)}{\omega - M_m + \Omega + i\Gamma_m} + \frac{B_n(\omega)}{\omega + M_m + \Omega + i\Gamma_m} \right) \\ &+ \left(1 + \frac{\Delta^2}{M_n M_m}\right) \left(\frac{B_n(\omega)}{\omega - M_m + \Omega + i\Gamma_m} + \frac{A_n(\omega)}{\omega + M_m + \Omega + i\Gamma_m} \right). \end{aligned} \quad (\text{Д.18})$$

У відсутності термічного фактора n_F , подальше інтегрування по ω дало б точний результат:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \frac{\psi_{n,m}(\omega, \omega')}{\omega - \omega' + \Omega + i0} = \\ & \left(1 - \frac{\Delta^2}{M_n M_m}\right) \\ & \times \left(\frac{1}{M_n - M_m + \Omega + i(\Gamma_n + \Gamma_m)} + \frac{1}{-M_n + M_m + \Omega + i(\Gamma_n + \Gamma_m)} \right) \\ & + \left(1 + \frac{\Delta^2}{M_n M_m}\right) \\ & \times \left(\frac{1}{-M_n - M_m + \Omega + i(\Gamma_n + \Gamma_m)} + \frac{1}{M_n + M_m + \Omega + i(\Gamma_n + \Gamma_m)} \right). \end{aligned} \quad (\text{Д.19})$$

У випадку інтегрування з гладкою функцією $n_F(\omega)$ ми можемо наближено записати

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\omega n_F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' \psi_{n,m}(\omega, \omega')}{\omega - \omega' + \Omega + i0} \simeq \\ & \left(1 - \frac{\Delta^2}{M_n M_m}\right) \\ & \times \left(\frac{n_F(M_n)}{M_n - M_m + \Omega + i(\Gamma_n + \Gamma_m)} + \frac{n_F(-M_n)}{-M_n + M_m + \Omega + i(\Gamma_n + \Gamma_m)} \right) \\ & + \left(1 + \frac{\Delta^2}{M_n M_m}\right) \\ & \times \left(\frac{n_F(-M_n)}{-M_n - M_m + \Omega + i(\Gamma_n + \Gamma_m)} + \frac{n_F(M_n)}{M_n + M_m + \Omega + i(\Gamma_n + \Gamma_m)} \right). \end{aligned}$$

Східним чином, взявши комплексне спряжене та замінивши $\Omega \rightarrow -\Omega$, ми маємо

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} d\omega n_F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' \psi_{n,m}(\omega, \omega')}{\omega - \omega' - \Omega - i0} \simeq \\
& \left(1 - \frac{\Delta^2}{M_n M_m}\right) \\
& \times \left(\frac{n_F(M_n)}{M_n - M_m - \Omega - i(\Gamma_n + \Gamma_m)} + \frac{n_F(-M_n)}{-M_n + M_m - \Omega - i(\Gamma_n + \Gamma_m)} \right) \\
& + \left(1 + \frac{\Delta^2}{M_n M_m}\right) \\
& \times \left(\frac{n_F(-M_n)}{-M_n - M_m - \Omega - i(\Gamma_n + \Gamma_m)} + \frac{n_F(M_n)}{M_n + M_m - \Omega - i(\Gamma_n + \Gamma_m)} \right).
\end{aligned}
\tag{Д.20}$$

Таким чином, ми одержуємо вираз з однією сумою по n :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\pm}(\Omega) = & -\frac{e^2 N_f v_F^2 |eB|}{4\pi c \Omega i} \\
& \times \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{\Delta^2}{M_n M_{n+1}} \right) [[n_F(M_n) - n_F(M_{n+1})] + [n_F(-M_{n+1}) - n_F(-M_n)]] \right. \\
& \times \left[\frac{1}{M_n - M_{n+1} + \Omega + i(\Gamma_n + \Gamma_{n+1})} + \frac{1}{M_n - M_{n+1} - \Omega - i(\Gamma_n + \Gamma_{n+1})} \right] \\
& - \left(1 + \frac{\Delta^2}{M_n M_{n+1}} \right) [[n_F(-M_{n+1}) - n_F(M_n)] + [n_F(-M_n) - n_F(M_{n+1})]] \\
& \times \left[\frac{1}{M_n + M_{n+1} - \Omega - i(\Gamma_n + \Gamma_{n+1})} + \frac{1}{M_n + M_{n+1} + \Omega + i(\Gamma_n + \Gamma_{n+1})} \right] \\
& \pm \operatorname{sgn}(eB) \\
& \times \left[\left(1 - \frac{\Delta^2}{M_n M_{n+1}} \right) [[n_F(M_n) - n_F(M_{n+1})] - [n_F(-M_{n+1}) - n_F(-M_n)]] \right. \\
& \times \left[\frac{1}{M_n - M_{n+1} + \Omega + i(\Gamma_n + \Gamma_{n+1})} - \frac{1}{M_n - M_{n+1} - \Omega - i(\Gamma_n + \Gamma_{n+1})} \right] \\
& + \left(1 + \frac{\Delta^2}{M_n M_{n+1}} \right) [[n_F(-M_{n+1}) - n_F(M_n)] - [n_F(-M_n) - n_F(M_{n+1})]] \\
& \times \left. \left[\frac{1}{M_n + M_{n+1} - \Omega - i(\Gamma_n + \Gamma_{n+1})} - \frac{1}{M_n + M_{n+1} + \Omega + i(\Gamma_n + \Gamma_{n+1})} \right] \right] \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{Д.21}$$

Ми перевірили, що $\operatorname{Re} \sigma_{xx}(\Omega)$ обчислене для $\Gamma_n(\omega) = \text{const}$ за допомогою більш наближеного виразу (Д.21) узгоджується з результатами, одержаними з повного виразу (3.46). Це узгодження найкращим для резонансних піків і тільки малі розбіжності спостерігаються при $\Omega \sim 0$. Проте, (Д.21) має декілька вад, пов'язаних з наближеннями зробленими в (Д.20) і (Д.20). Зокрема, член Друде не може бути відновлений у границі $B \rightarrow 0$, тоді як нижче (Д.10) ми вказали, що (3.14) і, відповідно, (3.24) можуть бути одержані з точного представлення (3.46). Більш того, уявні частини діагональної $\operatorname{Im} \sigma_{xx}(\Omega)$ та холлівської $\operatorname{Im} \sigma_{xy}(\Omega)$ провідностей мають розбіжності у границі $\Omega \rightarrow 0$ та не задовольняють співвідношенням Крамерса-Кроніга з відповідними дійсними частинами, які знайдені з (Д.21). Щоб усунути

цю проблему, ми переставимо $1/\Omega$ член під знак суми замінюючи його величиною у полюсі для відповідного знаменника у (Д.21). В результаті ми одержуємо (3.49) та (3.50).

Додаток Е

Обчислення діаманітного та холлівського членів

Підставивши перетворення Фур'є (1.14) у (1.9) і обрахувавши суму по вузлам ґратки, одержуємо

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n}} \tau_{\alpha\beta}(\mathbf{n}) &= \frac{te^2}{\hbar^2} \sum_{\delta,\sigma} \delta_{\alpha}\delta_{\beta} \int_{BZ} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} [a_{\sigma}(\mathbf{k})^{\dagger} e^{i\mathbf{k}\delta} b_{\sigma}(\mathbf{k}) + \text{h.c.}] \\ &= \frac{e^2}{\hbar^2} \sum_{\sigma} \int_{BZ} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{k})}{\partial k_{\alpha} \partial k_{\beta}} \Upsilon_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \sigma_{+} \Upsilon_{\sigma}(\mathbf{k}) + \frac{\partial^2 \phi^{*}(\mathbf{k})}{\partial k_{\alpha} \partial k_{\beta}} \Upsilon_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \sigma_{-} \Upsilon_{\sigma}(\mathbf{k}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Відповідно, температурне усереднення $\langle \tau_{\alpha\beta} \rangle$ легко висловлюється через ФГ (1.18) наступним чином

$$\begin{aligned} \langle \tau_{\alpha\beta} \rangle &= \frac{2Ve^2}{\hbar^2} \int_{BZ} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} \\ &\times \left[\text{tr}[\sigma_{+} G(i\omega_n, \mathbf{k})] \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{k})}{\partial k_{\alpha} \partial k_{\beta}} + \text{tr}[\sigma_{-} G(i\omega_n, \mathbf{k})] \frac{\partial^2 \phi^{*}(\mathbf{k})}{\partial k_{\alpha} \partial k_{\beta}} \right], \quad \tau \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Обрахувавши слід, ми одержуємо для діагональної компоненти діаманітного тензору $\langle \tau_{\alpha\beta} \rangle = \langle \tau_{\alpha\alpha} \rangle \delta_{\alpha\beta}$, що

$$\frac{\langle \tau_{\alpha\alpha} \rangle}{V} = -\frac{2e^2 T}{\hbar^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{BZ} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\omega_n - i\mu)^2 + \epsilon^2(\mathbf{k})} \left(\phi(\mathbf{k}) \frac{\partial^2}{\partial k_{\alpha}^2} \phi^{*}(\mathbf{k}) + \text{c.c.} \right). \quad (\text{E.3})$$

Сума по мацубарівським частотам збігається незалежно від нескінченно малого τ , і ми знаходимо

$$\frac{\langle \tau_{\alpha\alpha} \rangle}{V} = \frac{e^2}{\hbar^2} \int_{BZ} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\epsilon(\mathbf{k})} [n_F(\epsilon(\mathbf{k})) - n_F(-\epsilon(\mathbf{k}))] \left(\phi(\mathbf{k}) \frac{\partial^2}{\partial k_{\alpha}^2} \phi^{*}(\mathbf{k}) + \text{c.c.} \right). \quad (\text{E.4})$$

Використавши, що $\phi(\mathbf{k}) = -\epsilon(\mathbf{k})e^{i\varphi(\mathbf{k})}$ (див. після (1.10)), ми можемо переписати останнє рівняння у формі (3.74). Похідні у лапках в (Е.4) легко обчислюються з використанням явного виразу для $\phi(\mathbf{k})$:

$$\phi(\mathbf{k})\frac{\partial^2}{\partial k_\alpha^2}\phi^*(\mathbf{k}) + \text{c.c.} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2} \left(\phi(\mathbf{k})\frac{\partial^2}{\partial k_\alpha^2}\phi^*(\mathbf{k}) + \text{c.c.} \right) = -\frac{a^2}{3}\epsilon^2(\mathbf{k}). \quad (\text{Е.5})$$

Підставивши (Е.5) у (Е.4) ми одержуємо кінцевий вираз (3.75).

А зараз ми розглянемо холлівський член. Для цього ми обрахуємо комутатор $I_{x,y} = \langle [J_x(t=0), J_y(t=0)] \rangle$ парамагнітних струмів $J_x(t=0)$ та $J_y(t=0)$, які були визначені у (3.3). Оскільки цей комутатор ненульовий тільки у присутності магнітного поля, відповідний оператор густини струму $j_a(\mathbf{n})$ повинен бути взятий при скінченому векторному потенціалі $\mathbf{A}$:

$$j_a(\mathbf{n}) = -\frac{ite}{\hbar} \sum_{\delta,\sigma} \delta_a [a_{\mathbf{n},\sigma}^\dagger T_\delta b_{\mathbf{n},\sigma} - b_{\mathbf{n},\sigma}^\dagger T_{-\delta} a_{\mathbf{n},\sigma}], \quad (\text{Е.6})$$

де оператор

$$T_\delta = e^{i\delta(\mathbf{p}+e/c\mathbf{A})/\hbar}. \quad (\text{Е.7})$$

Використавши антикомутаційні співвідношення для операторів $a_{\mathbf{n},\sigma}$ та $b_{\mathbf{n},\sigma}$, ми обчислюємо комутатор

$$[j_x(\mathbf{n}), j_y(\mathbf{m})] = \frac{e^2 t^2 \delta_{nm}}{\hbar^2} \sum_{\delta,\delta',\sigma} \delta_x \delta'_y \{ a_{\mathbf{n},\sigma}^\dagger (T_\delta T_{-\delta'} - T_{\delta'} T_{-\delta}) a_{\mathbf{n},\sigma} + b_{\mathbf{n},\sigma}^\dagger (T_{-\delta} T_{\delta'} - T_{\delta'} T_{-\delta}) b_{\mathbf{n},\sigma} \}. \quad (\text{Е.8})$$

Оскільки потік магнітного поля через елементарну комірку є набагато меншим, ніж квант потоку h/e , ми можемо розкласти оператор T_δ

$$T_\delta \approx 1 + i\frac{\delta_a}{\hbar} \left(p_a + \frac{e}{c} A_a \right). \quad (\text{Е.9})$$

Далі, використавши комутатор

$$[D_a, D_b] \equiv \left[p_a + \frac{e}{c} A_a, p_b + \frac{e}{c} A_b \right] = -i\frac{e\hbar}{c} B \epsilon_{ab}, \quad a, b = 1, 2 \quad (\text{Е.10})$$

ми одержуємо

$$T_{\delta}T_{-\delta'} - T_{\delta'}T_{-\delta} = \frac{1}{\hbar^2}[\delta_a\delta'_b D_a D_b - \delta'_a\delta_b D_a D_b] = \frac{\delta_a\delta'_b}{\hbar^2}(-i)\frac{e\hbar}{c}B\epsilon_{ab}, \quad (\text{E.11})$$

де сума по німим a, b мається на увазі. Зараз сума по δ, δ' у (E.8) може бути обрахована наступним чином

$$\sum_{\delta, \delta'} \delta_x \delta'_y \delta_\gamma \delta'_\kappa \epsilon_{\gamma\kappa} = \epsilon_{\gamma\kappa} \sum_{\delta} \delta_x \delta_\gamma \sum_{\delta'} \delta'_y \delta'_\kappa = \epsilon_{xy} \frac{a^4}{4}, \quad (\text{E.12})$$

де у другій рівності ми використали співвідношення

$$\sum_{\lambda=1,2,3} (\delta_\lambda)_\alpha (\delta_\lambda)_\beta = \frac{a^2}{2} \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{E.13})$$

Підставивши комутатор (E.8) у вираз $I_{x,y} = \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} \langle [j_x(t=0, \mathbf{n}), j_y(t=0, \mathbf{m})] \rangle$ та використавши (E.11) і (E.12) ми одержуємо представлення

$$I_{x,y} = -i \frac{e^2 a^4 t^2 \hbar e B}{4 \hbar^4 c} \epsilon_{xy} \sum_{\mathbf{n}, \sigma} \langle (a_{\mathbf{n}, \sigma}^\dagger a_{\mathbf{n}, \sigma} + b_{\mathbf{n}, \sigma}^\dagger b_{\mathbf{n}, \sigma}) \rangle. \quad (\text{E.14})$$

Таким чином, щоб закінчити обчислення $I_{x,y}$ ми маємо знайти температурне середнє

$$\tilde{I} \equiv \sum_{\mathbf{n}, \sigma} \langle (a_{\mathbf{n}, \sigma}^\dagger a_{\mathbf{n}, \sigma} + b_{\mathbf{n}, \sigma}^\dagger b_{\mathbf{n}, \sigma}) \rangle. \quad (\text{E.15})$$

Як було при розгляді діагонального правила сум, $\tilde{I}$ виражається через ГФ (1.18) так

$$\tilde{I} = \sum_{\mathbf{n}} \sum_{\sigma} \text{tr}[\hat{I} G_{\sigma}(\tau, \mathbf{0})] = 2VT \sum_n \int_{BZ} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} [G_{11}(i\omega_n, \mathbf{k}) + G_{22}(i\omega_n, \mathbf{k})] e^{-i\omega_n \tau}, \quad (\text{E.16})$$

де

$$G_{11}(i\omega_n, \mathbf{k}) = G_{22}(i\omega_n, \mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{i\omega_n + \mu - \epsilon(\mathbf{k})} + \frac{1}{i\omega_n + \mu + \epsilon(\mathbf{k})} \right] \quad (\text{E.17})$$

є діагональними у просторі підграткових компонент у (1.18). На відміну від збігаючихся мацубарівських сум (E.2) та (E.3) для недіагональних компонент ФГ (1.18), регуляризація мацубарівської суми (E.16) фактором $e^{-i\omega_n \tau}$ є

принциповим, інакше вона буде розбіжною. Цей фактор $e^{-i\omega_n\tau}$ регуляризує суму по мацубарівським частотам по-різному, в залежності від знаку τ :

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm 0} T \sum \frac{e^{-i\tau\omega_n}}{i\omega_n + \mu - \omega} = -\frac{1}{2}[1 - 2n_F(\omega)] - \frac{\text{sgn}\tau}{2} = \begin{cases} n_F(\omega), & \tau \rightarrow -0, \\ n_F(\omega) - 1, & \tau \rightarrow +0. \end{cases} \quad (\text{E.18})$$

Звичайно, для того щоб підрахувати кількість частинок [326], необхідно перейти до границі $\tau \rightarrow -0$. Однак, можна перевірити, що використання цього правила веде до протиріччя при обчисленні інтегралу (E.16), оскільки дає $\tilde{I}$ непарне по μ , тоді як ліва частина (3.68) є непарною по μ . Це протиріччя розв'язується, якщо прийняти до уваги, що перший член ФГ (E.17) описує електрони, через що необхідно використовувати правило $\tau \rightarrow -0$, тоді як другий член ФГ (E.17) описує дірки і тому для них необхідно використати правило $\tau \rightarrow +0$. Таким чином, ми одержуємо

$$\tilde{I} = 2V \int_{BZ} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} [n_F(\epsilon(\mathbf{k})) + n_F(-\epsilon(\mathbf{k})) - 1], \quad (\text{E.19})$$

яке є непарним по μ . Величина (E.19) описує дисбаланс густини носіїв, $\rho = n_e - n_h$, де n_e та n_h – густини електронів та дірок. У дисертації ми використовуємо два співвідношення для ρ (3.88) і (3.92).

Додаток Ж

Одержання холлівської провідності з рівняння (4.21) у чистій границі

Рівняння (5.2) може бути одержано прямо з рівняння (4.21). Дійсно, у границі $\Gamma \rightarrow 0$, ми заходимо з (4.22), що

$$\mathcal{A}_H(\omega, B, \Gamma, \Delta) = \frac{1}{2\pi^2} \left[\arctan \frac{2\omega\Gamma}{\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2} - 2\text{Im} \ln \Gamma \left(\frac{\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2 - 2i\omega\Gamma}{B} \right) \right], \quad \Gamma \rightarrow 0. \quad (\text{Ж.1})$$

Нагадаємо, що B це – скорочене позначення для $v_F^2 |eB|/c$. Ми починаємо з виразу

$$\begin{aligned} \text{Im} \ln \Gamma \left(\frac{\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2 - 2i\omega\Gamma}{2B} \right) &= \text{sgn } \omega \text{Im} \ln \Gamma \left(\frac{\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2 - 2i|\omega|\Gamma}{2B} \right) = \\ &= \text{sgn } \omega \text{Im} \ln \Gamma \left(\frac{\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2 - 2i|\omega|\Gamma}{2B} \right) [\theta(\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2) + \theta(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)]. \end{aligned} \quad (\text{Ж.2})$$

А тепер використаємо співвідношення

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{z \sin(-\pi z)} \quad (\text{Ж.3})$$

для того, щоб переписати останній вираз у формі

$$\begin{aligned} \text{Im} \ln \Gamma \left(\frac{\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2 - 2i\omega\Gamma}{2B} \right) &= -\text{sgn } \omega \left\{ \text{Im} \ln \Gamma \left(\frac{|\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2| + 2i|\omega|\Gamma}{2B} \right) \right. \\ &+ \theta(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2) \\ &\times \left[\pi - \arctan \frac{2|\omega|\Gamma}{|\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2|} + \text{Im} \ln \sin \left(\pi \frac{\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2 + 2i|\omega|\Gamma}{2B} \right) \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Ж.4})$$

Таким чином

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_H(\omega, B, \Gamma, \Delta) = & \frac{\operatorname{sgn} \omega}{2\pi^2} \left\{ \arctan \frac{2|\omega|\Gamma}{|\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2|} \right. \\ & + 2\operatorname{Im} \ln \Gamma \left(\frac{|\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2| + 2i|\omega|\Gamma}{2B} \right) \\ & \left. - \theta(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2) \left[\pi - 2\operatorname{Im} \ln \sin \left(\pi \frac{\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2 + 2i|\omega|\Gamma}{2B} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Ж.5})$$

Тепер використавши формулу

$$\operatorname{Im} \ln \sin(a + ib) = \frac{\pi}{2} - a - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2ka) e^{-2kb}, \quad b > 0, \quad (\text{Ж.6})$$

ми одержуємо наступне представлення

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_H(\omega, B, \Gamma, \Delta) = & \frac{\operatorname{sgn} \omega}{2\pi^2} \left\{ \arctan \frac{2|\omega|\Gamma}{|\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2|} + 2\operatorname{Im} \ln \Gamma \left(\frac{|\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2| + 2i|\omega|\Gamma}{2B} \right) \right. \\ & - \pi\theta(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2) \\ & \left. \times \left[\frac{\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2}{B} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \sin \left(2\pi k \frac{\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2}{2B} \right) e^{-\frac{2k|\omega|\Gamma}{B}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Ж.7})$$

Наприкінці, використавши тотожність (4.11), ми одержуємо у границі $\Gamma \rightarrow 0$, що

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_H(\omega, B, \Gamma, \Delta) = & -\frac{1}{2\pi} \operatorname{sgn} \omega \theta(\omega^2 - \Delta^2) \left[\frac{\omega^2 - \Delta^2}{B} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \sin \left(2\pi k \frac{\omega^2 - \Delta^2}{2B} \right) \right] \\ = & -\frac{1}{2\pi} \operatorname{sgn} \omega \left[\theta(\omega^2 - \Delta^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \theta(\omega^2 - \Delta^2 - 2Bn) \right]. \end{aligned} \quad (\text{Ж.8})$$

Підставивши останній вираз до (4.21) та проінтегрувавши по ω ми одержуємо кінцеве рівняння (5.2).

Список використаних джерел

1. *Gusynin, V. P.* Unconventional Integer Quantum Hall Effect in Graphene / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 95, no. 14. — P. 146801.
2. *Gusynin, V. P.* Transport of Dirac quasiparticles in graphene: Hall and optical conductivities / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 73, no. 24. — P. 245411.
3. *Sharapov, S. G.* Magnetic oscillations in planar systems with the Dirac-like spectrum of quasiparticle excitations / S. G. Sharapov, V. P. Gusynin, H. Beck // *Phys. Rev. B.* — 2004. — Vol. 69, no. 7. — P. 075104.
4. *Gusynin, V. P.* Magnetic oscillations in planar systems with the Dirac-like spectrum of quasiparticle excitations. II. Transport properties / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 71, no. 12. — P. 125124.
5. *Gusynin, V. P.* Unusual Microwave Response of Dirac Quasiparticles in Graphene / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, J. P. Carbotte // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 96, no. 25. — P. 256802.
6. *Sharapov, S. G.* Transport properties in the d-density-wave state in an external magnetic field: The Wiedemann-Franz law / S. G. Sharapov, V. P. Gusynin, H. Beck // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 67, no. 14. — P. 144509.
7. *Gusynin, V. P.* Anomalous absorption line in the magneto-optical response of graphene / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, J. P. Carbotte // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98, no. 15. — P. 157402.
8. *Gusynin, V. P.* Magneto-optical conductivity in graphene / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, J. P. Carbotte // *J. Phys. Condens. Matter.* — 2007. —

- Vol. 19. — P. 026222.
9. Excitonic gap, phase transition, and quantum Hall effect in graphene / V. Gusynin, V. Miransky, S. Sharapov, I. Shovkovy // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74, no. 19. — P. 195429.
 10. Edge states, mass and spin gaps, and quantum Hall effect in graphene / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, S. G. Sharapov, I. A. Shovkovy // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77, no. 20. — P. 205409.
 11. Edge states in quantum Hall effect in graphene / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, S. G. Sharapov, I. A. Shovkovy // *Φ HT.* — 2008. — Vol. 34, no. 10. — Pp. 993–1006.
 12. Edge states on graphene ribbon in magnetic field: interplay between Dirac and ferromagnetic-like gaps / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, S. G. Sharapov et al. // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 79. — P. 115431.
 13. *Gusynin, V. P.* Sum rules for the optical and Hall conductivity in graphene / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, J. P. Carbotte // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 75, no. 16. — P. 165407.
 14. *Benfatto, L.* Robustness of the optical conductivity sum rule in bilayer graphene / L. Benfatto, S. G. Sharapov, J. P. Carbotte // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77, no. 12. — P. 125422.
 15. *Benfatto, L.* Effect of orbital currents on the restricted optical sum rule / L. Benfatto, S. G. Sharapov, H. Beck // *Eur. Phys. J. B.* — 2004. — Vol. 39. — Pp. 469–473.
 16. Ward identity and optical conductivity sum rule in the d-density wave state / L. Benfatto, S. G. Sharapov, N. Andrenacci, H. Beck // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 71, no. 10. — P. 104511.
 17. *Benfatto, L.* Optical-conductivity sum rule in cuprates and unconventional charge density waves: a short review / L. Benfatto, S. G. Sharapov // *Φ HT.* — 2006. — Vol. 32, no. 6. — Pp. 700–715.

18. *Sharapov, S. G.* Low-temperature superfluid stiffness of a d -wave superconductor in a magnetic field / S. G. Sharapov, V. P. Gusynin, H. Beck // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Jul. — Vol. 66, no. 1. — P. 012515.
19. *Sharapov, S. G.* Superfluid density and competing orders in d -wave superconductors / S. G. Sharapov, J. P. Carbotte // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 73, no. 9. — P. 094519.
20. *Sharapov, S. G.* Finite-temperature time-dependent effective theory for the phase field in two-dimensional d -wave neutral superconductors / S. G. Sharapov, H. Beck, V. M. Loktev // *Phys. Rev. B.* — 2001. — Sep. — Vol. 64, no. 13. — P. 134519.
21. *Sharapov, S. G.* Effective action approach and Carlson-Goldman mode in d -wave superconductors / S. G. Sharapov, H. Beck // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Mar. — Vol. 65, no. 13. — P. 134516.
22. *Gusynin, V. P.* On the universal AC optical background in graphene / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, J. P. Carbotte // *New J. Phys.* — 2009. — Vol. 11. — P. 095013.
23. *Carbotte, J. P.* Effect of electron-phonon interaction on spectroscopies in graphene / J. P. Carbotte, E. J. Nicol, S. G. Sharapov // *Preprint arXiv:0908.2608.* — 2009.
24. *Loktev, V. M.* Phase fluctuations and pseudogap phenomena / V. M. Loktev, R. M. Quick, S. G. Sharapov // *Phys. Rep.* — 2001. — Vol. 349. — Pp. 1–123.
25. *Gusynin, V. P.* AC conductivity of graphene: from tight-binding model to $2+1$ -dimensional quantum electrodynamics / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, J. P. Carbotte // *Int. J. Mod. Phys. B.* — 2007. — Vol. 21, no. 27. — Pp. 4611 – 4658.
26. *Sharapov, S. G.* Ginzburg-landau theory for the time-dependent phase field in a two-dimensional d -wave superconductor / S. G. Sharapov, H. Beck, V. M. Loktev // Proceedings of “Third International Conference

- on New Theories, Discoveries, and Applications of Superconductors and Related Materials.” Honolulu, Hawaii, USA, January 15 - 19. — Vol. 364-365 of *Physica C*. — 2001. — Pp. 437–440.
27. *Sharapov, S. G.* Low temperature superfluid density of d -wave superconductor in an applied magnetic field / S. G. Sharapov, V. P. Gusynin, H. Beck // Proceedings of International Conference “Modern problems of theoretical physics (MPTP-2002)” Dedicated to the 90th anniversary of A.S.Davydov. Kyiv, Ukraine, December 9-15, 2002. — Vol. 48 of *Ukrainian J. Phys.* — 2003. — Pp. 863–868.
 28. *Sharapov, S. G.* d -density wave state in an external magnetic field / S. G. Sharapov, V. P. Gusynin, H. Beck // Proceedings of 7-th International Conference on “Materials and Mechanisms of Superconductivity and High Temperature Superconductors”. Rio de Janeiro, Brasil, May 25-30, 2003. — Vol. 408-410 of *Physica C*. — 2004. — Pp. 420–421.
 29. *Sharapov, S.* Dirac fermions as a cause of unusual Quantum Hall Effect in Graphene / S. Sharapov // Proceedings of “March 2006 Meeting of the American Physical Society.” Baltimor, Mariland, USA, March 13-17. — Vol. 51 of *Bulletin of Amer. Phys. Soc.* — 2006. — P. 276.
<http://meetings.aps.org/link/BAPS.2006.MAR.D2.3>.
 30. *Sharapov, S.* Dirac-like quasiparticles in Graphene / S. Sharapov // Proceedings of “Congress of the Canadian Association of Physicists.” Saskatoon, Saskatchewan, June 17-20. — Vol. 63 of *Physics in Canada*. — 2007. — May/June. — P. 43.
 31. Longitudinal unzipping of carbon nanotubes to form graphene nanoribbons / D. V. Kosynkin, A. L. Higginbotham, A. Sinitskii et al. // *Nature*. — 2009. — Vol. 458. — Pp. 872–876.
 32. *Wallace, P. R.* The band theory of graphite / P. R. Wallace // *Phys. Rev.* — 1947. — Vol. 71, no. 9. — Pp. 622–634.

33. *Davydov, A.* Теория молекулярных экситонов / *A. Davydov.* — Наука, Москва, 1968. — P. 296.
34. *Semenoff, G. W.* Condensed-matter simulation of a three-dimensional anomaly / *G. W. Semenoff* // *Phys. Rev. Lett.* — 1984. — Vol. 53, no. 26. — Pp. 2449–2452.
35. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films / *K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov et al.* // *Science.* — 2004. — Vol. 306, no. 5696. — Pp. 666–669.
36. *Geim, A. K.* Graphene: Status and prospects / *A. K. Geim* // *Science.* — 2009. — Vol. 324, no. 5934. — Pp. 1530–1534.
37. *Sharapov, S. G.* Двумерные и квазидвумерные модели сверхпроводимости с переменной плотностью носителей: / *S. G. Sharapov.* — Дис. канд. физ.-мат. наук: 01.04.02. - Киев, 1996. — 113 pp.
38. *Tsuei, C. C.* Pairing symmetry in cuprate superconductors / *C. C. Tsuei, J. R. Kirtley* // *Rev. Mod. Phys.* — 2000. — Oct. — Vol. 72, no. 4. — Pp. 969–1016.
39. Two-Dimensional Gas of Massless Dirac Fermions in Graphene / *K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov et al.* // *Nature.* — 2005. — Vol. 438. — Pp. 197–200.
40. Experimental Observation of Quantum Hall Effect and Berry's Phase in Graphene / *Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormer, P. Kim* // *Nature.* — 2005. — Vol. 438. — Pp. 201–204.
41. Gate-Variable Optical Transitions in Graphene / *F. Wang, Y. Zhang, C. Tian et al.* // *Science.* — 2008. — Vol. 320, no. 5873. — Pp. 206–209.
42. Universal dynamic conductivity and quantized visible opacity of suspended graphene / *R. R. Nair, P. Blake, A. N. Grigorenko et al.* // *Science.* — 2008. — Vol. 320, no. 5881. — P. 1308.
43. Dirac charge dynamics in graphene by infrared spectroscopy / *Z. Q. Li, E. A. Henriksen, Z. Jiang et al.* // *Nature Phys.* — 2008. — Vol. 4. —

- Pp. 532–535.
44. Measurement of the optical conductivity of graphene / K. F. Mak, Y. Sfeir, Matthew Y. and Wu, C. H. Lui et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 101, no. 19. — P. 196405.
 45. Anomalous Thermoelectric Transport of Dirac Particles in Graphene / P. Wei, W. Bao, Y. Pu et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 102, no. 16. — P. 166808.
 46. Zuev, Y. M. Thermoelectric and magnetothermoelectric transport measurements of graphene / Y. M. Zuev, W. Chang, P. Kim // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 102, no. 9. — P. 096807.
 47. Checkelsky, J. G. The thermopower and Nernst Effect in graphene in a magnetic field / J. G. Checkelsky, N. P. Ong // *Preprint arXiv:0812.2866*. — 2008.
 48. Two dimensional atomic crystals / K. S. Novoselov, D. Jiang, T. Booth et al. // *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* — 2005. — Vol. 102. — Pp. 10451–10453.
 49. Fradkin, E. Physical realization of the parity anomaly in condensed matter physics / E. Fradkin, E. Dagotto, D. Boyanovsky // *Phys. Rev. Lett.* — 1986. — Dec. — Vol. 57, no. 23. — Pp. 2967–2970.
 50. Boyanovsky, D. Anomalous currents, induced charge and bound states on a domain wall of a semiconductor / D. Boyanovsky, E. Fradkin, E. Dagotto // *Nucl. Phys. B.* — 1987. — Vol. 285. — Pp. 340–362.
 51. Haldane, F. D. M. Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the “Parity Anomaly” / F. D. M. Haldane // *Phys. Rev. Lett.* — 1988. — Oct. — Vol. 61, no. 18. — Pp. 2015–2018.
 52. Schakel, A. M. J. Relativistic quantum Hall effect / A. M. J. Schakel // *Phys. Rev. D.* — 1991. — Vol. 43. — Pp. 1428–1431.

53. *González, J.* The electronic spectrum of fullerenes from the Dirac equation / J. González, F. Guinea, M. A. H. Vozmediano // *Nucl. Phys. B.* — 1993. — Vol. 406. — Pp. 771–794.
54. *González, J.* Non-Fermi liquid behavior of electrons in the half-filled honeycomb lattice (A renormalization group approach) / J. González, F. Guinea, M. A. H. Vozmediano // *Nucl. Phys. B.* — 1994. — Vol. 424. — Pp. 595–618.
55. *González, J.* Unconventional quasiparticle lifetime in graphite / J. González, F. Guinea, M. A. H. Vozmediano // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Oct. — Vol. 77, no. 17. — Pp. 3589–3592.
56. *González, J.* Marginal-Fermi-liquid behavior from two-dimensional Coulomb interaction / J. González, F. Guinea, M. A. H. Vozmediano // *Phys. Rev. B.* — 1999. — Vol. 59. — Pp. R2474–R2477.
57. *González, J.* Electron-electron interactions in graphene sheets / J. González, F. Guinea, M. A. H. Vozmediano // *Phys. Rev. B.* — 2001. — Mar. — Vol. 63, no. 13. — P. 134421.
58. *Khveshchenko, D. V.* Ghost excitonic insulator transition in layered graphite / D. V. Khveshchenko // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Nov. — Vol. 87, no. 24. — P. 246802.
59. *Khveshchenko, D. V.* Magnetic-field-induced insulating behavior in highly oriented pyrolytic graphite / D. V. Khveshchenko // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Oct. — Vol. 87, no. 20. — P. 206401.
60. Magnetic field driven metal-insulator phase transition in planar systems / E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Jul. — Vol. 66, no. 4. — P. 045108.
61. Integer quantum Hall transition: An alternative approach and exact results / A. W. W. Ludwig, M. P. A. Fisher, R. Shankar, G. Grinstein // *Phys. Rev. B.* — 1994. — Sep. — Vol. 50, no. 11. — Pp. 7526–7552.

62. *Hou, C.-Y.* Electron fractionalization in two-dimensional graphenelike structures / C.-Y. Hou, C. Chamon, C. Mudry // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98, no. 18. — P. 186809.
63. *Jackiw, R.* Chiral gauge theory for graphene / R. Jackiw, S.-Y. Pi // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98, no. 26. — P. 266402.
64. *Herbut, I. F.* Zero-energy states and fragmentation of spin in the easy-plane antiferromagnet on a honeycomb lattice / I. F. Herbut // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 99, no. 20. — P. 206404.
65. *Zheng, Y.* Hall conductivity of a two-dimensional graphite system / Y. Zheng, T. Ando // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Vol. 65, no. 24. — P. 245420.
66. *Peres, N. M. R.* Electronic properties of disordered two-dimensional carbon / N. M. R. Peres, F. Guinea, A. H. C. Neto // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 73. — P. 125411.
67. *Geim, A. K.* The rise of graphene / A. K. Geim, K. S. Novoselov // *Nature Materials.* — 2007. — Vol. 6. — Pp. 183–191.
68. Room-temperature quantum hall effect in graphene / K. S. Novoselov, Z. Jiang, Y. Zhang et al. // *Science.* — 2007. — Vol. 315. — P. 1379.
69. *Katsnelson, M. I.* Chiral tunnelling and the klein paradox in graphene / M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, A. K. Geim // *Nature Phys.* — 2006. — Vol. 2. — Pp. 620–625.
70. *Calogeracos, A.* Relativistic quantum mechanics: Paradox in a pencil / A. Calogeracos // *Nature Phys.* — 2006. — Vol. 2. — Pp. 579–580.
71. *Katsnelson, M. I.* Graphene: New bridge between condensed matter physics and quantum electrodynamics / M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov // *Solid State Commun.* — 2007. — Vol. 143. — Pp. 3–13.
72. *Cserti, J.* Unified description of Zitterbewegung for spintronic, graphene, and superconducting systems / J. Cserti, G. Dávid // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74, no. 17. — P. 172305.

73. *Wilson, M.* Electrons in Atomically Thin Carbon Sheets Behave like Massless Particles / M. Wilson // *Physics Today*. — 2006. — Jan. — Pp. 21–23.
74. *Castro Neto, A.* Drawing conclusions from graphene / A. Castro Neto, F. Guinea, N. M. Peres // *Physics World*. — 2006. — Nov. — Vol. 19. — Pp. 33–37.
75. *Geim, A. K.* Graphene: Exploring Carbon flatland / A. K. Geim, A. H. MacDonald // *Physics Today*. — 2007. — Aug. — Pp. 35–41.
76. *Geim, A. K.* Carbon Wonderland / A. K. Geim, P. Kim // *Scientific American*. — 2008. — Apr. — Pp. 90–97.
77. *Chakraborty, T.* Graphene: a nanoscale quantum playing field / T. Chakraborty // *Physics in Canada*. — 2006. — Vol. 63. — Pp. 351–354.
78. *Katsnelson, M. I.* Graphene: carbon in two dimensions / M. I. Katsnelson // *Mater. Today*. — 2007. — Vol. 10, no. 1&2. — Pp. 20–27.
79. *Yang, K.* Spontaneous symmetry breaking and quantum Hall effect in graphene / K. Yang // *Solid State Commun.* — 2007. — Vol. 143. — Pp. 27–32.
80. *Morozov, S. V.* Электронный транспорт в графене / S. V. Morozov, K. S. Novoselov, A. K. Geim // *УФН*. — 2008. — Jul. — Vol. 178, no. 7. — Pp. 776–780.
81. The electronic properties of graphene / A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres et al. // *Rev. Mod. Phys.* — 2009. — Vol. 81. — Pp. 109–162.
82. *Lozovik, Y. E.* Коллективные электронные явления в графене / Y. E. Lozovik, S. P. Merkulova, A. A. Sokolik // *УФН*. — 2008. — Jul. — Vol. 178, no. 7. — Pp. 757–776.
83. *Saito, R.* Physical Properties of Carbon Nanotubes / R. Saito, G. Dresselhaus, M. S. Dresselhaus. — Imperial College Press, London, 1998. — 259 pp.

84. *Ando, T.* Theory of electronic states and transport in carbon nanotubes / T. Ando // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 2005. — Mar. — Vol. 74, no. 3. — P. 777–817.
85. *Lomer, W. M.* The valence bands in two-dimensional graphite / W. M. Lomer // *Proc. Roy. Soc. A.* — 1955. — Jan. — Vol. 227, no. 1170. — Pp. 330–349.
86. *Slonczewski, J. C.* Band structure of graphite / J. C. Slonczewski, P. R. Weiss // *Phys. Rev.* — 1958. — Vol. 109. — Pp. 272–279.
87. *Millis, A. J.* Optical conductivity and correlated electron physics / A. J. Millis // *Strong Interactions in Low Dimensions* / Ed. by D. Baeriswyl, L. De Giorgi. — Kluwer Academic, Berlin, 2003. — Pp. 3–46.
88. The structure of suspended graphene sheets / J. C. Meyer, A. K. Geim, M. Katsnelson et al. // *Nature.* — 2007. — Mar. — Vol. 446. — Pp. 60–63.
89. *Fukuyama, H.* Anomalous Orbital Magnetism and Hall Effect of Massless Fermions in Two Dimension / H. Fukuyama // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 2007. — Apr. — Vol. 76, no. 4. — P. 043711.
90. Cyclotron resonance study of the electron and hole velocity in graphene monolayers / R. S. Deacon, K.-C. Chuang, R. J. Nicholas et al. // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Apr. — Vol. 76. — P. 081406.
91. *Herbut, I. F.* Explanation for the isotropy of the Dirac cone in graphene / I. F. Herbut // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Mar. — Vol. 79. — P. 193405.
92. *Mañes, J. L.* Existence and topological stability of Fermi points in multilayered graphene / J. L. Mañes, F. Guinea, M. A. H. Vozmediano // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 75, no. 15. — P. 155424.
93. *Hatsugai, Y.* Topological aspects of graphene: Dirac fermions and the bulk-edge correspondence in magnetic fields / Y. Hatsugai, T. Fukui, H. Aoki // *Preprint arXiv:cond-mat/0701431.* — 2007. — Dec.
94. Substrate-induced band gap in graphene on hexagonal boron nitride: Ab initio density functional calculations / G. Giovannetti, P. A. Khomyakov,

- G. Brocks et al. // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 76, no. 7. — P. 073103.
95. Substrate-induced bandgap opening in epitaxial graphene / S. Y. Zhou, G.-H. Gweon, A. V. Fedorov et al. // *Nature Materials.* — 2007. — Vol. 6. — Pp. 770 – 775.
 96. *Li, G.* Scanning Tunneling Spectroscopy of Graphene on Graphite / G. Li, A. Luican, E. Y. Andrei // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 102, no. 17. — P. 176804.
 97. *Davydov, A. S.* Квантовая механика / A. S. Davydov. — 2-e edition. — Наука, Москва, 1973. — P. 699.
 98. *Ryu, S.* Topological origin of zero-energy edge states in particle-hole symmetric systems / S. Ryu, Y. Hatsugai // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Jul. — Vol. 89, no. 7. — P. 077002.
 99. *Ziegler, K.* Suppression of magnetotransport in strongly disordered graphene / K. Ziegler // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100, no. 16. — P. 166801.
 100. *Volovik, G.* Quantum phase transitions from topology in momentum space / G. Volovik // Quantum Analogues: From Phase Transitions to Black Holes and Cosmology / Ed. by W. G. Unruh, R. Schutzhold. — Springer Lecture Notes in Physics, 2007. — Vol. 718. — Pp. 31–73.
 101. Zero modes of tight-binding electrons on the honeycomb lattice / Y. Hasegawa, R. Konno, H. Nakano, M. Kohmoto // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74, no. 3. — P. 033413.
 102. *Gaididei, Y. B.* О возможности наблюдения в графене обычного квантового эффекта Холла / Y. B. Gaididei, V. M. Loktev // *ФНТ.* — 2006. — Vol. 32, no. 7. — P. 923–926.
 103. Effect of next-to-nearest neighbor hopping on electronic properties of graphene / Y. F. Suprunenko, E. V. Gorbar, S. G. Sharapov, V. M. Loktev // *ФНТ.* — 2008. — Vol. 34, no. 10. — P. 1033–1039.

104. *DiVincenzo, D. P.* Self-consistent effective-mass theory for intralayer screening in graphite intercalation compounds / D. P. DiVincenzo, E. J. Mele // *Phys. Rev. B.* — 1984. — Feb. — Vol. 29, no. 4. — Pp. 1685–1694.
105. *Khveshchenko, D. V.* Excitonic instability in layered degenerate semimetals / D. V. Khveshchenko, H. Leal // *Nucl. Phys. B.* — 2004. — Vol. 687. — P. 323–331.
106. *Khveshchenko, D. V.* Excitonic pairing between nodal fermions / D. V. Khveshchenko, W. F. Shively // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 73, no. 11. — P. 115104.
107. *Herbut, I. F.* Interactions and phase transitions on graphene's honeycomb lattice / I. F. Herbut // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 97, no. 14. — P. 146401.
108. *Herbut, I. F.* Theory of integer quantum Hall effect in graphene / I. F. Herbut // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 75, no. 16. — P. 165411.
109. *McCann, E.* Symmetry of boundary conditions of the Dirac equation for electrons in carbon nanotubes / E. McCann, V. I. Fal'ko // *J. Phys. Condens. Matter.* — 2004. — Vol. 16, no. 13. — Pp. 2371–2379.
110. *Kane, C. L.* Z_2 Topological Order and the Quantum Spin Hall Effect / C. L. Kane, E. J. Mele // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 95, no. 14. — P. 146802.
111. *Kane, C. L.* Quantum spin hall effect in graphene / C. L. Kane, E. J. Mele // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 95, no. 22. — P. 226801.
112. *Cheianov, V. V.* Friedel Oscillations, Impurity Scattering, and Temperature Dependence of Resistivity in Graphene / V. V. Cheianov, V. I. Fal'ko // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 97, no. 22. — P. 226801.
113. *Cheianov, V. V.* Selective transmission of Dirac electrons and ballistic magnetoresistance of n-p junctions in graphene / V. V. Cheianov, V. I. Fal'ko // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74, no. 4. — P. 041403.

114. Weak-localization magnetoresistance and valley symmetry in graphene / E. McCann, K. Kechedzhi, V. I. Fal'ko et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 97, no. 14. — P. 146805.
115. *Ostrovsky, P. M.* Electron transport in disordered graphene / P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74, no. 23. — P. 235443.
116. *Khveshchenko, D. V.* Composite Dirac fermions in graphene / D. V. Khveshchenko // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 75, no. 15. — P. 153405.
117. Landau-level splitting in graphene in high magnetic fields / Y. Zhang, Z. Jiang, J. P. Small et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 96, no. 13. — P. 136806.
118. Dissipative Quantum Hall Effect in Graphene near the Dirac Point / D. A. Abanin, K. S. Novoselov, U. Zeitler et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98. — P. 196806.
119. Infrared Spectroscopy of Landau Levels of Graphene / Z. Jiang, E. A. Henriksen, L. C. Tung et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98, no. 19. — P. 197403.
120. *Alicea, J.* Graphene integer quantum Hall effect in the ferromagnetic and paramagnetic regimes / J. Alicea, M. P. A. Fisher // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74, no. 7. — P. 075422.
121. *Khveshchenko, D. V.* Coulomb-interacting dirac fermions in disordered graphene / D. V. Khveshchenko // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74, no. 16. — P. 161402.
122. *Mishchenko, E. G.* Effect of electron-electron interactions on the conductivity of clean graphene / E. G. Mishchenko // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98, no. 21. — P. 216801.
123. Chirality and correlations in graphene / Y. Barlas, T. Pereg-Barnea, M. Polini et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98, no. 23. — P. 236601.

124. *Herbut, I. F.* Theory of interacting electrons on honeycomb lattice / I. F. Herbut, V. Juričić, B. Roy // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 79. — P. 085116.
125. *Marston, J. B.* Large- n limit of the Hubbard-Heisenberg model / J. B. Marston, I. Affleck // *Phys. Rev. B.* — 1989. — Jun. — Vol. 39, no. 16. — Pp. 11538–11558.
126. *Nersesyan, A.* Low-temperature thermodynamics of the two-dimensional orbital antiferromagnet / A. Nersesyan, G. Vachanadze // *J. Low Temp. Phys.* — 1989. — Vol. 77. — Pp. 293–303.
127. Hidden order in the cuprates / S. Chakravarty, R. B. Laughlin, D. K. Morr, C. Nayak // *Phys. Rev. B.* — 2001. — Jan. — Vol. 63, no. 9. — P. 094503.
128. *Timusk, T.* The pseudogap in high temperature superconductors: An experimental survey / T. Timusk, B. Statt // *Rep. Progr. Phys.* — 1999. — Vol. 62. — Pp. 61–122.
129. *Nayak, C.* Density-wave states of nonzero angular momentum / C. Nayak // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Aug. — Vol. 62, no. 8. — Pp. 4880–4889.
130. *Tallon, J. L.* The doping dependence of T^* – what is the real high- T_c phase diagram? / J. L. Tallon, J. Loram // *Physica C.* — 2001. — Vol. 349, no. 1-2. — Pp. 53–68.
131. *Yang, X.* Electrical and thermal transport by nodal quasiparticles in the d -density-wave state / X. Yang, C. Nayak // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Jan. — Vol. 65, no. 6. — P. 064523.
132. *Jackiw, R.* How super-renormalizable interactions cure their infrared divergences / R. Jackiw, S. Templeton // *Phys. Rev. D.* — 1981. — May. — Vol. 23, no. 10. — Pp. 2291–2304.
133. Quasiparticles and vortices in unconventional superconductors / O. Vafek, A. Melikyan, M. Franz, Z. Tesanović // *Phys. Rev. B.* — 2001. — Vol. 63. — P. 134509.

134. *Ye, J.* Random Magnetic Field and Quasi-Particle Transports in the Mixed State of High T_c Cuprates / J. Ye // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86. — Pp. 316–319.
135. *Simon, S. H.* Scaling of the quasiparticle spectrum for d -wave superconductors / S. H. Simon, P. A. Lee // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 78, no. 8. — Pp. 1548–1551.
136. *Volovik, G. E.* Superfluid analogies of cosmological phenomena / G. E. Volovik // *Phys. Rep.* — 2001. — Vol. 351, no. 4. — Pp. 195–348.
137. *Khveshchenko, D.* Incipient nodal pairing in planar d -wave superconductors / D. Khveshchenko, J. Paaske // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86. — P. 4672–4675.
138. *Herbut, I. F.* QED₃ theory of underdoped high-temperature superconductors / I. F. Herbut // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Vol. 66, no. 9. — P. 094504.
139. *Gusynin, V.* Thermal conductivity and competing orders in d -wave superconductors / V. Gusynin, V. A. Miransky // *Eur. Phys. J. B.* — 2004. — Feb. — Vol. 37, no. 3. — Pp. 363–368.
140. Low-energy quasiparticles in cuprate superconductors: A quantitative analysis / M. Chiao, R. W. Hill, C. Lupien et al. // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Aug. — Vol. 62, no. 5. — Pp. 3554–3558.
141. *Nguyen, H. K.* Effects of magnetic field on the d -density-wave order in the cuprates / H. K. Nguyen, S. Chakravarty // *Phys. Rev. B.* — 2002. — May. — Vol. 65, no. 18. — P. 180519.
142. *Franz, M.* Quasiparticles in the vortex lattice of unconventional superconductors: Bloch waves or Landau levels? / M. Franz, Z. Tesǎnović // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — Vol. 84. — Pp. 554–557.
143. *Gor'kov, L. P.* de Haas – van Alphen Effect in Anisotropic Superconductors in Magnetic Fields Well Below H_{c2} / L. P. Gor'kov, J. R. Schrieffer // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Apr. — Vol. 80, no. 15. — Pp. 3360–3363.

144. *Anderson, P. W.* Anomalous Magnetothermal Resistance of High- T_c Superconductors: Anomalous Cyclotron Orbits at a Dirac Point / P. W. Anderson // *Preprint arXiv:cond-mat/9812063*. — 1998. — Dec.
145. *Kopnin, N. B.* Magnetic quantization of electronic states in d -wave superconductors / N. B. Kopnin, V. M. Vinokur // *Phys. Rev. B*. — 2000. — Oct. — Vol. 62, no. 14. — Pp. 9770–9779.
146. *Castro Neto, A. H.* Charge Density Wave, Superconductivity, and Anomalous Metallic Behavior in 2D Transition Metal Dichalcogenides / A. H. Castro Neto // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — May. — Vol. 86, no. 19. — Pp. 4382–4385.
147. Weak antilocalization in epitaxial graphene: Evidence for chiral electrons / X. Wu, X. Li, Z. Song et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98, no. 13. — P. 136801.
148. Spontaneous chiral-symmetry breaking in three-dimensional QED / T. W. Appelquist, M. Bowick, D. Karabali, L. C. R. Wijewardhana // *Phys. Rev. D*. — 1986. — Jun. — Vol. 33, no. 12. — Pp. 3704–3713.
149. *Ando, T.* Berry's Phase and Absence of Back Scattering in Carbon Nanotubes / T. Ando, T. Nakanishi, R. Saito // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 1998. — Vol. 67. — P. 2857–2862.
150. *Itzykson, C.* Quantum Field Theory / C. Itzykson, J.-B. Zuber. — McGraw-Hill Inc., New York, 1980. — P. 455.
151. *Binegar, B.* Relativistic field theories in three dimensions / B. Binegar // *J. Math. Phys.* — 1982. — Vol. 23, no. 8. — Pp. 1511–1517.
152. *Boyanovsky, D.* Physical origin of topological mass in $2 + 1$ dimensions / D. Boyanovsky, R. Blankenbecler, R. Yahalom // *Nucl. Phys. B*. — 1986. — Vol. 270. — Pp. 483–505.
153. Disorder, pseudospins, and backscattering in carbon nanotubes / P. L. McEuen, M. Bockrath, D. H. Cobden et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Dec. — Vol. 83, no. 24. — Pp. 5098–5101.

154. *Suzuura, H.* Crossover from symplectic to orthogonal class in a two-dimensional honeycomb lattice / H. Suzuura, T. Ando // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Dec. — Vol. 89, no. 26. — P. 266603.
155. *Hosotani, Y.* Spontaneously broken Lorentz invariance in three-dimensional gauge theories / Y. Hosotani // *Phys. Lett. B.* — 1993. — Vol. 319, no. 1-3. — Pp. 332–338.
156. *Altland, A.* Theories of low-energy quasi-particle states in disordered d-wave superconductors / A. Altland, B. D. Simons, M. R. Zirnbauer // *Phys. Rep.* — 2002. — Vol. 359. — Pp. 283–354.
157. *García-García, A. M.* Anderson transition in systems with chiral symmetry / A. M. García-García, E. Cuevas // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74, no. 11. — P. 113101.
158. *Tchernyshyov, O.* Parity and time-reversal anomaly in a semiconductor / O. Tchernyshyov // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Dec. — Vol. 62, no. 24. — Pp. 16751–16755.
159. Bipolar supercurrent in graphene / H. B. Heersche, P. Jarillo-Herrero, J. B. Oostinga et al. // *Nature.* — 2007. — Vol. 446. — Pp. 56–59.
160. *Titov, M.* Josephson effect in ballistic graphene / M. Titov, C. W. J. Beenakker // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74, no. 4. — P. 041401.
161. *Beenakker, C. W. J.* Colloquium: Andreev reflection and Klein tunneling in graphene / C. W. J. Beenakker // *Rev. Mod. Phys.* — 2008. — Vol. 80, no. 4. — P. 1337.
162. *Abanin, D. A.* Spin-Filtered Edge States and Quantum Hall Effect in Graphene / D. A. Abanin, P. A. Lee, L. S. Levitov // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 96, no. 17. — P. 176803.
163. *Nomura, K.* Quantum Hall Ferromagnetism in Graphene / K. Nomura, A. H. MacDonald // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 96, no. 25. — P. 256602.

164. *Yang, K.* Collective modes and skyrmion excitations in graphene $SU(4)$ quantum Hall ferromagnets / K. Yang, S. Das Sarma, A. H. MacDonald // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74, no. 7. — P. 075423.
165. *Goerbig, M. O.* Electron interactions in graphene in a strong magnetic field / M. O. Goerbig, R. Moessner, B. Douçot // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74, no. 16. — P. 161407.
166. *Fuchs, J.-N.* Spontaneous Parity Breaking of Graphene in the Quantum Hall Regime / J.-N. Fuchs, P. Lederer // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98, no. 1. — P. 016803.
167. *Ezawa, M.* Supersymmetric structure of quantum Hall effects in graphene / M. Ezawa // *Phys. Lett. A.* — 2008. — Vol. 372, no. 6. — Pp. 924–929.
168. *Ezawa, M.* Supersymmetry and unconventional quantum Hall effect in monolayer, bilayer and trilayer graphene / M. Ezawa // *Physica E.* — 2007. — Vol. 40, no. 2. — Pp. 269–272.
169. Odd-Integer Quantum Hall Effect in Graphene: Interaction and Disorder Effects / L. Sheng, D. N. Sheng, F. D. M. Haldane, L. Balents // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 99, no. 19. — P. 196802.
170. *Gorbar, E. V.* Toward theory of quantum Hall effect in graphene / E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky // *ΦHT* . — 2008. — Vol. 34, no. 10. — P. 1007–1011.
171. Dynamics in the quantum Hall effect and the phase diagram of graphene / E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 78, no. 8. — P. 085437.
172. Quantum Hall States near the Charge-Neutral Dirac Point in Graphene / Z. Jiang, Y. Zhang, H. L. Stormer, P. Kim // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 99, no. 10. — P. 106802.
173. *Herbut, I. F.* $SO(3)$ symmetry between Neel and ferromagnetic order parameters for graphene in a magnetic field / I. F. Herbut // *Phys. Rev.*

- B.* — 2007. — Vol. 76, no. 8. — P. 085432.
174. *Hosotani, Y.* Spontaneous breakdown of Lorentz invariance / Y. Hosotani // *Phys. Rev. D.* — 1995. — Feb. — Vol. 51, no. 4. — Pp. 2022–2025.
 175. *Mahan, G. D.* Many-Particle Physics / G. D. Mahan. — Plenum Press, New York, 1990. — P. 1032.
 176. *Altland, A.* Condensed Matter Field Theory / A. Altland, B. Simons. — Cambridge University Press, 2006. — P. 624.
 177. *Yanagisawa, T.* Optical properties of unconventional superconductors / T. Yanagisawa, H. Shibata // *Frontiers in Superconductivity Research.* — Nova Science, New York, 2004. — Pp. 3–47. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0408054>.
 178. *Stauber, T.* Effect of Holstein phonons on the electronic properties of graphene / T. Stauber, N. M. R. Peres // *J. Phys. Condens. Matter.* — 2008. — Feb. — Vol. 20, no. 5. — P. 055002.
 179. *Ando, T.* Dynamical Conductivity and Zero-Mode Anomaly in Honeycomb Lattices / T. Ando, Y. Zheng, H. Suzuura // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 2002. — Vol. 71. — Pp. 1318–1324.
 180. *Kim, W.* Microwave conductivity of a high-purity *d*-wave superconductor / W. Kim, F. Marsiglio, J. P. Carbotte // *Phys. Rev. B.* — 2004. — Aug. — Vol. 70, no. 6. — P. 060505.
 181. *Shon, N. H.* Quantum transport in two-dimensional graphite system / N. H. Shon, T. Ando // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 1998. — Vol. 67. — Pp. 2421–2429.
 182. *Fradkin, E.* Critical behavior of disordered degenerate semiconductors. II. Spectrum and transport properties in mean-field theory / E. Fradkin // *Phys. Rev. B.* — 1986. — Mar. — Vol. 33, no. 5. — Pp. 3263–3268.
 183. *Lee, P. A.* Localized states in a *d*-wave superconductor / P. A. Lee // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Sep. — Vol. 71, no. 12. — Pp. 1887–1890.

184. Phase-coherent transport in graphene quantum billiards / F. Miao, S. Wijeratne, Y. Zhang et al. // *Science*. — 2007. — Vol. 317, no. 5844. — Pp. 1530 – 1533.
185. Measurement of scattering rate and minimum conductivity in graphene / Y.-W. Tan, Y. Zhang, K. Bolotin et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 99, no. 24. — P. 246803.
186. Charged-impurity scattering in graphene / J.-H. Chen, C. Jang, S. Adam et al. // *Nature Phys.* — 2008. — Vol. 4. — Pp. 377 – 381.
187. Observation of weak-limit quasiparticle scattering via broadband microwave spectroscopy of a *d*-wave superconductor / P. J. Turner, R. Harris, S. Kamal et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Jun. — Vol. 90, no. 23. — P. 237005.
188. *Burstein, E.* Anomalous Optical Absorption Limit in InSb / E. Burstein // *Phys. Rev.* — 1954. — Feb. — Vol. 93, no. 3. — Pp. 632–633.
189. *Moss, T. S.* The Interpretation of the Properties of Indium Antimonide / T. S. Moss // *Proc. Phys. Soc. B.* — 1954. — Vol. 67, no. 10. — Pp. 775–782.
190. *Moss, T. S.* Полупроводниковая оптоэлектроника / Т. С. Moss, G. J. Burrell, B. Ellis. — Мир, Москва, 1976. — P. 431.
191. *Falkovsky, L. A.* Space-time dispersion of graphene conductivity / L. A. Falkovsky, A. Varlamov // *Eur. Phys. J. B.* — 2007. — Vol. 56, no. 4. — Pp. 281–284.
192. *Falkovsky, L. A.* Optical far-infrared properties of a graphene monolayer and multilayer / L. A. Falkovsky, S. S. Pershoguba // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 76, no. 15. — P. 153410.
193. *Falkovsky, L.* Оптические свойства графена и полупроводников типа A_4B_6 / L. Falkovsky // *УФН*. — 2008. — Sep. — Vol. 178, no. 9. — Pp. 923–934.

194. Quantum critical transport in clean graphene / L. Fritz, J. Schmalian, M. Müller, S. Sachdev // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 78, no. 8. — P. 085416.
195. Measurement of the Optical Absorption Spectra of Epitaxial Graphene from Terahertz to Visible / J. M. Dawlaty, S. Shivaraman, J. Strait et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2008. — Vol. 93. — P. 131905.
196. Universal optical conductance of graphite / A. B. Kuzmenko, E. van Heumen, F. Carbone, D. van der Marel // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100, no. 11. — P. 117401.
197. *Stauber, T.* Optical conductivity of graphene in the visible region of the spectrum / T. Stauber, N. M. R. Peres, A. K. Geim // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 78, no. 8. — P. 085432.
198. *Peres, N. M. R.* Transport in a clean graphene sheet at finite temperature and frequency / N. M. R. Peres, T. Stauber // *Int. J. Mod. Phys. B.* — 2008. — Vol. 22, no. 16. — Pp. 2529–2536.
199. *Herbut, I. F.* Coulomb interaction, ripples, and the minimal conductivity of graphene / I. F. Herbut, V. Juričić, O. Vafek // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100, no. 4. — P. 046403.
200. *Sheehy, D. E.* Why is the optical transparency of graphene determined by the fine structure constant? / D. E. Sheehy, J. Schmalian // *Preprint arXiv:0906.5164.* — 2009.
201. *Grushin, A. G.* Effect of Coulomb interactions on the optical properties of doped graphene / A. G. Grushin, B. Valenzuela, M. A. H. Vozmediano // *Preprint arXiv:0907.0118.* — 2009.
202. *Peres, N. M. R.* The infrared conductivity of graphene on top of silicon oxide / N. M. R. Peres, T. Stauber, A. H. Castro Neto // *Europhys. Lett.* — 2008. — Vol. 84, no. 3. — P. 38002.
203. *Stauber, T.* Conductivity of suspended and non-suspended graphene at finite gate voltage / T. Stauber, N. M. R. Peres, A. H. Castro Neto //

- Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 78, no. 8. — P. 085418.
204. *Benfatto, L.* Spectroscopic signatures of massless gap opening in graphene / L. Benfatto, E. Cappelluti // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 78, no. 11. — P. 115434.
 205. *Lax, B.* Interband Magneto-optical Studies of Semiconductors and Semimetals / B. Lax, J. Mavroides // *Semiconductors and Semimetals* / Ed. by R. K. Willardson, A. C. Beer. — Academic Press, New York, 1967. — Vol. 3. — P. 321–401.
 206. Cyclotron Resonance in Bilayer Graphene / E. A. Henriksen, Z. Jiang, L.-C. Tung et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100, no. 8. — P. 087403.
 207. Landau Level Spectroscopy of Ultrathin Graphite Layers / M. L. Sadowski, G. Martinez, M. Potemski et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 97, no. 26. — P. 266405.
 208. High-Energy Limit of Massless Dirac Fermions in Multilayer Graphene using Magneto-Optical Transmission Spectroscopy / P. Plochocka, C. Faugeras, M. Orlita et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100, no. 8. — P. 087401.
 209. Infrared probe of the anomalous magnetotransport of highly oriented pyrolytic graphite in the extreme quantum limit / Z. Q. Li, S.-W. Tsai, W. J. Padilla et al. // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74, no. 19. — P. 195404.
 210. Excitations from filled Landau levels in graphene / A. Iyengar, J. Wang, H. A. Fertig, L. Brey // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 75, no. 12. — P. 125430.
 211. Interaction-induced shift of the cyclotron resonance in graphene using infrared spectroscopy / E. A. Henriksen, P. Cadden-Zimansky, Z. Jiang et al. // *Preprint arXiv:0910.4575*. — 2009.
 212. *van der Marel, D.* Optical signatures of electron correlations in the cuprates / D. van der Marel // *Strong Interactions in Low Dimensions, Series: Physics and Chemistry of Materials with Low-Dimensional Struc-*

- tures / Ed. by D. Baeriswyl, L. De Giorgi. — Kluwer Academic, Berlin, 2005. — Vol. 25. — Pp. 3–46. arxiv.org/abs/cond-mat/0301506.
213. *Carbotte, J. P.* Optical Sum Rule in Finite Bands / J. P. Carbotte, E. Schachinger // *J. Low Temp. Phys.* — 2006. — Vol. 144, no. 22. — Pp. 61–120.
214. *Drew, H. D.* Sum Rule for the Optical Hall Angle / H. D. Drew, P. Coleman // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Feb. — Vol. 78, no. 8. — Pp. 1572–1575.
215. *Sabio, J.* f-Sum Rule and Unconventional Spectral Weight Transfer in Graphene / J. Sabio, J. Nilsson, A. H. Castro Neto // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 78. — P. 075410.
216. *Shastry, B. S.* Faraday rotation and the Hall constant in strongly correlated Fermi systems / B. S. Shastry, B. I. Shraiman, R. R. P. Singh // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Mar. — Vol. 70, no. 13. — Pp. 2004–2007.
217. *Lewin, L.* Polylogarithms and Associated Functions / L. Lewin. — Elsevier, Amsterdam, 1981.
218. Magneto-optical Evidence for a Gapped Fermi Surface in Underdoped $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+x}$ / L. B. Rigal, D. C. Schmadel, H. D. Drew et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Sep. — Vol. 93, no. 13. — P. 137002.
219. *Abrikosov, A. A.* Quantum magnetoresistance / A. A. Abrikosov // *Phys. Rev. B.* — 1998. — Aug. — Vol. 58, no. 5. — Pp. 2788–2794.
220. *Shoenberg, D.* Magnetic Oscillations in Metals / D. Shoenberg. — Cambridge University Press, Cambridge, England, 1984. — P. 500.
221. *Lifshitz, I. M.* К теории магнитной восприимчивости металлов при низких температурах / I. M. Lifshitz, A. M. Kosevich // *ЖЭТФ.* — 1955. — Vol. 29. — Pp. 730–742.
222. *Mikitik, G. P.* Manifestation of Berry's Phase in Metal Physics / G. P. Mikitik, Y. V. Sharlai // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 82. — P. 2147–2150.

223. *Champel, T.* de Haas -van Alphen effect in two- and quasi-twodimensional metals and superconductors / T. Champel, V. P. Mineev // *Phil. Mag. B.* — 2001. — Vol. 81, no. 1. — Pp. 55–74.
224. *Ferrer, E. J.* Thermal conductivity in 3D NJL model under external magnetic field / E. J. Ferrer, V. P. Gusynin, V. de la Incera // *Eur. Phys. J. B.* — 2003. — Vol. 33, no. 4. — Pp. 397–411.
225. *Smrcka, L.* Transport coefficients in strong magnetic fields / L. Smrcka, P. Streda // *J. Phys. C.* — 1977. — Vol. 10, no. 12. — P. 2153.
226. *Oji, H.* Theory of electronic thermal transport: Magnetoquantum corrections to the thermal transport coefficients / H. Oji, P. Streda // *Phys. Rev. B.* — 1985. — Vol. 31. — Pp. 7291–7295.
227. *Cooper, N. R.* Thermoelectric response of an interacting two-dimensional electron gas in a quantizing magnetic field / N. R. Cooper, B. I. Halperin, I. M. Ruzin // *Phys. Rev. B.* — 1997. — Vol. 55. — Pp. 2344–2359.
228. *Oganesyan, V.* Nernst effect, quasiparticles, and d -density waves in cuprates / V. Oganesyan, I. Ussishkin // *Phys. Rev. B.* — 2004. — Aug. — Vol. 70, no. 5. — P. 054503.
229. Magnetothermopower and Nernst effect in unconventional charge density waves / B. Dóra, K. Maki, A. Ványolos, A. Virosztek // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Dec. — Vol. 68, no. 24. — P. 241102.
230. Fractional quantum hall effect and insulating phase of dirac electrons in graphene / X. Du, I. Skachko, A. Duerr, Fabian Luican, E. Y. Andrei // *Nature.* — 2009.
231. Observation of the Fractional Quantum Hall Effect in Graphene / K. I. Bolotin, F. Ghahari, M. D. Shulman et al. // *Preprint arXiv:0910.2763.* — 2009.
232. *MacDonald, A. H.* Quantized Hall conductance in a relativistic two-dimensional electron gas / A. H. MacDonald // *Phys. Rev. B.* — 1983. — Aug. — Vol. 28, no. 4. — Pp. 2235–2236.

233. *Nieto, M. M.* A solution (Dirac electron in crossed, constant electric and magnetic fields) that has found a problem (relativistic quantized Hall effect) / M. M. Nieto, P. L. Taylor // *Am. J. Phys.* — 1985. — Vol. 53. — Pp. 234–237.
234. *Jonson, M.* Thermoelectric effect in a weakly disordered inversion layer subject to a quantizing magnetic field / M. Jonson, S. M. Girvin // *Phys. Rev. B.* — 1984. — Vol. 29. — Pp. 1939–1946.
235. *Janßen, M.* Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect / M. Janßen, U. Veihweger, O. Fastenrath, J. Hajdu; Ed. by J. Hajdu. — VCH, Weinheim, 1994. — P. 350.
236. *Luk'yanchuk, I. A.* Phase analysis of quantum oscillations in graphite / I. A. Luk'yanchuk, Y. Kopelevich // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 93, no. 16. — P. 166402.
237. *Carmier, P.* Berry phase in graphene: Semiclassical perspective / P. Carmier, D. Ullmo // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77, no. 24. — P. 245413.
238. Quantum-Hall Activation Gaps in Graphene / A. J. M. Giesbers, U. Zeitler, M. I. Katsnelson et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 99, no. 20. — P. 206803.
239. *Checkelsky, J. G.* Zero-Energy State in Graphene in a High Magnetic Field / J. G. Checkelsky, L. Li, N. P. Ong // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100, no. 20. — P. 206801.
240. *Checkelsky, J. G.* Divergence of the resistance of graphene at the Dirac point to $40 M\Omega$ in a strong magnetic field / J. G. Checkelsky, L. Li, N. P. Ong // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 79, no. 20. — P. 115434.
241. Gap opening in the zeroth Landau level of graphene / A. J. M. Giesbers, L. A. Ponomarenko, K. S. Novoselov et al. // *Preprint arXiv:0904.0948*. — 2009. — Apr.

242. *Gusynin, V. P.* Catalysis of dynamical flavor symmetry breaking by a magnetic field in $2 + 1$ dimensions / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Dec. — Vol. 73, no. 26. — Pp. 3499–3502.
243. *Fogler, M. M.* Collapse of spin splitting in the quantum Hall effect / M. M. Fogler, B. I. Shklovskii // *Phys. Rev. B.* — 1995. — Dec. — Vol. 52, no. 24. — Pp. 17366–17378.
244. Spontaneous interlayer coherence in double-layer quantum Hall systems: Charged vortices and Kosterlitz-Thouless phase transitions / K. Moon, H. Mori, K. Yang et al. // *Phys. Rev. B.* — 1995. — Feb. — Vol. 51, no. 8. — Pp. 5138–5170.
245. *Gusynin, V. P.* Dynamical flavor symmetry breaking by a magnetic field in $2+1$ dimensions / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Phys. Rev. D.* — 1995. — Oct. — Vol. 52, no. 8. — Pp. 4718–4735.
246. *Gusynin, V. P.* Dimensional reduction and catalysis of dynamical symmetry breaking by a magnetic field / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Nucl. Phys. B.* — 1996. — Vol. 462, no. 2-3. — Pp. 249–290.
247. Fractal structure of the effective action in (quasi)planar models with long-range interactions / E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Phys. Lett. A.* — 2003. — Vol. 313, no. 5-6. — Pp. 472–477.
248. Magnetic-field-driven superconductor–insulator-type transition in graphite / H. Kempa, Y. Kopelevich, F. Mrowka et al. // *Solid State Commun.* — 2000. — Vol. 115, no. 10. — Pp. 539–542.
249. Evidence for internal field in graphite: a conduction electron spin-resonance study / M. S. Sercheli, Y. Kopelevich, R. R. da Silva et al. // *Solid State Commun.* — 2002. — Vol. 121. — Pp. 579–583.

250. Anomalous Hall effect in graphite / Y. Kopelevich, J. C. Medina Pantoja, R. R. da Silva et al. // *Phys. Lett. A*. — 2006. — Vol. 355. — Pp. 233–236.
251. *Abanin, D. A.* Charge and spin transport at the quantum Hall edge of graphene / D. A. Abanin, P. A. Lee, L. S. Levitov // *Solid State Commun.* — 2007. — Vol. 143. — P. 77–85.
252. Edge state in graphene ribbons: Nanometer size effect and edge shape dependence / K. Nakada, M. Fujita, G. Dresselhaus, M. S. Dresselhaus // *Phys. Rev. B*. — 1996. — Dec. — Vol. 54, no. 24. — Pp. 17954–17961.
253. Peculiar localized state at zigzag graphite edge / M. Fujita, K. Wakabayashi, K. Nakada, K. Kusakabe // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 1996. — Vol. 65. — Pp. 1920–1923.
254. *Brey, L.* Edge states and the quantized Hall effect in graphene / L. Brey, H. A. Fertig // *Phys. Rev. B*. — 2006. — Vol. 73, no. 19. — P. 195408.
255. *Brey, L.* Electronic states of graphene nanoribbons studied with the Dirac equation / L. Brey, H. A. Fertig // *Phys. Rev. B*. — 2006. — Vol. 73, no. 23. — P. 235411.
256. *Pereira, J. J. M.* Magnetic interface states in graphene-based quantum wires / J. J. M. Pereira, F. M. Peeters, P. Vasilopoulos // *Phys. Rev. B*. — 2007. — Vol. 75, no. 12. — P. 125433.
257. *Abramowitz, M.* Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / M. Abramowitz, I. A. Stegun. — U.S. GPO, Washington, D.C., 1972. — 685 pp.
258. *Bateman, H.* Higher Transcendental Functions / H. Bateman, A. Erdelyi. — Mc Graw-Hill book Co., New York, 1953. — Vol. 2.
259. *Grimvall, G.* The Electron-Phonon Interaction in Metals / G. Grimvall. — North-Holland, New York, 1981.
260. *Prange, R. E.* Transport theory for electron-phonon interactions in metals / R. E. Prange, L. P. Kadanoff // *Phys. Rev.* — 1964. — May. — Vol. 134, no. 3A. — Pp. A566–A580.

261. *Mitrović, B.* Effects of energy dependence in the electronic density of states on some normal state properties / B. Mitrović, J. P. Carbotte // *Can. J. Phys.* — 1983. — Vol. 61. — Pp. 758–783.
262. *Knigavko, A.* Effects of finite bandwidth on spectroscopic characteristics of normal metals / A. Knigavko, J. P. Carbotte // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 72, no. 3. — P. 035125.
263. Optical self-energy of superconducting Pb in the terahertz region / T. Mori, E. J. Nicol, S. Shiizuka et al. // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77, no. 17. — P. 174515.
264. Velocity Renormalization and Carrier Lifetime in Graphene from the Electron-Phonon Interaction / C.-H. Park, F. Giustino, M. L. Cohen, S. G. Louie // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 99, no. 8. — P. 086804.
265. Electron-Phonon Interactions in Graphene, Bilayer Graphene, and Graphite / C.-H. Park, F. Giustino, M. L. Cohen, S. G. Louie // *Nano Lett.* — 2008. — Vol. 8, no. 8. — P. 4229.
266. First-Principles Study of Electron Linewidths in Graphene / C.-H. Park, F. Giustino, C. D. Spataru et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 102, no. 7. — P. 076803.
267. *Calandra, M.* Electron-phonon coupling and electron self-energy in electron-doped graphene: Calculation of angular-resolved photoemission spectra / M. Calandra, F. Mauri // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 76, no. 20. — P. 205411.
268. *Tse, W.-K.* Phonon-Induced Many-Body Renormalization of the Electronic Properties of Graphene / W.-K. Tse, S. Das Sarma // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 99, no. 23. — P. 236802.
269. *Doğan, F.* Self-consistent modification to the electron density of states due to electron-phonon coupling in metals / F. Doğan, F. Marsiglio // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Oct. — Vol. 68, no. 16. — P. 165102.

270. *Cappelluti, E.* Electron-phonon renormalization in small Fermi energy systems / E. Cappelluti, L. Pietronero // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Dec. — Vol. 68, no. 22. — P. 224511.
271. *Engelsberg, S.* Coupled electron-phonon system / S. Engelsberg, J. R. Schrieffer // *Phys. Rev.* — 1963. — Aug. — Vol. 131, no. 3. — Pp. 993–1008.
272. *Luttinger, J. M.* Ground-State Energy of a Many-Fermion System. II / J. M. Luttinger, J. C. Ward // *Phys. Rev.* — 1960. — Jun. — Vol. 118, no. 5. — Pp. 1417–1427.
273. Quasiparticle dynamics in graphene / A. Bostwick, T. Ohta, T. Seyller et al. // *Nature Phys.* — 2007. — Vol. 3. — Pp. 36 – 40.
274. Giant phonon-induced conductance in scanning tunneling spectroscopy of gate-tunable graphene / Y. Zhang, V. W. Brar, F. Wang et al. // *Nature Phys.* — 2008. — Vol. 4. — Pp. 627 – 630.
275. Basic similarities among cuprate, bismuthate, organic, Chevrel-phase, and heavy-fermion superconductors shown by penetration-depth measurements / Y. J. Uemura, L. P. Le, G. M. Luke et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1991. — May. — Vol. 66, no. 20. — Pp. 2665–2668.
276. Superfluid density in cuprate high- T_c superconductors: A new paradigm / J. L. Tallon, J. W. Loram, J. R. Cooper et al. // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Nov. — Vol. 68, no. 18. — P. 180501.
277. A universal scaling relation in high-temperature superconductors / C. C. Homes, S. V. Dordevic, M. Strongin et al. // *Nature.* — 2004. — Vol. 430. — Pp. 539–541.
278. *Zaanen, J.* Superconductivity: Why the temperature is high / J. Zaanen // *Nature.* — 2004. — Vol. 430. — Pp. 512–513.
279. Scaling of the superfluid density in high-temperature superconductors / C. C. Homes, S. V. Dordevic, T. Valla, M. Strongin // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 72, no. 13. — P. 134517.

280. Lower Critical Field and Superfluid Density of Highly Underdoped $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+\delta}$ Single Crystals / R. Liang, D. A. Bonn, W. Hardy, D. Broun // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 94, no. 11. — P. 117001.
281. Zuev, Y. Correlation between Superfluid Density and T_C of Underdoped $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+x}$ Near the Superconductor-Insulator Transition / Y. Zuev, M. Seog Kim, T. R. Lemberger // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Sep. — Vol. 95, no. 13. — P. 137002.
282. Micnas, R. Superfluid properties of the extended hubbard model with intersite electron pairing / R. Micnas, B. Tobijaszewska // *J. Phys. Condens. Matter.* — 2002. — Vol. 14. — Pp. 9631–9649.
283. Herbut, I. F. Effective Theory of High-Temperature Superconductors / I. F. Herbut // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Jun. — Vol. 94, no. 23. — P. 237001.
284. Precision Measurements of the Temperature Dependence of λ in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.95}$: Strong Evidence for Nodes in the Gapfunction / W. N. Hardy, D. A. Bonn, D. C. Morgan et al. // *PRL.* — 1993. — Vol. 70. — Pp. 3999–4002.
285. Vekhter, I. Quasiparticle transport in the vortex state of d -wave superconductors / I. Vekhter, J. P. Carbotte, E. J. Nicol // *Phys. Rev. B.* — 1999. — Jan. — Vol. 59, no. 2. — Pp. 1417–1420.
286. Ioffe, L. B. d -wave superconductivity in doped mott insulators / L. B. Ioffe, A. J. Millis // *J. Phys. Chem. Solids.* — 2002. — Vol. 63. — P. 2259–2268.
287. Volovik, G. E. Superconductivity with lines of GAP nodes: Density of states in the vortex / G. E. Volovik // *JETP Lett.* — 1993. — Vol. 58. — Pp. 469–473.
288. Spectrum of low-energy excitations in the vortex state: Comparison of the Doppler-shift method to a quasiclassical approach / T. Dahm, S. Graser,

- C. Iniotakis, N. Schopohl // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Oct. — Vol. 66, no. 14. — P. 144515.
289. Quasiclassical approach to vortex-induced suppression of the superconducting electron density in d-wave superconductors / R. Laiho, E. Lähderanta, M. Safonchik, K. B. Traito // *Phys. Rev. B.* — 2004. — Mar. — Vol. 69, no. 9. — P. 094508.
290. *Hussey, N. E.* Low-energy quasiparticles in high- T_c cuprates / N. E. Hussey // *Advances in Physics.* — 2002. — Vol. 51. — Pp. 1685–1771.
291. Inductive conductance measurements in two-dimensional superconducting systems / B. Jeanneret, J. L. Gavilano, G. A. Racine et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 1989. — Vol. 55, no. 22. — Pp. 2336–2338.
292. *Rüfenacht, A.* Etude de la profondeur de pénétration magnétique de couches supraconductrices ultraminces de $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ / A. Rüfenacht. — Ph.D. thesis, Université de Neuchâtel, 2005. — P. 103.
293. *Sonier, J. E.* μSR studies of the vortex state in type-II superconductors / J. E. Sonier, J. H. Brewer, R. F. Kiefl // *Rev. Mod. Phys.* — 2000. — Jul. — Vol. 72, no. 3. — Pp. 769–811.
294. *Varelogiannis, G.* Magnetic-field-induced macroscopic quantum phenomenon in a superconductor with gap nodes / G. Varelogiannis, M. Heritier // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 72, no. 5. — P. 054515.
295. Low-Temperature Electronic Heat Transport in $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ Single Crystals: Unusual Low-Energy Physics in the Normal and Superconducting States / J. Takeya, Y. Ando, S. Komiya, X. F. Sun // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Jan. — Vol. 88, no. 7. — P. 077001.
296. Thermal conductivity across the phase diagram of cuprates: Low-energy quasiparticles and doping dependence of the superconducting gap / M. Sutherland, D. G. Hawthorn, R. W. Hill et al. // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 67, no. 17. — P. 174520.

297. Magnetic-Field-Induced Localization of Quasiparticles in Underdoped $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ Single Crystals / X. F. Sun, S. Komiya, J. Takeya, Y. Ando // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Mar. — Vol. 90, no. 11. — P. 117004.
298. Field-Induced Thermal Metal-to-Insulator Transition in Underdoped $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_{4+\delta}$ / D. G. Hawthorn, R. W. Hill, C. Proust et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — May. — Vol. 90, no. 19. — P. 197004.
299. Doping dependence of the superconducting gap in $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CuO}_{6+\delta}$ from heat transport / D. G. Hawthorn, S. Y. Li, M. Sutherland et al. // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 75, no. 10. — P. 104518.
300. Fully gapped single-particle excitations in lightly doped cuprates / K. M. Shen, T. Yoshida, D. H. Lu et al. // *Phys. Rev. B.* — 2004. — Vol. 69, no. 5. — P. 054503.
301. Field-induced transition between magnetically disordered and ordered phases in underdoped $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ / B. Khaykovich, S. Wakimoto, R. J. Birgeneau et al. // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 71, no. 22. — P. 220508.
302. Competing orders in LSCO probed by heat transport / S. Y. Li, D. G. Hawthorn, L. Taillefer, Y. K. // *Bulletin of Amer. Phys. Soc.* — 2006. — Vol. 51, no. 1. — P. 943. <http://meetings.aps.org/link/BAPS.2006.MAR.N38.8>.
303. Low-Temperature Anomaly in Thermal Conductivity of $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}(\text{Cu}_{1-x}\text{Ni}_x)\text{2O}_8$: Second Superconducting Phase? / R. Movshovich, M. A. Hubbard, M. B. Salamon et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Mar. — Vol. 80, no. 9. — Pp. 1968–1971.
304. *Laughlin, R. B.* Magnetic induction of $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ order in high- T_c superconductors / R. B. Laughlin // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 80. — Pp. 5188–5191.
305. *Balatsky, A. V.* Field-induced $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ state and marginal stability of high- t_c superconductors / A. V. Balatsky // *Phys. Rev. B.* — 2000. —

- Mar. — Vol. 61, no. 10. — Pp. 6940–6944.
306. Order-parameter-node removal in the d -wave superconductor $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ in a magnetic field / R. Beck, Y. Dagan, A. Milner et al. // *Phys. Rev. B*. — 2004. — Apr. — Vol. 69, no. 14. — P. 144506.
 307. *Modre, R.* In-plane London penetration depth of superconductors with mixed-symmetry order parameters / R. Modre, I. Schürer, E. Schachinger // *Phys. Rev. B*. — 1998. — Mar. — Vol. 57, no. 9. — Pp. 5496–5504.
 308. *Durst, A. C.* Impurity-induced quasiparticle transport and universal-limit Wiedemann-Franz violation in d -wave superconductors / A. C. Durst, P. A. Lee // *Phys. Rev. B*. — 2000. — Vol. 62. — P. 1270–1290.
 309. *Balatsky, A. V.* Impurity-induced virtual bound states in d -wave superconductors / A. V. Balatsky, M. I. Salkola, A. Rosengren // *Phys. Rev. B*. — 1995. — Jun. — Vol. 51, no. 21. — Pp. 15547–15551.
 310. *Maki, K.* Superconductivity / K. Maki // *Semiconductors and Semimetals* / Ed. by R. D. Parks. — Marcel Dekker, New York, 1969. — Vol. 3. — Pp. 97–906.
 311. *Dolgov, O. V.* Optical properties of strongly correlated systems with spin-density-wave order / O. V. Dolgov, M. L. Kulić // *Phys. Rev. B*. — 2002. — Oct. — Vol. 66, no. 13. — P. 134510.
 312. *Kim, W.* Low-temperature thermal conductivity of high-purity $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.99}$ in the vortex state: Analysis with arbitrary impurity scattering strength / W. Kim, F. Marsiglio, J. P. Carbotte // *Phys. Rev. B*. — 2003. — Nov. — Vol. 68, no. 17. — P. 174513.
 313. *Kim, W.* Transport in Vortex State of d -Wave Superconductors at Zero Temperature: Wiedemann–Franz Violation / W. Kim, F. Marsiglio, J. P. Carbotte // *J. of Superconductivity*. — 2004. — Vol. 17. — Pp. 725–737.

314. *Franz, M.* Universal thermal conductivity in the vortex state of cuprate superconductors / M. Franz, O. Vafek // *Phys. Rev. B.* — 2001. — Vol. 64. — P. 220501.
315. *Vekhter, I.* Thermodynamics of d -wave superconductors in a magnetic field / I. Vekhter, P. J. Hirschfeld, E. J. Nicol // *Phys. Rev. B.* — 2001. — Vol. 64. — P. 064513.
316. *Hirschfeld, P. J.* Effect of strong scattering on the low-temperature penetration depth of a d -wave superconductor / P. J. Hirschfeld, N. Goldenfeld // *Phys. Rev. B.* — 1993. — Vol. 48, no. 6. — Pp. 4219–4222.
317. Tensor magnetothermal resistance in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ via Andreev scattering of quasiparticles / F. Yu, M. B. Salamon, A. J. Leggett et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 74, no. 25. — Pp. 5136–5139.
318. Direct observation and anisotropy of the contribution of gap nodes in the low-temperature specific heat of $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ / Y. Wang, B. Revaz, A. Erb, A. Junod // *Phys. Rev. B.* — 2001. — Vol. 63. — P. 094508.
319. *Kübert, C.* Vortex contribution to specific heat of dirty d -wave superconductors: Breakdown of scaling / C. Kübert, P. J. Hirschfeld // *Solid State Commun.* — 1998. — Vol. 105. — Pp. 459–463.
320. *Mao, W.* Finite density of states in a mixed state of a $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ superconductor / W. Mao, A. V. Balatsky // *Phys. Rev. B.* — 1999. — Vol. 59. — P. 6024–6026.
321. *Melrose, D. B.* Quantum Electrodynamics in Strong Magnetic Fields. I Electron States / D. B. Melrose, A. J. Parle // *Aust. J. Phys.* — 1983. — Vol. 36. — Pp. 755–774.
322. *Schwinger, J.* On gauge invariance and vacuum polarization / J. Schwinger // *Phys. Rev.* — 1951. — Jun. — Vol. 82, no. 5. — Pp. 664–679.
323. *Dittrich, W.* Probing the Quantum Vacuum: Perturbative Effective action approach in Quantum Electrodynamics and its Application / W. Dittrich, H. Geis. — Springer, 2000. — P. 245.

- 324. *Chodos, A.* QED with a chemical potential: The case of a constant magnetic field / A. Chodos, K. Everding, D. A. Owen // *Phys. Rev. D.* — 1990. — Oct. — Vol. 42, no. 8. — Pp. 2881–2892.
- 325. *Gradshtein, I. S.* Table of Integrals, Series and Products / I. S. Gradshtein, I. M. Ryzhik. — Academic Press, Orlando, 1980.
- 326. *Abrikosov, A. A.* Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics / A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, I. E. Dzyaloshinski. — Dover, New York, 1975. — 444 pp.