Національна академія наук України

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова

На правах рукопису

Іоргов Микола Зіновійович

УДК 537.611.2:512.552; 514.84

Квантові інтегровні системи з квантово-алгебраїчними симетріями

01.04.02 — теоретична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Науковий консультант

$\boxed{\text{Клімик Анатолій Улянович}}$

доктор фіз.-мат. наук, професор

Київ – 2010

ЗМІСТ

ВСТУП **9**

1. Нестандартна деформація $U'_q(so_n)$ алгебри Лі групи ортогональних перетворень **17**

1.1. Вступ 17

1.2. Нестандартна деформація $U'_q(\mathrm{so}_n)$ алгебри Лі групи обертань . . 25

1.2.1. q-Деформована алгебра $U'_q(\mathrm{so}_n)$. 25

1.2.2. Незвідні представлення класичного та некласичного типів. 27

1.2.3. Елементи Казиміра $U'_q(\mathrm{so}_n)$ та їх власні значення в представленнях. 32

1.3. q-Аналог теореми Вігнера–Екарта для нестандартної q-деформованої алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ 35

1.3.1. Вкладення алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ в квантову алгебру $U_q(\mathrm{sl}_n)$. . 35

1.3.2. Розклад представлень $T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\mathbf{m}_3}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_3)$. 38

1.3.3. Розклад $T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\mathbf{m}_n}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$, $n \geq 4$. 40

1.3.4. Розклад представлень $T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\epsilon,\mathbf{m}_3}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_3)$. 43

1.3.5. Розклад $T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$, $n \geq 4$. 45

1.3.6. Теорема Вігнера–Екарта для векторних операторів. . . . 48

1.4. Класифікація незвідних представлень алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ 52

1.4.1. Векторні оператори та теорема Вігнера–Екарта. 53

1.4.2. Допоміжні твердження. 56

1.4.3. Приведені матричні елементи для представлень класичного типу. 61
1.4.4. Приведені матричні елементи для представлень некласичного типу. 75
1.4.5. Повна звідність. 83
1.4.6. Класифікаційні теореми. 84
1.5. Висновки 86

2. Гармонічний аналіз на квантових векторних просторах 88

2.1. Вступ 88
2.2. q-Оператор Лапласа та q-гармонічні поліноми на квантовому дійсному векторному просторі 95
2.2.1. Представлення класу 1 q-деформованої алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$. 95
2.2.2. Представлення на квантовому векторному просторі. . . . 97
2.2.3. Проекція $\mathcal{A}_m \to \mathcal{H}_m$. 102
2.2.4. q-Аналог приєднаних сферичних гармонік по відношенню до $U_q'(\mathrm{so}_{n-1})$. 104
2.2.5. Представлення $U_q'(\mathrm{so}_n)$ на $\mathcal{H}_m$. 109
2.2.6. q-Аналог приєднаних сферичних гармонік по відношенню до $U_q'(\mathrm{so}_p) \times U_q'(\mathrm{so}_{n-p})$. 110
2.2.7. Представлення T_m у $U_q'(\mathrm{so}_p) \times U_q'(\mathrm{so}_{n-p})$-базисі. 115
2.2.8. Спектральний розклад деяких представлень. 116
2.3. Оператор Лапласа та гармоніки на квантовому комлексному векторному просторі 119

2.3.1. Квантова алгебра $U_q(\mathrm{gl}_n)$ та квантовий векторний простір. 119
2.3.2. Оператори на алгебрі $\mathcal{A}$. 122
2.3.3. Квадрат q-радіуса та q-оператор Лапласа. 127
2.3.4. q-Гармонічні поліноми. 129
2.3.5. Дуальна пара $(U_q(\mathrm{sl}_2), U_q(\mathrm{gl}_n))$. 131
2.3.6. Звуження q-гармонічних поліномів на квантову сферу. . 133
2.3.7. Проекція $\mathcal{A}_{m,m'} \to \mathcal{H}_{m,m'}$. 135
2.3.8. q-Аналог приєднаних сферичних гармонік по відношенню до $U_q(\mathrm{gl}_{n-1})$. 140
2.3.9. q-Аналог приєднаних сферичних гармонік по відношенню до $U_q(\mathrm{gl}_p) \times U_q(\mathrm{gl}_{n-p})$. 146
2.4. Висновки 151

3. Модель Рузінарса як приклад моделі, пов'язаної з квантовим симетричним простором 153

3.1. Вступ 154
3.2. Квантова модель Рузінарса, квантовий однорідний простір та алгебри Гекке 156
3.2.1. Квантова алгебра $U_q(\mathrm{gl}_n)$ та її елементи Казиміра. 156
3.2.2. Квантова модель Рузінарса. 162
3.2.3. Доведення Теореми 3.1. 164
3.2.4. q-Антисиметризація добутку R-матриць. 173
3.3. Хвильові функції моделі Рузінарса, пов'язаної з q-аналогом симетричного простору $\mathrm{GL}(n)/\mathrm{SO}(n)$ 174

3.3.1. Квантові алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$ та їх скінченновимірні представлення. 174

3.3.2. $U'_q(\mathrm{so}_n)$-інваріантні елементи в $U_q(\mathrm{gl}_n)$-модулі. 176

3.3.3. Поліноми Макдональда. 178

3.3.4. Хвильові функції моделі Рузінарса. 181

3.4. Висновки 182

4. Розділення змінних в квантових інтегровних моделях 184

4.1. Вступ. 184

4.2. Власні стани в моделі Бакстера–Бажанова–Строганова 189

4.2.1. Неоднорідна ББС-модель для загального N. 189

4.2.2. Однорідна ББС-модель для $N = 2$. 192

4.2.3. Розв'язання допоміжної системи (4.2.8): власні значення та власні вектори $B_n(\lambda)$. 196

4.2.4. Розв'язок допоміжної задачі: явна конструкція власних векторів $B_n(\lambda)$. 199

4.2.5. Періодична модель: рівняння Бакстера та обірвані функціональні рівняння. 203

4.2.6. Дія $\mathbf{u}_k$ та $\mathbf{v}_k$ на власні стани $B_n(\lambda)$. 206

4.3. Матричні елементи спінового оператора в моделі Ізінга 210

4.3.1. Загальна неоднорідна $N = 2$ ББС-модель: розв'язок рівнянь Бакстера та норми станів. 210

4.3.2. Матричні елементи між власними векторами періодичної неоднорідної $N = 2$ моделі ББС. 213

4.3.3. Однорідна $N = 2$ ББС-модель: спектр та нулі B_n- та t_n-власних значень-поліномів. 215

4.3.4. Функціональне співвідношення для діагональ-в-діагональ трансфер-матриці моделі Ізінга. 218

4.3.5. Модель Ізінга: спектр та нулі $B_n(\lambda)$- та $t_n(\lambda)$-власних значень-поліномів. 219

4.3.6. Власні стани в моделі Ізінга з рівнянь Бакстера. 220

4.3.7. Явне обчислення факторів $\mathcal{N}(\boldsymbol{\rho}')R_0(\boldsymbol{\rho}')R(\boldsymbol{\rho}')$ в (4.3.89). . 222

4.3.8. Підсумовування, квадрат матричного елементу. 225

4.3.9. Нормування станів періодичної задачі та кінцевий результат через змінні $\lambda_0, \lambda_\pi, r_k$ та $\tilde{q}_l$. 226

4.3.10. Кінцева формула через імпульси. 228

4.3.11. Формула Бугрія–Лісового для матричних елементів. . . . 229

4.3.12. Матричні елементи для діагональ-в-діагональ трансфер-матриці двовимірної моделі Ізінга та для квантового ланцюжка Ізінга в поперечному полі. 230

4.4. Хвильові функції в моделі Тоди з граничною взаємодією 233

4.4.1. Розділення змінних в квантовій моделі Тоди з граничною взаємодією. 233

4.4.2. Рівняння руху для відкритого ланцюжка Тоди. 233

4.4.3. Власні функції для відкритого ланцюжка Тоди. 235

4.4.4. Інтеграли руху для ланцюжка Тоди з граничною взаємодією. 237

4.4.5. Хвильові функції для ланцюжка Тоди з однією границею. 240

4.4.6. Хвильові функції для ланцюжка Тоди з двома границями. 244
4.5. Висновки 246

ВИСНОВКИ **249**

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ **255**

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ

ББС	—	Бакстер–Бажанов–Строганов
ГЦ	—	Гельфанд–Цетлін
ККГ	—	коефіцієнти Клебша–Гордана
КМП	—	кіральна модель Поттса
МІ	—	модель Ізінга
РОМР	—	різнецеві оператори Макдональда–Рузінарса
ТВЕ	—	теорема Вігнера–Екарта

ВСТУП

Добре відомо, що методи теорії симетрії є важливими серед арсеналу методів сучасної теоретичної фізики. Універсальність концепції симетрії пов'язана передусім з тим, що основні фізичні закони, відповідні рівняння та їх розв'язки, різноманітні математичні моделі фізичних явищ мають деяку симетрію, тобто інваріантність, незмінність якоїсь величини (закону, властивості, рівняння) відносно певного набору перетворень, сукупність яких утворює групу. Тому методи теорії груп, а також теорії представлень цих груп, є тим адекватним математичним апаратом, який фізики використовують при дослідженні симетрійних аспектів різноманітних явищ. При цьому, крім дискретних груп, часто розглядають скінченновимірні та нескінченновимірні неперервні групи — групи Лі, супергрупи і т.д. Приблизно тридцятьь років тому, в зв'язку з розвитком квантового методу оберненої задачі розсіяння для дослідження квантових інтегровних систем, з'явились нові типи алгебр — квантові алгебри, які, разом з пов'язаними з ними квантовими групами та квантовими просторами, поповнили сучасний арсенал теорії симетрії. З того часу квантові алгебри та їх представлення стали об'єктами для досліджень в математиці, а результати цих досліджень стали важливими для вивчення квантових інтегровних систем. Але, з іншого боку, розвиток теорії квантових інтегровних систем продовжує стимулювати вивчення цих нових математичних об'єктів та їх різноманітних модифікацій.

Актуальність теми.

Однією з важливих задач сучасної теоретичної фізики є розробка методів дослідження моделей квантової механіки та квантової теорії поля поза рамками теорії збурень. Квантові інтегровні моделі як раз і є прикладами таких моделей, в дослідженні яких можна суттєво просунутись і набути необхідний для цієї мети досвід. Особливістю цих моделей є наявність прихованих симетрій, які дозволяють використовувати сучасні алгебраїчні методи для їх досліджень. Один із нових типів симетрій, який тридцять років тому виник в теорії квантових інтегровних систем — це симетрії, що описуються квантовими алгебрами. Актуальність тематики дисертаційної роботи обумовлена тим, що в ній представлено як вивчення квантових алгебр, як алгебр симетрії, так і застосування алгебраїчних методів до знаходження власних станів гамільтоніанів різноманітних квантових інтегровних систем.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Результати, що увійшли в дисертаційну роботу, були отримані в рамках планової наукової тематики відділу математичних методів в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики НАН України (тема "Представлення квантових груп і калібрувальні та інтегровні взаємодії", 1996–2000 рр., шифр 1.2.2, № д.р. в УкрІНТЕІ 0096U001612; тема "Квантові симетрії і властивості інтегровних та квантово-польових систем", 2001–2004 рр., шифр 1.2.2, 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0101U000331; тема "Симетрії, інтегровні системи, класичні і квантові поля", 2005–2007 рр., шифр 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0101U006883; тема "Методи теорії симетрій та проблеми нелінійної динаміки в сучасній теорії поля та теорії елементарних частинок", 2008–2010 рр., шифр 1.4.7, № д.р.

в УкрІНТЕІ 0106U007885).

Мета і задачі дослідження.

Метою дисертаційної роботи є знаходження власних станів гамільтоніанів квантових інтегровних систем використовуючи алгебри симетрій та їх представлення.

Зокрема, розв'язувалися наступні задачі:

- Знаходження власних станів комутуючих інтегралів руху в $\mathbb{Z}_N$-спіновому ланцюжку ББС та його часткових випадків (ланцюжок Тоди та МІ).
- Обчислення матричних елементів спінового оператора між власними станами трансфер-матриці моделі Ізінга.
- Знаходження власних хвильових функцій моделі Тоди з граничною взаємодією.
- Побудова комутуючих інтегралів руху моделі Рузінарса як радіальних компонент операторів Лапласа на квантових симетричних просторах. Обчислення хвильових функцій в цій моделі.
- Знаходження розв'язків рівняння Лапласа $\Delta_q p = 0$ на різних квантових векторних просторах.
- Класифікація скінченновимірних представлень нестандартної деформації $U'_q(\mathrm{so}_n)$ алгебри Лі so_n групи обертань.

Об'єктами дослідження є квантові інтегровні системи та їх симетрії.

Предметом дослідження є власні стани гамільтоніанів квантових інтегровних систем та метод розділення змінних для їх побудови.

В роботі було застосовано наступні **методи дослідження**: квантовий метод оберненої задачі розсіяння для квантових інтегровних систем, метод квантового розділення змінних Скляніна–Харчева–Лебедева.

Наукова новизна одержаних результатів.

В дисертаційній роботі вперше:

1. Класифіковано всі скінченновимірні представлення алгебри Гаврилика–Клімика $U_q'(\mathrm{so}_n)$ коли q не є коренем з одиниці. Описано представлення циклічного типу алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ в базисі ГЦ, коли q є коренем з одиниці.

2. Введено визначення тензорного добутку $T^{\otimes}$ векторного та довільного представлення T алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$. Описано розклад $T^{\otimes}$ на незвідні підпредставлення та знайдено відповідні коефіцієнти Клебша–Гордана. Введено визначення векторного оператора алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ та для нього доведено q-аналог теореми Вігнера–Екарта.

3. Побудовано елементи Казиміра алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$, обрахувано власні значення відповідних операторів Казиміра в незвідних представленнях. Коли q є коренем з одиниці існують додаткові центральні елементи. У цьому випадку, для алгебри $U_q'(so_3)$, знайдено їх алгебраїчну залежність.

4. Вивчено q-гармонічні поліноми на квантовому дійсному та комплексному векторних просторах. Отримано q-аналог класичних зональних та приєднаних гармонічних поліномів. Показано, що має місце розділення змінних у відповідності з різними ланцюжками вкладених підалгебр алгебри симетрії квантового простору.

5. Отримано у явному вигляді радіальні компоненти елементів Казиміра квантової алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$, які відповідають квантовому аналогу однорідного простору $\mathrm{GL}(n)/\mathrm{SO}(n)$. Показано, що вони співпадають з гамільтоніаном та інтегралами руху квантової тригонометричної n-частинкової моделі Рузінарса. Хвильові функції моделі виражено через поліноми Макдональда.

6. Побудовано власні вектори для компонент $A_n(\lambda)$ та $B_n(\lambda)$ матриці монодромії для неоднорідного ланцюжка ББС скінченної довжини. Для періодичного ланцюжка проведено розділення змінних та отримано $T-Q$-рівняння Бакстера для кожної з розділенних змінних.

7. Показано, що модель ББС при $N=2$ еквівалентна узагальненій моделі Ізінга у точці вільних ферміонів. У цьому випадку знайдено розв'язки рівняння Бакстера, які дають явні формули для власних векторів трансфер-матриці моделі Ізінга. Доведена формула Бугрія–Лісового для матричних елементів спінового оператора між цими векторами.

8. Граничним переходом з формул для власних векторів періодичної моделі ББС отримано власні вектори трансфер-матриці моделі з фіксованими спінами на кінцях ланцюжка.

9. Методом квантового розділення змінних знайдено інтегральне представлення для хвильових функцій квантового n-частинкового ланцюжка Тоди з граничною інтегровною взаємодією та власні стани квантового релятивістського ланцюжка Тоди при коренях з одиниці.

Практичне значення одержаних результатів.

Результати, отримані в дисертації, мають теоретичний характер і є важливими, по-перше, в теорії представлень квантових та інших q-деформованих алгебр; по-друге, для досліджень квантових інтегровних систем методом розділення змінних. В свою чергу, точні розв'язки для квантових інтегровних систем допомогають у вивченні властивостей фізичних низькорозмірних квантових систем в непертурбативній області значень параметрів.

Особистий внесок здобувача.

У спільних роботах із вивчення нестандартної деформації $U_q'(\mathrm{so}_n)$ алгебри Лі групи обертань автору належать ідея побудови представлень некласичного типу з представлень класичного типу в базисі ГЦ методом аналітичного продовження, введення поняття антисиметричних тензорних операторів для цієї алгебри та побудова на їх основі елементів Казиміра, обрахування власних значень елементів Казиміра в представленнях ГЦ, адаптація доведення теореми класифікації скінченновимірних представлень алгебри Лі so_n, знайдене А.У.Клімиком, до представлень класичного та некласичного типів q-деформованої алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$.

У спільних роботах із вивчення гармонічного аналізу на квантових просторах, автору належить реалізація спільних з А.У.Клімиком ідей щодо шляхів адаптації відомих результатів з теорії гармонічного аналізу до квантових просторів.

У спільних роботах з дослідження квантових інтегровних систем методом розділення змінних автору належать більшість ідей щодо конкретних напрямків досліджень, а також велика частина технічної реалізації цих ідей:

ітеративна побудова власних векторів в моделі ББС, ідея застосування цих формул до моделі Ізінга з метою доведення формули Бугрія–Лісового для матричних елементів спінового оператора та пропозиції щодо конкретних шляхів її технічної реалізації, ідея отримання власних векторів в моделі ББС з фіксованими спінами на границі граничним переходом за параметрами в неоднорідній моделі з періодичними граничними умовами, ідея застосування моделі ББС до релятивістського ланцюжка Тоди при корені з одиниці, побудова ланцюжка вкладених задач для знаходження інтегрального представлення для хвильових функцій для квантового ланцюжка Тоди з різними граничними умовами.

Апробація роботи.

Матеріали дисертації пройшли апробацію на семінарах ІТФ НАН України (Київ, 1999-2009), Інст. математики НАН України, університетів м. Анжер (Франція), м. Тур (Франція), м. Париж VI-VII (Франція), Інститут математики ім. Макса Планка (м.Бонн, Німеччина), Лабораторії теор. фізики ОІЯД (м.Дубна, Росія), доповідалися на III, IV, V, VI, VII, VIII міжнародних конференціях “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics” (Київ, червень 1999; 2001; 2003; 2005; 2007; 2009), міжнародній конф. “Квантові групи та інтегровні системи” (Прага, Чехія, червень 1999), міжнародній конф. “Неевклідова геометрія в сучасній фізиці II” (Ніредьгаза, Угорщина, липень 1999), міжнародній конф. “Квантові групи та інтегровні системи” (Прага, Чехія, червень 2000), XXIII міжнародному колоквіумі “Теоретико-групові методи у фізиці” (Дубна, серпень 2000), XIII Гуцулській робочій нараді “Методи теоретичної та математичної фізики” (Київ, вересень 2000), Робочій нараді НАТО “Некомутативні структури у фізиці і математиці" (Київ, вересень 2000), II міжнар. симпозіумі "Quantum Theory and Symmetries" (Краков, Польща, липень 2001), III міжнародній конф. "Functional Analysis" (Київ, серпень 2001), міжнародній конф. "Non-Euclidean Geometry in Modern Physics: Bolyai–Gauss–Lobachevsky" (Тиргу-Муреш, Румунія, липень 2002), міжнародній конф. "Conformal Field Theory and Integrable Systems" (Черноголовка, Росія, вересень 2002), міжнародній конф. "Classical and Quantum Integrable Systems" (Дубна, Росія, 26-29 січня 2004), IV міжнародній конф. "Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics" (Нижній Новгород, Росія, 7-11 вересня 2004), Київський Боголюбівський конференції "Сучасні проблеми математики та теоретичної фізики" (Київ, 13-16 вересня 2004), міжнародній нараді "Classical and Quantum Integrable Systems" (Дубна, Росія, 22-25 січня 2007), міжнародній нараді "Integrable Models and related mathematical structures" (Тур, Франція, 7-10 листопада 2007), "The 2007 Twente Conference on Lie Groups" (Енсхеде, Нідерланди, 12-14 грудня, 2007), міжнародній конф. "Классические и квантовые интегрируемые системы 2008" (Протвіно, Росія, 21-24 січня 2008), конференція "Liouville Field Theory and Statistical Models" (Москва, 21-24 червня 2008), міжнародній конф. "Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics" (Київ, 15-18 вересеня, 2009).

Публікації.

За матеріалами дисертації опубліковано 31 наукова праця у тому числі 27 статей [3, 50, 51, 68, 69, 70, 71, 73, 76, 77, 79, 87, 72, 75, 80, 82, 83, 84, 31, 54, 55, 56, 57, 89, 88, 90, 86] у наукових журналах та фахових сбірниках наукових праць, а 4 статті [74, 81, 85, 78] видані як матеріали конференцій.

РОЗДІЛ 1

Нестандартна деформація $U'_q(so_n)$ алгебри Лі групи ортогональних перетворень

Останні тридцять років багато уваги математиків та матфізиків приділялось вивченню нових математичних об'єктів — квантових алгебр та квантових груп. Крім стандартної деформації алгебр Лі, що була запропонована Дрінфельдом [2] та Джімбо [93], існують інші, нестандартні, деформації, які також важливі в математиці та фізиці. В цьому розділі розглядається нестандартна деформація $U'_q(\mathrm{so}_n)$ алгебри Лі so_n групи обертань, яка була введена О. Гавриликом та А. Клімиком [47], класифікуються всі скінченновимірні представлення цієї алгебри, даються вирази для елементів Казиміра, а також доводиться q-аналог теореми Вігнера–Екарта для векторних операторів.

1.1. Вступ

Квантові ортогональні групи, квантові групи Лоренца та відповідні квантові алгебри представляють спеціальний інтерес для сучасної математичної фізики. М. Джімбо [93] та В. Дрінфельд [2] визначили q-деформації (квантові алгебри) $U_q(g)$ для всіх простих комплексних алгебр Лі g в термінах підалгебр Картана та кореневих підпросторів (див. також [92] та [102]). Решетихін, Тахтаджян та Фаддєєв [5] визначили квантові алгебри $U_q(g)$ в термінах квантової R-матриці, що задовільняє квантовому рівнянню Янга–Бакстера.

Однак, ці підходи не дають задовільне визначення квантової алгебри $U_q(\mathrm{so}_n)$ з точки зору деяких проблем квантової фізики та теорії представлень. При розгляді представлень квантових алгебр $U_q(\mathrm{so}_{n+1})$ та $U_q(\mathrm{so}_{n,1})$ ми цікавимось їх звуженням на квантові підалгебри $U_q(\mathrm{so}_n)$. Це звуження дало б можливість побудови базиса Гельфанда–Цетліна для цих представлень. Однак, визначення згаданих вище квантових алгебр не допускає вкладень $U_q(\mathrm{so}_{n+1}) \supset U_q(\mathrm{so}_n)$ та $U_q(\mathrm{so}_{n,1}) \supset U_q(\mathrm{so}_n)$. Щоб мати можливість для такої редукції ми маємо розглядати q-деформації алгебри Лі $\mathrm{so}_{n+1}(\mathbf{C})$, визначеної в термінах генераторів $I_{k,k-1} = E_{k,k-1} - E_{k-1,k}$ (де E_{is} — матриця з елементами $(E_{is})_{rt} = \delta_{ir}\delta_{st}$), а не в термінах підалгебр Картана та кореневих елементів. Для побудови такої деформації ми маємо продеформувати трилінійні співвідношення для елементів $I_{k,k-1}$ замість співвідношень Серра, що використовуються у випадку стандартної квантової деформації універсальної огортуючої алгебри. В результаті ми отримуємо асоціативну алгебру, яку позначатимемо через $U'_q(\mathrm{so}_n)$.

Ця q-деформація вперше була зконструйована в [47]. Вона дозволила побудувати редукції $U'_q(\mathrm{so}_{n,1})$ та $U'_q(\mathrm{so}_{n+1})$ на $U'_q(\mathrm{so}_n)$. q-Деформована алгебра $U'_q(\mathrm{so}_n)$ зводиться при $n = 3$ до q-деформованої алгебри $U'_q(\mathrm{so}_3)$, визначеної Д. Фарлі [42]. Циклічносиметрична алгебра, схожа на визначену Д. Фарлі, була розглянута дещо раніше О. Одеським [133].

У класичному випадку, вкладення $SO(n) \subset SU(n)$ (та його інфінітезимальний аналог) дуже важливе для ядерної фізики та в теорії ріманових симетричних просторів. Добре відомо, що в рамках квантових груп та квантових алгебр Дрінфельда–Джімбо неможливо побудувати відповідне вкладення. Алгебра $U'_q(\mathrm{so}_n)$ дозволяє визначити таке вкладення [131], тобто, можливо визначити вкладення $U_q'(\mathrm{so}_n) \subset U_q(\mathrm{sl}_n)$, де $U_q(\mathrm{sl}_n)$ — квантова алгебра Дрінфельда–Джімбо.

Як недолік алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ ми згадаємо, що для неї невідома структура алгебри Хопфа, а тому, немає природнього способу ввести для неї визначення тензорного добутку представлень. Але як показано в [131, 132, 70], алгебра $U_q'(\mathrm{so}_n)$ є підалгеброю в квантовій алгебрі Дрінфельда–Джімбо $U_q(\mathrm{sl}_n)$, яка є алгеброю Хопфа. Більш того, показано, що алгебра $U_q'(\mathrm{so}_n)$ є $U_q(\mathrm{sl}_n)$-комодульною алгеброю, такою що кодія співпадає з комноженням в $U_q(\mathrm{sl}_n)$ при вкладенні $U_q'(\mathrm{so}_n)$ в $U_q(\mathrm{sl}_n)$. Ця комодульна структура дозволяє ввести поняття тензорного добутку векторного та довільного представлення T алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ (воно буде позначатись $T^{\otimes}$), див. [73, 76].

Ми описуємо розклад $T^{\otimes}$ на незвідні підпредставлення та знаходимо ККГ у випадку, коли T є незвідним скінченновимірним представленням класичного або некласичного типу. Розклад $T^{\otimes}$ у випадку представлень класичного типу має такий самий вигляд як у випадку алгебри Лі so_n та відповідні ККГ є q-деформацією їх класичних аналогів [1, 4].

Добре відомо, що теорема Вігнера–Екарта для тензорних операторів по відношенню до алгебри Лі so_n (і, особливо, so_3) є дуже важливою у фізиці. Автором дисертації знайдено q-аналог цієї теореми для випадку векторного оператора по відношенню до $U_q'(\mathrm{so}_n)$.

Алгебра $U_q'(\mathrm{so}_n)$ та її представлення є цікавими з точки зору багатьох задач. Основні напрямкі такі:

1. Теорія ортогональних поліномів та спеціальних функцій (особливо, тео-

рія q-ортогональних поліномів та базисних гіпергеометричних функцій). Цей напрямок не є достатньо розвинутим. Деякі ідеї такого застосування можна знайти в [101].

2. Алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ (особливо $U'_q(\mathrm{so}_3)$) пов'язані з алгеброю спостережуваних в 2+1 квантовій гравітації на рімановых поверхнях (див. [36, 52, 127]).

3. Квантовий аналог ріманового симетричного простору $SU(n)/SO(n)$ побудований за допомогою алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$. Ця конструкція реалізована в [131] (див. також [111]).

4. q-Аналог теорії гармонічних поліномів (q-гармонічні поліноми на квантовому векторному просторі $\mathbb{R}^n_q$) будуються за допомогою алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$. Зокрема, q-аналог різних схем розділення змінних для q-оператора Лапласа на $\mathbb{R}^n_q$ дається в термінах цієї алгебри та її підалгебр. Ця теорія міститься в роботах [72, 132].

5. Алгебра $U'_q(\mathrm{so}_n)$ з'являється в теорії зачеплень в алгебраїчній топології (див. [32]).

6. Алгебра $U'_q(\mathrm{so}_n)$ пов'язана з янгіанами (див. [123] та посилання в ній).

7. Квантовий аналог алгебри Брауера пов'язаний з алгеброю $U'_q(\mathrm{so}_n)$ (див. [124]).

Великий клас скінченновимірних незвідних представлень адгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ було побудовано в [47]. Там було дано формули дії генераторів $U'_q(\mathrm{so}_n)$ на базис, який є q-аналогом базиса Гельфанда–Цетліна. В [48] було дано деяке уточнення цих формул та їх доведення. Однак, скінченновимірні незвідні представлення в [48, 47] є представленнями класичного типу. Вони є q-деформаціями відповідних незвідних представлень алгебри Лі so_n, тобто, при $q \to 1$ вони перетворюються в представлення so_n.

Алгебра $U_q'(\mathrm{so}_n)$ має інші класи скінченновимірних незвідних представлень, які не мають класичного аналогу. Ці представлення є сингулярними в границі $q \to 1$. Вони описані в [69]. Опис цих представлень для алгебри $U_q'(\mathrm{so}_3)$ дано в [64]. Класифікація незвідних $*$-представлень дійсних форм алгебри $U_q'(\mathrm{so}_3)$ дано в [144]. Теорія представлень $U_q'(\mathrm{so}_n)$ при q — корені з одиниці вивчалась в [70].

Основним результатом цього розділу є класифікація скінченновимірних незвідних представлень алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$, коли q не є коренем з одиниці. Як згадувалось вище, були побудовані незвідні представлення алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$, що належать класичному та некласичному типам. Однак не було відомо, що ці представлення вичерпують всі скінченновимірні незвідні представлення. Вивчення цієї задачі почалось в [104]. Там було показано, що ці представлення визначаються так званими старшими вагами, які були визначені в [104] та відрізняються від старших ваг в теорії квантованих універсальних огортуючих алгебр. Однак ми не знаємо відповідність між відомими представленнями класичного та некласичного типів та старшими вагами. В цьому розділі ми використовуємо інший підхід до класифікації. А саме, ми доводимо, що кожне скінченновимірне незвідне представлення $U_q'(\mathrm{so}_n)$ належить множині представлень класичного або некласичного типу зконструйованих раніше. Для доведення цього твердження ми використовуємо результати по структурі алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ (тензорні оператори, теорема Вігнера–Екарта та ін.). Нам також потрібна теорема про повну звідність скінченновимірних представлень $U'_q(\mathrm{so}_n)$. Ця теорема також тут доводиться. Також використано деякі ідеї з теорії представлень алгебри Лі $\mathrm{so}_n(\mathbb{C})$ та її дійсних форм.

Зауважимо, що проблема класифікації скінченновимірних незвідних представлень $U'_q(\mathrm{so}_n)$ набагато складніше ніж у випадку квантових алгебр Дрінфельда–Джімбо оскільки в $U'_q(\mathrm{so}_n)$ немає аналогу підалгебри Картана та кореневих елементів. Множина всіх скінченновимірних незвідних представлень $U'_q(\mathrm{so}_n)$ ширше ніж у випадку алгебри $U_q(\mathrm{so}_n)$.

Всюди в Розділі 1 дисертації ми вважаємо, що q не є коренем з одиниці.

Залишається нерозв'язаною проблема класифікації скінченновимірних представлень $U'_q(\mathrm{so}_n)$, коли q є коренем з одиниці. Представлення загального положення в цьому випадку є представленнями циклічного типу. Вони описані в роботах [70, 71]. Але представлення такого типу не вичерпують всі скінченновимірні представлення. Більш широкий клас представлень для $U'_q(\mathrm{so}_3)$ описано в [66]. Зокрема, там показано, що не всі скінченновимірні представлення $U'_q(\mathrm{so}_3)$ є ваговими та цілком звідними. Це зауваження сильно ускладнює проблему класифікації скінченновимірних представлень навіть для $U'_q(\mathrm{so}_3)$.

Нескінченновимірні представлення алгебри $U'_q(so(n,1))$, що є нестандартною деформації алгебри Лі групи Лоренца, та алгебри $U'_q(iso(n))$, що є нестандартною деформацією алгебри Лі евклідової групи (групи рухів n-вимірного простору) описано в [74]. Метод отримання таких представлень — це метод аналітичного продовження по параметрам скінченновимірних представлень алгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n+1})$, які, в свою чергу, задані q-аналогами формул Гельфанда–Цетліна з Розділу 1 цієї дисертації. Відомо, що таким чином описуються всі нескінченновимірні представлення алгебри Лі $so(n,1)$, які відповідають модулям Харіш-Чандри. Відповідного твердження для алгебри $U_q'(so(n,1))$ до цього часу не доведено. Залишається невідомим, наприклад, чи описує цей метод хоча б всі унітарні представлення. Унітарні нескінченновимірні представлення для $U_q'(so(2,1))$ класифіковано в [144]. Інші типи представлень алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ можна отримати використовуючи q-осциляторну реалізацію запропоновану в [3]. Метод продовження по параметрам скінченновимірних представлень алгебри квантової алгебри $U_q'(\mathrm{su}_{n+1})$ застосовано для знаходження нескінченновимірних представлень некомпактної дійсної форми $U_q'(\mathrm{su}_{n,1})$ в роботі [60]. Серед знайдених представлень знайдено унітарні представлення.

Елементи Казиміра алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ коли q не є коренем з 1 розглянуто в роботах [50, 51] та представлено детально в п. 1.2.3 дисертації. Додаткові елементи Казиміра алгебри $U_q'(\mathrm{so}_3)$, які виникають коли q є коренем з 1, знайдено в роботі [77]. У цьому випадку суттєво використовується математичний зв'язок з квантовою гравітацією в 2+1 вимірному де-сітеревському просторі-часі з тором в ролі простору, для якої $U_q'(\mathrm{so}_3)$ є алгеброю спостережуваних [156, 126, 34, 127, 52, 36, 32]. Використовуючи скінченновимірні представлення класичного типу цієї алгебри побудовано [79] відповідні представлення групи симетрій (група автоморфізмів) алгебри спостережуваних, яка є модулярною групою тора $PSL(2,\mathbb{Z})$. Інші застосування алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ до квантової гравітації описано в [53].

Застосування алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$, які розглянуто в дисертації, наступні: в підрозділі 2.2 будується теорія гармонічних поліномів (з симетрією $U_q'(\mathrm{so}_n)$) на квантовому векторному просторі; Розділ 3 присвячено вивченню квантової інтегровної моделі Рузінарса, гамільтоніан якої будується як радіальна компонента оператору Лапласа–Бельтрамі на квантовому симетричному просторі $\mathcal{F}_q(\mathrm{GL}(n)/\,\mathrm{SO}(n))$, що задається як простір $U_q'(\mathrm{so}_n)$-інваріантних функцій на квантовій групі $\mathcal{F}_q(\mathrm{GL}(n))$.

В підрозділі 1.2 дисертації дається визначення нестандартної деформації $U_q'(\mathrm{so}_n)$, описується її скінченновимірні незвідні представлення класичного і некласичного типу та елементи Казиміра. В підрозділі 1.3 описується вкладення алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ в алгебру Хопфа $U_q(\mathrm{sl}_n)$ як комодульної підалгебри. Це дозволяє визначити тензорний добуток векторного представлення на довільне представленни $U_q'(\mathrm{so}_n)$. В цьому підрозділі дається розклад такого тензорного добутку на незвідні представлення. Також доводиться q-аналог теореми Вігнера–Екарта для векторних операторів. Підрозділ 1.4 є основним в цьому розділі. В ньому дається класифікація скінченновимірних незвідних представлень алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$, а також доводиться повна звідність скінченновимірних представлень цієї алгебри.

Результати, що отримані автором по темі цього розділу і виносяться на захист опубліковані в роботах [3, 50, 51, 68, 69, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 79, 87].

1.2. Нестандартна деформація $U'_q(\mathrm{so}_n)$ алгебри Лі групи обертань

1.2.1. q-Деформована алгебра $U'_q(\mathrm{so}_n)$. Універсальна огортуюча алгебра $U(\mathrm{so}_n(\mathbb{C}))$ породжується елементами $I_{ij}=E_{ij}-E_{ji}$, $i>j$. Але для породження алгебри $U(\mathrm{so}_n(\mathbb{C}))$ достатньо взяти тільки елементи $I_{21}, I_{32}, \ldots, I_{n,n-1}$. Це мінімальний набір для породження $U(\mathrm{so}_n(\mathbb{C}))$. Ці елементи задовільняють співвідношення

$$I_{i,i-1}^2 I_{i+1,i} - 2I_{i,i-1}I_{i+1,i}I_{i,i-1} + I_{i+1,i}I_{i,i-1}^2 = -I_{i+1,i},$$

$$I_{i,i-1}I_{i+1,i}^2 - 2I_{i+1,i}I_{i,i-1}I_{i+1,i} + I_{i+1,i}^2 I_{i,i-1} = -I_{i,i-1},$$

$$I_{i,i-1}I_{j,j-1} - I_{j,j-1}I_{i,i-1} = 0 \quad \text{при} \quad |i-j|>1.$$

Наступна теорема є справедливою для $U(\mathrm{so}_n(\mathbb{C}))$ (див. [103]): *Огортуюча алгебра $U(\mathrm{so}_n(\mathbb{C}))$ є ізоморфною до асоціативної алгебри (з одиничним елементом) породженої елементами I_{21}, $I_{32}, \ldots, I_{n,n-1}$, які задовільняють вищевказані співвідношення.*

Ми робимо q-деформацію цих співвідношень деформуючи ціле 2 як $2 \to [2]_q := (q^2-q^{-2})/(q-q^{-1}) = q+q^{-1}$. В результаті ми отримуємо співвідношення

$$I_{i,i-1}^2 I_{i+1,i} - (q+q^{-1})I_{i,i-1}I_{i+1,i}I_{i,i-1} + I_{i+1,i}I_{i,i-1}^2 = -I_{i+1,i}, \tag{1.2.1}$$

$$I_{i,i-1}I_{i+1,i}^2 - (q+q^{-1})I_{i+1,i}I_{i,i-1}I_{i+1,i} + I_{i+1,i}^2 I_{i,i-1} = -I_{i,i-1}, \tag{1.2.2}$$

$$I_{i,i-1}I_{j,j-1} - I_{j,j-1}I_{i,i-1} = 0 \quad \text{при} \quad |i-j|>1. \tag{1.2.3}$$

q-Деформована алгебра $U'_q(\mathrm{so}_n)$ визначається як комплексна унітальна (тобто з одиничним елементом) асоціативна алгебра, породжена елементами I_{21}, $I_{32}, \cdots, I_{n,n-1}$, що задовільняють співвідношення (1.2.1)–(1.2.3). Це є q-деформація універсальної огортуючої алгебри $U(\mathrm{so}_n(\mathbb{C}))$, відмінна від квантованної універсальної огортуючої алгебри Дрінфельда–Джімбо $U_q(\mathrm{so}_n)$. Для цієї алгебри побудовані вкладення $U'_q(\mathrm{so}_n) \supset U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ та $U_q(\mathrm{sl}_n) \supset U'_q(\mathrm{so}_n)$, де $U_q(\mathrm{sl}_n)$ — квантова алгебра Дрінфельда–Джімбо (див. Підрозділ 1.3).

Деякий аналог кососиметричних матриць $I_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, $i > j$, які задають лінійний базис алгебри Лі $\mathrm{so}_n(\mathbb{C})$, може бути введений в $U'_q(\mathrm{so}_n)$ (див. [49, 132]). Такі елементи (два набори) визначаються рекурсивно за формулами

$$I^{\pm}_{k,l} \equiv [I_{l+1,l}, I^{\pm}_{k,l+1}]_{q^{\pm 1}}, \qquad k > l+1, \quad 1 \le k, l \le n, \tag{1.2.4}$$

де $[X, Y]_{q^{\pm 1}} \equiv q^{\pm 1/2} XY - q^{\mp 1/2} YX$ та $I^{+}_{k+1,k} \equiv I^{-}_{k+1,k} \equiv I_{k+1,k}$. Елементи $I_{kl} := I^{+}_{kl}$, $k > l$, задовільняють комутаційні співвідношення

$$[I_{lr}, I_{kl}]_q = I_{kr}, \quad [I_{kl}, I_{kr}]_q = I_{lr}, \quad [I_{kr}, I_{lr}]_q = I_{kl} \quad \text{при} \quad k > l > r, \tag{1.2.5}$$

$$[I_{kl}, I_{sr}] = 0 \quad \text{при} \quad k > l > s > r \ \text{ та } \ k > s > r > l, \tag{1.2.6}$$

$$[I_{kl}, I_{sr}]_q = (q - q^{-1})(I_{lr} I_{ks} - I_{kr} I_{sl}) \quad \text{при} \quad k > s > l > r. \tag{1.2.7}$$

При $q = 1$ вони співпадають з відповідними комутаційними співвідношеннями дл алгебри Лі $\mathrm{so}_n(\mathbb{C})$.

Алгебра $U'_q(\mathrm{so}_n)$ також може бути визначена як унітальна асоціативна алгебра, породжена I_{kl}, $1 \le l < k \le n$, що задовільняють співвідношення (1.2.5)–(1.2.7). Насправді, співвідношення (1.2.5)–(1.2.7) можуть бути зведені до співвідношень (1.2.1)–(1.2.3) для I_{21}, $I_{32}, \ldots, I_{n,n-1}$.

Теорема Пуанкаре–Бірхгофа-Вітта для алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ може бути сформульована наступним чином (доведення цієї теореми дано в [70]): *Елементи*

$$I_{21}{}^{m_{21}} I_{31}{}^{m_{31}} \cdots I_{n1}{}^{m_{n1}} I_{32}{}^{m_{32}} I_{42}{}^{m_{42}} \cdots I_{n2}{}^{m_{n2}} \cdots I_{n,n-1}{}^{m_{n,n-1}}, \qquad m_{ij} = 0, 1, 2, \cdots,$$

формують лінійний базис $U'_q(\mathrm{so}_n)$.

Всі ці твердження справедливі і для набору елементів елементи I^-_{kl}, $k > l$. Ці елементи задовільняють комутаційні співвідношення (1.2.5)–(1.2.7), в яких зроблена заміна $q \to q^{-1}$.

В алгебрі $U'_q(\mathrm{so}_n)$ виділяється комутативна підалгебра $\mathcal{A}$, породжена елементами $I_{21}, I_{43}, I_{65}, \ldots, I_{n-1,n-2}$ (або $I_{n,n-1}$). Отже, ця підалгебра породжена $\lfloor n/2 \rfloor$ елементами, де $\lfloor n/2 \rfloor$ — ціла частина від $n/2$. Однак не існує кореневих елементів в $U'_q(\mathrm{so}_n)$ по відношенню до цієї комутативної підалгебри. Це приводить до факту, що властивості $U'_q(\mathrm{so}_n)$ не є схожими до відповідних властивостей алгебри Дрінфельда–Джімбо $U_q(\mathrm{so}_n)$.

1.2.2. Незвідні представлення класичного та некласичного типів. У цьому пункті ми даємо формули для незвідних представлень $U'_q(\mathrm{so}_n)$, які будуть використовуватись нижче. Відповідні посилання дано у Вступі до глави.

Для $U'_q(\mathrm{so}_n)$ відомо два типи незвідних скінченновимірних представлень:

(а) представлення класичного типу;

(б) представлення некласичного типу.

Незвідні представлення класичного типу є q-деформаціями незвідних скінченновимірних представлень алгебри Лі so_n. Існує однозначна відповідність між цими незвідними представленнями $U'_q(\mathrm{so}_n)$ та незвідними скінченновимірними представленнями алгебри Лі so_n. Більш того, формули для представлень класичного типу $U'_q(\mathrm{so}_n)$ переходять у відповідні формули для представлень алгебри Лі so_n при $q \to 1$.

Для представлень некласичного типу немає класичного аналогу: оператори представлення $T(a)$, $a \in U'_q(\mathrm{so}_n)$, мають сингулярності при $q = 1$.

Опишемо незвідні скінченновимірні представлення класичного типу алгебр $U'_q(\mathrm{so}_n)$, $n \geq 3$. Як і в класичному випадку вони даються наборами $\mathbf{m}_n$ з $\lfloor n/2 \rfloor$ чисел $m_{1,n}, m_{2,n}, ..., m_{\lfloor n/2 \rfloor,n}$ (тут $\lfloor n/2 \rfloor$ позначає цілу частину від $n/2$), які є всі цілі або всі напівцілі та задовільняють умовам домінантності

$$m_{1,2k+1} \geq m_{2,2k+1} \geq ... \geq m_{k,2k+1} \geq 0, \tag{1.2.8}$$

$$m_{1,2k} \geq m_{2,2k} \geq ... \geq m_{k-1,2k} \geq |m_{k,2k}| \tag{1.2.9}$$

для $n = 2k+1$ та $n = 2k$, відповідно. Ці представлення позначено через $T_{\mathbf{m}_n}$. Ми вибираємо у просторі представлення q-аналог базиса ГЦ, який отримується послідовними звуженням представлення $T_{\mathbf{m}_n}$ на підалгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$, $U'_q(\mathrm{so}_{n-2})$, $\cdots$, $U'_q(\mathrm{so}_3)$, $U'_q(\mathrm{so}_2) := U(\mathrm{so}_2)$. Як і в класичному випадку, його елементи позначаються таблицями ГЦ

$$\{\alpha_n\} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{m}_n \\ \mathbf{m}_{n-1} \\ \cdots \\ \mathbf{m}_2 \end{array} \right\} \equiv \{\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}\} \equiv \{\mathbf{m}_n, \mathbf{m}_{n-1}, \alpha_{n-2}\}, \tag{1.2.10}$$

де, як і в недеформованому випадку, компоненти $\mathbf{m}_s$ та $\mathbf{m}_{s-1}$ задовільняють умовам галуження

$$m_{1,2p+1} \geq m_{1,2p} \geq m_{2,2p+1} \geq m_{2,2p} \geq ... \geq m_{p,2p+1} \geq m_{p,2p} \geq -m_{p,2p+1},$$

$$m_{1,2p} \geq m_{1,2p-1} \geq m_{2,2p} \geq m_{2,2p-1} \geq ... \geq m_{p-1,2p-1} \geq |m_{p,2p}|.$$

Іноді, базисні елементи, позначені таблицею $\{\alpha_n\}$, позначаються також як $|\alpha_{n-1}\rangle$ або як $|\mathbf{m}_{n-1}, \alpha_{n-2}\rangle$, тобто, ми будемо опускати перший рядок $\mathbf{m}_n$ в таблиці. Ми вважаємо, що простір представлення $\mathcal{V}_{\mathbf{m}_n}$ є гільбертовим простором і вектори $|\alpha_n\rangle$ є ортонормовними.

Зручно ввести так звані l-координати

$$l_{j,2p+1} = m_{j,2p+1} + p - j + 1, \qquad l_{j,2p} = m_{j,2p} + p - j,$$

для чисел $m_{i,k}$. Оператор $T_{\mathbf{m}_n}(I_{2p+1,2p})$ представлення $T_{\mathbf{m}_n}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ діє на базисні елементи ГЦ, марковані (1.2.10), за формулою

$$T_{\mathbf{m}_n}(I_{2p+1,2p})|\alpha_n\rangle = \sum_{j=1}^{p} \frac{A_{2p}^j(\alpha_n)}{a(l_{j,2p})}|(\alpha_n)_{2p}^{+j}\rangle - \sum_{j=1}^{p} \frac{A_{2p}^j((\alpha_n)_{2p}^{-j})}{a(l_{j,2p}-1)}|(\alpha_n)_{2p}^{-j}\rangle \quad (1.2.11)$$

та оператор $T_{\mathbf{m}_n}(I_{2p,2p-1})$ діє як

$$T_{\mathbf{m}_n}(I_{2p,2p-1})|\alpha_n\rangle = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{B_{2p-1}^j(\alpha_n)}{b(l_{j,2p-1})[l_{j,2p-1}]}|(\alpha_n)_{2p-1}^{+j}\rangle$$

$$-\sum_{j=1}^{p-1} \frac{B_{2p-1}^j((\alpha_n)_{2p-1}^{-j})}{b(l_{j,2p-1}-1)[l_{j,2p-1}-1]}|(\alpha_n)_{2p-1}^{-j}\rangle + \mathrm{i}\, C_{2p-1}(\alpha_n)|\alpha_n\rangle. \quad (1.2.12)$$

В цих формулах через $(\alpha_n)_s^{\pm j}$ позначено таблицю (1.2.10), в якій j-та компонента $m_{j,s}$ в $\mathbf{m}_s$ замінена, відповідно, на $m_{j,s} \pm 1$. Коефіцієнти A_{2p}^j, B_{2p-1}^j, C_{2p-1}, a та b в (1.2.11) та (1.2.12) даються виразами

$$A_{2p}^j(\alpha_n) = \left(\frac{\prod_{i=1}^{p}[l_{i,2p+1}+l_{j,2p}][l_{i,2p+1}-l_{j,2p}-1] \prod_{i=1}^{p-1}[l_{i,2p-1}+l_{j,2p}][l_{i,2p-1}-l_{j,2p}-1]}{\prod_{i\neq j}^{p}[l_{i,2p}+l_{j,2p}][l_{i,2p}-l_{j,2p}][l_{i,2p}+l_{j,2p}+1][l_{i,2p}-l_{j,2p}-1]} \right)^{1/2}, \quad (1.2.13)$$

$$B_{2p-1}^j(\alpha_n) = \left(\frac{\prod_{i=1}^{p}[l_{i,2p}+l_{j,2p-1}][l_{i,2p}-l_{j,2p-1}] \prod_{i=1}^{p-1}[l_{i,2p-2}+l_{j,2p-1}][l_{i,2p-2}-l_{j,2p-1}]}{\prod_{i\neq j}^{p-1}[l_{i,2p-1}+l_{j,2p-1}][l_{i,2p-1}-l_{j,2p-1}][l_{i,2p-1}+l_{j,2p-1}-1][l_{i,2p-1}-l_{j,2p-1}-1]} \right)^{1/2}, \quad (1.2.14)$$

$$C_{2p-1}(\alpha_n) = \frac{\prod_{s=1}^{p}[l_{s,2p}]\prod_{s=1}^{p-1}[l_{s,2p-2}]}{\prod_{s=1}^{p-1}[l_{s,2p-1}][l_{s,2p-1}-1]}, \qquad (1.2.15)$$

$$a(l_{j,2p}) = \{(q^{l_{j,2p}+1} + q^{-l_{j,2p}-1})(q^{l_{j,2p}} + q^{-l_{j,2p}})\}^{1/2},$$

$$b(l_{j,2p-1}) = ([2l_{j,2p-1}+1][2l_{j,2p-1}-1])^{1/2}.$$

Числа в квадратних дужках в формулах (1.2.12)–(1.2.15) означають q-числа, визначені як

$$[a] \equiv [a]_q := \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}.$$

Наступне твердження є добре відомим [47]: *Представлення* $T_{\mathbf{m}_n}$ *є незвідними. Представлення* $T_{\mathbf{m}_n}$ *та* $T_{\mathbf{m}'_n}$ *є попарно нееквівалентними для* $\mathbf{m}_n \neq \mathbf{m}'_n$.

Незвідні скінченновимірні представлення некласичного типу даються наборами $\epsilon := (\epsilon_2, \epsilon_3, \cdots, \epsilon_n)$, $\epsilon_i = \pm 1$, та наборами $\mathbf{m}_n$, що складається з $\lfloor n/2 \rfloor$ *напівцілих* (не цілих!) чисел $m_{1,n}, m_{2,n}, \cdots, m_{\lfloor n/2 \rfloor,n}$, які задовільняють умовам домінантності

$$m_{1,n} \geq m_{2,n} \geq ... \geq m_{\lfloor n/2 \rfloor,n} \geq 1/2. \qquad (1.2.16)$$

Ці представлення позначаються через $T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$.

Базисом простору представлення ми вибираємо аналог базису з попереднього випадку. Його елементи позначаються таблицями (1.2.10), в яких компоненти $\mathbf{m}_s$ та $\mathbf{m}_{s-1}$ задовільняють умовам галуження

$$m_{1,2p+1} \geq m_{1,2p} \geq m_{2,2p+1} \geq m_{2,2p} \geq ... \geq m_{p,2p+1} \geq m_{p,2p} \geq 1/2,$$

$$m_{1,2p} \geq m_{1,2p-1} \geq m_{2,2p} \geq m_{2,2p-1} \geq ... \geq m_{p-1,2p-1} \geq m_{p,2p}.$$

Відповідні базисні елементи позначаються так само як і в попередньому випадку. Ми вважаємо, що простір представлення $\tilde{\mathcal{V}}_{\mathbf{m}_n}$ є гільбертовим простором і вектори $|\alpha_n\rangle$ є ортонормовними. l-Координати для $m_{j,s}$ вводяться згідно тих самих формул що і раніше.

Оператор $T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}(I_{2p+1,2p})$ представлення $T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$ алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ діє на базисні елементи $|\alpha_n\rangle$ за формулами

$$T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}(I_{2p+1,2p})|\alpha_n\rangle = \delta_{m_{p,2p},1/2}\frac{\epsilon_{2p+1}}{q^{1/2}-q^{-1/2}}D_{2p}(\alpha_n)|\alpha_n\rangle +$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\frac{A_{2p}^{j}(\alpha_n)}{a'(l_{j,2p})}|(\alpha_n)_{2p}^{+j}\rangle - \sum_{j=1}^{p}\frac{A_{2p}^{j}((\alpha_n)_{2p}^{-j})}{a'(l_{j,2p}-1)}|(\alpha_n)_{2p}^{-j}\rangle, \tag{1.2.17}$$

де підсумовування в останній сумі проводиться з 1 до $p-1$ якщо $m_{p,2p}=1/2$, та оператор $T_{\mathbf{m}_n}(I_{2p,2p-1})$ діє як

$$T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}(I_{2p,2p-1})|\alpha_n\rangle = \sum_{j=1}^{p-1}\frac{B_{2p-1}^{j}(\alpha_n)}{b(l_{j,2p-1})[l_{j,2p-1}]_+}|(\alpha_n)_{2p-1}^{+j}\rangle -$$

$$-\sum_{j=1}^{p-1}\frac{B_{2p-1}^{j}((\alpha_n)_{2p-1}^{-j})}{b(l_{j,2p-1}-1)[l_{j,2p-1}-1]_+}|(\alpha_n)_{2p-1}^{-j}\rangle + \epsilon_{2p}\hat{C}_{2p-1}(\alpha_n)|\alpha_n\rangle, \tag{1.2.18}$$

де

$$[a]_+ = (q^a+q^{-a})/(q-q^{-1}).$$

Як і раніше, $(\alpha_n)_s^{\pm j}$ означає таблицю (1.2.10), в якій j-та компонента $m_{j,s}$ в $\mathbf{m}_s$ замінена, відповідно, на $m_{j,s}\pm 1$. Вирази для A_{2p}^j, B_{2p-1}^j та b даються тими самими формулами (1.2.11) та (1.2.12),

$$a'(l_{j,2p}) = \{(q^{l_{j,2p}+1}-q^{-l_{j,2p}-1})(q^{l_{j,2p}}-q^{-l_{j,2p}})\}^{1/2},$$

$$\hat{C}_{2p-1}(\alpha_n) = \frac{\prod_{s=1}^{p}[l_{s,2p}]_+\prod_{s=1}^{p-1}[l_{s,2p-2}]_+}{\prod_{s=1}^{p-1}[l_{s,2p-1}]_+[l_{s,2p-1}-1]_+},$$

$$D_{2p}(\alpha_n) = \frac{\prod_{i=1}^{p}[l_{i,2p+1} - \frac{1}{2}]\prod_{i=1}^{p-1}[l_{i,2p-1} - \frac{1}{2}]}{\prod_{i=1}^{p-1}[l_{i,2p} + \frac{1}{2}][l_{i,2p} - \frac{1}{2}]}. \qquad (1.2.19)$$

Справедливе наступне твердження [69]: *Представлення $T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$ є незвідними. Представлення $T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$ та $T_{\epsilon',\mathbf{m}'_n}$ — попарно нееквівалентні для $(\epsilon, \mathbf{m}_n) \neq (\epsilon', \mathbf{m}'_n)$. Для будь-яких допустимих $(\epsilon, \mathbf{m}_n)$ та $\mathbf{m}'_n$, представлення $T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$ та $T_{\mathbf{m}'_n}$ є попарно нееквівалентними.*

Зауваження. Як і у випадку незвідних представлень алгебри Лі so_n, з явного опису незвідних представлень $T_{\mathbf{m}_n}$ та $T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ випливає, що звуження $T_{\mathbf{m}_n}$ на підалгебру $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ розкладається в пряму суму незвідних представлень цієї підалгебри, що є представленнями класичного типу та звуження $T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$ на $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ розкладається в пряму суму незвідних представлень цієї підалгебри, що є представленнями некласичного типу. Формули для представлень явно визначають ці розклади.

1.2.3. Елементи Казиміра $U'_q(\mathrm{so}_n)$ та їх власні значення в представленнях. Добре відомо, що тензорні оператори алгебр Лі so_n є дуже корисними при побудові інваріантів цих алгебр. З цією метою ми вводимо q-аналоги тензорних операторів для алгебр $U'_q(\mathrm{so}_n)$ наступним чином:

$$J^{\pm}_{k_1,k_2,\ldots,k_{2r}} = q^{\mp\frac{r(r-1)}{2}} \sum_{s\in S_{2r}}{}' \varepsilon_{q^{\pm 1}}(s) I^{\pm}_{k_{s(2)},k_{s(1)}} I^{\pm}_{k_{s(4)},k_{s(3)}} \cdots I^{\pm}_{k_{s(2r)},k_{s(2r-1)}}. \qquad (1.2.20)$$

Тут $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_{2r} \le n$, та підсумовування проводиться по всіх перестановках s індексів $k_1, k_2, \ldots, k_{2r}$, таких що

$$k_{s(2)} > k_{s(1)}, \quad k_{s(4)} > k_{s(3)}, \ \ldots\ , \quad k_{s(2r)} > k_{s(2r-1)};$$
$$k_{s(2)} < k_{s(4)} < \ldots < k_{s(2r)}$$

(останній ланцюжок нерівностей означає, що сума включає лише впорядковані мономи). Символ $\varepsilon_{q^{\pm 1}}(s) \equiv (-q^{\pm 1})^{\ell(s)}$ є q-аналогом антисиметричного тензора Леві–Чевіти, $\ell(s)$ — довжина перестановки s. (Якщо $q \to 1$, обидві множини (1.2.20) зводяться до набору компонет антисиметричного тензорного рангу $2r$ оператора алгебри Лі so_n.)

Використовуючи q-тензорні оператори, що задаються (1.2.20), ми отримуємо елементи Казиміра $U'_q(\mathrm{so}_n)$:

Елементи

$$C_n^{(2r)} = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_{2r} \le n} q^{k_1+k_2+\ldots+k_{2r}-r(n+1)} J^+_{k_1,k_2,\ldots,k_{2r}} J^-_{k_1,k_2,\ldots,k_{2r}}, \qquad (1.2.21)$$

де $r = 1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *(*$\lfloor x \rfloor$ *означає цілу частину* x*), є елементами Казиміра* $U'_q(\mathrm{so}_n)$*, тобто вони належать центру цієї алгебри.*

Насправді, для парного n*, не тільки добуток, який визначається* $C_n^{(n)}$*, але й елементи* $C_n^{(n)+} \equiv J^+_{1,2,\ldots,n}$ *та* $C_n^{(n)-} \equiv J^-_{1,2,\ldots,n}$ *належать центру.*

Ми очікуємо, що у випадку, коли q не є коренем з 1, набір елементів Казиміра $C_n^{(2r)}$, $r = 1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, та елемент Казиміра $C_n^{(n)+}$ (для парного n) породжує центр $U'_q(\mathrm{so}_n)$, тобто будь-який елемент алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$, який комутує з усіма іншими елементами може бути представлений як поліном від елементів Казиміра з цього набору. Коли q є коренем з 1, вказаний набір елементів Казиміра не породжує весь центр. Існують додаткові елементи Казиміра, які є алгебраїчно залежними. Випадок алгебри $U'_q(so_3)$ було детально розглянуто в роботі [77].

Дамо явну формулу для квадратичного елементу Казиміра алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$:

$$C_n^{(2)} = \sum_{1\le i<j\le n} q^{i+j-n-1} I_{ji}^{+} I_{ji}^{-}.$$

Ця формула співпадає з тією, що знайдена в [132], та є частковим випадком з (1.2.21).

Оператори Казиміра (оператори, що відповідають елементам Казиміра) в незвідних скінченновимірних представленнях $U_q'(\mathrm{so}_n)$ є кратними одиничному оператору (завдяки лемі Шура). Щоб дати явну формулу для них ми використовуємо так звані *узагальнені факторіальні елементарні симетричні поліноми* (див. [122]). Зафіксуємо довільну послідовність комплексних чисел $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$. Тоді для будь-якого $r = 0, 1, 2, \ldots, N$, визначаємо поліноми від N змінних z_1, $z_2, \ldots, z_N$ наступним чином:

$$e_r(z_1, z_2, \ldots, z_N|\mathbf{a}) = \sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_r\le N} (z_{p_1} - a_{p_1})(z_{p_2} - a_{p_2-1}) \ldots (z_{p_r} - a_{p_r-r+1}). \tag{1.2.22}$$

Оператори Казиміра в незвідних скінченновимірних представленнях, що характеризуються набором $(m_{1,n}, m_{2,n}, \ldots, m_{N,n})$, $N = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, представляються як (тут $\mathbf{1}$ позначає одиничний оператор):

$$T_{\mathbf{m}_n}(C_n^{(2r)}) = \chi_{\mathbf{m}_n}^{(2r)} \mathbf{1}.$$

Власне значення оператора $T_{\mathbf{m}_n}(C_n^{(2r)})$ *дається формулою*

$$\chi_{\mathbf{m}_n}^{(2r)} = (-1)^r e_r([l_{1,n}]^2, [l_{2,n}]^2, \ldots, [l_{N,n}]^2|\mathbf{a})$$

де $\mathbf{a} = ([\epsilon]^2, [\epsilon+1]^2, [\epsilon+2]^2, \ldots)$, $l_{k,n} = m_{k,n} + N - k + \epsilon$. *Тут* $\epsilon = 0$ *при* $n = 2N$ *та* $\epsilon = \frac{1}{2}$ *при* $n = 2N + 1$.

У випадку парного n, тобто $n = 2N$,

$$T_{\mathbf{m}_n}(C_n^{(n)+}) = T_{\mathbf{m}_n}(C_n^{(n)-}) = \left(\sqrt{-1}\right)^N [l_{1,n}][l_{2,n}] \dots [l_{N,n}]\mathbf{1}.$$

1.3. q-Аналог теореми Вігнера–Екарта для нестандартної q-деформованої алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$

1.3.1. Вкладення алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ в квантову алгебру $U_q(\mathrm{sl}_n)$. Алгебра $U_q'(\mathrm{so}_n)$ може бути вкладена в квантову алгебру $U_q(\mathrm{sl}_n)$, яка визначається [2, 93, 102] як комплексна асоціативна алгебра, породжена елементами e_i, f_i, k_i, k_i^{-1}, $i = 1, 2, \dots, n-1$, та визначальними співвідношеннями

$$k_i k_i^{-1} = k_i^{-1} k_i = 1, \quad k_i k_j = k_j k_i, \quad k_i e_j k_i^{-1} = q^{a_{ij}} e_j, \quad k_i f_j k_i^{-1} = q^{-a_{ij}} f_j,$$

$$[e_i, e_j] = [f_i, f_j] = 0, \quad |i-j| > 1, \qquad [e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q - q^{-1}},$$

$$e_i^2 e_{i\pm1} - (q + q^{-1}) e_i e_{i\pm1} e_i + e_{i\pm1} e_i^2 = 0, \quad f_i^2 f_{i\pm1} - (q + q^{-1}) f_i f_{i\pm1} f_i + f_{i\pm1} f_i^2 = 0,$$

де $a_{ii} = 2$, $a_{i,i\pm1} = -1$ та $a_{ij} = 0$ при $|i-j| > 1$. В [131, 132] показано, що елементи

$$\tilde{I}_{i+1,i} = f_i - q^{-1} k_i e_i\,, \qquad i = 1, 2, \dots, n-1, \tag{1.3.23}$$

задовільняють співвідношення (1.2.1)–(1.2.3) та визначають гомоморфізм $U_q'(\mathrm{so}_n) \to U_q(\mathrm{sl}_n)$. Більш того, в [70] доведено, що цей гомоморфізм є вкладенням, тобто ми можемо розглядати $U_q'(\mathrm{so}_n)$ як підалгебру в $U_q(\mathrm{sl}_n)$.

Квантова алгебра $U_q(\mathrm{sl}_n)$ допускає структуру Хопфа. Коможення генераторів цієї алгебри може бути визначене як

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes k_i^{-1} + 1 \otimes e_i, \qquad \Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + k_i \otimes f_i, \qquad \Delta(k_i) = k_i \otimes k_i.$$

Тому ми маємо, що $U'_q(\mathrm{so}_n)$, вкладена в $U_q(\mathrm{sl}_n)$ має властивість коідеалу:

$$\Delta(\tilde{I}_{i+1,i}) = \tilde{I}_{i+1,i} \otimes 1 + k_i \otimes \tilde{I}_{i+1,i}.$$

Твердження 1.1. *Алгебра $U'_q(\mathrm{so}_n)$ є $U_q(\mathrm{sl}_n)$-комодульною алгеброю з кодією $\phi(I_{i+1,i}) = \tilde{I}_{i+1,i} \otimes 1 + k_i \otimes I_{i+1,i}$. При вкладенні $U'_q(\mathrm{so}_n)$ в $U_q(\mathrm{sl}_n)$, дія ϕ редукується до коможення Δ алгебри $U_q(\mathrm{sl}_n)$.*

Доведення. Це твердження перевіряється прямими обрахунками. □

Зокрема Твердження 1.1 стверджує, що ϕ є гомоморфізмом з $U'_q(\mathrm{so}_n)$ в $U_q(\mathrm{sl}_n) \otimes U'_q(\mathrm{so}_n)$. Ця комодульна структура може бути використана для введення тензорного добутку векторного та довільного представлення T алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$.

Нехай T — деяке представлення $U'_q(\mathrm{so}_n)$ на лінійному просторі $\mathcal{V}$ з базисом $\{v_\alpha\}$ та $\mathcal{V}_{\mathbf{1}}$ — n-вимірний лінійний простір з базисом $\{v_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, та $\mathcal{V}^{\otimes} \equiv \mathcal{V}_{\mathbf{1}} \otimes \mathcal{V}$.

Твердження 1.2. *Відображення $T^{\otimes}$ з $U'_q(\mathrm{so}_n)$ в $\mathrm{End}\,\mathcal{V}^{\otimes}$, що дається формулами*

$$T^{\otimes}(I_{j,j-1})\,(v_{j-1} \otimes v_\alpha) = q\ v_{j-1} \otimes T(I_{j,j-1})v_\alpha - q^{1/2}\ v_j \otimes v_\alpha, \tag{1.3.24}$$

$$T^{\otimes}(I_{j,j-1})\,(v_j \otimes v_\alpha) = q^{-1}\ v_j \otimes T(I_{j,j-1})v_\alpha + q^{-1/2}\ v_{j-1} \otimes v_\alpha, \tag{1.3.25}$$

$$T^{\otimes}(I_{j,j-1})\,(v_k \otimes v_\alpha) = v_k \otimes T(I_{j,j-1})v_\alpha, \qquad j \neq k,\ j-1 \neq k \tag{1.3.26}$$

визначає представлення $U'_q(\mathrm{so}_n)$ *у просторі* $\mathcal{V}^{\otimes}$.

Доведення. Визначимо представлення $\mathcal{T}_{\mathbf{1}}$ алгебри $U_q(\mathrm{sl}_n)$ на просторі $\mathcal{V}_{\mathbf{1}}$ формулами

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}_{\mathbf{1}}(e_i)\, v_k = -q^{-1/2}\delta_{i+1,k}v_{k-1}, \quad \mathcal{T}_{\mathbf{1}}(f_i)\, v_k = -q^{1/2}\delta_{i,k}v_{k+1},\\ &\mathcal{T}_{\mathbf{1}}(k_i)\, v_k = q^{\delta_{i,k}-\delta_{i+1,k}}v_k.\end{aligned} \tag{1.3.27}$$

Легко перевірити, що це представлення є векторне представлення (тобто представлення з старшою вагою $(1,0,\dots,0)$). Формули дії (1.3.27) дають

$$\mathcal{T}_{\mathbf{1}}(\tilde{I}_{i+1,i})\, v_k = -q^{1/2}\delta_{i,k}v_{k+1} + q^{-1/2}\delta_{i+1,k}v_{k-1}. \tag{1.3.28}$$

Це представлення $U'_q(\mathrm{so}_n)$ еквівалентне представленню класичного типу $T_{\mathbf{m}_n}$ з $\mathbf{m}_n = (1,0,\dots,0)$, тобто векторного представлення (див. попередній підрозділ). Тому, подібно до класичного випадку, звуження векторного представлення $U_q(\mathrm{sl}_n)$ на $U'_q(\mathrm{so}_n)$ є векторним представленням $U'_q(\mathrm{so}_n)$. Це твердження безпосередньо випливає з Твердження 1.1 та формули (1.3.28), якщо взяти $T^{\otimes} = (\mathcal{T}_1 \otimes T)\circ\phi$. $\square$

У випадку, коли T — тривіальне представлення $U'_q(\mathrm{so}_n)$ задане формулами $T(a) = 0$, $a \in U'_q(\mathrm{so}_n)$, $a \neq 1$, Твердження 1.2 дає нам представлення на просторі $\mathcal{V}_{\mathbf{1}} \sim \mathcal{V}^{\otimes}$. Ми позначаємо це представлення як $T_{\mathbf{1}}$.

$$T_{\mathbf{1}}(I_{j,j-1})\, v_k = -q^{1/2}\delta_{k,j-1}v_j + q^{-1/2}\delta_{k,j}v_{j-1}.$$

Представлення $T_{\mathbf{1}}$ та $T_{\mathbf{m}_n}$, $\mathbf{m}_n = (1,0,\dots,0)$ (див. попередній підрозділ), є еквівалентними.

В границі $q \to 1$, Твердження 1.2 визначає представлення, яке є тензорним добутком векторного та довільного представлення алгебри Лі so_n. На основі цих аргументів ми будемо також використовувати позначення $T^{\otimes} \equiv T_{\mathbf{1}} \otimes T$.

1.3.2. Розклад представлень $T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\mathbf{m}_3}$ алгебри $U_q'(\mathrm{so}_3)$. У цьому та наступному пунктах, ми розглядаємо розклад представлень $T^{\otimes} \equiv T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\mathbf{m}_n}$ на незвідні складові по відношенню до дії алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$. В цьому пункті, ми обмежуємось випадками $n = 2, 3$.

Спочатку ми розгядаємо випадок алгебри $U_q'(\mathrm{so}_2) \equiv U(\mathrm{so}_2)$. Ця алгебра має представлення T_m, $m \equiv m_{12}$, $m \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$, *класичного типу*, які діють на одновимірних просторах з базисними векторами $|m\rangle$, та $T_m(I_{21})|m\rangle = \mathrm{i}[m]|m\rangle$. Тоді

$$T^{\otimes}(I_{21})(v_1 \otimes |m\rangle) = \mathrm{i}q[m]v_1 \otimes |m\rangle - q^{1/2}v_2 \otimes |m\rangle,$$

$$T^{\otimes}(I_{21})(v_2 \otimes |m\rangle) = \mathrm{i}q^{-1}[m]v_2 \otimes |m\rangle + q^{-1/2}v_1 \otimes |m\rangle.$$

Це представлення є звідним. Ми визначимо вектори

$$v_{\pm}^{(m)} = \mp\mathrm{i}q^{-1/2\pm m}v_1 + v_2. \tag{1.3.29}$$

Тоді вектори $|m \pm 1\rangle^{\otimes} := v_{\pm}^{(m)} \otimes |m\rangle$ є власними векторами $T^{\otimes}(I_{21})$: $T^{\otimes}(I_{21})|m \pm 1\rangle^{\otimes} = \mathrm{i}[m \pm 1]|m \pm 1\rangle^{\otimes}$. Цей факт може бути легко перевірений прямими обрахунками з використанням визначення q-чисел. Отже ми маємо розклад $T^{\otimes} \equiv T_{\mathbf{1}} \otimes T_m = T_{m+1} \oplus T_{m-1}$.

Тепер ми розглянемо випадок алгебри $U_q'(\mathrm{so}_3)$. Ця алгебра має представлення T_l, $\mathbf{m}_3 \equiv (m_{13}) \equiv (l)$, $l \in \{0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2, \ldots\}$, *класичного типу*, які діють на просторах $\mathcal{V}_l$ з базисними векторами $|l, m\rangle$, $(m \equiv m_{12})$, $m = -l, -l+1, \ldots, l$:

$$T_l(I_{21})|l,m\rangle = \mathrm{i}[m]|l,m\rangle, \qquad T_l(I_{32})|l,m\rangle = A_{l,m}|l,m+1\rangle - A_{l,m-1}|l,m-1\rangle,$$

де $A_{l,m} = d_m([l-m][l+m+1])^{1/2}$, $d_m = \big([m][m+1]/([2m][2m+2])\big)^{1/2}$. Давайте розглянемо вектори

$$|l',m\rangle^{\otimes} := \alpha_{l,m}^{(l')} v_{+}^{(m-1)} \otimes |l,m-1\rangle + \beta_{l,m}^{(l')} v_3 \otimes |l,m\rangle + \gamma_{l,m}^{(l')} v_{-}^{(m+1)} \otimes |l,m+1\rangle, \quad (1.3.30)$$

де $m = -l', -l'+1, \ldots, l'$, та

$$l' = l+1, l, l-1 \ \text{ якщо } \ l \geq 1; \quad l' = 3/2, 1/2 \text{ якщо } l = 1/2; \quad l' = 1 \text{ якщо } l = 0.$$

Вектори $v_{\pm}^{(m)}$ в (1.3.30) визначені в (1.3.29) та

$$\alpha_{l,m}^{(l+1)} = q^{l-m+1/2} d_{m-1} ([l+m][l+m+1])^{1/2},$$

$$\beta_{l,m}^{(l+1)} = ([l-m+1][l+m+1])^{1/2},$$

$$\gamma_{l,m}^{(l+1)} = -q^{l+m+1/2} d_m ([l-m][l-m+1])^{1/2},$$

$$\alpha_{l,m}^{(l)} = -q^{-m-1/2} d_{m-1} ([l+m][l-m+1])^{1/2},$$

$$\beta_{l,m}^{(l)} = [m],$$

$$\gamma_{l,m}^{(l)} = -q^{m-1/2} d_m ([l-m][l+m+1])^{1/2},$$

$$\alpha_{l,m}^{(l-1)} = -q^{-l-m-1/2} d_{m-1} ([l-m][l-m+1])^{1/2},$$

$$\beta_{l,m}^{(l-1)} = ([l-m][l+m])^{1/2},$$

$$\gamma_{l,m}^{(l-1)} = q^{-l+m-1/2} d_m ([l+m][l+m+1])^{1/2}.$$

З випадку $U_q'(\mathrm{so}_2)$, легко бачити, що $T^{\otimes}(I_{21})|l',m\rangle^{\otimes} = \mathrm{i}[m]|l',m\rangle^{\otimes}$. Прямими обрахунками можна показати, що $T^{\otimes}(I_{32})|l',m\rangle^{\otimes} = A_{l',m}|l',m+1\rangle^{\otimes} - A_{l',m-1}|l',m-1\rangle^{\otimes}$. Це означає, що вектори $|l',m\rangle^{\otimes}$ при фіксованому l' породжують підпростір в $\mathcal{V}^{\otimes}$, який є інваріантним та незвідним при дії $T^{\otimes}(a)$, $a \in U_q'(\mathrm{so}_3)$. Відповідне підпредставлення еквівалентне $T_{l'}$. Порівнюючи розмірності $T_{l'}$ з розмірністтю $T^{\otimes}$, ми приходимо до результату, що $T^{\otimes} = T_{l+1} \oplus$

$T_l \oplus T_{l-1}$, якщо $l \geq 1$; $T^{\otimes} = T_{3/2} \oplus T_{1/2}$, якщо $l = 1/2$; $T^{\otimes} = T_1$, якщо $l = 0$. Нагадаємо, що $T_l \equiv T_{\mathbf{m}_3}$, $m_{13} \equiv l$. Числа $\alpha^{(l')}_{l,m}$, $\beta^{(l')}_{l,m}$ та $\gamma^{(l')}_{l,m}$ є ККГ для цих розкладів.

1.3.3. Розклад $T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\mathbf{m}_n}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$, $n \geq 4$. В цьому пункті ми розглядаємо розклад представлень $T^{\otimes} \equiv T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\mathbf{m}_n}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$, $n \geq 4$, на незвідні складові. Всі результати цього пункту отримано в [73]. Як там показано, цей розклад має вигляд

$$T^{\otimes} = \bigoplus_{\mathbf{m}'_n \in \mathcal{S}(\mathbf{m}_n)} T_{\mathbf{m}'_n}, \tag{1.3.31}$$

де

$$\mathcal{S}(\mathbf{m}_{2p+1}) = \bigcup_{j=1}^{p} \{\mathbf{m}^{+j}_{2p+1}\} \cup \bigcup_{j=1}^{p} \{\mathbf{m}^{-j}_{2p+1}\} \cup \{\mathbf{m}_{2p+1}\}, \tag{1.3.32}$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{m}_{2p}) = \bigcup_{j=1}^{p} \{\mathbf{m}^{+j}_{2p}\} \cup \bigcup_{j=1}^{p} \{\mathbf{m}^{-j}_{2p}\}. \tag{1.3.33}$$

Через $\mathbf{m}^{\pm j}_n$ ми позначаємо набір $\mathbf{m}_n$ з $m_{j,n}$ заміненим на $m_{j,n} \pm 1$, відповідно. Якщо деякий $\mathbf{m}^{\pm j}_n$ не є домінантними (1.2.8)–(1.2.9), тоді відповідний $\mathbf{m}^{\pm j}_n$ пропускається. Якщо $m_{p,2p+1} = 0$, тоді $\mathbf{m}_{2p+1}$ в правій частині (1.3.32) також не включається. Розкладу (1.3.31) представлення $T^{\otimes}$ відповідає розклад простору представлення:

$$\mathcal{V}^{\otimes} \equiv \mathcal{V}_{\mathbf{1}} \otimes \mathcal{V}_{\mathbf{m}_n} = \bigoplus_{\mathbf{m}'_n \in \mathcal{S}(\mathbf{m}_n)} \mathcal{V}_{\mathbf{m}'_n}. \tag{1.3.34}$$

Для того, щоб дати цей розклад у явному вигляді, ми змінюємо базис $\{v_k \otimes |\alpha_n\rangle\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, в $\mathcal{V}^{\otimes}$ на $\{v_k \otimes |\alpha_n\rangle\}$, $k = +, -, 3, \ldots, n$, заміною (для кожного фіксованого $\{\alpha_n\} = \{\mathbf{m}_n, \mathbf{m}_{n-1}, \ldots, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_2\}$) двох базисних векторів $v_1 \otimes |\alpha_n\rangle$ та $v_2 \otimes |\alpha_n\rangle$ на $v^{(m_{12})}_{+} \otimes |\alpha_n\rangle$ та $v^{(m_{12})}_{-} \otimes |\alpha_n\rangle$ (див. (1.3.29)). Далі ми будемо опускати індекс (m_{12}) в позначенні базисних векторів $v_{\pm}^{(m_{12})} \otimes |\alpha_n\rangle$, вважаючи, що він дорівнює m_{12}-компоненті відповідної таблиці ГЦ $\{\alpha_n\}$.

Ми вводимо вектори (де $\{\alpha'_n\} = \{\mathbf{m}'_n, \mathbf{m}'_{n-1}, \ldots, \mathbf{m}'_3, \mathbf{m}'_2\}$)

$$|\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}\rangle^{\otimes} := \sum_k \sum_{|\mathbf{m}_n, \alpha'_{n-1}\rangle \in \mathcal{V}_{\mathbf{m}_n}} \big(k, (\mathbf{m}_n, \alpha'_{n-1})|(\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1})\big)\, v_k \otimes |\mathbf{m}_n, \alpha'_{n-1}\rangle \tag{1.3.35}$$

у просторі $\mathcal{V}^{\otimes}$, де k пробігає набір $+, -, 3, \ldots, n$, та коефіцієнти $\big(k, (\mathbf{m}_n, \alpha'_{n-1})|(\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1})\big)$ — коефіцієнти Клебша–Гордана (ККГ). Зараз ми визначимо ці ККГ у явному вигляді.

Ми покладаємо $\big(k, (\mathbf{m}_n, \alpha'_{n-1})|(\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1})\big) = 0$ якщо виконується одна з умов

$$\begin{aligned}
&1)\ \mathbf{m}'_n \notin \mathcal{S}(\mathbf{m}_n),\\
&2)\ \mathbf{m}_s \notin \mathcal{S}(\mathbf{m}'_s), \quad s = n-1, \ldots, k, \quad k \geq 3,\\
&3)\ \mathbf{m}_s \notin \mathcal{S}(\mathbf{m}'_s), \quad s = n-1, \ldots, 3, \quad k = +, -,\\
&4)\ \alpha'_{k-1} \neq \alpha_{k-1}, \quad k = 3, 4, \ldots, n,\\
&5)\ m_{12} \neq m'_{12} + 1, \quad k = +,\\
&6)\ m_{12} \neq m'_{12} - 1, \quad k = -\,.
\end{aligned}$$

Ненульовими ККГ для $k = n$ є:

$$\begin{aligned}
&\big(2p+1, (\mathbf{m}_{2p+1}, \alpha_{2p})|(\mathbf{m}^{+j}_{2p+1}, \alpha_{2p})\big) = \Big(\textstyle\prod_{r=1}^{p} [l_{j,2p+1} + l_{r,2p}][l_{j,2p+1} - l_{r,2p}]\Big)^{\frac{1}{2}},\\
&\big(2p+1, (\mathbf{m}_{2p+1}, \alpha_{2p})|(\mathbf{m}_{2p+1}, \alpha_{2p})\big) = \textstyle\prod_{r=1}^{p} [l_{r,2p}],\\
&\big(2p+1, (\mathbf{m}_{2p+1}, \alpha_{2p})|(\mathbf{m}^{-j}_{2p+1}, \alpha_{2p})\big) = \Big(\textstyle\prod_{r=1}^{p} [l_{j,2p+1} + l_{r,2p} - 1][l_{j,2p+1} - l_{r,2p} - 1]\Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{1.3.36}$$

$$\big(2p,(\mathbf{m}_{2p},\alpha_{2p-1})|(\mathbf{m}_{2p}^{+j},\alpha_{2p-1})\big)=\Big(\textstyle\prod_{r=1}^{p-1}[l_{j,2p}+l_{r,2p-1}][l_{j,2p}-l_{r,2p-1}+1]\Big)^{\frac{1}{2}},$$
$$\big(2p,(\mathbf{m}_{2p},\alpha_{2p-1})|(\mathbf{m}_{2p}^{-j},\alpha_{2p-1})\big)=\Big(\textstyle\prod_{r=1}^{p-1}[l_{j,2p}+l_{r,2p-1}-1][l_{j,2p}-l_{r,2p-1}]\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3.37}$$

(Вони визначаються з точністю до нормування, тобто множення цих ККГ на деякі константи не змінять наступні результати.)

Всі інши ККГ отримуються з вказаних вище наступним чином:

$$\big(k,\alpha_n|\alpha_n'\big)=q^{k-n}\frac{\langle\mathbf{m}_{n+1},\alpha_n|T_{\mathbf{m}_{n+1}}(I_{n+1,k}^-)|\mathbf{m}_{n+1},\alpha_n'\rangle}{\langle\mathbf{m}_{n+1},\mathbf{m}_n,\alpha_{n-1}|T_{\mathbf{m}_{n+1}}(I_{n+1,n})|\mathbf{m}_{n+1},\mathbf{m}_n',\alpha_{n-1}\rangle}$$
$$\times\big(n,(\mathbf{m}_n,\alpha_{n-1})|(\mathbf{m}_n',\alpha_{n-1})\big), \tag{1.3.38}$$

де генератори $I_{n+1,k}^-$ визначені в (1.2.4). Якщо $k=+$ або $k=-$ в лівій частині (1.3.38), тоді треба покласти $k=2$ в правій частині. Набір $\mathbf{m}_{n+1}$ обирається так щоб давати ненульовий знаменник в правій частині (1.3.38). Зауважимо, що якщо $(n,(\mathbf{m}_n,\alpha_{n-1})|(\mathbf{m}_n',\alpha_{n-1}))\neq 0$, завжди можна зробити такий вибір. Більш того, результат для ККГ не буде залежати від цього конкретного вибору. У випадку $n=3$ ми переотримуємо ККГ для алгебри $U_q'(\mathrm{so}_3)$ (див. пункт 1.3.5).

Як показано в [73], визначені ККГ мають властивість *факторізовності*. Цей факт (у повній відповідності з відповідним результатом у класичному випадку, див. [1, 4]) дає можливість представити довільний ККГ для алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ як добуток *скалярних факторів*.

Теорема 1.1. *Формули для дії операторів $T^{\otimes}(I_{k+1,k})$, $k=1,2,\ldots,n-1$, на вектори $|\mathbf{m}_n',\alpha_{n-1}\rangle^{\otimes}$ визначені в (1.3.35) з ККГ визначеними в (1.3.36)–(1.3.38), співпадають з відповідними формулами (1.2.11)–(1.2.12) для дії операторів $T_{\mathbf{m}_n'}(I_{k+1,k})$ на базис ГЦ $|\mathbf{m}_n',\alpha_{n-1}\rangle$. Ми маємо розклад (1.3.31).*

1.3.4. Розклад представлень $T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\epsilon,\mathbf{m}_3}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_3)$. В цьому та наступному пунктах ми розгядаємо розклад представлень $T^{\otimes} \equiv T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$ на незвідні складові по відношенню до дії алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$. В цьому пункті ми обмежуємось випадками $n = 2, 3$.

Спочатку ми розгянемо випадок алгебри $U'_q(\mathrm{so}_2) \equiv U(\mathrm{so}_2)$. Ця алгебра має представлення $T_{\epsilon_2,m}$, $\epsilon_2 = \pm 1$, $m \equiv m_{12}$, $m \in \{1/2, 3/2, \ldots\}$, які діють в одновимірних просторах з базисними векторами $|m\rangle$, та $T_{\epsilon_2,m}(I_{21})|m\rangle = \epsilon_2[m]_+|m\rangle$. Тоді представлення $T^{\otimes} \equiv T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\epsilon_2,m}$ є двовимірним та звідним. Ми вводимо вектори

$$v_{\pm}^{(\epsilon_2,m)} = -\epsilon_2 q^{-1/2\pm m} v_1 + v_2. \tag{1.3.39}$$

Тоді вектори $|m\pm 1\rangle^{\otimes} := v_{\pm}^{(\epsilon_2,m)} \otimes |m\rangle$ є власними векторами $T^{\otimes}(I_{21})$: $T^{\otimes}(I_{21})|m\pm 1\rangle^{\otimes} = \epsilon_2[m\pm 1]_+|m\pm 1\rangle^{\otimes}$. Цей факт легко перевіряється прямими обрахунками з використанням визначення q-чисел. Отже ми маємо розклад $T^{\otimes} \equiv T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\epsilon_2,m} = T_{\epsilon_2,m+1} \oplus T_{\epsilon_2,m-1}$, якщо $m \geq 3/2$, та $T^{\otimes} \equiv T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\epsilon_2,1/2} = T_{\epsilon_2,3/2} \oplus T_{\epsilon_2,1/2}$.

Зараз ми розглянемо випадок алгебри $U'_q(\mathrm{so}_3)$. Ця алгебра має чотири класи представлень *некласичного типу* $T_{\epsilon,l}$, $\epsilon = \{\epsilon_2, \epsilon_3\}$, $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$, $\mathbf{m}_3 \equiv (m_{13}) \equiv (l)$, $l \in \{1/2,\ 3/2,\ 5/2, \ldots\}$, які діють в просторах $\mathcal{V}_l$ з базисними векторами $|l, m\rangle$, $(m \equiv m_{12})$, $m = 1/2, 3/2, \ldots, l$:

$$T_{\epsilon,l}(I_{21})|l,m\rangle = \epsilon_2[m]_+|l,m\rangle,$$

$$T_{\epsilon,l}(I_{32})|l,m\rangle = \tilde{A}_{l,m}|l,m+1\rangle - \tilde{A}_{l,m-1}|l,m-1\rangle, \qquad \text{якщо } m \geq 3/2,$$

$$T_{\epsilon,l}(I_{32})|l,1/2\rangle = \tilde{A}_{l,1/2}|l,3/2\rangle + \epsilon_3[1/2]_+[l+1/2]|l,1/2\rangle,$$

де $\tilde{A}_{l,m} = \tilde{d}_m([l-m][l+m+1])^{1/2}$, $\tilde{d}_m = \big((q^m - q^{-m})(q^{m+1} - q^{-m-1})\big)^{-1/2}$.

Розглянемо вектори

$$|l',m\rangle^{\otimes} := \tilde{\alpha}^{(l')}_{l,m} v_{+}^{(\epsilon_2,m-1)} \otimes |l,m-1\rangle + \tilde{\beta}^{(l')}_{l,m} v_3 \otimes |l,m\rangle + \tilde{\gamma}^{(l')}_{l,m} v_{-}^{(\epsilon_2,m+1)} \otimes |l,m+1\rangle, \tag{1.3.40}$$

де $m = 3/2, 5/2, \dots, l'$, та

$$l' = l+1, l, l-1 \quad \text{якщо} \quad l \geq 3/2; \qquad l' = 3/2, 1/2 \quad \text{якщо} \quad l = 1/2.$$

Якщо $m = 1/2$, треба замінити $|l,-1/2\rangle$ на $|l,1/2\rangle$ в правій частині (1.3.40).

Вектори $v_{\pm}^{(\epsilon_2,m)}$ в (1.3.40) визначені в (1.3.39) та

$$\tilde{\alpha}^{(l+1)}_{l,m} = q^{l-m+1/2} \tilde{d}_{m-1} ([l+m][l+m+1])^{1/2}, \qquad m \neq 1/2$$

$$\tilde{\beta}^{(l+1)}_{l,m} = ([l-m+1][l+m+1])^{1/2},$$

$$\tilde{\gamma}^{(l+1)}_{l,m} = -q^{l+m+1/2} \tilde{d}_{m} ([l-m][l-m+1])^{1/2},$$

$$\tilde{\alpha}^{(l)}_{l,m} = q^{-m-1/2} \tilde{d}_{m-1} ([l+m][l-m+1])^{1/2}, \qquad m \neq 1/2$$

$$\tilde{\beta}^{(l)}_{l,m} = [m]_{+},$$

$$\tilde{\gamma}^{(l)}_{l,m} = -q^{m-1/2} \tilde{d}_{m} ([l-m][l+m+1])^{1/2},$$

$$\tilde{\alpha}^{(l-1)}_{l,m} = -q^{-l-m-1/2} \tilde{d}_{m-1} ([l-m][l-m+1])^{1/2}, \qquad m \neq 1/2$$

$$\tilde{\beta}^{(l-1)}_{l,m} = ([l-m][l+m])^{1/2},$$

$$\tilde{\gamma}^{(l-1)}_{l,m} = q^{-l+m-1/2} \tilde{d}_{m} ([l+m][l+m+1])^{1/2},$$

$$\tilde{\alpha}^{(l+1)}_{l,1/2} = -q^{l} [1/2]_{+} \epsilon_3 ([l+1/2][l+3/2])^{1/2},$$

$$\tilde{\alpha}^{(l+1)}_{l,1/2} = -q^{-1} [1/2]_{+} \epsilon_3 [l+1/2],$$

$$\tilde{\alpha}^{(l-1)}_{l,1/2} = q^{-l-1} [1/2]_{+} \epsilon_3 ([l-1/2][l+1/2])^{1/2}.$$

З випадку алгебри $U'_q(\mathrm{so}_2)$ легко бачити, що $T^{\otimes}(I_{21})|l',m\rangle^{\otimes} = \epsilon_2[m]_+|l',m\rangle^{\otimes}$. Прямими обрахунками можна показати, що оператор $T^{\otimes}(I_{32})$ діє на набір векторів $|l',m\rangle^{\otimes}$ при фіксованому l' так само як оператор $T_{\epsilon,l'}(I_{32})$ діє на вектори базису ГЦ $|l',m\rangle$. Це означає, що вектори $|l',m\rangle^{\otimes}$ при фіксованому l' породжують підпростір в $\mathcal{V}^{\otimes}$, який є інваріантним та незвідним при дії $T^{\otimes}(a)$, $a \in U'_q(\mathrm{so}_3)$. Відповідне підпредставлення еквівалентне $T_{\epsilon,l'}$. Порівнюючи розмірності $T_{\epsilon,l'}$ з розмірністтю $T^{\otimes}$, ми приходимо до висновку, що $T^{\otimes} = T_{\epsilon,l+1} \oplus T_{\epsilon,l} \oplus T_{\epsilon,l-1}$, якщо $l \geq 3/2$; $T^{\otimes} = T_{\epsilon,3/2} \oplus T_{\epsilon,1/2}$, якщо $l = 1/2$. Нагадаємо, що $T_{\epsilon,l} \equiv T_{\epsilon,\mathbf{m}_3}$, $m_{13} \equiv l$. Числа $\tilde{\alpha}^{(l')}_{l,m}$, $\tilde{\beta}^{(l')}_{l,m}$ та $\tilde{\gamma}^{(l')}_{l,m}$ є ККГ цих розкладів.

1.3.5. Розклад $T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$, $n \geq 4$. В цьому пункті ми описуємо розклад представлень $T^{\otimes} \equiv T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$, $n \geq 4$, на незвідні складові. Цей розклад має вигляд

$$T^{\otimes} = \bigoplus_{\mathbf{m}'_n \in \mathcal{S}(\mathbf{m}_n)} T_{\epsilon,\mathbf{m}'_n}, \tag{1.3.41}$$

де

$$\mathcal{S}(\mathbf{m}_{2p+1}) = \bigcup_{j=1}^{p}\{\mathbf{m}^{+j}_{2p+1}\} \cup \bigcup_{j=1}^{p}\{\mathbf{m}^{-j}_{2p+1}\} \cup \{\mathbf{m}_{2p+1}\}, \tag{1.3.42}$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{m}_{2p}) = \bigcup_{j=1}^{p}\{\mathbf{m}^{+j}_{2p}\} \cup \bigcup_{j=1}^{p}\{\mathbf{m}^{-j}_{2p}\}. \tag{1.3.43}$$

Через $\mathbf{m}^{\pm j}_n$ ми позначаємо набір $\mathbf{m}_n$ з $m_{j,n}$, в якому зроблено заміну $m_{j,n} \pm 1$, відповідно. Якщо $m_{p,2p} = 1/2$, елемент $\mathbf{m}^{-p}_{2p}$ в правій частині (1.3.43) треба замінити на $\mathbf{m}_{2p}$. Якщо деяке $\mathbf{m}^{\pm j}_n$ не є домінантним (1.2.16), тоді відповідне $\mathbf{m}^{\pm j}_n$ треба пропустити; зокрема, якщо $m_{p,2p+1} = 1/2$, елемент $\mathbf{m}^{-p}_{2p+1}$ треба пропустити. Зауважимо, що представлення $T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$ розкладається на незвідні представлення некласичного типу з тим самим набором $\epsilon = (\epsilon_2, \epsilon_3, \ldots)$. Розкладу (1.3.41) представлення $T^{\otimes}$ відповідає розклад простору представлення:

$$\mathcal{V}^{\otimes} \equiv \mathcal{V}_{\mathbf{1}} \otimes \tilde{\mathcal{V}}_{\epsilon,\mathbf{m}_n} = \bigoplus_{\mathbf{m}'_n \in \mathcal{S}(\mathbf{m}_n)} \tilde{\mathcal{V}}_{\epsilon,\mathbf{m}'_n}. \tag{1.3.44}$$

Для того, щоб дати цей розклад у явному вигляді ми змінюємо базис $\{v_k \otimes |\alpha_n\rangle\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, в $\mathcal{V}^{\otimes}$ на $\{v_k \otimes |\alpha_n\rangle\}$, $k = +, -, 3, \ldots, n$, замінивши (для кожного фіксованого $\{\alpha_n\} = \{\mathbf{m}_n, \mathbf{m}_{n-1}, \ldots, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_2\}$) два базисні вектори $v_1 \otimes |\alpha_n\rangle$ та $v_2 \otimes |\alpha_n\rangle$ на $v_+^{(\epsilon_2, m_{12})} \otimes |\alpha_n\rangle$ та $v_-^{(\epsilon_2, m_{12})} \otimes |\alpha_n\rangle$ (див. (1.3.39)). Далі ми будемо опускати індекс (ϵ_2, m_{12}) в позначенні базисних векторів $v_\pm^{(\epsilon_2, m_{12})} \otimes |\alpha_n\rangle$, вважаючи, що він містить m_{12}-компоненту, яка відповідає таблиці ГЦ $\{\alpha_n\}$.

Ми визначаємо вектори (де $\{\alpha'_n\} = \{\mathbf{m}'_n, \mathbf{m}'_{n-1}, \ldots, \mathbf{m}'_3, \mathbf{m}'_2\}$)

$$|\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}\rangle^{\otimes} := \sum_k \sum_{|\mathbf{m}_n, \alpha'_{n-1}\rangle \in \mathcal{V}_{\mathbf{m}_n}} \big(k, (\mathbf{m}_n, \alpha'_{n-1}) | (\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}); \epsilon\big)\, v_k \otimes |\mathbf{m}_n, \alpha'_{n-1}\rangle \tag{1.3.45}$$

у просторі $\mathcal{V}^{\otimes}$, де k пробігає набір $+, -, 3, \ldots, n$, та коефіцієнти $\big(k, (\mathbf{m}_n, \alpha'_{n-1}) | (\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}); \epsilon\big)$ — ККГ. Зараз ми знайдемо ці ККГ у явному вигляді.

Ми покладаємо $\big(k, (\mathbf{m}_n, \alpha'_{n-1}) | (\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}); \epsilon\big) = 0$ якщо виконується хоч одна з умов:

1) $\mathbf{m}'_n \notin \mathcal{S}(\mathbf{m}_n)$,

2) $\mathbf{m}_s \notin \mathcal{S}(\mathbf{m}'_s), s = n-1, \dots, k, \quad k \geq 3$,

3) $\mathbf{m}_s \notin \mathcal{S}(\mathbf{m}'_s), s = n-1, \dots, 3, \quad k = +, -$,

4) $\alpha'_{k-1} \neq \alpha_{k-1}, k = 3, 4, \dots, n$,

5) $m_{12} \neq m'_{12} + 1, k = +$,

6) $m_{12} \neq m'_{12} - 1, \quad k = -, \quad m'_{12} \geq \frac{3}{2}$,

6′) $m_{12} \neq m'_{12}, \quad k = -, \quad m'_{12} = \frac{1}{2}$.

Ненульовими ККГ для $k = n$ є:

$$\big(2p{+}1, (\mathbf{m}_{2p+1}, \alpha_{2p})|(\mathbf{m}^{+j}_{2p+1}, \alpha_{2p}); \epsilon\big){=}\Big(\textstyle\prod_{r=1}^{p}[l_{j,2p+1} + l_{r,2p}][l_{j,2p+1} - l_{r,2p}]\Big)^{\frac{1}{2}},$$
$$\big(2p{+}1, (\mathbf{m}_{2p+1}, \alpha_{2p})|(\mathbf{m}_{2p+1}, \alpha_{2p}); \epsilon\big){=}\textstyle\prod_{r=1}^{p}[l_{r,2p}]_{+},$$
$$\big(2p{+}1, (\mathbf{m}_{2p+1}, \alpha_{2p})|(\mathbf{m}^{-j}_{2p+1}, \alpha_{2p}); \epsilon\big){=}\Big(\textstyle\prod_{r=1}^{p}[l_{j,2p+1}{+}l_{r,2p}{-}1][l_{j,2p+1}{-}l_{r,2p}{-}1]\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.3.46}$$

$$\big(2p, (\mathbf{m}_{2p}, \alpha_{2p-1})|(\mathbf{m}^{+j}_{2p}, \alpha_{2p-1}); \epsilon\big){=}\Big(\textstyle\prod_{r=1}^{p-1}[l_{j,2p} + l_{r,2p-1}][l_{j,2p} - l_{r,2p-1} + 1]\Big)^{\frac{1}{2}},$$
$$\big(2p, (\mathbf{m}_{2p}, \alpha_{2p-1})|(\mathbf{m}^{-j}_{2p}, \alpha_{2p-1}); \epsilon\big){=}\Big(\textstyle\prod_{r=1}^{p-1}[l_{j,2p} + l_{r,2p-1} - 1][l_{j,2p} - l_{r,2p-1}]\Big)^{\frac{1}{2}},$$
$$\big(2p, (\mathbf{m}_{2p}, \alpha_{2p-1})|(\mathbf{m}_{2p}, \alpha_{2p-1}); \epsilon\big){=}\textstyle\prod_{r=1}^{p-1}[l_{r,2p-1} - \frac{1}{2}], \qquad \text{якщо } m_{p,2p} = \frac{1}{2}. \tag{1.3.47}$$

(Вони визначаються з точністю до нормування, тобто множення цих ККГ на деякі константи не змінять наступні результати.)

Всі інши ККГ отримуються з вказаних вище наступним чином:

$$\big(k, \alpha_n|\alpha'_n; \epsilon\big) = q^{k-n}\frac{\langle \mathbf{m}_{n+1}, \alpha_n|T_{\tilde{\epsilon},\mathbf{m}_{n+1}}(I^{-}_{n+1,k})|\mathbf{m}_{n+1}, \alpha'_n\rangle}{\langle \mathbf{m}_{n+1}, \mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}|T_{\tilde{\epsilon},\mathbf{m}_{n+1}}(I_{n+1,n})|\mathbf{m}_{n+1}, \mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}\rangle}$$
$$\times\big(n, (\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1})|(\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}); \epsilon\big), \tag{1.3.48}$$

де генератори $I^-_{n+1,k}$ визначені в (1.2.4), $\tilde{\epsilon} = (\epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n, +1)$. Якщо $k = +$ або $k = -$ в лівій частині (1.3.48), треба покласти $k = 2$ в правій частині. Набір $\mathbf{m}_{n+1}$ обирається таким чином, щоб дати ненульовий знаменник в правій частині (1.3.48). Зауважимо, що якщо $(n, (\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1})|(\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1})) \neq 0$, тоді завжди можна зробити такий вибір. Більш того, отримані ККГ не будуть залежати від цього конкретного вибору. У випадку $n = 3$ ми переотримуємо ККГ, які відповідають представленням некласичного типу для алгебри $U'_q(\mathrm{so}_3)$ (див. пункт 1.3.4).

Теорема 1.2. *Формули для дії операторів $T^{\otimes}(I_{k+1,k})$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, на вектори $|\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}\rangle^{\otimes}$ визначені в (1.3.45) з ККГ (1.3.46)–(1.3.48), співпадають з відповідними формулами (1.2.17)–(1.2.18) для дії операторів $T_{\epsilon,\mathbf{m}'_n}(I_{k+1,k})$ в базисі ГЦ $|\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}\rangle$. Ми маємо розклад (1.3.41).*

1.3.6. Теорема Вігнера–Екарта для векторних операторів. Щоб пояснити ідею, ми обмежимось випадком, коли векторний оператор діє на просторі, де реалізована пряма сума представлень класичного типу алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$.

Формула (1.3.35) дає перетворення від базису $\{v_k \otimes |\alpha_n\rangle\}$ до базису $\{|\alpha'_n\rangle^{\otimes}\}$ у просторі $\mathcal{V}^{\otimes}$. Завдяки (1.3.34), це перетворення має невироджену матрицю з матричними елементами, які є ККГ $(k, \alpha_n|\alpha'_n)$. Позначимо матричні елементи оберненої матриці через $(\alpha'_n|k, \alpha_n)$ (*обернені* ККГ). Знайдемо вираз для вектору $v_n \otimes |\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}\rangle$ з (1.3.35) через вектори $|\alpha'_n\rangle^{\otimes}$. Оскільки цей вектор перетворюється при дії $T^{\otimes}(a)$, $a \in U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$, як вектор $|\alpha_{n-1}\rangle$ при дії $T_{\mathbf{m}_{n-1}}(a)$

(див. формулу (1.3.26)), лема Шура дає

$$v_n \otimes |\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}\rangle = \sum_{\mathbf{m}'_n} \big((\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1})|n, (\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1})\big)\, |\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}\rangle^{\otimes}, \qquad (1.3.49)$$

де коефіцієнти $\big((\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1})|n, (\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1})\big)$ залежать тільки від $\mathbf{m}'_n$, $\mathbf{m}_n$, $\mathbf{m}_{n-1}$. З (1.3.35) також випливає, що $\mathbf{m}'_n \in \mathcal{S}(\mathbf{m}_n)$. Хоча ці коефіцієнти однозначно визначаються (1.3.35)–(1.3.38), нам буде потрібна тільки їх явна залежність від $\mathbf{m}_{n-1}$.

Визначення 1.1. *Набір операторів $\{V_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, на просторі $\mathcal{V}$, де реалізовано представлення T алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$, такий що*

$$[V_{j-1}, T(I_{j,j-1})]_q = V_j, \quad [T(I_{j,j-1}), V_j]_q = V_{j-1}, \qquad (1.3.50)$$

$$[T(I_{j,j-1}), V_k] = 0, \qquad \text{якщо } j \neq k \text{ та } j-1 \neq k, \qquad (1.3.51)$$

де $[X, Y]_q = q^{1/2}XY - q^{-1/2}YX$, називається векторним оператором алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$.

Легко перевірити, що дія операторами $T(I_{j,j-1})$ на вектори $V_k\, v_\alpha$ точно відповідає дії (1.3.24)–(1.3.26) операторами $T^{\otimes}(I_{j,j-1})$ на вектори $v_k \otimes v_\alpha$.

Нехай T — пряма сума незвідних представлень класичного типу алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ з довільною кратністю. Виберемо базис ГЦ в $\mathcal{V}$. Розглянемо деякий інваріантний підпростір $\mathcal{V}_{\mathbf{m}_n,s}$ де реалізовано підпредставлення еквівалентне $T_{\mathbf{m}_n}$. Число s нумерує такі підпростори якщо відповідні кратності більше 1. Візьмемо лінійну комбінацію векторів $V_k\ |(\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}); s\rangle$, де $\{|(\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}); s\rangle\}$ — базис ГЦ підпростору $\mathcal{V}_{\mathbf{m}_n,s}$, з ККГ (1.3.35) для деякого фіксованого $\mathbf{m}'_n \in \mathcal{S}(\mathbf{m}_n)$. Можливі два варіанти. Перший, всі вектори $|\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}\rangle^{\otimes}$ нульові. Другий, на просторі породженому векторами $|\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}\rangle^{\otimes}$, реалізовано деяке представлення алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$, яке еквівалентне $T_{\mathbf{m}'_n}$. З леми Шура випливає, що

$$|\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}\rangle^{\otimes} = \sum_{s'} (\mathbf{m}'_n, s' \| V \| \mathbf{m}_n, s)\, |\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}; s'\rangle, \qquad (1.3.52)$$

де $(\mathbf{m}'_n, s' \| V \| \mathbf{m}_n, s)$ — деякі коефіцієнти (*приведені матричні елементи*), які залежать тільки від $\mathbf{m}'_n$, s', $\mathbf{m}_n$, s та від векторного оператора $\{V_k\}$. Використавши аналог співвідношення (1.3.49) для векторного оператора та (1.3.52) ми маємо

$$\begin{aligned} V_n |\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}; s\rangle = \sum_{\mathbf{m}'_n, s'} &\big((\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}) | n, (\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1})\big) \\ &\times (\mathbf{m}'_n, s' \| V \| \mathbf{m}_n, s)\, |\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}; s'\rangle. \end{aligned} \qquad (1.3.53)$$

Як стверджувалось вище, коефіцієнти $\big((\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}) | n, (\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1})\big)$ можуть залежати від $\mathbf{m}_{n-1}$. Оскільки ця залежність ідентична для всіх можливих векторних операторів в довільних просторах, ми вибираємо тимчасово в ролі $\mathcal{V}$ простір $\mathcal{V}_{\mathbf{m}_{n+1}}$ незвідного представлення $T_{\mathbf{m}_{n+1}}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n+1})$ для деякого зручного $\mathbf{m}_{n+1}$, та $\{V_k\} \equiv \{T_{\mathbf{m}_{n+1}}(I^+_{n+1,k})\}$. Виділяючи залежність від $\mathbf{m}_{n-1}$ в матричних елементах $T_{\mathbf{m}_{n+1}}(I_{n+1,n})$ та порівнюючи її з формулами (1.3.36)–(1.3.37), ми отримуємо

$$\big((\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}) | n, (\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1})\big) = \big(n, (\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}) | (\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1})\big) \lambda_{\mathbf{m}'_n, \mathbf{m}_n},$$

де $\lambda_{\mathbf{m}'_n, \mathbf{m}_n}$ деякі коефіцієнти залежні тільки від $\mathbf{m}'_n$ та $\mathbf{m}_n$. Повертаючись до формули (1.3.53) та позначаючи $(\mathbf{m}'_n, s' \| V \| \mathbf{m}_n, s)' = (\mathbf{m}'_n, s' \| V \| \mathbf{m}_n, s) \times \lambda_{\mathbf{m}'_n, \mathbf{m}_n}$ ми маємо

$$\begin{aligned} V_n |\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}; s\rangle = \sum_{\mathbf{m}'_n, s'} &\big(n, (\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}) | (\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1})\big) \\ &\times (\mathbf{m}'_n, s' \| V \| \mathbf{m}_n, s)'\, |\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}; s'\rangle. \end{aligned} \qquad (1.3.54)$$

Ітеруючи другу формулу в (1.3.50), ми отримуємо формулу дії для $\{V_k\}$, $1 \le k < n$. Отже, ми вивели наступний q-аналог ТВЕ.

Теорема 1.3. *Якщо $\mathcal{V}$ — гільбертів простір з ортонормованим базисом ГЦ $\{|\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}; s\rangle\}$, ми маємо для компонент векторного оператора $\{V_k\}$ на $\mathcal{V}$ наступну факторизацію*

$$\langle \mathbf{m}'_n, \alpha'_{n-1}; s'|V_k|\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}; s\rangle = \big((\mathbf{m}'_n, \alpha'_{n-1})|k, (\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1})\big)'(\mathbf{m}'_n, s'\|V\|\mathbf{m}_n, s)',$$

де

$$\big((\mathbf{m}'_n, \alpha'_{n-1})|k, (\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1})\big)' = \frac{\langle \mathbf{m}_{n+1}, \alpha'_n|T_{\mathbf{m}_{n+1}}(I^+_{n+1,k})|\mathbf{m}_{n+1}, \alpha_n\rangle}{\langle \mathbf{m}_{n+1}, \mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}|T_{\mathbf{m}_{n+1}}(I_{n+1,n})|\mathbf{m}_{n+1}, \mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}\rangle}$$
$$\times\big(n, (\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1})|(\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1})\big), \qquad 1 \le k < n$$

(див. зауваження після аналогічної формули (1.3.38)).

Нехай T_ϵ — пряма сума незвідних представлень некласичного типу алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ з довільною кратністю та з фіксованим ϵ на гільбертовому просторі $\mathcal{V}_\epsilon$. Виберемо базис ГЦ в $\mathcal{V}_\epsilon$. Простір $\mathcal{V}_\epsilon$ є прямою сумою підпросторів $\mathcal{V}_{\epsilon,\mathbf{m}_n,s}$ де реалізовані підпредставлення еквівалентні $T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$. Число s нумерує відповідні підпростори якщо їх кратності більше 1. Використовуючи аргументацію аналогічну до випадку представлень класичного типу, ми виводимо наступний q-аналог ТВЕ для випадку представлень некласичного типу.

Теорема 1.4. *Якщо $\mathcal{V}_\epsilon$ — гільбертів простір з ортонормованим базисом ГЦ $\{|\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}; s\rangle\}$, ми маємо для компонент векторного оператора $\{V_k\}$ на $\mathcal{V}_\epsilon$ наступну факторизацію*

$$\langle \mathbf{m}'_n, \alpha'_{n-1}; s'|V_k|\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}; s\rangle = \big((\mathbf{m}'_n, \alpha'_{n-1})|k, (\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}); \epsilon\big)'$$
$$\times(\epsilon, \mathbf{m}'_n, s'\|V\|\epsilon, \mathbf{m}_n, s)',$$

де

$$\big((\mathbf{m}'_n,\alpha'_{n-1})|k,(\mathbf{m}_n,\alpha_{n-1});\epsilon\big)' = \frac{\langle \mathbf{m}_{n+1},\alpha'_n|T_{\tilde\epsilon,\mathbf{m}_{n+1}}(I^+_{n+1,k})|\mathbf{m}_{n+1},\alpha_n\rangle}{\langle \mathbf{m}_{n+1},\mathbf{m}'_n,\alpha_{n-1}|T_{\tilde\epsilon,\mathbf{m}_{n+1}}(I_{n+1,n})|\mathbf{m}_{n+1},\mathbf{m}_n,\alpha_{n-1}\rangle} \times\big(n,(\mathbf{m}_n,\alpha_{n-1})|(\mathbf{m}'_n,\alpha_{n-1});\epsilon\big), \qquad 1\le k<n$$

(див. зауваження після аналогічної формули (1.3.48)).

Коефіцієнти $(\epsilon,\mathbf{m}'_n,s'\|V\|\epsilon,\mathbf{m}_n,s)'$ є *приведеними матричними елементами* для векторного оператора $\{V_k\}$.

Якщо представлення T є прямою сумою представлень класичного типу та представлень некласичного типу з різними ϵ, тоді легко знайти матричні елементи для векторних операторів. Достатньо прийняти до уваги той факт, що векторний оператор, який діє на представлення класичного типу не може дати представлення некласичного типу, і якщо він діє на представлення некласичного типу з деяким набором ϵ він не може дати представлення некласичного типу з іншим набором ϵ'. Отже, відповідні матричні елементи є нульовими. Ненульові матричні елементи описані Теоремою 1.3 та Теоремою 1.4.

1.4. Класифікація незвідних представлень алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$

Мета цього підрозділу — дати повну класифікацію незвідних скінченновимірних представлень нестандартної q-деформації $U'_q(\mathrm{so}_n)$ універсальної огортуючої алгебри $U(\mathrm{so}_n)$ алгебри Лі so_n коли q не є коренем з одиниці. Ці представлення вичерпуються представленнями класичного та некласичного типів, формули для яких дано в Підрозділі 1.2. Також доводиться теорема про повну звідність скінченновимірних представлень $U'_q(\mathrm{so}_n)$.

1.4.1. Векторні оператори та теорема Вігнера–Екарта. В цьому пункті ми ще раз дамо визначення векторного оператора та ТВЕ для нього у такій формі, яка нам буде потрібна для класифікації представлень. Результати, які будуть використовуватись, доведені в Підрозділі 1.3.

Розглянемо гільбертовий простір $\mathcal{H}$, на якому задано представлення T алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$. Ми будемо розглядати тільки випадок, коли $\mathcal{H}$ — скінченновимірний простір. Ми також вважаємо, що $\mathcal{H}$ розкладається в пряму суму незвідних інваріантних (по відношенню до $U'_q(\mathrm{so}_n)$) підпросторів, де реалізовані тільки незвідні представлення класичного або тільки некласичного типів. Це припущення не зменшує загальності оскільки векторний оператор, який ми далі будемо розглядати, не може відображати підпростір, на якому задано незвідне представлення класичного типу в представлення некласичного типу і навпаки.

Набір A_r, $r = 1, 2, \cdots, n$, операторів на $\mathcal{H}$ називається *векторним оператором* для алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ якщо

$$[A_{j-1}, T(I_{j,j-1})]_q = A_j, \quad [T(I_{j,j-1}), A_j]_q = A_{j-1},$$

$$[T(I_{j,j-1}), A_k]_q = 0, \quad k \neq j, j-1,$$

де $[X, Y]_q \equiv q^{1/2}XY - q^{-1/2}YX$ та T — деяке фіксоване представлення $U'_q(\mathrm{so}_n)$ на $\mathcal{H}$.

Ми представляємо простір $\mathcal{H}$ як пряму суму незвідних інваріантних (по відношенню до $U_q'(\mathrm{so}_n)$) підпросторів

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\epsilon,\mathbf{m}_n,i} \mathcal{V}_{\epsilon,\mathbf{m}_n,i},$$

де $\mathcal{V}_{\epsilon,\mathbf{m}_n,i}$ — підпростір, на якому реалізовано незвідне представлення $U_q'(\mathrm{so}_n)$, що характеризується ϵ та $\mathbf{m}_n$, а i розділяє еквівалентні незвідні представлення $U_q'(\mathrm{so}_n)$ у цьому розкладі. Якщо незвідні представлення належать класичному типу, тоді ϵ опускається.

Ми вибираємо базис ГЦ у кожному з підпросторів $\mathcal{V}_{\epsilon,\mathbf{m}_n,i}$ та позначаємо ці базисні вектори через $|\epsilon, \mathbf{m}_n, i, \alpha\rangle$, де $\alpha \equiv \alpha_{n-1}$ — відповідні таблиці ГЦ. Також визначаємо підпростори:

$$\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_n} = \bigoplus_{i} \mathbb{C}|\epsilon, \mathbf{m}_n, i, \alpha\rangle \, .$$

ТВЕ для векторних операторів $\{A_j\}$ (доведена в [76]) стверджує, що матричні елементи A_j мають вигляд

$$\langle \epsilon', \mathbf{m}'_n, i', \alpha' | A_j | \epsilon, \mathbf{m}_n, i, \alpha\rangle = C^{\epsilon',\mathbf{m}'_n,\alpha'}_{j;\epsilon,\mathbf{m}_n,\alpha} \langle \epsilon', \mathbf{m}'_n, i' \| A \| \epsilon, \mathbf{m}_n, i\rangle, \tag{1.4.55}$$

де $C^{\epsilon',\mathbf{m}'_{n-1},\alpha'}_{j;\epsilon,\mathbf{m}_{n-1},\alpha}$ — ККГ тензорного добутку $T_1 \otimes T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$ (ці коефіцієнти дані у явному вигляді в [76] та в підрозділі 1.3, Теореми 1.3 та 1.4), та $\langle \epsilon', \mathbf{m}'_{n-1}, i' \| A \| \epsilon, \mathbf{m}_{n-1}, i\rangle$ — *приведені матричні елементи* векторного оператора $\{A_j\}$. Ці приведені матричні елементи залежать тільки від чисел, що характеризують представлення, а також від індексів, що розділяють кратні представлення, та незалежать від базисних елементів незвідних інваріантних підпросторів. Вони також не залежать від числа j оператора A_j. У вищезгаданих формулах, у випадку представлень класичного типу символ ϵ опускається.

Завдяки формулам розкладу тензорних добутків $T_1 \otimes T_{\mathbf{m}_n}$ та $T_1 \otimes T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$ ми знаходимо, що матричні елементи $\langle \epsilon', \mathbf{m}'_n, i', \alpha' | A_j | \epsilon, \mathbf{m}_n, i, \alpha \rangle$ можуть не занулитись тільки якщо $\epsilon' = \epsilon$, а також $\mathbf{m}'_n = \mathbf{m}_n^{\pm s}$ або $\mathbf{m}'_n = \mathbf{m}_n$ (оскільки тільки в цих випадках відповідні ККГ можуть бути ненульові). Завдяки вищезгаданим формулам розкладу тензорних добутків представлень, векторний оператор не може відображати підпростір незвідного представлення класичного типу (некласичного типу) в підпростори, на яких реалізовані незвідні представлення некласичного типу (класичного типу). Тому в матричних елементах (1.4.55) обидва індекса ϵ та ϵ' присутні або обидва відсутні.

Ми можемо визначити оператори

$$A^{\mathbf{m}_n}_{\mathbf{m}_n} : \mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_n} \to \mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_n}, \qquad A^{\mathbf{m}_n^{+j}}_{\mathbf{m}_n} : \mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_n} \to \mathcal{V}^{\alpha'}_{\epsilon,\mathbf{m}_n^{+j}}, \qquad A^{\mathbf{m}_n^{-j}}_{\mathbf{m}_n} : \mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_n} \to \mathcal{V}^{\alpha'}_{\epsilon,\mathbf{m}_n^{-j}}$$

які мають матричні елементи, що співпадають з приведеними матричними елементами тензорного оператора $\{A_j\}$:

$$\langle \epsilon, \mathbf{m}_n, i', \alpha | A^{\mathbf{m}_n}_{\mathbf{m}_n} | \epsilon, \mathbf{m}_n, i, \alpha \rangle = \langle \epsilon, \mathbf{m}_n, i' \| A \| \epsilon, \mathbf{m}_n, i \rangle,$$

$$\langle \epsilon, \mathbf{m}_n^{+j}, i', \alpha' | A^{\mathbf{m}_n^{+j}}_{\mathbf{m}_n} | \epsilon, \mathbf{m}_n, i, \alpha \rangle = \langle \epsilon, \mathbf{m}_n^{+j}, i' \| A \| \epsilon, \mathbf{m}_n, i \rangle,$$

$$\langle \epsilon, \mathbf{m}_n^{-j}, i', \alpha' | A^{\mathbf{m}_n^{-j}}_{\mathbf{m}_n} | \epsilon, \mathbf{m}_n, i, \alpha \rangle = \langle \epsilon, \mathbf{m}_n^{-j}, i' \| A \| \epsilon, \mathbf{m}_n, i \rangle.$$

(Якщо необхідно, в цих формулах символ ϵ має бути пропущеним.) З ТВЕ випливає, що для незвідного представлення $T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$, що міститься в представленні T, ці оператори задовільняють наступні співвідношення

$$T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}(a) A^{\mathbf{m}_n}_{\mathbf{m}_n} = A^{\mathbf{m}_n}_{\mathbf{m}_n} T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}(a), \qquad a \in U'_q(\mathrm{so}_n),$$

$$T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}(a) A^{\mathbf{m}_n}_{\mathbf{m}_n^{\mp j}} A^{\mathbf{m}_n^{\pm j}}_{\mathbf{m}_n} = A^{\mathbf{m}_n}_{\mathbf{m}_n^{\mp j}} A^{\mathbf{m}_n^{\pm j}}_{\mathbf{m}_n} T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}(a), \qquad a \in U'_q(\mathrm{so}_n),$$

де $A^{\mathbf{m}_n}_{\mathbf{m}_n^{\mp j}} A^{\mathbf{m}_n^{\pm j}}_{\mathbf{m}_n}$ розглядаються як оператори з $\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$ в $\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$.

Твердження 1.3. *Нехай $\xi \in \mathcal{H}$ належить деякому підпростору $\mathcal{H}_{\mathbf{m}_n}$ незвідного представлення $T_{\mathbf{m}_n}$ алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$. Тоді $A^{\mathbf{m}_n^{+j}}_{\mathbf{m}_n}\xi$ та $A^{\mathbf{m}_n^{-j}}_{\mathbf{m}_n}\xi$ належать деяким підпросторам $\mathcal{H}_{\mathbf{m}_n^{+j}}$ та $\mathcal{H}_{\mathbf{m}_n^{-j}}$ простору $\mathcal{H}$, на яких, відповідно, реалізовані незвідні представлення $T_{\mathbf{m}_n^{+j}}$ та $T_{\mathbf{m}_n^{-j}}$ алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$. Всі вектори $A^{\mathbf{m}_n^{\pm j}}_{\mathbf{m}_n}(T_{\mathbf{m}_n}(a)\xi)$, $a \in U_q'(\mathrm{so}_n)$, також належать цим підпросторам $\mathcal{H}_{\mathbf{m}_n^{\pm j}}$, відповідно.*

Доведення. Це твердження випливає з визначення векторних операторів та з формули (1.4.55).

1.4.2. Допоміжні твердження. Як вказано вище, алгебра $U_q'(\mathrm{so}_n)$ має комутативну підалгебру $\mathcal{A}$ згенеровану елементами $I_{2s,2s-1}$, $s = 1, 2, \cdots, r$, де $r = \lfloor n/2 \rfloor$ — ціла частина $n/2$.

Твердження 1.4. (а) *Якщо T — скінченновимірне представлення алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$, тоді оператори*

$$T(I_{21}), T(I_{43}), \cdots, T(I_{2k,2k-1}),$$

де $n = 2k$ або $n = 2k+1$, можуть одночасно бути діагоналізовані.

(б) *Серед можливих власних значень цих операторів можуть бути тільки $\mathrm{i}[m]$, $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, або $[m]_+$, $m \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, де*

$$[m] \equiv [m]_q = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}, \qquad [m]_+ = \frac{q^m + q^{-m}}{q - q^{-1}}.$$

Доведення. Те, що це твердження є справедливим для алгебри $U_q'(\mathrm{so}_3)$ випливає з теореми про повну звідність скінченновимірних представлень $U_q'(\mathrm{so}_3)$ (див. [68]) та з факту, що представлення класичного та некласичног типу вичерпують всі незвідні представлення алгебри $U'_q(\mathrm{so}_3)$ (див. [66]). Кожен з елементів $I_{21}, I_{43}, \cdots, I_{2k,2k-1}$ може бути включеним в деяку підалгебру ізоморфну $U'_q(\mathrm{so}_3)$ як один з породжуючих елементів. Тому, кожен з операторів $T(I_{2j,2j-1})$, $j = 1, 2, \cdots, k$, може бути діагоналізованим та має власні значення вказані в частині (б). Це означає що ці оператори є напівпростими. Напівросні оператори, що діють в скінченновимірному просторі можуть бути діагоналізовані одночасно, якщо вону комутують між собою. Твердження доведене.

Власні значення вигляду $\mathrm{i}[m]$ називаються *власними значеннями класичного типу.* Власні значення вигляду $[m]_+$ називаються *власними значеннями некласичного типу.*

Примітка. У формулюванні Твердження 1.4 ми могли взяти для алгебри $U'_q(\mathrm{so}_{2k+1})$ оператори $T(I_{32}), T(I_{54}), \cdots, T(I_{2k+1,2k})$ замість $T(I_{21})$, $T(I_{43}), \cdots,$ $T(I_{2k,2k-1})$.

Нижче, в Твердженнях 1.5, 1.6, 1.7, ми вважаємо що виконуються наступні припущення: *Кожне скінченновимірне представлення $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ є цілком звідним та незвідні скінченновимірні представлення $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ вичерпуються незвідними представленнями класичного та некласичного типу з Підрозділу 1.2.* Зауважимо, що для алгебр $U'_q(\mathrm{so}_3)$ та $U'_q(\mathrm{so}_4)$ це припущення є справедливим (див. [65, 66, 68]).

Твердження 1.5. *Звуження довільного незвідного скінченновимірного представлення T алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ на підалгебру $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ є цілком звідним представленням $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ та розкладається на незвідні представлення цієї під-*

алгебри, що є представленнями тільки класичного типу або тільки некласичного типу.

Доведення. Звуження T на підалгебру $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ є цілком звідним представленням завдяки припущенню. Нехай $T{\downarrow}_{U'_q(\mathrm{so}_{n-1})} = \bigoplus_i R_i$, де R_i — незвідні представлення $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$, та нехай $\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{V}_i$ — відповідний розклад простору $\mathcal{H}$ представлення T. Підпростори $\mathcal{V}_i$ є інваріантними по відношенню до дії операторів $T(I_{j,j-1})$, $j = 2, 3, \cdots, n-1$, що відповідають елементам $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$. Тільки оператор $T(I_{n,n-1})$ відображає вектори будь-якого з підпросторів $\mathcal{V}_i$ в лінійні комбінації векторів з інших підпросторів $\mathcal{V}_i$. Оскільки представлення T є незвідним, тоді повторно діючі $T(I_{n,n-1})$ на будь-який вектор будь-якого підпростору $\mathcal{V}_i$ ми отримаємо лінійні комбінації векторів з усіх інших підпросторів $\mathcal{V}_i$. Нехай деяке незвідне представлення R_{i_0} алгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ в розкладі T має класичний тип. Ми стверджуємо, що тоді всі інші представлення R_i з розкладу також мають класичний тип. Це випливає з наступних міркувань. Ми беремо до розгляду оператори $T(I_{n,s})$, $s = 1, 2, \cdots, n-1$. З комутаційних співвідношень (1.2.5)–(1.2.7) для елементів $I_{r,s}$, $r > s$, що дані в пункті 1.2.1, випливає, що ці оператори утворюють векторний оператор по відношенню до підалгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ (згенерованої I_{21}, $I_{32}, \cdots, I_{n-1,n-2}$), що діє у просторі $\mathcal{H}$. Тоді завдяки ТВЕ, дія операторів $T(I_{n,s})$, $s = 1, 2, \cdots, n-1$, на вектори $\mathcal{V}_{i_0}$ дає лінійні комбінації векторів підпрострів $\mathcal{V}_i$, на яких реалізовані тільки представлення класичного типу. Повторна дія $T(I_{n,s})$ знову дає представлення того самого типу. Тому, в цьому випадку, всі представлення R_i є представленнями класичного типу. Якщо R_{i_0} є некласичного типу, тоді (з тих самих міркувань) всі представлення R_i належать некласичному типу. Твердження доведене.

Запишемо розклад $T{\downarrow}_{U'_q(\mathrm{so}_{n-1})} = \bigoplus_i R_i$ з вищенаведеного доведення у вигляді $T{\downarrow}_{U'_q(\mathrm{so}_{n-1})} = \bigoplus_{\mathbf{m}_{n-1}} d_{\mathbf{m}_{n-1}} T_{\mathbf{m}_{n-1}}$, якщо розклад містить представлення класичного типу, де $T_{\mathbf{m}_{n-1}}$ — незвідні представлення алгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ з підрозділу 1.2 та $d_{\mathbf{m}_{n-1}}$ — кратності цих представлень. Якщо розклад містить представлення некласичного типу, тоді ми записуємо
$T{\downarrow}_{U'_q(\mathrm{so}_{n-1})} = \bigoplus_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1}} d_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1}} T_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1}}$, де $T_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1}}$ — незвідні представлення некласичного типу.

Твердження 1.6. *Дія оператора $T(I_{n,n-1})$ на вектор підпростору, на якому реалізовано представлення $T_{\mathbf{m}_{n-1}}$ (представлення $T_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1}}$) алгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$, дає лінійну комбінацію векторів, що належать тільки підпросторам незвідних представлень $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$, що містяться в розкладі на незвідні компоненти тензорного добутку $T_1 \otimes T_{\mathbf{m}_{n-1}}$ (тензорного добутку $T_1 \otimes T_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1}}$), де T_1 — векторне представлення алгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$.*

Доведення. Оператори $T(I_{n,s})$, $s = 1, 2, \cdots, n-1$, утворюють векторний оператор відносно підалгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$. Тепер твердження випливає з ТВЕ.

Твердження 1.7. *Нехай T незвідне скінченновимірне представлення $U'_q(\mathrm{so}_n)$. Тоді всі оператори $T(I_{2i,2i-1})$ з Твердження 1.4 мають власні значення тільки класичного або тільки некласичного типу.*

Доведення. Твердження є вірним для алгебри $U'_q(\mathrm{so}_4)$. А саме, власні значення $T(I_{21})$ та $T(I_{43})$ незвідного представлення T алгебри $U'_q(\mathrm{so}_4)$ є класичного типу, якщо T є представленням класичного типу та некласичного типу, якщо T є представленням некласичного типу (див. [65]). Ми обмежуємо представлення T алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ послідовно на $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$, $U'_q(\mathrm{so}_{n-2}), \cdots$, $U'_q(\mathrm{so}_4)$ та розкладаємо на незвідні складові. (Більш того, ланцюжок цих підалгебр може бути вибраний таким чином, що остання підалгебра $U'_q(\mathrm{so}_4)$ містить будь-яких два сусідніх оператора з Твердження 1.4 (a).) Використовуючі на першому кроці Твердження 1.5 ми отримуємо в розкладі T незвідні представлення $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ що належать всі разом до класичного типу або всі разом до некласичного типу. Завдяки припущенню перед Твердженням 1.5, на кожному наступному кроці ми отримує незвідні представлення тільки класичного або тільки некласичного типу, що описані в пункті 1.2.2. Отже, звуження T на підалгебру $U'_q(\mathrm{so}_4)$ розкладається на незвідні представлення $U'_q(\mathrm{so}_4)$ що належать всі разом до класичного типу або всі разом до некласичного типу. Наше твердження випливає з цього результату. Твердження доведене.

Незвідне представлення T алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$, для якого всі оператори $T(I_{2i,2i-1})$, $i = 1, 2, \cdots, \lfloor n/2 \rfloor$, мають власні значення класичного типу (некласичного типу) називаються *представленнями класичного типу* (*некласичного типу*). Алгебра $U'_q(\mathrm{so}_n)$ не має незвідних скінченновимірних представлень інших типів. В пункті 1.2.2 дано явні формули для незвідних представлень класичного та некласичного типу. Але ми поки що не знаємо чи вичерпуються цими типами всі незвідні представленн. Наша мета довести, що незвідні представлення класичного та некласичного типу з пункту 1.2.2 вичерпують всі незвідні скінченновимірні представлення алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$.

1.4.3. Приведені матричні елементи для представлень класичного типу. Теорема про класифікацію незвідних скінченновимірних представлень алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ буде доведена методом математичної індукції. А саме, ми робимо деяке припущення про незвідні скінченновимірні представлення підалгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ і потім доводимо, що це припущення є справедливим для алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$.

Припущення. *Кожне скінченновимірне представлення* $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ *є цілком звідним і незвідні скінченновимірні представлення* $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ *вичерпуються незвідними представленнями класичного та некласичного типу що описані в п. 1.2.2.*

Це припущення справедливе для алгебр $U'_q(\mathrm{so}_3)$ та $U'_q(\mathrm{so}_4)$ (див. [65, 66]).

Як ми вже знаємо, незвідні скінченновимірні представлення T алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ розділяються на два класи — незвідні представлення класичного типу та незвідні представлення некласичного типу. Для доведення теореми про класифікацію незвідних представлень класичного типу нам необхідні результати про приведені матричні елементи тензорного оператора $T(I_{n,r})$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$, для підалгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$.

Нехай T — незвідне скінченновимірне представлення $U'_q(\mathrm{so}_n)$ класичного типу. Згідно нашому припущенню та Твердженню 1.5, це представлення, при звуженні на підалгебру $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$, розкладається в пряму суму незвідних представлень класичного типу з п. 1.2.2. Для простору $\mathcal{H}$ представлення T ми маємо

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\mathbf{m}_{n-1},i} \mathcal{V}_{\mathbf{m}_{n-1},i},$$

де $\mathcal{V}_{\mathbf{m}_{n-1},i}$ — лінійний простір, на якому реалізовано незвідне представлення $T_{\mathbf{m}_{n-1}}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ з п. 1.2.2, та i розділяє кратні незвідні представлення $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ в розкладі. Нехай

$$\mathcal{V}_{\mathbf{m}_{n-1}} = \bigoplus_i \mathcal{V}_{\mathbf{m}_{n-1},i}.$$

Ми вибираємо базис ГЦ в кожному з підпросторів $\mathcal{V}_{\mathbf{m}_{n-1},i}$ та позначаємо ці базисні вектори через $|\mathbf{m}_{n-1}, i, \alpha\rangle$, де $\alpha \equiv \alpha_{n-2}$ — відповідна таблиця ГЦ. Тоді можуть бути визначені підпростори

$$\mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}_{n-1}} = \bigoplus_i \mathbb{C}|\mathbf{m}_{n-1}, i, \alpha\rangle.$$

Ми знаємо з Тверження 1.6, що оператор $T(I_{n,n-1})$ відображає вектор $|\mathbf{m}_{n-1}, i, \alpha\rangle$ в лінійну комбінацію векторів підпросторів $\mathcal{V}_{\mathbf{m}_{n-1}}$ та $\mathcal{V}_{\mathbf{m}^{\pm s}_{n-1}}$, $s = 1, 2, \cdots, k$, де $n-1 = 2k$ або $n-1 = 2k+1$. Оскільки оператор $T(I_{n,n-1})$ комутує з усіма операторами $T(I_{s,s-1})$, $s = 2, 3, \cdots, n-2$ (тобто, з операторами, що відповідають елементам підалгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-2})$), він відображає підпростір $\mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}_{n-1}}$ в суму підпросторів $\mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}'_{n-1}}$ з тим самим α.

Завдяки Тверженню 1.6 та ТВЕ (див. формулу (1.4.55)) дія оператора $T(I_{n,n-1})$ на підпростір $\mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}_{n-1}}$ може бути представлена у вигляді

$$T(I_{2p+2,2p+1}) \downarrow_{\mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}_{2p+1}}} = \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{r=1}^{p} [l_{j,2p+1} + l_{r,2p}][l_{j,2p+1} - l_{r,2p}] \right)^{1/2} \rho_j(\mathbf{m}_{2p+1}) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{r=1}^{p} [l_{j,2p+1} + l_{r,2p} - 1][l_{j,2p+1} - l_{r,2p} - 1] \right)^{1/2} \tau_j(\mathbf{m}_{2p+1}) +$$
$$+ \left(\prod_{r=1}^{p} [l_{r,2p}] \right) \sigma(\mathbf{m}_{2p+1}) \qquad (1.4.56)$$

якщо $n = 2p+2$ та у вигляді

$$T(I_{2p+1,2p}) \downarrow_{\mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}_{2p}}} = \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{r=1}^{p-1} [l_{j,2p} + l_{r,2p-1}][l_{j,2p} - l_{r,2p-1} + 1] \right)^{1/2} \rho'_j(\mathbf{m}_{2p}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{r=1}^{p-1} [l_{j,2p} + l_{r,2p-1} - 1][l_{j,2p} - l_{r,2p-1}] \right)^{1/2} \tau'_j(\mathbf{m}_{2p}) \qquad (1.4.57)$$

якщо $n = 2p+1$, де $\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})$, $\rho'_j(\mathbf{m}_{2p})$, $\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1})$, $\tau'_j(\mathbf{m}_{2p})$ та $\sigma(\mathbf{m}_{2p+1})$ — оператори такі, що

$$\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1}) : \mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}_{2p+1}} \to \mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}^{+j}_{2p+1}}, \qquad \rho'_j(\mathbf{m}_{2p}) : \mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}_{2p}} \to \mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}^{+j}_{2p}},$$

$$\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1}) : \mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}_{2p+1}} \to \mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}^{-j}_{2p+1}}, \qquad \tau'_j(\mathbf{m}_{2p}) : \mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}_{2p}} \to \mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}^{-j}_{2p}},$$

$$\sigma(\mathbf{m}_{2p+1}) : \mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}_{2p+1}} \to \mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}_{2p+1}}$$

(це оператори $A^{\mathbf{m}^{\pm j}_{n-1}}_{\mathbf{m}_{n-1}}$ та $A^{\mathbf{m}_{n-1}}_{\mathbf{m}_{n-1}}$ з п. 1.4.1). Останній доданок в (1.4.56) опускається якщо $l_{p,2p+1} = 1$ (у цьому випадку представлення $T_{\mathbf{m}_{2p+1}}$ не входить в тензорний добуток $T_1 \otimes T_{\mathbf{m}_{2p+1}}$). Коефіцієнтами в (1.4.56) та (1.4.57) є відповідні ККГ алгебри $U'(\mathrm{so}_{n-1})$, що взяті з [76]. Як ми знаємо з ТВЕ, $\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})$, $\rho'_j(\mathbf{m}_{2p})$, $\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1})$, $\tau'_j(\mathbf{m}_{2p})$ та $\sigma(\mathbf{m}_{2p+1})$ є незалежними від α. Залежність від α міститься в ККГ.

Давайте спочатку розглянемо випадок алгебри $U'_q(\mathrm{so}_{2p+2})$. Ми діємо обома частинами співвідношення

$$I_{2p+1,2p} I^2_{2p+2,2p+1} - (q+q^{-1}) I_{2p+2,2p+1} I_{2p+1,2p} I_{2p+2,2p+1} + I^2_{2p+2,2p+1} I_{2p+1,2p} = -I_{2p+1,2p},$$

взяте в представленні T, на вектори підпростору $\mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}_{2p+1}}$ з фіксованим $\mathbf{m}_{2p+1}$ та α, а також врахуємо формулу (1.4.56). Порівнюючі доданки з тими самими результуючими підпросторами $\mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}'_{2p+1}}$, ми отримуємо для $\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})$, $\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1})$ та $\sigma(\mathbf{m}_{2p+1})$ наступні співвідношення

$$[l_{i,2p+1}-l_{j,2p+1}+1]\rho_j(\mathbf{m}^{+i}_{2p+1})\rho_i(\mathbf{m}_{2p+1})-[l_{i,2p+1}-l_{j,2p+1}-1]\rho_i(\mathbf{m}^{+j}_{2p+1})\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})=0, \tag{1.4.58}$$

$$[l_{i,2p+1}+l_{j,2p+1}]\tau_i(\mathbf{m}^{+j}_{2p+1})\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})-[l_{i,2p+1}+l_{j,2p+1}-2]\rho_j(\mathbf{m}^{-i}_{2p+1})\tau_i(\mathbf{m}_{2p+1})=0, \tag{1.4.59}$$

$$[l_{i,2p+1}-l_{j,2p+1}+1]\tau_i(\mathbf{m}^{-j}_{2p+1})\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1})-[l_{i,2p+1}-l_{j,2p+1}-1]\tau_j(\mathbf{m}^{-i}_{2p+1})\tau_i(\mathbf{m}_{2p+1})=0, \tag{1.4.60}$$

$$[l_{j,2p+1}+1]\sigma(\mathbf{m}^{+j}_{2p+1})\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})-[l_{j,2p+1}-1]\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})\sigma(\mathbf{m}_{2p+1})=0, \tag{1.4.61}$$

$$[l_{j,2p+1}]\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1})\sigma(\mathbf{m}_{2p+1})-[l_{j,2p+1}-2]\sigma(\mathbf{m}^{-j}_{2p+1})\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1})=0, \tag{1.4.62}$$

$$\sum_{i=1}^{p}\Bigg(-[2l_{i,2p+1}+1]\prod_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{p}([l_{i,2p+1}]^2-[l_{r,2p}]^2)\tau_i(\mathbf{m}^{+i}_{2p+1})\rho_i(\mathbf{m}_{2p+1})+$$
$$+[2l_{i,2p+1}-3]\prod_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{p}([l_{i,2p+1}-1]^2-[l_{r,2p}]^2)\rho_i(\mathbf{m}^{-i}_{2p+1})\tau_i(\mathbf{m}_{2p+1})\Bigg)+$$
$$+\prod_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{p}[l_{r,2p}]^2\cdot\sigma^2(\mathbf{m}_{2p+1})=-E, \tag{1.4.63}$$

де $i\neq j$, E — одиничний оператор на $\mathcal{V}^{\alpha}_{\mathbf{m}_{2p+1}}$ та k — деяке фіксоване число з множини $\{1,2,\cdots,p\}$. Звернемо увагу, що останній доданок в лівій частині (1.4.63) пропускається якщо $l_{p,2p+1}=1$.

Незвідні представлення $T_{\mathbf{m}_{2p+1}}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_{2p+1})$ при звуженні на $U'_q(\mathrm{so}_{2p})$ розкладаються на незвідні представлення $T_{\mathbf{m}_{2p}}$ цієї підалгебри так, що числа $\mathbf{m}_{2p}$ задовільняють нерівності визначені таблицями ГЦ (див. п. 1.2.2). При цих умовах, кожне з чисел $l_{r,2p}$ пробігає певний набір значень. Припускаючі, що жодне з чисел $l_{r,2p}$, $r \neq p$, не є фіксованим для представлення $T_{\mathbf{m}_{2p+1}}$, ми прирівнюємо в (1.4.63) доданки з однаковою залежністю від $[l_{r,2p}]^2$, $r = 1, 2, \cdots, p$, та отримуємо співвідношення

$$\sum_{i=1}^{p}(-1)^p\Big([2l_{i,2p+1}+1]\tau_i(\mathbf{m}_{2p+1}^{+i})\rho_i(\mathbf{m}_{2p+1})-$$
$$-[2l_{i,2p+1}-3]\rho_i(\mathbf{m}_{2p+1}^{-i})\tau_i(\mathbf{m}_{2p+1})\Big) = -\sigma^2(\mathbf{m}_{2p+1}), \tag{1.4.64}$$

$$\sum_{i=1}^{p}\Big([2l_{i,2p+1}+1][l_{i,2p+1}]^{2(p-\nu-1)}\tau_i(\mathbf{m}_{2p+1}^{+i})\rho_i(\mathbf{m}_{2p+1})-$$
$$-[2l_{i,2p+1}-3][l_{i,2p+1}-1]^{2(p-\nu-1)}\rho_i(\mathbf{m}_{2p+1}^{-i})\tau_i(\mathbf{m}_{2p+1})\Big) = 0, \quad \nu = 1, 2, \cdots, p-2, \tag{1.4.65}$$

$$\sum_{i=1}^{p}\Big([2l_{i,2p+1}+1][l_{i,2p+1}]^{2p-2}\tau_i(\mathbf{m}_{2p+1}^{+i})\rho_i(\mathbf{m}_{2p+1})-$$
$$-[2l_{i,2p+1}-3][l_{i,2p+1}-1]^{2p-2}\rho_i(\mathbf{m}_{2p+1}^{-i})\tau_i(\mathbf{m}_{2p+1})\Big) = E. \tag{1.4.66}$$

Якщо s параметрів $l_{r,2p}$, $r \neq p$, зафіксовані для представлення $T_{\mathbf{m}_{2p+1}}$, тоді відповідні $\rho_r(\mathbf{m}_{2p+1})$ та $\tau_r(\mathbf{m}_{2p+1})$ зануляються та кількість співвідношень (1.4.65) та (1.4.66) зменшується на s.

Аналогічно доводиться, що $\rho'_i(\mathbf{m}_{2p})$ та $\tau'_i(\mathbf{m}_{2p})$ з формули (1.4.57) задовільняють співвідношення

$$[l_{i,2p}-l_{j,2p}+1]\rho'_j(\mathbf{m}_{2p}^{+i})\rho'_i(\mathbf{m}_{2p}) - [l_{i,2p}-l_{j,2p}-1]\rho'_i(\mathbf{m}_{2p}^{+j})\rho'_j(\mathbf{m}_{2p}) = 0, \quad i \neq j, \tag{1.4.67}$$

$$[l_{i,2p}+l_{j,2p}+1]\tau'_i(\mathbf{m}_{2p}^{+j})\rho'_j(\mathbf{m}_{2p}) - [l_{i,2p}+l_{j,2p}-1]\rho'_j(\mathbf{m}_{2p}^{-i})\tau'_i(\mathbf{m}_{2p}) = 0, \quad i \neq j, \tag{1.4.68}$$

$$[l_{i,2p}-l_{j,2p}+1]\tau'_i(\mathbf{m}_{2p}^{-j})\tau'_j(\mathbf{m}_{2p}) - [l_{i,2p}-l_{j,2p}-1]\tau'_j(\mathbf{m}_{2p}^{-i})\tau'_i(\mathbf{m}_{2p}) = 0, \quad i \neq j, \tag{1.4.69}$$

$$\sum_i \Big(-\frac{[2l_{i,2p}+2]}{[l_{i,2p}][l_{i,2p}+1]} \prod_{r=1}^{p-1} \Big([l_{i,2p}][l_{i,2p}+1] - [l_{r,2p-1}][l_{r,2p-1}-1] \Big) \tau_i'(\mathbf{m}_{2p}^{+i}) \rho_i'(\mathbf{m}_{2p}) +$$

$$+ \frac{[2l_{i,2p}-2]}{[l_{i,2p}][l_{i,2p}-1]} \prod_{r=1}^{p-1} \Big([l_{i,2p}][l_{i,2p}-1] - [l_{r,2p-1}][l_{r,2p-1}-1] \Big) \rho_i'(\mathbf{m}_{2p}^{-i}) \tau_i'(\mathbf{m}_{2p}) \Big) = -E, \tag{1.4.70}$$

та остання рівність приводить до системи рівнянь

$$\sum_{i=1}^{p} \Big([2l_{i,2p}+2] \big([l_{i,2p}][l_{i,2p}+1] \big)^{p-\nu-2} \tau_i'(\mathbf{m}_{2p}^{+i}) \rho_i'(\mathbf{m}_{2p}) -$$

$$- [2l_{i,2p}-2] \big([l_{i,2p}][l_{i,2p}-1] \big)^{p-\nu-2} \rho_i'(\mathbf{m}_{2p}^{-i}) \tau_i'(\mathbf{m}_{2p}) \Big) = 0, \quad \nu = 1, 2, \cdots, p-1, \tag{1.4.71}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \Big([2l_{i,2p}+2] \big([l_{i,2p}][l_{i,2p}+1] \big)^{p-2} \tau_i'(\mathbf{m}_{2p}^{+i}) \rho_i'(\mathbf{m}_{2p}) -$$

$$- [2l_{i,2p}-2] \big([l_{i,2p}][l_{i,2p}-1] \big)^{p-2} \rho_i'(\mathbf{m}_{2p}^{-i}) \tau_i'(\mathbf{m}_{2p}) \Big) = E. \tag{1.4.72}$$

З останніх співвідношень випливає, що для будь-якого $a \in U_q'(\mathrm{so}_{2p+1})$ оператори $\rho_i(\mathbf{m}_{2p+1})$, $\tau_i(\mathbf{m}_{2p+1})$ та $\sigma(\mathbf{m}_{2p+1})$ задовільняють співвідношення

$$T_{\mathbf{m}_{2p+1}}(a) \sigma(\mathbf{m}_{2p+1}) = \sigma(\mathbf{m}_{2p+1}) T_{\mathbf{m}_{2p+1}}(a), \tag{1.4.73}$$

$$\rho_i(\mathbf{m}_{2p+1}^{-i}) \tau_i(\mathbf{m}_{2p+1}) T_{\mathbf{m}_{2p+1}}(a) = T_{\mathbf{m}_{2p+1}}(a) \rho_i(\mathbf{m}_{2p+1}^{-i}) \tau_i(\mathbf{m}_{2p+1}). \tag{1.4.74}$$

Подібні співвідношення задовільняються $\rho_i'(\mathbf{m}_{2p})$ та $\tau_i'(\mathbf{m}_{2p})$.

Зауваження. Співвідношення (1.4.58)–(1.4.63) та співвідношення (1.4.67)–(1.4.70) є наслідком співвідношення (1.2.2) з $i = n-1$. Інші співвідношення з (1.2.1)–(1.2.3), що містять $I_{n,n-1}$, задовільняються операторами (1.4.56) та (1.4.57). Це є наслідком того, що $I_{n,n-1}$ є компонентою векторного оператора.

Твердження 1.8. *Нехай* $\xi \in \mathcal{H}$ *належіть підпростору* $\mathcal{H}_{\mathbf{m}_{2p+1}}$, *на якому реалізовано незвідне представлення* $T_{\mathbf{m}_{2p+1}}$ *алгебри* $U'_q(\mathrm{so}_{2p+1})$.
Тоді $\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})\xi \in \mathcal{H}_{\mathbf{m}^{+j}_{2p+1}}$ *та* $\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1})\xi \in \mathcal{H}_{\mathbf{m}^{-j}_{2p+1}}$, *де* $\mathcal{H}_{\mathbf{m}^{\pm j}_{2p+1}}$ *є підпросторами* $\mathcal{H}$, *на яких, відповідно, реалізовані незвідні представлення* $T_{\mathbf{m}^{\pm j}_{2p+1}}$ *алгебри* $U'_q(\mathrm{so}_{2p+1})$. *Всі вектори* $\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})(T_{\mathbf{m}_{2p+1}}(a)\xi)$, $a \in U'_q(\mathrm{so}_{2p+1})$, *та всі вектори* $\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1})(T_{\mathbf{m}_{2p+1}}(a)\xi)$, $a \in U'_q(\mathrm{so}_{2p+1})$, *належать, відповідно, цим підпросторам* $\mathcal{H}_{\mathbf{m}^{+j}_{2p+1}}$ *та* $\mathcal{H}_{\mathbf{m}^{-j}_{2p+1}}$.

Це твердження є наслідком Твердження 1.3. Доведення наступної теореми дано в [87].

Теорема 1.5. *Якщо вказане вище припущення є справедливим, тоді звуження незвідного представлення* T *алгебри* $U'_q(\mathrm{so}_n)$ *на підалгебру* $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ *містить кожне незвідне представлення цієї підалгебри не більше ніж один раз.*

Той факт, що будь-яке незвідне представлення T алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ містить кожне незвідне представлення підалгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ не більше ніж один раз означає, що оператори $\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})$, $\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1})$, $\sigma_j(\mathbf{m}_{2p+1})$, $\rho'_j(\mathbf{m}_{2p})$ та $\tau'_j(\mathbf{m}_{2p})$ в (1.4.56) та (1.4.57) є числовими функціями. Отже, формула (1.4.56) може бути представлена у вигляді

$$T(I_{2p+2,2p+1})|\mathbf{m}_{2p+1},\alpha\rangle = \sum_j \left(\prod_{r=1}^{p}([l_{j,2p+1}]^2-[l_{r,2p}]^2)\right)^{1/2} \rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})|\mathbf{m}^{+j}_{2p+1},\alpha\rangle$$

$$+\sum_j \left(\prod_{r=1}^{p}([l_{j,2p+1}-1]^2-[l_{r,2p}]^2\right)^{1/2} \tau_j(\mathbf{m}_{2p+1})|\mathbf{m}^{-j}_{2p+1},\alpha\rangle+$$

$$\left(\prod_{r=1}^{p}[l_{r,2p}]\right)\sigma(\mathbf{m}_{2p+1})|\mathbf{m}_{2p+1}^{+j},\alpha\rangle \tag{1.4.75}$$

та формула (1.4.57) у вигляді

$$T(I_{2p+1,2p})|\mathbf{m}_{2p},\alpha\rangle =$$

$$=\sum_j\left(\prod_{r=1}^{p-1}([l_{j,2p}+1/2]^2-[l_{r,2p-1}-1/2]^2)\right)^{1/2}\rho'_j(\mathbf{m}_{2p})|\mathbf{m}_{2p}^{+j},\alpha\rangle+$$

$$+\sum_j\left(\prod_{r=1}^{p-1}([l_{j,2p}-1/2]^2-[l_{r,2p-1}-1/2]^2)\right)^{1/2}\tau'_j(\mathbf{m}_{2p})|\mathbf{m}_{2p}^{-j},\alpha\rangle, \tag{1.4.76}$$

де $\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})$, $\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1})$, $\sigma_j(\mathbf{m}_{2p+1})$, $\rho'_j(\mathbf{m}_{2p})$ та $\tau'_j(\mathbf{m}_{2p+1})$ — відповідні числові функції.

Давайте знайдемо явний вигляд для функцій ρ_j, τ_j, σ, ρ'_j та τ'_j з (1.4.75) і (1.4.76). Ми спочатку розглянемо випадок $U'_q(\mathrm{so}_{2p+2})$. З (1.4.61) ми отримуємо співвідношення $[l_{j,2p+1}+1]\sigma(\mathbf{m}_{2p+1}^{+j}) = [l_{j,2p+1}-1]\sigma(\mathbf{m}_{2p+1})$. Це означає, що $\prod_{j=1}^{p}[l_{j,2p+1}][l_{j,2p+1}-1]\cdot\sigma(\mathbf{m}_{2p+1})$ є незалежним від $l_{j,2p+1}$, $j=1,2,\cdots,p$, тобто

$$\sigma(\mathbf{m}_{2p+1})=\prod_{j=1}^{p}([l_{j,2p+1}][l_{j,2p+1}-1])^{-1}\cdot\sigma, \tag{1.4.77}$$

де σ — константа. (Зауважимо що, якщо $l_{p,2p+1}=1$, тоді $\sigma(\mathbf{m}_{2p+1})\equiv 0$.)

Ми виводимо з (1.4.58)–(1.4.60) наступне співвідношення

$$[l_{i,2p+1}-l_{j,2p+1}+1][l_{i,2p+1}+l_{j,2p+1}+1]\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1}^{+i})\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1}^{+i+j})=$$

$$=[l_{i,2p+1}-l_{j,2p+1}-1][l_{i,2p+1}+l_{j,2p+1}-1]\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1}^{+j}), \tag{1.4.78}$$

яке показує (після множення обох частин на $[l_{i,2p+1}]^2-[l_{j,2p+1}]^2$), що вираз

$$([l_{i,2p+1}]^2-[l_{j,2p+1}]^2)([l_{i,2p+1}-1]^2-[l_{j,2p+1}]^2)\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1}^{+j}) \tag{1.4.79}$$

є незалежним від $l_{i,2p+1}$. Тому вираз

$$\beta_j(l_{j,2p+1}) = \rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1}^{+j})[l_{j,2p+1}]^2[2l_{j,2p+1}-1][2l_{j,2p+1}+1]\times$$

$$\times\prod_{r\neq j}([l_{r,2p+1}]^2-[l_{j,2p+1}]^2)([l_{r,2p+1}-1]^2-[l_{j,2p+1}]^2) \tag{1.4.80}$$

залежить лише від $l_{j,2p+1}$.

Для того, щоб знайти $\beta_j(l_{j,2p+1})$ ми переписуємо співвідношення (1.4.64)–(1.4.66) для $\beta_i(l_{i,2p+1})$:

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{[2l_{i,2p+1}-1]}\left(\frac{\beta_i(l_{i,2p+1})}{[l_{i,2p+1}]^2c_i(l_{i,2p+1})}-\frac{\beta_i(l_{i,2p+1}-1)}{[l_{i,2p+1}-1]^2c_i(l_{i,2p+1}-1)}\right)=$$

$$=(-1)^{p+1}\frac{\sigma^2}{\prod_{r=1}^{p}[l_{r,2p+1}]^2[l_{r,2p+1}-1]^2}, \tag{1.4.81}$$

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{[2l_{i,2p+1}-1]}\left(\frac{[l_{i,2p+1}]^{2\nu}\beta_i(l_{i,2p+1})}{c_i(l_{i,2p+1})}-\frac{[l_{i,2p+1}-1]^{2\nu}\beta_i(l_{i,2p+1}-1)}{c_i(l_{i,2p+1}-1)}\right)=0, \tag{1.4.82}$$

$$\nu=0,1,2,\cdots,p-3,$$

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{[2l_{i,2p+1}-1]}\left(\frac{[l_{i,2p+1}]^{2p-4}\beta_i(l_{i,2p+1})}{c_i(l_{i,2p+1})}-\frac{[l_{i,2p+1}-1]^{2p-4}\beta_i(l_{i,2p+1}-1)}{c_i(l_{i,2p+1}-1)}\right)=1, \tag{1.4.83}$$

де

$$c_i(l_{i,2p+1})=\prod_{r\neq i}([l_{r,2p+1}]^2-[l_{i,2p+1}]^2)([l_{r,2p+1}-1]^2-[l_{i,2p+1}]^2).$$

Для кожної фіксованої σ, ця система рівнянь має єдиний розв'язок $\beta_i(l_{i,2p+1})$, $i=1,2,\cdots,p$, оскільки визначник цієї системи не зануляється. Для того, щоб дати цей розв'язок, ми візьмемо до уваги константи

$$l_{r+1,2p+2}=l_{r,2p+1}^{\min}-1, \qquad r=1,2,\cdots,p,$$

де $l_{r,2p+1}^{\min}$, $r = 1, 2, \cdots, p$, — мінімальні значення $l_{r,2p+1}$ і представимо σ (без зменшення загальності) у вигляді

$$\sigma = \mathrm{i} \prod_{r=1}^{p+1} [l_{r,2p+2}], \tag{1.4.84}$$

де $l_{1,2p+2}$ — число, яке визначається σ.

З визначення чисел $l_{r,2p+2}$, $r = 2, 3, \cdots, p+1$, і з зауваження після Теореми 1.5 випливає, що

$$l_{2,2p+2} > l_{3,2p+2} > \cdots > l_{p+1,2p+2}.$$

Твердження 1.8. *Розв'язки системи (1.4.81)–(1.4.83) даються виразами*

$$\beta_i(l_{i,2p+1}) = \prod_{r=1}^{p+1} ([l_{i,2p+1}]^2 - [l_{r,2p+2}]^2) =$$

$$= \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j e_{p-j+1}([l_{1,2p+2}]^2, \cdots, [l_{p+1,2p+2}]^2)[l_{i,2p+1}]^{2j}, \tag{1.4.85}$$

де $e_r(x_1, \cdots x_{p+1})$ — елементарні симетричні поліноми від $x_1, \cdots, x_{p+1}$.

Доведення. Для того, щоб довести це твердження ми використовуємо співвідношення

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{z_i^m}{\prod_{r=1, r\neq i}^{s} (z_i - z_r)} = \begin{cases} 1 & m = s-1, \\ 0 & 0 \leq m \leq s-2, \end{cases} \tag{1.4.86}$$

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{z_i \prod_{r=1, r\neq i}^{s} (z_i - z_r)} = \frac{(-1)^{s-1}}{z_1 \cdots z_s} \tag{1.4.87}$$

(див., наприклад, [115]). Ми покладемо у ці співвідношення $s = 2p$ і використаємо позначення $z_i = x_i, z_{i+p} = y_i$, $i = 1, 2, \cdots, p$. Тоді вони можуть бути переписані як

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{x_i - y_i} \left(\frac{x_i^m}{\prod_{r\neq i} (x_r - x_i)(y_r - x_i)} - \frac{y_i^m}{\prod_{r\neq i} (x_r - y_i)(y_r - y_i)} \right) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad m = 2p-1, \\ 0, & \text{якщо} \quad 0 \le m \le 2p-2, \end{cases} \tag{1.4.88}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{x_i - y_i} \left(\frac{1}{x_i \prod_{r \neq i}(x_r - x_i)(y_r - x_i)} - \frac{1}{y_i \prod_{r \neq i}(x_r - y_i)(y_r - y_i)} \right) =$$

$$= \frac{-1}{x_1 \cdots x_p y_1 \cdots y_p}. \tag{1.4.89}$$

Ми покладаємо $l_{j,2p+1} = l_{j,2p+1}^{\min}$, $j = 1, 2, \cdots, p$, у співвідношеннях (1.4.81)–(1.4.83) , де $l_{j,2p+1}^{\min}$ — мінімальне значення для $l_{j,2p+1}$. Взявши до уваги те, що $\beta_j(l_{j,2p+1}^{\min} - 1) = 0$, $j = 1, 2, \cdots, p$, ми бачимо, що (1.4.81)–(1.4.83) перетворюються у систему p рівнянь на $\beta_j(l_{j,2p+1}^{\min})$, $j = 1, 2, \cdots, p$. Ми підставляємо в цю систему вираз (1.4.85) для $\beta_i(l_{i,2p+1}^{\min})$ і тоді скорочуємо $p-1$ множник у виразі для $\beta_i(l_{i,2p+1}^{\min})$ з відповідними частинами виразу для $c_i(l_{i,2p+1}^{\min})$, які знаходяться у знаменнику. В результаті ми отримуємо систему співвідношень, що містить тільки множник $([l_{1,2p+2}]^2 - [l_{i,2p+1}^{\min}]^2)$ з $\beta_i(l_{i,2p+1}^{\min})$. Наші вирази для $\beta_i(l_{i,2p+1}^{\min})$ є правильними якщо правильними є ці співвідношення. Легко бачити, що вони зводяться до співвідношень (1.4.86) та (1.4.87) при $s = p$ якщо покласти $z_i = [l_{i,2p+1}^{\min}]^2$, $i = 1, 2, \cdots, p$.

Далі ми доводимо справедливість виразу (1.4.85) для $\beta_i(l_{i,2p+1})$ методом індукції. А саме, спершe ми покладаємо $l_{j,2p+1} = l_{j,2p+1}^{\min}$, $j \neq 1$, і послідовно проводимо доведення для $\beta_1(l_{1,2p+1}^{\min}+1)$, $\beta_1(l_{1,2p+1}^{\min}+2), \cdots$, $\beta_1(l_{1,2p+1}^{\max}-1)$. Тоді ми покладаємо $l_{j,2p+1} = l_{j,2p+1}^{\min}$, $j \neq 1,\ 2$, і проводимо доведення для $\beta_2(l_{2,2p+1}^{\min}+1)$, $\beta_2(l_{2,2p+1}^{\min}+2), \cdots$, $\beta_2(l_{2,2p+1}^{\max}-1)$ при довільному значенні $l_{1,2p+1}$. Ми продовжуємо цю процедуру до $\beta_p(l_{p,2p+1})$. На кожному кроці це доведення проводиться з використанням співвідношень (1.4.88) та (1.4.89). А саме, ми покладаємо в ці співвідношення $x_i = [l_{i,2p+1}]^2$ та $y_i = [l_{i,2p+1} - 1]^2$, тоді множимо кожен з них на відповідний симетричний поліном з (1.4.85), і підсумовуємо почленно щоб отримати співвідношення (1.4.81), тоді співвідношення (1.4.82) для $\nu = 0, 1, 2, \cdots, p-3$, і наприкінець співвідношення (1.4.83). Це доводить, що $\beta_j(l_{j,2p+1})$, $j = 1, 2, \cdots, p$, для даних значень $l_{j,2p+1}$ задовільняє співвідношення (1.4.81)–(1.4.83). Зауважимо, що $\beta_i(l^{\max}_{i,2p+1}) = 0$ оскільки в цьому випадку $\rho_i(\mathbf{m}^{\max}_{2p+1}) = 0$. Твердження доведене.

Отже, ми знайшли вирази для $\beta_j(l_{j,2p+1})$, $j = 1, 2, \cdots, p$, залежні від $l_{1,2p+2}$, та відповідні значення σ. Для того, щоб розділити $\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})$ та $\tau_j(\mathbf{m}^{+j}_{2p+1})$ у виразі (1.4.80) для $\beta_j(l_{j,2p+1})$ ми зауважимо, що ці функції не визначаються представленням однозначно. Неоднозначність у виборі $\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})$ та $\tau_j(\mathbf{m}^{+j}_{2p+1})$ пов'язана з вибором базисних елементів. А саме, в базисі

$$|\mathbf{m}_{2p+1}, \alpha\rangle' = \prod_{r=1}^{p} \omega_r(l_{r,2p+1}) \cdot |\mathbf{m}_{2p+1}, \alpha\rangle,$$

де $\omega_r(l_{r,2p+1})$ — чисельний множник залежний тільки від $l_{r,2p+1}$, ми отримуємо дещо інші формули для оператора $T(I_{2p+2,2p+1})$. Насправді, якщо перейти до базиса $\{|\mathbf{m}_{2p+1}, \alpha\rangle'\}$ у формулі (1.4.75), тоді коефіцієнт $\sigma(\mathbf{m}_{2p+1})$ залишається без змін, і $\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})$ та $\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1})$ перетворюються у

$$\hat{\rho}_j(\mathbf{m}_{2p+1}) = \frac{\omega_j(l_{j,2p+1})}{\omega_j(l_{j,2p+1}+1)}\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1}), \qquad \hat{\tau}_j(\mathbf{m}_{2p+1}) = \frac{\omega_j(l_{j,2p+1})}{\omega_j(l_{j,2p+1}-1)}\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1}).$$

Більше того, ми маємо $\hat{\rho}_j(\mathbf{m}_{2p+1})\hat{\tau}_j(\mathbf{m}^{+j}_{2p+1}) = \rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})\tau_j(\mathbf{m}^{+j}_{2p+1})$. Зрозуміло, що множник $\omega(l_{j,2p+1})$ може бути обраним таким чином, що $\hat{\rho}_j(\mathbf{m}_{2p+1}) = -\hat{\tau}_j(\mathbf{m}^{+j}_{2p+1})$, тобто,

$$\frac{\omega_j(l_{j,2p+1})}{\omega_j(l_{j,2p+1}+1)}\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1}) = -\frac{\omega_j(l_{j,2p+1}+1)}{\omega_j(l_{j,2p+1})}\tau_j(\mathbf{m}^{+j}_{2p+1}).$$

З цього ми отримуємо

$$\left(\frac{\omega_j(l_{j,2p+1})}{\omega_j(l_{j,2p+1}+1)}\right)^2 = -\frac{\tau_j(\mathbf{m}^{+j}_{2p+1})}{\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})}.$$

Це співвідношення для $l_{j,2p+1} = l^{\min}_{j,2p+1}, l^{\min}_{j,2p+1}+1, l^{\min}_{j,2p+1}+2, \cdots$ дає те, що

$$\omega_j(l_{j,2p+1}) = c\left(\prod_{l=l^{\min}_{j,2p+1}}^{l_{j,2p+1}-1}\frac{\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})}{\tau_j(\mathbf{m}^{+j}_{2p+1})}\right)^{1/2},$$

де c є постійною. Отже, ми можемо розглядати з самого початку базис, для якого

$$\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1}) = -\tau_j(\mathbf{m}^{+j}_{2p+1}). \tag{1.4.90}$$

Тоді з (1.4.80), (1.4.85) та (1.4.90) випливає, що

$$\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1}) = \left(\frac{[l_{j,2p+1}]^{-2}[2l_{j,2p+1}-1]^{-1}\prod_{r=1}^{p+1}([l_{r,2p+2}]^2-[l_{j,2p+1}]^2)}{[l_{j,2p+1}+1]\prod_{r\neq j}([l_{r,2p+1}]^2-[l_{j,2p+1}]^2)([l_{r,2p+1}-1]^2-[l_{j,2p+1}]^2)}\right)^{1/2} \tag{1.4.91}$$

де $l_{r+1,2p+2} = l^{\min}_{r,2p+1}-1$, $r = 1, 2, \cdots p$, та $l_{1,2p+2}$ є параметром, який разом з $l_{r,2p+2}$, $r = 2, 3, \cdots, p+1$, має визначати незвідні представлення. У наступному пункті ми знайдемо область параметрів $l_{r,2p+2}$, $r = 1, 2, \cdots, p+1$.

Підставивши вирази (1.4.90) та (1.4.91) для $\rho_j(\mathbf{m}_{2p+1})$ та $\tau_j(\mathbf{m}_{2p+1})$ у (1.4.75), ми отримуємо

$$T(I_{2p+2,2p+1})|\mathbf{m}_{2p+1},\alpha\rangle = \sum_{j=1}^{p}\frac{B^j_{2p+1}(\mathbf{m}_{2p+1})}{b(l_{j,2p+1})[l_{j,2p+1}]}|\mathbf{m}^{+j}_{2p+1},\alpha\rangle -$$

$$-\sum_{j=1}^{p}\frac{B^j_{2p+1}(\mathbf{m}^{-j}_{2p+1})}{b(l_{j,2p+1}-1)[l_{j,2p+1}-1]}|\mathbf{m}^{-j}_{2p+1},\alpha\rangle + \mathrm{i}\,C_{2p+1}(\mathbf{m}_{2p+1})|\mathbf{m}_{2p+1},\alpha\rangle, \tag{1.4.92}$$

де $b(l_{j,2p+1}) = ([2l_{j,2p+1}+1][2l_{j,2p+1}-1])^{1/2}$ та

$$B^j_{2p+1}(\mathbf{m}_{2p+1}) =$$

$$= \left(\frac{\prod_{i=1}^{p+1}[l_{i,2p+2}+l_{j,2p+1}][l_{i,2p+2}-l_{j,2p+1}]\prod_{i=1}^{p}[l_{i,2p}+l_{j,2p+1}][l_{i,2p}-l_{j,2p+1}]}{\prod_{i\neq j}^{p}[l_{i,2p+1}+l_{j,2p+1}][l_{i,2p+1}-l_{j,2p+1}][l_{i,2p+1}+l_{j,2p+1}-1][l_{i,2p+1}-l_{j,2p+1}-1]} \right)^{1/2},$$

$$C_{2p+1}(\mathbf{m}_{2p+1}) = \frac{\prod_{s=1}^{p+1}[l_{s,2p+2}]\prod_{s=1}^{p}[l_{s,2p}]}{\prod_{s=1}^{p}[l_{s,2p+1}][l_{s,2p+1}-1]}.$$

Ця формула співпадає з (1.2.12) якщо замінити $p+1$ на p. Ми маємо визначити допустимі значення для параметрів $l_{i,2p+2}$, $i = 1, 2, \cdots, p+1$.

Зараз ми розглянемо випадок $U'_q(\mathrm{so}_{2p+1})$. Ми маємо можливі вирази для $\rho'_j(\mathbf{m}_{2p})$ та $\tau'_j(\mathbf{m}_{2p})$ з (1.4.76).

Ми виводимо з (1.4.67)–(1.4.69) співвідношення

$$[l_{i,2p}+l_{j,2p}][l_{i,2p}-l_{j,2p}-1][l_{i,2p}+l_{j,2p}+1][l_{i,2p}-l_{j,2p}]\rho'_j(\mathbf{m}_{2p})\tau'_j(\mathbf{m}_{2p}^{+j}) =$$

$$= [l_{i,2p}+l_{j,2p}][l_{i,2p}-l_{j,2p}-1][l_{i,2p}+l_{j,2p}-1][l_{i,2p}-l_{j,2p}-2]\rho'_j(\mathbf{m}_{2p}^{-i})\tau'_j(\mathbf{m}_{2p}^{-i+j}),$$

яке показує, що вираз

$$([l_{i,2p}][l_{i,2p}-1]-[l_{j,2p}][l_{j,2p}+1])([l_{i,2p}+1][l_{i,2p}]-[l_{j,2p}][l_{j,2p}+1])\rho'_j(\mathbf{m}_{2p})\tau'_j(\mathbf{m}_{2p}^{+j})$$

не залежить від $l_{i,2p}$. Тому, вираз

$$\beta'_j(l_{j,2p}) = \rho'_j(\mathbf{m}_{2p})\tau'_j(\mathbf{m}_{2p}^{+j})(q^{l_{j,2p}}+q^{-l_{j,2p}})(q^{l_{j,2p}+1}+q^{-l_{j,2p}-1})$$

$$\times \prod_{r\neq j}([l_{r,2p}][l_{r,2p}-1]-[l_{j,2p}][l_{j,2p}+1])([l_{r,2p}+1][l_{r,2p}]-[l_{j,2p}][l_{j,2p}+1])$$

залежить тільки від $l_{j,2p}$. Далі ми переписуємо співвідношення (1.4.71) та (1.4.72) для $\beta'_j(l_{j,2p})$ і таким самим чином як в Твердженні 1.9, використовуючи рівності (1.4.86) та (1.4.88), виводимо наступне твердження.

Твердження 1.10. *Розв'язки системи рівнянь для $\beta'_j(l_{j,2p})$ даютьcя виразами*

$$\beta'_j(l_{j,2p}) = \prod_{r=1}^{p}([l_{j,2p}][l_{j,2p}+1]-[l_{r,2p+1}][l_{r,2p+1}-1]) =$$

$$= \prod_{r=1}^{p} [l_{r,2p+1} + l_{j,2p}][l_{r,2p+1} - l_{j,2p} - 1] =$$

$$= \sum_{j=0}^{p} (-1)^{p-j} e_{p-j}([l_{1,2p+1}][l_{1,2p+1} - 1], \cdots, [l_{p,2p+1}][l_{p,2p+1} - 1])([l_{j,2p}][l_{j,2p} + 1])^j,$$

де $l_{i,2p+1} = l_{i,2p}^{\max} + 1$, $i = 1, 2, \cdots, p$, *та* $e_r(x_1, \cdots, x_p)$ *— елементарні симетричні поліноми від* $x_1, \cdots, x_p$.

Розділяючи $\rho'_j(\mathbf{m}_{2p})$ та $\tau'_j(\mathbf{m}_{2p}^{+j})$ в $\beta'_j(l_{j,2p})$ як в попередньому випадку, ми отримуємо для оператора $T(I_{2p+1,2p})$ незвідного представлення T алгебри $U'_q(\mathrm{so}_{2p+1})$ наступне:

$$T(I_{2p+1,2p})|\mathbf{m}_{2p}, \alpha\rangle = \sum_{j=1}^{p} \frac{A_{2p}^{j}(\mathbf{m}_{2p})}{a(l_{j,2p})} |\mathbf{m}_{2p}^{+j}, \alpha\rangle - \sum_{j=1}^{p} \frac{A_{2p}^{j}(\mathbf{m}_{2p}^{-j})}{a(l_{j,2p} - 1)} |\mathbf{m}_{2p}^{-j}, \alpha\rangle, \quad (1.4.93)$$

де $a(l_{j,2p}) = \{(q^{l_{j,2p}+1} + q^{-l_{j,2p}-1})(q^{l_{j,2p}} + q^{-l_{j,2p}})\}^{1/2}$ та

$$A_{2p}^{j}(\mathbf{m}_{2p}) =$$

$$= \left(\frac{\prod_{i=1}^{p} [l_{i,2p+1} + l_{j,2p}][l_{i,2p+1} - l_{j,2p} - 1] \prod_{i=1}^{p-1} [l_{i,2p-1} + l_{j,2p}][l_{i,2p-1} - l_{j,2p} - 1]}{\prod_{i \neq j}^{p} [l_{i,2p} + l_{j,2p}][l_{i,2p} - l_{j,2p}][l_{i,2p} + l_{j,2p} + 1][l_{i,2p} - l_{j,2p} - 1]} \right)^{1/2}.$$

Отже, ми вивели явну формулу для оператора $T(I_{n,n-1})$ незвідного представлення $U'_q(\mathrm{so}_n)$. Для того, щоб отримати класифікацю незвідних представлень класичного типу ми маємо (використовуючи (1.4.92) та (1.4.93)) вирахувати область параметрів $l_{1n}, l_{2n}, \cdots, l_{pn}$, $p = \lfloor n/2 \rfloor$.

1.4.4. Приведені матричні елементи для представлень некласичного типу. Ми припускаємо, що справедливе Припущення з п. 1.4.3.

Твердження 1.11. *Нехай T — незвідне скінченновимірне представлення алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ некласичного типу. Тоді розклад $T{\downarrow}_{U'_q(\mathrm{so}_{n-1})}$ на незвідні складові містить незвідні представлення $T_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1}}$ з тим самим ϵ.*

Доведення. Твердження випливає з Твердження 1.6 і з того факту, що розклад тензорних добутків $T_1 \otimes T_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1}}$, де T_1 — векторне представлення, на незвідні складові містить незвідні представлення некласичного типу з ϵ що співпадає з ϵ в $T_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1}}$. Твердження доведене.

Нехай T таке, як в Твердженні 1.11 та нехай $\mathcal{H}$ — простір на якому діє T. Нехай

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\mathbf{m}_{n-1},i} \mathcal{V}_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1},i}, \tag{1.4.94}$$

де $\mathcal{V}_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1},i}$ — лінійний підпростір, на якому реалізовано незвідне представлення $T_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1}}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$, та i розділяє кратні незвідні представлення у розкладі. Ми також вводимо підпростори

$$\mathcal{V}_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1}} = \bigoplus_{i} \mathcal{V}_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1},i},$$

Ми беремо базис ГЦ у кожному з підпросторів $\mathcal{V}_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1},i}$ та позначаємо базисні вектори через $|\epsilon, \mathbf{m}_{n-1}, i, \alpha\rangle$, де $\alpha \equiv \alpha_{n-2}$ — відповідні таблиці ГЦ. Нехай

$$\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1}} = \bigoplus_{i} \mathbb{C}|\epsilon, \mathbf{m}_{n-1}, i, \alpha\rangle. \tag{1.4.95}$$

Ми знаємо з Твердження 1.6, що оператор $T(I_{n,n-1})$ перетворює вектор $|\epsilon, \mathbf{m}_{n-1}, i, \alpha\rangle$ в лінійну комбінацію векторів підпросторів $\mathcal{V}_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1}}$ та $\mathcal{V}_{\epsilon,\mathbf{m}^{\pm s}_{n-1}}$, $s = 1, 2, \cdots, k$, де $k = \lfloor \frac{1}{2}(n-1) \rfloor$. Оскільки оператор $T(I_{n,n-1})$ комутує з усіма операторами $T(I_{s,s-1})$, $s = 2, 3, \cdots, n-2$ (тобто, з операторами, що відповідають елементам підалгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-2})$), від відображає підпростори $\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1}}$ в суму підпросторів $\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}'_{n-1}}$ з тим самим α.

Завдяки ТВЕ (див. формулу (1.4.55)), дія оператора $T(I_{n,n-1})$ на підпростір $\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_{n-1}}$ може бути представлена у вигляді

$$T(I_{2p+2,2p+1})\downarrow_{\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1}}} = \sum_{j=1}^{p}\left(\prod_{r=1}^{p}[l_{j,2p+1}+l_{r,2p}][l_{j,2p+1}-l_{r,2p}]\right)^{1/2}\rho_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})+$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\left(\prod_{r=1}^{p}[l_{j,2p+1}+l_{r,2p}-1][l_{j,2p+1}-l_{r,2p}-1]\right)^{1/2}\tau_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})+$$

$$+\left(\prod_{r=1}^{p}[l_{r,2p}]_+\right)\sigma(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1}), \qquad (1.4.96)$$

якщо $n=2p+2$ або у вигляді

$$T(I_{2p+1,2p})\downarrow_{\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_{2p}}} = \sum_{j=1}^{p}\left(\prod_{r=1}^{p-1}[l_{j,2p}+l_{r,2p-1}][l_{j,2p}-l_{r,2p-1}+1]\right)^{1/2}\rho'_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})+$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\left(\prod_{r=1}^{p-1}[l_{j,2p}+l_{r,2p-1}-1][l_{j,2p}-l_{r,2p-1}]\right)^{1/2}\tau'_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}) \qquad (1.4.97)$$

якщо $n=2p{+}1$, де $\rho_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})$, $\rho'_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})$, $\tau_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})$, $\tau'_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})$ та $\sigma(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})$ — оператори, такі що

$$\rho_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1}):\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1}}\to\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}^{+j}_{2p+1}}, \qquad \rho'_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}):\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_{2p}}\to\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}^{+j}_{2p}},$$

$$\tau_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1}):\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1}}\to\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}^{-j}_{2p+1}},$$

$$\tau'_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}):\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_{2p}}\to\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}^{-j}_{2p}}, \quad \text{якщо } j\neq p \text{ або } m_{p,2p}\geq\tfrac{3}{2},$$

$$\tau'_p(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}):\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_{2p}}\to\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_{2p}}, \quad \text{if } m_{p,2p}=\tfrac{1}{2},$$

$$\sigma(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1}):\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1}}\to\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1}}.$$

Коефіцієнти в (1.4.96) та (1.4.97) — відповідні ККГ алгебри $U'(\mathrm{so}_{n-1})$, які взяті з [76]. Як ми знаємо з ТВЕ, $\rho_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})$, $\rho'_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})$, $\tau_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})$, $\tau'_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})$ та $\sigma(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})$ є незалежними від α. Залежність від α міститься в ККГ.

Спочатку ми розглянемо випадок алгебри $U_q'(\mathrm{so}_{2p+2})$. Ми діємо обома частинами співвідношення

$$I_{2p+1,2p}I^2_{2p+2,2p+1}-(q+q^{-1})I_{2p+2,2p+1}I_{2p+1,2p}I_{2p+2,2p+1}+I^2_{2p+2,2p+1}I_{2p+1,2p}=-I_{2p+1,2p}$$

на вектори підпростору $\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1}}$ з фіксованим ϵ, $\mathbf{m}_{2p+1}$, α та візьмемо до уваги формулу (1.4.96). В результаті ми отримаємо для $\rho_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})$, $\tau_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})$ та $\sigma(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})$ співвідношення

$$[l_{i,2p+1}-l_{j,2p+1}+1]\rho_j(\epsilon,\mathbf{m}^{+i}_{2p+1})\rho_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})$$

$$-[l_{i,2p+1}-l_{j,2p+1}-1]\rho_i(\epsilon,\mathbf{m}^{+j}_{2p+1})\rho_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})=0, \tag{1.4.98}$$

$$[l_{i,2p+1}+l_{j,2p+1}]\tau_i(\epsilon,\mathbf{m}^{+j}_{2p+1})\rho_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})-$$

$$-[l_{i,2p+1}+l_{j,2p+1}-2]\rho_j(\epsilon,\mathbf{m}^{-i}_{2p+1})\tau_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})=0, \tag{1.4.99}$$

$$[l_{i,2p+1}-l_{j,2p+1}+1]\tau_i(\epsilon,\mathbf{m}^{-j}_{2p+1})\tau_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})-$$

$$-[l_{i,2p+1}-l_{j,2p+1}-1]\tau_j(\epsilon,\mathbf{m}^{-i}_{2p+1})\tau_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})=0, \tag{1.4.100}$$

$$[l_{j,2p+1}+1]_+\sigma(\epsilon,\mathbf{m}^{+j}_{2p+1})\rho_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})-[l_{j,2p+1}-1]_+\rho_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})\sigma(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})=0, \tag{1.4.101}$$

$$[l_{j,2p+1}]_+\tau_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})\sigma(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})-[l_{j,2p+1}-2]_+\sigma(\epsilon,\mathbf{m}^{-j}_{2p+1})\tau_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})=0, \tag{1.4.102}$$

$$\sum_{i=1}^{p}\Bigg(-[2l_{i,2p+1}+1]\prod_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{p}([l_{i,2p+1}]_+^2-[l_{r,2p}]_+^2)\ \tau_i(\epsilon,\mathbf{m}^{+i}_{2p+1})\rho_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})+$$

$$+[2l_{i,2p+1}-3]\prod_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{p}([l_{i,2p+1}-1]_+^2-[l_{r,2p}]_+^2)\ \rho_i(\epsilon,\mathbf{m}^{-i}_{2p+1})\tau_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})\Bigg)-$$

$$\prod_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{p}[l_{r,2p}]_+^2\cdot\sigma^2(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})=-E, \tag{1.4.103}$$

де $i \neq j$, E — одиничний оператор на $\mathcal{V}^{\alpha}_{\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1}}$ та k — фіксоване число з множини $\{1, 2, \cdots, p\}$.

Незвідні представлення $T_{\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1}}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_{2p+1})$ при звуженні на $U'_q(\mathrm{so}_{2p})$ розкладаються на незвідні представлення $T_{\epsilon,\mathbf{m}_{2p}}$ цієї підалгебри, такі, що числа $\mathbf{m}_{2p}$ задовільняють нерівностям визначеними таблицями ГЦ. При цьому, кожне з чисел $l_{r,2p}$ пробігає певну множину значень. Припускаючи, що жодне з $l_{r,2p}$, $r \neq p$, не є фіксованим для представлення $T_{\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1}}$, ми прирівнюємо в (1.4.103) доданки з однаковою залежністю від $[l_{r,2p}]_+^2$ та отримуємо співвідношення

$$\sum_{i=1}^{p}\Big([2l_{i,2p+1}+1]\tau_i(\epsilon,\mathbf{m}^{+i}_{2p+1})\rho_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})- -[2l_{i,2p+1}-3]\rho_i(\epsilon,\mathbf{m}^{-i}_{2p+1})\tau_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})\Big) = (-1)^p\sigma^2(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1}), \tag{1.4.104}$$

$$\sum_{i=1}^{p}\Big([2l_{i,2p+1}+1][l_{i,2p+1}]_+^{2(p-\nu-1)}\tau_i(\epsilon,\mathbf{m}^{+i}_{2p+1})\rho_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})- -[2l_{i,2p+1}-3][l_{i,2p+1}-1]_+^{2(p-\nu-1)}\rho_i(\epsilon,\mathbf{m}^{-i}_{2p+1})\tau_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})\Big) = 0, \quad \nu = 1, 2, \cdots, p-2, \tag{1.4.105}$$

$$\sum_{i=1}^{p}\Big([2l_{i,2p+1}+1][l_{i,2p+1}]_+^{2p-2}\tau_i(\epsilon,\mathbf{m}^{+i}_{2p+1})\rho_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})- -[2l_{i,2p+1}-3][l_{i,2p+1}-1]_+^{2p-2}\rho_i(\epsilon,\mathbf{m}^{-i}_{2p+1})\tau_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1})\Big) = E. \tag{1.4.106}$$

Якщо k параметрів $l_{r,2p}$, $r \neq p$, є фіксованими для представлення $T_{\epsilon,\mathbf{m}_{2p+1}}$, тоді кількість співвідношень (1.4.104)–(1.4.106) зменшується на k.

Аналогічним чином доводиться, що $\rho'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})$ та $\tau'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})$ з формули (1.4.97) задовільняють співвідношення

$$[l_{i,2p}-l_{j,2p}+1]\rho'_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}^{+i})\rho'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})-[l_{i,2p}-l_{j,2p}-1]\rho'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}^{+j})\rho'_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})=0,\quad i\neq j, \tag{1.4.107}$$

$$[l_{i,2p}+l_{j,2p}+1]\tau'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}^{+j})\rho'_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})-[l_{i,2p}+l_{j,2p}-1]\rho'_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}^{-i})\tau'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})=0,\quad i\neq j, \tag{1.4.108}$$

$$[l_{i,2p}-l_{j,2p}+1]\tau'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}^{-j})\tau'_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})-[l_{i,2p}-l_{j,2p}-1]\tau'_j(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}^{-i})\tau'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})=0,\quad i\neq j, \tag{1.4.109}$$

$$\sum_{i=1}^{p}\Bigg(-\frac{[2l_{i,2p}+2]}{[l_{i,2p}]_+[l_{i,2p}+1]_+}\times$$
$$\times\prod_{r=1}^{p-1}\Big([l_{i,2p}]_+[l_{i,2p}+1]_+-[l_{r,2p-1}]_+[l_{r,2p-1}-1]_+\Big)\tau'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}^{+i})\rho'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})+$$
$$+\frac{[2l_{i,2p}-2]}{[l_{i,2p}]_+[l_{i,2p}-1]_+}\prod_{r=1}^{p-1}\Big([l_{i,2p}]_+[l_{i,2p}-1]_+-[l_{r,2p-1}]_+[l_{r,2p-1}-1]_+\Big)\times$$
$$\times\rho'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}^{-i})\tau'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})\Bigg)=-E, \tag{1.4.110}$$

Якщо $l_{p,2p}\equiv m_{p,2p}=1/2$, тоді $\rho'_p(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}^{-p})\tau'_p(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})$ має бути заміненим на $(\tau'_p(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}))^2$. Останнє співвідношення приводить до рівностей

$$\sum_{i=1}^{p}\Big([2l_{i,2p}+2]\big([l_{i,2p}]_+[l_{i,2p}+1]_+\big)^{p-\nu-2}\tau'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}^{+i})\rho'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})+$$
$$-[2l_{i,2p}-2]\big([l_{i,2p}]_+[l_{i,2p}-1]_+\big)^{p-\nu-2}\rho'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}^{-i})\tau'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})\Big)=0,\quad \nu=1,2,\cdots,p-1, \tag{1.4.111}$$

$$\sum_{i=1}^{p}\Big([2l_{i,2p}+2]\big([l_{i,2p}]_+[l_{i,2p}+1]_+\big)^{p-2}\tau'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}^{+i})\rho'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})-$$
$$-[2l_{i,2p}-2]\big([l_{i,2p}]_+[l_{i,2p}-1]_+\big)^{p-2}\rho'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p}^{-i})\tau'_i(\epsilon,\mathbf{m}_{2p})\Big)=E. \tag{1.4.112}$$

Теорема 1.6. *Звуження незвідного представлення T некласичного типу алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ на підалгебру $U_q'(\mathrm{so}_{n-1})$ містить кожне незвідне представлення цієї підалгебри не більше ніж один раз.*

Ця теорема доводиться (з використанням співвідношень (1.4.98)–(1.4.112)) таким самим чином як і Теорема 1.5. Тому ми опускаємо це доведення.

Згідно цій теоремі, оператори $\rho_j(\epsilon, \mathbf{m}_{2p+1})$, $\rho_j'(\epsilon, \mathbf{m}_{2p})$, $\tau_j(\epsilon, \mathbf{m}_{2p+1})$, $\tau_j'(\epsilon, \mathbf{m}_{2p})$ та $\sigma(\epsilon, \mathbf{m}_{2p+1})$ — числові функції. Ми маємо знайти можливі вирази для цих функцій.

Спочатку ми розглянемо випадок алгебри $U_q'(\mathrm{so}_{2p+2})$. Ми маємо з (1.4.101):

$$\sigma(\mathbf{m}_{2p+1}) = \prod_{j=1}^{p}([l_{j,2p+1}]_+[l_{j,2p+1}-1]_+)^{-1} \cdot \sigma, \tag{1.4.113}$$

де σ — константа. Як у випадку представлень класичного типу, з співвідношень (1.4.98)–(1.4.100) ми виводимо, що вираз

$$\beta_j(l_{j,2p+1}) = \rho_j(\epsilon, \mathbf{m}_{2p+1})\tau_j(\epsilon, \mathbf{m}_{2p+1}^{+j})[l_{j,2p+1}]_+^2[2l_{j,2p+1}-1][2l_{j,2p+1}+1]\times$$
$$\times\prod_{r\neq j}([l_{r,2p+1}]^2-[l_{j,2p+1}]^2)([l_{r,2p+1}-1]^2-[l_{j,2p+1}]^2)$$

залежить тільки від $l_{j,2p+1}$.

Ми переписуємо співвідношення (1.4.104)–(1.4.106) для $\beta_j(l_{j,2p+1})$ та вводимо позначення $l_{r+1,2p+2} = l_{r,2p+1}^{\min} - 1, \quad r = 1, 2, \cdots, p$. Тоді ми представляємо σ (без зменшення загальності) у вигляді

$$\sigma = \epsilon_{2p+2}\prod_{r=1}^{p+1}[l_{r,2p+2}]_+, \tag{1.4.114}$$

де $l_{1,2p+2}$ — число, яке визначається σ.

Твердження 1.12. *Розв'язки системи рівнянь для* $\beta_j(l_{j,2p+1})$ *даються виразами*

$$\beta_i(l_{i,2p+1}) = \prod_{r=1}^{p+1}([l_{i,2p+1}]^2 - [l_{r,2p+2}]^2) = \prod_{r=1}^{p+1}([l_{i,2p+1}]_+^2 - [l_{r,2p+2}]_+^2) =$$

$$= \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j e_{p-j+1}([l_{1,2p+2}]_+^2, \cdots, [l_{p+1,2p+2}]_+^2)([l_{j,2p+1}]_+^2)^j,$$

де $e_r(x_1, \cdots x_{p+1})$ *— елементарні симетричні поліноми від* $x_1, \cdots, x_{p+1}$.

Це твердження доводиться так само як і Твердження 1.9 з використанням співвідношень (1.4.86)–(1.4.89).

Розділення $\rho_j(\epsilon, \mathbf{m}_{2p+1})$ та $\tau_j(\epsilon, \mathbf{m}_{2p+1}^{+j})$ в $\beta_j(l_{j,2p+1})$ виконується так само як у випадку формули (1.4.80) і ми маємо наступну формулу для $T(I_{2p+2,2p+1})$:

$$T(I_{2p+2,2p+1})|\epsilon, \mathbf{m}_{2p+1}, \alpha\rangle = \sum_{j=1}^{p} \frac{B_{2p+1}^j(\mathbf{m}_{2p+1})}{b(l_{j,2p+1})[l_{j,2p+1}]_+}|\epsilon, \mathbf{m}_{2p+1}^{+j}, \alpha\rangle -$$

$$- \sum_{j=1}^{p} \frac{B_{2p+1}^j((\mathbf{m}_{2p+1}^{-j})}{b(l_{j,2p+1}-1)[l_{j,2p+1}-1]_+}|\epsilon, \mathbf{m}_{2p+1}^{-j}, \alpha\rangle + \epsilon_{2p}\hat{C}_{2p+1}(\mathbf{m}_{2p+1})|\mathbf{m}_{2p+1}, \alpha\rangle, \tag{1.4.115}$$

де $B_{2p+1}^j(\mathbf{m}_{2p+1})$ and $b(l_{j,2p+1})$ даються тими самими виразами (1.4.92) та

$$\hat{C}_{2p+1}(\mathbf{m}_{2p+1}) = \frac{\prod_{s=1}^{p+1}[l_{s,2p+2}]_+ \prod_{s=1}^{p}[l_{s,2p}]_+}{\prod_{s=1}^{p}[l_{s,2p+1}]_+[l_{s,2p+1}-1]_+}.$$

Ця формула співпадає з формулою (1.2.18) якщо зробити заміну $p+1$ на p.

Зараз ми розглянемо випадок $U_q'(\mathrm{so}_{2p+1})$. Ми отримуємо з співвідношень (1.4.107)–(1.4.109) що

$$\beta_j'(l_{j,2p}) = \rho_j'(\epsilon, \mathbf{m}_{2p})\tau_j'(\epsilon, \mathbf{m}_{2p}^{+j})(q^{l_{j,2p}} - q^{-l_{j,2p}})(q^{l_{j,2p}+1} - q^{-l_{j,2p}-1})$$

$$\times \prod_{r\neq j}([l_{r,2p}]_+[l_{r,2p}-1]_+ - [l_{j,2p}]_+[l_{j,2p}+1]_+)([l_{r,2p}+1]_+[l_{r,2p}]_+ - [l_{j,2p}]_+[l_{j,2p}+1]_+)$$

залежить лише від $l_{j,2p}$ (ми використали тотожності $[x][x-1]-[y][y-1] = [x]_+[x-1]_+ - [y]_+[y-1]_+$). Тоді ми переписуємо співвідношення (1.4.111) та (1.4.112) для $\beta'_j(l_{j,2p})$ і, використавши рівності (1.4.86) і (1.4.88), ми отримуємо наступне твердження.

Твердження 1.13. *Розв'язки системи рівнянь для $\beta'_j(l_{j,2p})$ даються виразами*

$$\beta'_j(l_{j,2p}) = \prod_{r=1}^{p}([l_{j,2p}]_+[l_{j,2p}+1]_+ - [l_{r,2p+1}]_+[l_{r,2p+1}-1]_+),$$

де $l_{i,2p+1} = l_{i,2p}^{\max}+1$, $i = 1, 2, \cdots, p$.

Ми розділяємо $\rho'_j(\mathbf{m}_{2p})$ та $\tau'_j(\mathbf{m}_{2p}^{+j})$ в $\beta'_j(l_{j,2p})$ і отримуємо для оператора $T(I_{2p+1,2p})$ незвідного представлення T алгебри $U'_q(\mathrm{so}_{2p+1})$ такий вираз

$$T(I_{2p+1,2p})|\epsilon,\mathbf{m}_{2p},\alpha\rangle = \delta_{m_{p,2p},1/2}\frac{\epsilon_{2p+1}}{q^{1/2}-q^{-1/2}}D_{2p}(\alpha_n)|\epsilon,\mathbf{m}_{2p},\alpha\rangle +$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\frac{A^j_{2p}(\mathbf{m}_{2p})}{a'(l_{j,2p})}|\epsilon,\mathbf{m}_{2p}^{+j}\alpha\rangle - \sum_{j=1}^{p}\frac{A^j_{2p}(\mathbf{m}_{2p}^{-j})}{a'(l_{j,2p}-1)}|\epsilon,\mathbf{m}_{2p}^{-j},\alpha\rangle,$$

де ϵ_{2p+1} приймає одне з значень ±1, $A^j_{2p}(\mathbf{m}_{2p})$ дається виразом як у випадку формули (1.4.93), $a'(l_{j,2p})$ — таке як в (1.2.17) і

$$D_{2p}(\mathbf{m}_{2p}) = \frac{\prod_{i=1}^{p}[l_{i,2p+1}-\frac{1}{2}]\prod_{i=1}^{p-1}[l_{i,2p-1}-\frac{1}{2}]}{\prod_{i=1}^{p-1}[l_{i,2p}+\frac{1}{2}][l_{i,2p}-\frac{1}{2}]}.$$

1.4.5. Повна звідність. В цьому пункті ми доводимо повну звідність скінченновимірних представленнь алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ якщо справедливе Припущення з п. 1.4.3. Для алгебр $U'_q(\mathrm{so}_3)$ та $U'_q(\mathrm{so}_4)$ це припущення виконується (див. [65, 68]).

Теорема 1.7. *Якщо Припущення з п. 1.4.3 є справедливим, тоді кожне скінченновимірне представлення алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ є цілком звідне.*

Доведення. Доведення дано в [87].

Наслідок. *Якщо незвідні скінченновимірні представлення алгебри $U_q'(\mathrm{so}_{n-1})$ вичерпуються незвідними представленнями з п. 1.2.2, тоді кожне скінченновимірне представлення алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ є цілком звідним.*

1.4.6. Класифікаційні теореми. Нехай Припущення з п. 1.4.3 є справедливим.

Твердження 1.14. *Якщо Припущення з п. 1.4.3 є справедливим, тоді незвідні скінченновимірні представлення T алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$, такі що звуження $T{\downarrow}_{U_q'(\mathrm{so}_{n-1})}$ містить у розкладі на незвідні компоненти тільки представлення класичного типу алгебри $U_q'(\mathrm{so}_{n-1})$, вичерпуються представленнями класичного типу з п. 1.2.2.*

Доведення. Ми доводимо це твердження для $n = 2p+2$. Для $n = 2p+1$ доведення є схожим.

Нехай T — представлення алгебри $U_q'(\mathrm{so}_{2p+2})$ з формулювання твердження. Тоді функції $\beta_j(l_{i,2p+1})$, визначені формулою (1.4.80), даються (1.4.85). Вище було доведене, що $T{\downarrow}_{U_q'(\mathrm{so}_{2p+1})} = \bigoplus_{\mathbf{m}_{2p+1}} T_{\mathbf{m}_{2p+1}}$ і в цьому розкладі кожне $m_{r,2p+1}$ пробігає значення $m_{r,2p+1}^{\min}, m_{r,2p+1}^{\min}+1, \cdots, m_{r,2p+1}^{\max}$, де $l_{r,2p+1}^{\min} = l_{r+1,2p+2}+1$. Завдяки властивостям функцій ρ_j, $\beta_r(l_{r,2p+1}^{\min}+s) \neq 0$ для $s = 0, 1, \cdots, l_{r,2p+1}^{\max} - l_{r,2p+1}^{\min} - 1$ та $\beta_r(l_{r,2p+1}^{\max}) = 0$. Тоді з (1.4.85) випливає, що $l_{r,2p+1}^{\max} = l_{r,2p+2}$, $r \neq 1$. Оскільки $\beta_r(l_{1,2p+1}^{\max}) = 0$, ми знаходимо з (1.4.85), що $l_{1,2p+1}^{\max}$ співпадає з $l_{1,2p+2}$ або з $-l_{1,2p+2}$. Тому, $l_{1,2p+2}$ є цілим (напівцілим) якщо $l_{i,2p+2}$, $i = 2, 3, \cdots, p+1$, є цілими (напівцілими). Більше того, $l_{1,2p+2}$ може бути додатнім або від'ємним. Ми бачимо, що формула для оператора $T(I_{2p+2,2p+1})$ не змінюється, якщо ми замінюємо, відповідно, $l_{1,2p+2}$ та $l_{p+1,2p+2}$ на $-l_{1,2p+2}$ та $-l_{p+1,2p+2}$. Тому, ми можемо вважати, що $l_{1,2p+2}$ є додатнім і $l_{p+1,2p+2}$ приймає додатні та від'ємні значення. Тепер, приймаючи до уваги допустимі значення для $l_{i,2p+2}$, $i = 1, 2, \cdots, p+1$, та формулу (1.4.92) для $T(I_{2p+2,2p+1})$ ми бачимо, що представлення T співпадає з одним з незвідних представлень класичного типу з п. 1.2.2

Для того, щоб довести твердження для представлень алгебри $U'_q(\mathrm{so}_{2p+1})$ ми використовуємо Твердження 1.10 та формулу (1.4.93) замість формул (1.4.85) та (1.4.92). Твердження доведене.

Твердження 1.15. *Якщо Припущення з п. 1.4.3 є справедливим, тоді незвідні скінченновимірні представлення T алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$, такі що звуження $T{\downarrow}_{U'_q(\mathrm{so}_{n-1})}$ містить у розкладі на незвідні компоненти тільки представлення некласичного типу алгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$, вичерпуються представленнями некласичного типу з п. 1.2.2.*

Доведення цього твердження таке саме як у Твердження 1.14.

Теорема 1.8. *Незвідні скінченновимірні представлення алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ вичерпуються представленнями класичного та некласичного типів з п. 1.2.2.*

Доведення. Для алгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1}) \equiv U'_q(\mathrm{so}_4)$, Припущення з п. 1.4.3 є справедливим (див. [65]). Тепер теорема легко доводиться по індукції, якщо прийняти до уваги Теорему 1.7 і Тверджень 1.14 та 1.15. Теорему доведено.

Наслідок. *Кожне скінченновимірне представлення алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ є цілком звідним.*

Доведення. Це твердження випливає з Наслідку з п. 1.4.5 та з Теореми 1.8.

1.5. Висновки

Даний розділ присвячено задачі класифікації скінченновимірних представлень нестандартної деформації $U_q'(\mathrm{so}_n)$ алгебри Лі so_n групи обертань, яка була введена О. Гавриликом та А. Клімиком [47]. Доведено, що всі такі представлення є цілком звідними, тобто є прямою сумою незвідних представлень. В свою чергу незвідні скінченновимірні представлення вичерпуються представленнями класичного та некласичного типу, явні формули для яких дано в базисі Гельфанда–Цетліна. Представлення класичного типу є q-деформаціями відповідних незвідних представлень алгебри Лі so_n, тобто, при $q \to 1$ вони перетворюються в представлення so_n. Представлення некласичного типу не мають класичного аналогу. Ці представлення є сингулярними в границі $q \to 1$.

Для доведення цього твердження про класифікацію суттєво використовується q-аналог теореми Вігнера–Екарта для векторних операторів алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$, який доведено автором дисертації. Введення поняття тензорного оператора вимагає існування структури представлення на тензорному добутку просторів представлень. Але у алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ невідома структура алгебри

Хопфа і, зокрема, комноження. З іншого боку, як показано в [131, 132, 70], алгебра $U_q'(\mathrm{so}_n)$ є підалгеброю в квантовій алгебрі Дрінфельда–Джімбо $U_q(\mathrm{sl}_n)$, яка є алгеброю Хопфа. Більш того, показано, що алгебра $U_q'(\mathrm{so}_n)$ є $U_q(\mathrm{sl}_n)$-комодульною алгеброю, такою що кодія співпадає з комноженням в $U_q(\mathrm{sl}_n)$ при вкладенні $U_q'(\mathrm{so}_n)$ в $U_q(\mathrm{sl}_n)$. Ця комодульна структура дозволяє ввести поняття тензорного добутку векторного та довільного представлення T алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ (воно буде позначатись $T^{\otimes}$), див. [73, 76]. Автором описано розклад $T^{\otimes}$ на незвідні підпредставлення та знайдено коефіцієнти Клебша–Гордана у випадку, коли T є незвідним скінченновимірним представленням класичного або некласичного типу. Розклад $T^{\otimes}$ у випадку представлень класичного типу має такий самий вигляд як у випадку алгебри Лі so_n та відповідні коефіцієнти Клебша–Гордана є q-деформацією їх класичних аналогів [1, 4]. Вся ця отримана інформація про тензорний добуток $T^{\otimes}$ дозволила довести q-аналог теореми Вігнера–Екарта для векторних операторів алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$.

Алгебра $U_q'(\mathrm{so}_3)$ цікава тим, що вона природньо виникає як алгебра спостережуваних [126] в 2+1 вимірній квантові гравітації з 2D простором у формі тора. При $n > 3$, алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ є не менш важливими. Вони є проміжними алгебрами при виводі алгебри спостержуваних в 2+1 вимірній квантові гравітаціїз 2D простором у двовимірної поверхні роду $g > 1$, так що n залежить від g, $n = 2g + 2$ [127, 52]. Щоб отримати алгебру спостережуваних, q-деформована алгебра $U_q'(\mathrm{so}_{2g+2})$ має бути відфакторизована по деякому ідеалу породженому комбінаціями елементів Казиміра цієї алгебри. Зокрема цей факт дав мотивацію для вивчення в дисертації елементів Казиміра $U_q'(\mathrm{so}_n)$ та їх власних значень в незвідних представленнях.

РОЗДІЛ 2
Гармонічний аналіз на квантових векторних просторах

Гармонічний аналіз на просторах функцій є дуже важливим розділом математики з точки зору застосувань у фізиці. Гармонічний аналіз на колі (відповідно, на сфері) це добре відомий приклад перетворення Фур'є періодичних функцій (відповідно, розклад по сферичним функціям функцій на сфері). Тому кожен раз, коли фізична модель має аксіальну (відповідно, центрально-симетричну) симетрію природнім є застосування гармонічного аналізу на однорідному просторі з відповідною симетрією. Більш складні випадки гармонічного аналізу на сферах вищою розмірності застосовуються, наприклад, в ядерній фізиці. З появою квантових груп та квантових просторів виникла необхідність розвитку гармонічного аналізу на квантових просторах з метою майбутніх застосувань у теоретичній фізиці. В цьому розділі ми розглядаємо два таких квантових простори — квантові дійсний та комплексний векторні простори. В наступному розділі 3 буде розглянуто більш складний квантовий простір, що відповідає рімановому симетричному простору $SU(n)/SO(n)$, з метою застосування його до вивчення квантової моделі Рузінарса.

2.1. Вступ

Оператор Лапласа, гармонічні поліноми та відповідні розділення змінних є дуже важливим для фізики та математики. Ці об'єкти є тісно пов'язаними з групами обертань $SO(n)$ та їх підгрупами, якщо ми маємо справу з евклідовим простором, та з унітарнимии групами $U(n)$ та їх підгрупами, якщо ми маємо справу з комплексним векторним простором (див., наприклад, [153], глави 10, 11). В цьому розділі ми розробляємо q-аналоги обох цих випадків, відповідно у підрозділах 2.2 та 2.3.

Спочатку зробимо короткий огляд теорії гармонічних поліномів на евклідовому просторі. Гармонічні поліноми визначаються як розв'язки рівняння $\Delta p = 0$, де Δ — оператор Лапласа та p належить простору $\mathcal{R}$ поліномів на евклідовому просторі $E_n \sim \mathbb{R}^n$. Простір $\mathcal{H}$ всіх гармонічних поліномів на E_n розкладається як пряма сума підпросторів $\mathcal{H}_m$ однорідних гармонічних поліномів степені m: $\mathcal{H} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m$. Оператор Лапласа Δ на n-вимірному евклідовому (векторному) просторі E_n комутує з природньою дією групи обертань $SO(n)$ на цьому просторі. Це означає, що підпростори $\mathcal{H}_m$ є інваріантними по відношенню до дії $SO(n)$. На $\mathcal{H}_m$ реалізуєься незвідне представлення T_m групи $SO(n)$ зі старшою вагою $(m, 0, \ldots, 0)$.

Оператор Лапласа Δ допускає розділення змінних на просторі $\mathcal{H}_m$. Іншими словами, існують різні координатні системи (сферична, полісферична і т.д.) на $E_n \sim \mathbb{R}^n$ та кожній з них відповідає базис у просторі розв'язків рівняння $\Delta p = 0$, який складається з добутків функцій від розділених змінних. Різним координатним системам відповідають різні розділення змінних. З іншого боку, різним координатним системам відповідають різні ланцюжки підгруп в групі $SO(n)$ (див. [153], глава 10, про деталі цієї відповідності). Наприклад у сферичних координатах, базис у просторі $\mathcal{H}_m$ в розділенних змінних є добутком поліномів Гегенбауера помножених на r^m, де r — радіус.

Ці поліноми (при звуженні на сферу S^{n-1}) є матричними елементами незвідних представлень класу 1 (по відношенню до підгрупи $SO(n-1)$) T_m групи $SO(n)$, що належать нульовому стовпчику. Базис $\mathcal{H}_m$ в полісферичних розділенних змінних складається з добутків поліномів Якобі, помножених на r^m. При звуженні на сферу S^{n-1}, ці поліноми є матричними елементами нульового стовпчика представлення T_m по відношенню до підгрупи $SO(p)\times SO(n-p)$ при певному значенні p (див. [153], розділ 10.2).

Багато нових напрямків математичної фізики пов'язано з квантовими групами та некомутативною геометрією. Природньо узагальнити теорію, що була вище описана, на некомутативні простори. Такі узагальнення можуть стати дуже важливими для подальшого розвитку деяких напрямків математичної та теоретичної фізики, що пов'язані з некомутативною геометрією.

В підрозділі 2.2 дисертації, ми будуємо q-деформацію класичної теорії, що описана вище. У q-випадку, замість евклідового простору ми беремо квантовий векторний простір. Він визначений як асоціативна алгебра $\mathcal{A}$, що породжена елементами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовільняють визначальні співвідношення $x_i x_j = q x_j x_i$ при $i < j$. Ці елементи грають роль декартових координат E_n.

q-Оператор Лапаласа Δ_q на $\mathcal{A}$ визначено через q-похідні (див. формулу (2.2.8) нижче). Не існує такої квантової групи G_q, яка б була зв'язана з Δ_q як група обертань $SO(n)$ зв'язана з класичним оператором Лапласа. З цією метою ми включаємо в теорію нестандартну q-деформацію універсальної огортуючої алгебри $U(\mathrm{so}_n)$ алгебри Лі so_n. Ця q-деформована асоціативна алгебра (ми позначаємо її через $U_q'(\mathrm{so}_n)$) була детально розглянута в Розділі 1 цієї дисертації. Алгебра $U'_q(\mathrm{so}_n)$ замінює групу $SO(n)$ для q-оператора Лапаласа.

q-Гармонічні поліноми на квантовому векторному просторі визначені як такі елементи p алгебри $\mathcal{A}$ (тобто, поліноми від $x_1, x_2, \ldots, x_n$), що $\Delta_q p = 0$. Використовуючи алгебру $U'_q(\mathrm{so}_n)$ ми будуємо теорію для q-гармонічних поліномів подібну до тої, що була описана вище для класичних гармонічних поліномів. А саме, ми будуємо проектори $H_m : \mathcal{A}_m \to \mathcal{H}_m$, де $\mathcal{A}_m$ та $\mathcal{H}_m$ — відповідно, підпростори однорідних (степені m) поліномів в $\mathcal{A}$ та в просторі $\mathcal{H}$ всіх q-гармонічних поліномів з $\mathcal{A}$. Використовуючи ці проектори ми побудували в $\mathcal{H}_m$ певний q-аналог приєднаних сферичних гармонік по відношенню до підалгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$. Вони утворюють ортонормовний базис у просторі $\mathcal{H}_m$. Цей базис відповідає ланцюжку підалгебр $U'_q(\mathrm{so}_n) \supset U'_q(\mathrm{so}_{n-1}) \supset U'_q(\mathrm{so}_{n-2}) \supset \cdots \supset U'_q(\mathrm{so}_2)$. Таким чином ми отримали q-аналог сферичних розділених координат. Ми будуємо явні формули для представлення T_m алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ на просторі $\mathcal{H}_m$ та утотожнюємо його з одним з представлень $U'_q(\mathrm{so}_n)$ з п. 1.2.2. Це незвідне представлення класу 1 по відношенню до підалгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$. Після цього ми будуємо q-аналог приєднаних сферичних гармонік по відношенню до підалгебри $U'_q(\mathrm{so}_p) \times U'_q(\mathrm{so}_{n-p})$, де $1 < p < n-1$. Знову, ці гармоніки складають базис $\mathcal{H}_m$, що відповідає розділенню змінних, що пов'язано з цією підалгеброю. Ми будуємо явні формули для представлення T_m алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ і в цьому базисі.

Ця конструкція, що описана в підрозділі 2.2 суттєво базується на результатах з [132], де визначено оператор Δ_q та простори $\mathcal{H}_m$. Крім того, в цій роботі було знайдено формула для зональних сферичних гармонік, тобто тих гармонік, які є інваріантними по відношенню до дії $U_q'(\mathrm{so}_{n-1})$. В нашій роботі ми переотримали цей результат та знайшли формули для всіх інших (тобто приєднаних) гармонік.

У підрозділі 2.3 дисертації будується q-аналог теорії гармонічних поліномів на комплексному векторному просторі. Але спочатку ми зробимо короткий огляд класичного аналогу цієї теорії.

Гармонічні поліноми на n-вимірному комплексному векторному просторі визначені рівнянням $\Delta p = 0$, де $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial z_i \partial \bar{z}_i$ — оператор Лапласа та p належить простору $\mathcal{R}$ поліномів від $z_1, \cdots, z_n, \bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_n$ на комплексному просторі $\mathbb{C}^n$. Простір $\mathcal{H}$ всіх гармонічних поліномів на $\mathbb{C}^n$ розкладається в пряму суму підпросторів $\mathcal{H}_{m,m'}$ однорідних гармонічних поліномів степені m від $z_1, \cdots, z_n$ та степені m' від $\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_n$: $\mathcal{H} = \bigoplus_{m,m'=0}^{\infty} \mathcal{H}_{m,m'}$. Оператор Лапласа Δ на $\mathbb{C}^n$ комутує з природньою дією унітарної групи $U(n)$ на просторі $\mathbb{C}^n$. Це означає, що підпростори $\mathcal{H}_{m,m'}$ є інваріантними по відношенню до дії $U(n)$. На $\mathcal{H}_{m,m'}$ реалізовано незвідне представлення $T_{m,m'}$ групи $U(n)$ зі старшою вагою $(m, 0, \cdots, 0, -m')$.

Рівняння $\Delta p = 0$ допускає розв'язки у розділених змінних на просторі $\mathcal{H}_{m,m'}$. Іншими словами, існують різні координатні системи (сферична, полісферична і т.д.) на $\mathbb{C}^n$ і для кожної з них можливо знайти відповідний базис простору розв'язків рівняння $\Delta p = 0$, який складається з добутків функцій, що залежать від розділених змінних (див. [107] для загальної теорії розділення змінних). Різним координатним системам відповідають різні розділення змінних. З іншого боку, різними координатним системам відповідають різні ланцюжки підгруп групи $U(n)$ (див. [153], глава 11, для детального пояснення цієї відповідності). Базиси простору $\mathcal{H}_{m,m'}$ в розділених змінних складуються з добутків поліномів Якобі, що помножені на $r^{m+m'}$, де r — радіус. Ці поліноми, при звуженні та одиничну сферу $S_{\mathbb{C}}^{n-1}$ в $\mathbb{C}^n$, є матричними елементами, що належать нульовому стовпчику, незвідного представлення $T_{m,m'}$ групи $U(n)$ класу 1 по відношенню до підгрупи $U(n-1)$ (див. [153], глава 11).

У підрозділі 2.3 дисертації узагальнюється ця теорія на квантові комплексні векторні простори. Квантовий комплексний векторний простір визначено як асоціативну алгебру $\mathcal{A}$, породжену елементами $z_1, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_n$, що задовільняють певним природнім визначальним співвідношенням. Елементи $z_1, \cdots, z_n$ грають роль голоморфних координат на $\mathbb{C}^n$ та $w_1, \cdots, w_n$ грають роль антиголоморфних координат $\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_n$.

q-Оператор Лапласа Δ_q на $\mathcal{A}$ визначено через q-похідні (див. формулу (2.3.62) нижче). Квантова група $U_q(n)$ грає роль унітарної групи $U(n)$ у q-деформованому випадку. Нам буде зручно використовувати квантову алгебру (тобто, квантованну універсальну огортуючу алгебру) $U_q(\mathrm{gl}_n)$ замість квантової групи $U_q(n)$. q-Гармонічні поліноми на квантовому комплексному векторному просторі визначаються як елементи p алгебри $\mathcal{A}$ (тобто, поліноми від $z_1, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_n$), для яких $\Delta_q p = 0$. Використовуючи квантову алгебру $U_q(\mathrm{gl}_n)$, ми будуємо для q-гармонічних поліномів теорію, яка подібна до теорії для класичних гармонічних поліномів. Ми будуємо проектор $\mathsf{H}_{m,m'} : \mathcal{A}_{m,m'} \to \mathcal{H}_{m,m'}$, де $\mathcal{A}_{m,m'}$ та $\mathcal{H}_{m,m'}$ є, відповідно, підпросторами однорідних (степені m від $z_1, \cdots, z_n$ та степені m' від $w_1, \cdots, w_n$) поліномів з $\mathcal{A}$ та з простору $\mathcal{H}$ всіх q-гармонічних поліномів. Ці проектори є дуже важливими для наших розрахунків в $\mathcal{H}_{m,m'}$, зокрема для отримання зональних та приєднаних сферичних поліномів. Приєднані сферичні поліноми з $\mathcal{H}_{m,m'}$ утворюють ортогональний базис у цьому просторі. Тут ми отримуємо q-аналог розділення змінних в сферичних координатах. Ми показуємо, що природня дія квантової алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$ на квантовому комплексному векторному просторі реалізує на підпросторі $\mathcal{H}_{m,m'}$ незвідне представлення цієї алгебри зі старшою вагою $(m, 0, \cdots, 0, -m')$. Зауважимо, що звуження зональних та приєднаних сферичних поліномів з $\mathcal{H}_{m,m'}$ на квантову сферу в квантовому комплексному векторному просторі співпадають з матричними елементами нульового стовпчика (такі матричні елементи було пораховано в [43]; див. також [44]) незвідного представлення $T_{m,m'}$ квантової групи $U_q(n)$. Деякі з наших формул співпадають з формулами з [43]. Однак в [43] не використовувалось ані оператор Лапласа, ані q-гармонічні поліноми.

Добре відомо, що у класичному випадку, теорія оператора Лапласа та гармонічних поліномів на $\mathbb{C}^n$ зводиться до відповідної теорії для дійсного простору $\mathbb{R}^{2n}$ (див. [153], глава 11). У випадку квантових просторів таке зведення не відбувається. Причиною для цього є те, що квантовий комплексний векторний простір не може бути отримано з квантового дійсного векторного простору таким самим чином як у класичному випадку.

В цьому розділі ми вважаємо, що q не є коренем з одиниці. При розгляді скалярного добутку на просторах $\mathcal{A}$ та $\mathcal{H}$ ми вважаємо, що q є додатнім дійсним числом. Символом $[a]$, $a \in \mathbb{C}$, ми, як і раніше, позначаємо q-число, визначено як

$$[a] = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}.$$

Результати, що отримані автором по темі цього розділу і виносяться на захист, опубліковані в роботах [72, 75, 78, 80, 82].

2.2. q-Оператор Лапласа та q-гармонічні поліноми на квантовому дійсному векторному просторі

2.2.1. Представлення класу 1 q-деформованої алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$. Добре відомо існування квантових алгебр Дрінфельда–Джімбо $U_q(\mathrm{so}_n)$, які відповідають алгебрам Лі серій B_l та D_l. Однак, вони не є задовільними з точки зору деяких задач квантової фізики та теорії представлень. Зокрема, не є справедливими звуження $U_q(\mathrm{so}_n) \supset U_q(\mathrm{so}_{n-1})$ та вкладення $U_q(\mathrm{so}_n) \subset U_q(\mathrm{sl}_n)$, але саме такі вкладення є важливими в теорії гармонічних поліномів. Існує інша q-деформована алгебра $U_q'(\mathrm{so}_n)$ алгебри Лі группи обертань, яку побудували О. Гаврилик та А. Клімик [47], і яка має необхідні властивості по відношенню до вкладень. Огляд сучасного стану вивчення цієї алгебри був представлений в Розділі 1 цієї дисертації: в пункті 1.2.1 дано визначення алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ (зокрема, комутаційні співвідношення мають вигляд (1.2.1)–(1.2.3)), в пункті 1.2.2 дано явний опис незвідних скінченновимірних представлень цієї алгебри в базисі Гельфанда–Цетліна, в пункті 1.3.1 докладно описано вкладення алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ в квантову алгебру Дрінфельда–Джімбо $U_q(\mathrm{sl}_n)$.

При побудові гармонічного аналізу на квантовому векторному просторі нам будуть потрібні представлення класу 1 алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$. Ми використовуємо термін “представлення класу 1” для тих скінченновимірних незвідних представлень алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$, які містять тривіальне представлення підалгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$. У випадку алгебри $U'_q(\mathrm{so}_3)$, представлення класу 1 визначаються по відношенню до комутативної підалгебри $U'_q(\mathrm{so}_2)$, породженої елементом I_{21}.

Алгебра $U'_q(\mathrm{so}_n)$ має два типи скінченновимірних незвідних представлень (пункт 1.2.2 дисертації): представлення класичного типу (при $q \to 1$ вони переходять у відповідні незвідні представлення алгебри Лі so_n) та представлення некласичного типу (вони не мають класичного аналогу). З формул для представлень некласичного типу видно, що жодне з них не є представленням класу 1.

Аналізуючи представлення класичного типу, ми бачимо, що подібно до класичного випадку, представлення класу 1 характеризуються "старшою вагою" $(m_n, 0, ..., 0)$, де m_n – невід'ємне ціле. Ці представлення позначаються R_{m_n}. При звуженні на підалгебру $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$, представлення R_{m_n} розкладається на ті і тільки ті представлення $R_{m_{n-1}}$ класу 1 цієї підалгебри, для яких

$$m_n \geq m_{n-1} \geq 0, \text{ якщо } n > 3 \quad \text{ та } \quad -m_3 \leq m_2 \leq m_3, \text{ якщо } n = 3.$$

Ортонормований базис, отриманий при звуженні представлень T_{m_n} класу 1 на підалгебри $U'_q(\mathrm{so}_k)$, $k = n-1, n-2, \ldots, 2$, є q-аналогом базису Гельфанда–Цетліна. Ми позначаємо базисні елементи Гельфанда–Цетліна у просторі представлення R_{m_n} через

$$|m_n, m_{n-1}, m_{n-2}, \ldots, m_3, m_2\rangle,$$

де ціле m_k характеризує набір $(m_k, 0, ..., 0)$, який відповідає представленню R_{m_k} класу 1 підалгебри $U'_q(\mathrm{so}_k)$. У цьому базисі, оператори $R_{m_n}(I_{k,k-1})$ представлення R_{m_n} алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ даються фомулами

$$R_{m_n}(I_{21})|m_n, m_{n-1}, \ldots, m_2\rangle = \mathrm{i}[m_2]|m_n, m_{n-1}, \ldots, m_2\rangle, \tag{2.2.1}$$

$$\begin{gathered} R_{m_n}(I_{k,k-1})|m_n, m_{n-1}, \ldots, m_2\rangle = ([m_k + m_{k-1} + k - 2][m_k - m_{k-1}])^{1/2} \\ \times A(m_{k-1})|m_n, \ldots, m_k, m_{k-1}+1, m_{k-2}, \ldots m_2\rangle \\ -([m_k + m_{k-1} + k - 3][m_k - m_{k-1} + 1])^{1/2} \\ \times A(m_{k-1} - 1)|m_n, \ldots, m_k, m_{k-1} - 1, m_{k-2}, \ldots, m_2\rangle, \end{gathered} \tag{2.2.2}$$

де $n \geq k \geq 3$, символом $[m] \equiv [m]_q$ позначено q-число:

$$[m] = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}},$$

та

$$A(m_{k-1}) = \left(\frac{[m_{k-1} + m_{k-2} + k - 3][m_{k-1} - m_{k-2} + 1]}{[2m_{k-1} + k - 3][2m_{k-1} + k - 1]} \right)^{1/2}.$$

Зауважимо, що у випадку $k = 3$ ми маємо покласти $m_1 = 0$ у формула (2.2.2); тоді для $A(m_2)$ ми маємо вираз $([m_2][m_2 + 1]/[2m_2][2m_2 + 2])^{1/2}$.

2.2.2. Представлення на квантовому векторному просторі. Нехай $\mathcal{A} \equiv \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — асоціативна алгебра (з одиницею) породжена елементами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що задовільняють визначальні співвідношення $x_i x_j = q x_j x_i$, $i < j$. Ця алгебра називається алгеброю функцій на n-вимірному квантовому векторному просторі. Елементи $\mathcal{A}$ називаються поліномами на цьому квантовому векторному просторі та позначаються через $p \equiv p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv p(\mathbf{x})$.

Ми визначаємо на $\mathcal{A}$ операції q-диференціювань ∂_i та ∂'_i, які є лінійними операторами, що діють як $\partial_i p = \partial'_i p = 0$ на мономи p, які не містять x_i та як

$$\partial_i = \breve{x}_i^{-1} \frac{\gamma_i - \gamma_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \qquad \partial'_i = \hat{x}_i^{-1} \frac{\gamma_i - \gamma_i^{-1}}{q - q^{-1}} \tag{2.2.3}$$

на мономи, які містять x_i, де через $\hat{x}_i$ та $\breve{x}_i$ позначено оператори лівого та правого множення на x_i, відповідно, та

$$\gamma_i p(x_1, \ldots, x_n) = p(x_1, \ldots, x_{i-1}, qx_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

$$\gamma_i^{-1} p(x_1, \ldots, x_n) = p(x_1, \ldots, x_{i-1}, q^{-1}x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Ми маємо $\partial_i \hat{x}_j = \hat{x}_j \partial_i$, $i \neq j$, та

$$\partial_i \partial_j = q^{-1} \partial_j \partial_i, \quad \partial_i \breve{x}_j = q \breve{x}_j \partial_i, \qquad i < j,$$

$$\gamma_i \hat{x}_j = q^{\delta_{ij}} \hat{x}_j \gamma_i, \qquad \gamma_i \partial_j = q^{-\delta_{ij}} \partial_j \gamma_i.$$

Також є можливим ввести q-аналог скалярного добутку Фішера на $\mathcal{A}$ (див. [132]). Він визначається формулою

$$\langle p_1, p_2 \rangle = p_1(\partial'_1, \ldots, \partial'_n) p_2^*|_{x=0}, \tag{2.2.4}$$

де p_2^* — поліном p_2, в якому числові коефіцієнти замінені на комплексно спряжені, $p_1(\partial'_1, \ldots, \partial'_n)$ означає q-диференційний оператор, отриманий з поліному p заміною x_i на ∂'_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, та символ $p|_{x=0}$ означає постійний доданок у поліномі p.

Ми можемо визначити дію квантової алгебри $U_q(\mathrm{sl}_n)$ на просторі $\mathcal{A}$, яка визначає представлення на $\mathcal{A}$. Ця дія задається так:

$$\rho(k_i) = \gamma_i \gamma_{i+1}^{-1}, \quad \rho(e_i) = \breve{x}_i \gamma_i \partial_{i+1}, \quad \rho(f_i) = \breve{x}_{i+1} \gamma_i^{-1} \partial_i. \tag{2.2.5}$$

Дія ρ та формула (1.3.23), що задає вкладення $U'_q(\mathrm{so}_n) \subset U_q(\mathrm{sl}_n)$, приводять до представлення $T = \rho \circ \varphi$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ на $\mathcal{A}$. Ми ввели позначення $\theta_j = T(I_{j+1,j})$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Тоді легко порахувати, що

$$\theta_j = \breve{x}_{j+1} \gamma_j^{-1} \partial_j - \breve{x}_j \gamma_{j+1} \partial_{j+1} \tag{2.2.6}$$

(див. також [132]).

Представлення T алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ є звідним. Легко перевірити, використовуючи явний вигляд (2.2.6) для операторів θ_j, що підпростори $\mathcal{A}_m \in \mathcal{A}$ однорідних поліномів степеня m є інваріантними по відношенню до цього представлення. Зрозуміло:

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{A}_m.$$

Ми позначаємо звуження представлення T на підпростір $\mathcal{A}_m$ через $T^{(m)}$.

Представлення ρ алгебри $U_q(\mathrm{sl}_n)$ на просторі $\mathcal{A}$ є також звідним та підпростори $\mathcal{A}_m$ є інваріантними для цього представлення. Ми позначаємо звуження представлення ρ алгебри $U_q(\mathrm{sl}_n)$ на простір $\mathcal{A}_m$ через ρ_m. Пряме обчислення показує, що представлення ρ_m є незвідним та має старшу вагу $(m, 0, \ldots, 0)$. Мономи $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$, $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m$, є ваговими векторами цього представлення. Вектор старшої ваги співпадає з x_1^m.

В загальному випадку, представлення $T^{(m)}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ на просторах $\mathcal{A}_m$ є звідними. Безпосереднім обчисленням перевіряється, що елемент

$$Q = x_1^2 + q^{-1} x_2^2 + \cdots + q^{-n+1} x_n^2 \in \mathcal{A}_2 \tag{2.2.7}$$

є інваріантним по відношенню до представлення $T^{(2)}$ (і тому по відношенню до представлення T), тобто, $T^{(2)}(I_{k,k-1})Q = 0$ для $k = 2, 3, \ldots, n$. Аналогічно, елемент $Q^k \in \mathcal{A}_{2k}$ є інваріантним по відношенню до представлення $T^{(2k)}$.

Елементу (2.2.7) відповідає оператор

$$\hat{Q} = \hat{x}_1^2 + q^{-1} \hat{x}_2^2 + \cdots + q^{-n+1} \hat{x}_n^2$$

на $\mathcal{A}$, який комутує з операторами представлення T. Ми також розгядаємо на $\mathcal{A}$ оператор

$$\Delta_q \equiv \Delta = q^{n-1}\partial_1^2 + q^{n-2}\partial_2^2 + \cdots + \partial_n^2. \tag{2.2.8}$$

Він називається *q-оператор Лапласа* на квантовому векторному просторі. Зрозуміло, що $\Delta : \mathcal{A}_m \to \mathcal{A}_{m-2}$.

Наступні співвідношення доводяться прямими обчисленнями (див. [132]):

$$\Delta\hat{Q}^k - \hat{Q}^k\Delta = \hat{Q}^{k-1}[2k]\{q^{2k+n-2}\gamma^2\}, \tag{2.2.9}$$

$$\Delta(Q^k) = Q^{k-1}[2k][2k+n-2], \tag{2.2.10}$$

де $[r]$ — q-числа та

$$\{a\} = \frac{a - a^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

Ми також маємо

$$\hat{Q}^* = q^{-n+1}\Delta, \qquad \Delta^* = q^{n-1}\hat{Q}, \qquad \theta_j^* = -\theta_j,$$

де через * позначено ермітове спряження по відношенню до скалярного добутку (2.2.4) (див. [132]).

Поліном $p \in \mathcal{A}$ називається *q-гармонічним*, якщо $\Delta p = 0$. Лінійний підпростір $\mathcal{A}$, що складається з усіх q-гармонічних поліномів позначаємо через $\mathcal{H}$. Нехай $\mathcal{H}_m = \mathcal{A}_m \cap \mathcal{H}$. Тоді

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m.$$

Подібно до класичного випадку, простір $\mathcal{A}_m$ може бути представлений у вигляді прямої суми (див. [132])

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{H}_m \oplus Q\mathcal{A}_{m-2}. \tag{2.2.11}$$

Цей розклад має наступний наслідок:

$$\mathcal{A}_m = \bigoplus_{0\le 2j\le m} Q^j \mathcal{H}_{m-2j} \tag{2.2.12}$$

(підсумовування проводиться по $j = 0, 1, 2, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor$, де $\lfloor m/2 \rfloor$ — ціла частина $m/2$). Наступне твердження доведено у [132]:

Твердження 2.1. *q-Оператор Лапласа Δ комутує з усіма операторами представлення T алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$.*

З Твердження 2.1 випливає, що підпростір $\mathcal{H}_m$ є інваріантним по відношенню до представлення $T^{(m)}$. Ми позначаємо звуження цього представлення на $\mathcal{H}_m$ через T_m. Оскільки Q є інваріантним по відношенню до дії $U_q'(\mathrm{so}_n)$, з (2.2.12) випливає, що

$$T^{(m)} = \bigoplus_{0\le 2j\le m} T_{m-2j}. \tag{2.2.13}$$

Нижче ми ідентифікуємо представлення T_{m-2j} з відповідними представлення п. 2.2.1.

Твердження 2.2. *Якщо $h_m(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}_m$, тоді $\tilde{h}_{m-1}(\mathbf{x}) := \gamma_n^{-1}\partial_n h_m(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}_{m-1}$ та*

$$\hat{h}_{m+1}(\mathbf{x}) := h_m(\mathbf{x})x_n - \frac{Q\gamma_n^{-1}\partial_n h_m(\mathbf{x})}{[n+2m-2]} \in \mathcal{H}_{m+1}. \tag{2.2.14}$$

У [132] показано, що $\mathcal{A} \simeq \mathbb{C}[Q] \otimes \mathcal{H}$. Цей розклад є q-аналогом теореми про розділення змінних для груп Лі у абстрактній формі (див., наприклад, [107]). Ми маємо

$$\mathcal{A} \simeq \mathbb{C}[Q] \otimes \mathcal{H} \simeq \mathbb{C}[Q] \otimes \bigoplus_{m\ge 0} \mathcal{H}_m = \bigoplus_{m\ge 0} \left(\mathbb{C}[Q] \otimes \mathcal{H}_m\right). \tag{2.2.15}$$

Якщо $h_m(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}_m$ та $h'_s(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}_s$, тоді (оскільки $\hat{Q}^* = q^{-n+1}\Delta$ по відношенню до скалярного добутку (2.2.4)) ми маємо

$$\langle Q^k h_m, Q^l h'_s \rangle = q^{k(-n+1)} \langle h_m, \Delta^k Q^l h'_s \rangle.$$

Використовуючи (2.2.9), ми виводимо $\Delta(Q^l h'_s) = Q^{l-1}[2l][2l+n+2s-2]h'_s$. Застосовуючи повторно цю формулу, ми отримуємо з попередньої формули, що

$$\langle Q^k h_m, Q^l h'_s \rangle = \delta_{kl} q^{k(-n+1)} [2l]!! \frac{[2k+n+2s-2]!!}{[n+2s-2]!!} \langle h_m, h'_s \rangle. \tag{2.2.16}$$

Зауваження. По аналогії до класичного випадку, ми можемо розгядати скалярний добуток (2.2.4) як інтеграл функції $p_1 p_2^*$. Тоді формула (2.2.16) означає виконання "інтегрування" по відношенню до q-радіальної частини. Подібно до класичного випадку, скалярний добуток $\langle h_m, h'_s \rangle$ може трактуватись як "інтегрування" по q-сферичним координатам для q-гармонічних поліномів.

Пряме обчислення показує, що

$$\langle Q^l, Q^s \rangle = q^{l(1-n)} \langle 1, \Delta^l Q^s \rangle = \delta_{ls} q^{l(-n+1)} \frac{[2l]!![2l+n-2]!!}{[n-2]!!}. \tag{2.2.17}$$

2.2.3. Проекція $\mathcal{A}_m \to \mathcal{H}_m$. Розклад (2.2.11) є ортогональним по відношенню до скалярного добутку (2.2.4). Зконструюємо проектор $H_m : \mathcal{A}_m = \mathcal{H}_m \oplus Q\mathcal{A}_{m-2} \to \mathcal{H}_m$. Ми представляємо цей проектор у вигляді

$$H_m p = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \alpha_k \hat{Q}^k \Delta^k p, \qquad \alpha_k \in \mathbb{C}, \quad p \in \mathcal{A}_m, \tag{2.2.18}$$

де $\lfloor m/2 \rfloor$ означає цілу частину $m/2$. Ми маємо обчислити значення коефіцієнтів α_k. Для того, щоб це зробити, ми діємо q-оператором Лапласа Δ на обидві частини (2.2.18) та використовуємо співвідношення (2.2.9). При цій дії ліва частина зануляється. Прирівнюючи праву частину до нуля, ми виводимо рекурентне співвідношення співвідношення для α_k, яке дає

$$\alpha_k = \frac{(-1)^k}{[2k]!![n+2m-4][n+2m-6]\cdots[n+2m-2k-2]} =$$

$$= \frac{(-1)^k[n+2m-2k-4]!!}{[2k]!![n+2m-4]!!}, \tag{2.2.19}$$

де $[s]!! = [s][s-2][s-4]\cdots[2]$ (або $[1]$) та $[0]!! = 1$.

Зауважимо, що коефіцієнти α_k визначаються рекурентним співвідношенням однозначно з точністю до скалярного множника. У (2.2.19) ми вибрали цю константу так, щоб $H_m p = p$ для $p \in \mathcal{H}_m$. Це означає, що $H_m^2 = H_m$.

Твердження 2.3.

(а) *Оператор* H_m *комутує з операторами* θ_j *представлення* $T^{(m)}$ *алгебри* $U_q'(\mathrm{so}_n)$.

(б) *Розглядаючи скалярний добуток (2.2.4) на просторі* $\mathcal{A}_m$*, ми маємо* $H^* = H$.

Доведення. Пункт (а) випливає з факту, що θ_j комутує з $\hat{Q}$ та Δ. Пункт (б) є наслідком рівностей $\hat{Q}^* = q^{-n+1}\Delta$ та $\Delta^* = q^{n-1}\hat{Q}$.

Покажемо як побудувати зональні поліноми (тобто інваріантні елементи по відношенню до дії підалгебри $U_q'(\mathrm{so}_{n-1})$) у просторі $\mathcal{H}_m$ використовуючи оператор H_m. Для того, щоб це зробити, ми беремо деякий поліном $p \in \mathcal{A}_m$, інваріантний по відношенню до $U_q'(\mathrm{so}_{n-1})$, та діємо на нього оператором H_m. Оскільки проектор H_m комутує з дією $U_q'(\mathrm{so}_{n-1})$, отриманий таким чином поліном є зональним поліномом. Зрозуміло, що поліном $p(x) = x_n^m$ належить до $\mathcal{A}_m$ та є інваріантним при дії $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$. Ми маємо

$$\varphi'_m := H_m x_n^m = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \alpha_k \hat{Q}^k \Delta^k x_n^m = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \alpha_k \hat{Q}^k \partial_n^{2k} x_n^m$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^k \frac{[m]![n+2m-2k-4]!!}{[m-2k]![2k]!![n-2m-4]!!} Q^k x_n^{m-2k}. \qquad (2.2.20)$$

Використовуючи позначення

$$(a;q)_s = (1-a)(1-qa)(1-q^2a)\cdots(1-q^{s-1}a),$$

ми зводимо зональний поліном (2.2.20) до вигляду

$$\varphi'_m = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(q^{-2m};q^4)_k (q^{-2m+2};q^4)_k}{(q^4;q^4)_k (q^{-2n-4m+8};q^4)_k} q^{-k(n-5)} Q^k x_n^{m-2k}. \qquad (2.2.21)$$

Він співпадає з формулою для зонального полінома, який знайдено іншим методом в [132].

2.2.4. q-Аналог приєднаних сферичних гармонік по відношенню до $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$. Відомо (див. [153], глави 9 та 10), що у просторі класичних однорідних гармонічних поліномів існують різні ортонормовні базиси. Вони відповідають різним розділенням змінних. Кожне розділення змінних відповідає певному ланцюжку підгруп у групі обертань $SO(n)$. Нижче ми показуємо схожу картину для просторів $\mathcal{H}_m$ однорідних q-гармонічних поліномів.

У класичному випадку, метод дерев розрізняє різні розділення змінних або, еквівалентно, різні ланцюжки підгруп у $SO(n)$. Той самий метод дерев застосовний до q-гармонічних поліномів, але замість підгруп в $SO(n)$, ми маємо взяти відповідні ланцюжки підалгебр у алгебрі $U'_q(\mathrm{so}_n)$.

Мета цього підрозділу — побудувати ортонормований базис у просторі $\mathcal{H}_m$ однорідних q-гармонічних поліномів, який відповідає ланцюжку

$$U_q'(\mathrm{so}_n) \supset U_q'(\mathrm{so}_{n-1}) \supset \cdots \supset U_q'(\mathrm{so}_3) \supset U_q'(\mathrm{so}_2), \tag{2.2.22}$$

де $U_q'(\mathrm{so}_2)$ — комутативна підалгебра, породжена елементом I_{21}. Цей базис є q-аналогом добре відомого набору приєднаних сферичних гармонік, які є добутками певних поліномів Гегенбауера (див., [153], глава 9).

Твердження 2.4. *Нехай $h_s(\mathbf{x}')$ — однорідний гармонічний поліном степеня s по $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Тоді для $x_n^{m-s} h_s(\mathbf{x}') \in \mathcal{A}_m$ ми маємо*

$$H_m(x_n^{m-s} h_s(\mathbf{x}')) \\ = \left(\sum_{k=0}^{\lfloor (m-s)/2 \rfloor} \frac{(-1)^k q^{-2sk} [m-s]! [2m+n-2k-4]!!}{[m-s-2k]! [2k]!! [2m+n-4]!!} Q^k x_n^{m-s-2k} \right) h_s(\mathbf{x}'). \tag{2.2.23}$$

Доведення. Оскільки

$$\Delta_{(n-1)}(x_n^{m-s} h_s(\mathbf{x}')) = x_n^{m-s} (\Delta_{(n-1)} h_s(\mathbf{x}')) = 0,$$

де $\Delta_{(n-1)}$ — q-оператор Лапласа для елементів $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, ми маємо

$$\Delta(x_n^{m-s} h_s(\mathbf{x}')) = (q\Delta_{(n-1)} + \partial_n^2)(x_n^{m-s} h_s(\mathbf{x}')) = q^{-2s} [m-s][m-s-1] x_n^{m-s} h_s(\mathbf{x}').$$

Використовуючи повторно останнє співвідношення до правої частини рівністі

$$H_m(x_n^{m-s} h_s(\mathbf{x}')) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \alpha_k \hat{Q}^k \Delta_{(n)}^k (x_n^{m-s} h_s(\mathbf{x}')) \,,$$

ми виводимо співвідношення (2.2.23). Твердження доведено.

Ми позначаємо через $\hat{t}_s^{n,m}(Q, x_n)$ вираз при $h_s(\mathbf{x}')$ у правій стороні (2.2.23):

$$\hat{t}_s^{n,m}(Q, x_n) = \sum_{k=0}^{\lfloor (m-s)/2 \rfloor} \frac{(-1)^k q^{-2sk} [m-s]! [2m+n-2k-4]!!}{[m-s-2k]! [2k]!! [2m+n-4]!!} Q^k x_n^{m-s-2k}. \tag{2.2.24}$$

Зокрема, ми маємо $\hat{t}_0^{n,m}(Q, x_n) = \varphi'_m = H_m x_n^m$.

Для того, щоб побудувати ортонормований базис $\mathcal{H}_m$, ми маємо нормалізувати вираз (2.2.23). Розгянемо спочатку нормування φ'_m. Ми маємо

$$\langle \varphi'_m, \varphi'_m \rangle = \langle H_m x_n^m, H_m x_n^m \rangle = \langle x_n^m, H_m^* H_m x_n^m \rangle = \langle x_n^m, H_m x_n^m \rangle$$

$$= \langle x_n^m, \varphi'_m \rangle = c_m^{(0)} \langle x_n^m, x_n^m \rangle,$$

де $c_m^{(0)}$ — коефіцієнт при x_n^m у виразі (2.2.21) для φ'_m (остання рівність — завдяки визначенню скалярного добутку (2.2.4)). Ми маємо

$$c_m^{(0)} = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(q^{-2m}; q^4)_k (q^{-2m+2}; q^4)_k}{(q^{-2n-4m+8}; q^4)_k} \frac{q^{k(-2n+6)}}{(q^4; q^4)_k}$$

$$= {}_2\varphi_1(q^{-2m}, q^{-2m+2};\ q^{8-2n-4m}\ ;\ q^4, q^{-2n+6}).$$

Цей q-гіпергеометричний ряд може бути просумований з використанням формули

$${}_2\varphi_1(a, q^{-n};\ c;\ q, cq^n/a) = \frac{(c/a; q)_n}{(c; q)_n} \tag{2.2.25}$$

(див. [46], розділ 1.5). В результаті, ми виводимо, що

$$c_m^{(0)} = \frac{(q^{-2(n+m-3)}; q^4)_{m/2}}{(q^{-2(n+2m-4)}; q^4)_{m/2}}, \qquad \text{якщо } m-s \text{ є парним,}$$

$$c_m^{(0)} = \frac{(q^{-2(n+m-4)}; q^4)_{(m-1)/2}}{(q^{-2(n+2m-4)}; q^4)_{(m-1)/2}}, \qquad \text{якщо } m-s \text{ є непарним.}$$

Оскільки $\langle x_n^m, x_n^m\rangle = (\partial_n')^n x_n^m = [n]!$, нормування зонального полінома з $\mathcal{H}_m$ має вигляд

$$\varphi_m = (c_m^{(0)}[m]!)^{-1/2}\varphi_m'.$$

Зараз нехай τ_s^m позначає вираз (2.2.23). Аналогічно ми маємо

$$\langle \tau_s^m, \tau_s^m\rangle = \langle H_m(x_n^{m-s}h_s(\mathbf{x}')), H_m(x_n^{m-s}h_s(\mathbf{x}'))\rangle = \langle x_n^{m-s}h_s(\mathbf{x}'), \tau_s^m\rangle$$

$$= c_m^{(s)}\langle x_n^{m-s}h_s(\mathbf{x}'), x_n^{m-s}h_s(\mathbf{x}')\rangle$$

$$= c_m^{(s)}q^{-s(m-s)}\langle h_s(\mathbf{x}')x_n^{m-s}, x_n^{m-s}h_s(\mathbf{x}')\rangle$$

$$= c_m^{(s)}q^{-s(m-s)}[m-s]!\langle h_s(\mathbf{x}'), h_s(\mathbf{x}')\rangle,$$

де $c_m^{(s)}$ — коефіцієнт при x_n^{m-s} у виразі (2.2.24) для $\hat{t}_s^{n,m}(Q, x_n)$. Ми отримуємо з (2.2.24), що

$$c_m^{(s)} = \sum_{k=0}^{\lfloor (m-s)/2\rfloor} \frac{(q^{-2(m-s)}; q^4)_k (q^{-2(m-s)+2}; q^4)_k}{(q^{-2n-4m+8}; q^4)_k} \frac{q^{k(-2n-4s+6)}}{(q^4; q^4)_k}$$

$$= {}_2\varphi_1(q^{2(s-m)}, q^{2(s-m)+2};\ q^{8-2n-4m}\ ;\ q^4, q^{6-2n-4s}).$$

Цей q-гіпергеометричний ряд підсумовується з використанням формули (2.2.25) і ми отримуємо

$$c_m^{(s)} = \frac{(q^{2(-n-m-s+3)}; q^4)_{(m-s)/2}}{(q^{2(-n-2m+4)}; q^4)_{(m-s)/2}}, \qquad \text{якщо } m-s \text{ є парним}, \tag{2.2.26}$$

$$c_m^{(s)} = \frac{(q^{2(-n-m-s+4)}; q^4)_{(m-s-1)/2}}{(q^{2(-n-2m+4)}; q^4)_{(m-s-1)/2}}, \qquad \text{якщо } m-s \text{ є непарним}. \tag{2.2.27}$$

Замість $\hat{t}_s^{n,m}(Q, x_n)$ ми будемо використовувати нормований вираз

$$t_s^{n,m}(Q, x_n) = \frac{q^{s(m-s)/2}}{\sqrt{c_m^{(s)}[m-s]!}}\hat{t}_s^{n,m}(Q, x_n). \tag{2.2.28}$$

Для побудови ортонормованого базису простора $\mathcal{H}_m$ у явному вигляді, ми беремо до уваги, що

$$\langle t_s^{n,m}(Q,x_n)h_s(\mathbf{x}'), t_s^{n,m}(Q,x_n)h_s(\mathbf{x}')\rangle = \langle h_s(\mathbf{x}'), h_s(\mathbf{x}')\rangle.$$

Ми застосовуємо наведені вище аргументи цього підрозділу до однорідних q-гармонічних поліномів від $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. В результаті, ми отримуємо q-гармонічні поліноми у вигляді

$$t_s^{n,m}(Q,x_n)t_r^{n-1,s}(Q_{n-1},x_{n-1})h_r(\mathbf{x}''), \qquad s=0,1,2,\ldots,m; \quad r=0,1,2,\ldots,s,$$

де

$$Q_{n-1} = x_1^2 + q^{-1}x_2^2 + \cdots + q^{-n+2}x_{n-1}^2, \qquad \mathbf{x}'' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}),$$

$h_r(\mathbf{x}'')$ — елементи простору однорідних q-гармонічних поліномів степеня r по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$, та $t_r^{n-1,s}(Q_{n-1},x_{n-1})$ визначається (2.2.24) та (2.2.28).

Продовжуючи цю процедуру, ми отримуємо нормовані поліноми з $\mathcal{H}_m$ у вигляді

$$\Xi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) \equiv \Xi_{m,m_{n-1},m_{n-2},\ldots,m_2}(\mathbf{x})$$

$$= t_{m_{n-1}}^{n,m}(Q,x_n)t_{m_{n-2}}^{n-1,m_{n-1}}(Q_{n-1},x_{n-1})\cdots t_{m_2}^{3,m_3}(Q_3,x_3)t^{2,m_2}(x_1,x_2), \qquad (2.2.29)$$

$$m \geq m_{n-1} \geq m_{n-2} \geq \cdots \geq m_3 \geq |m_2|, \qquad (2.2.30)$$

де поліноми $t^{2,m_2}(x_1,x_2)$ визначені наступним чином. Повний набір лінійно незалежних гармонічних поліномів від x_1 та x_2 співпадає з

$$z^{(0)} \equiv 1, \qquad z^{(s)} = (\mathrm{i}x_1 + x_2)(\mathrm{i}x_1 + qx_2)\cdots(\mathrm{i}x_1 + q^{s-1}x_2), \quad s>0,$$

$$z^{(s)} = (\mathrm{i}x_1 - x_2)(\mathrm{i}x_1 - qx_2)\cdots(\mathrm{i}x_1 - q^{-s+1}x_2), \quad s<0$$

(див. [132]). Пряме обчислення показує, що $c^{(0)} \equiv \langle z^{(0)}, z^{(0)} \rangle = 1$ та

$$c^{(s)} \equiv \langle x^{(s)}, x^{(s)} \rangle = c^{(-s)} \equiv \langle x^{(-s)}, x^{(-s)} \rangle = 2q^{s(s-1)/2}[s][2s-2]!!, \quad s > 0.$$

Ми покладаємо

$$t^{2,m_2}(x_1, x_2) = (c^{(m_2)})^{-1/2} z^{(m_2)}.$$

Кожному набору цілих $m_{n-1}, m_{n-2}, \ldots, m_3, m_2$, які задовільняють умові (2.2.30), відповідає поліном (2.2.29). (Для фіксованого m_3, число m_2 приймає значення $-m_3, -m_3+1, \ldots, m_3$.) Пряме обчислення показує, що число цих поліномів дорівнює розмірності простору $\mathcal{H}_m$, яка дана у Наслідку 3.1.4 з [132]. З іншої сторони, поліноми (2.2.29) є попарно ортогональними (доведення цього факту виконується, якщо прийняти до уваги визначення (2.2.4) скалярного добутку та повторити міркування цього підрозділу). Це означає, що *набір всіх поліномів (2.2.29) складає ортонормований базис у просторі* $\mathcal{H}_m$. *Цей базис відповідає ланцюжку підалгебр (2.2.22).*

Представлення базису у просторі $\mathcal{H}_m$ розв'язків рівняння $\Delta p_m = 0$ у вигляді (2.2.29) дає нам q-аналог розділення змінних класичного аналізу. Це q-розділення змінних відповідає ланцюжку підалгебр (2.2.22). q-Аналоги інших типів розділення змінних буде дано нижче.

2.2.5. Представлення $U'_q(\mathrm{so}_n)$ на $\mathcal{H}_m$. У цьому пункті ми виводимо формули дії операторів θ_j на базисні елементи (2.2.29).

Лема 2.1. *Нехай $h_m(\mathbf{x}) = \hat{t}_s^{n,m}(Q, x_n) h_s(\mathbf{x}')$, де $\hat{t}_s^{n,m}$ дається (30) та $h_s(\mathbf{x}')$ є однорідним q-гармонічним поліномом степеня s по змінним* $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. *Тоді для відповідних q-гармонічних поліномів $\tilde{h}_{m-1}(\mathbf{x})$*

та $\hat{h}_{m+1}(\mathbf{x})$, *які даються Твердженням 2.2, ми маємо*

$$\tilde{h}_{m-1}(\mathbf{x}) = q^{-s}[m-s]\frac{[n+m+s-3]}{[n+2m-4]}\tilde{t}_s^{n,m-1}(Q,x_n)h_s(\mathbf{x}'), \tag{2.2.31}$$

$$\hat{h}_{m+1}(\mathbf{x}) = q^s\hat{t}_s^{n,m+1}(Q,x_n)h_s(\mathbf{x}'). \tag{2.2.32}$$

Теорема 2.1. *Оператори* $T_m(I_{k,k-1}) = \theta_{k-1}$, $k = 2,3,\ldots,n$, *діють на базисні елементи* $\Xi_{\mathbf{m}} \equiv |\mathbf{m}\rangle$, *з (2.2.29), як*

$$T_m(I_{k,k-1})|\mathbf{m}\rangle = -([m_k+m_{k-1}+k-2][m_k-m_{k-1}])^{1/2}A(m_{k-1})|\mathbf{m}^+_{k-1}\rangle$$

$$+([m_k+m_{k-1}+k-3][m_k-m_{k-1}+1])^{1/2}A(m_{k-1}-1)|\mathbf{m}^-_{k-1}\rangle, \quad k\neq 2,$$

$$T_m(I_{21})|\mathbf{m}\rangle = \mathrm{i}[m_2]|\mathbf{m}\rangle,$$

де $m_n \equiv m$, $\mathbf{m}^\pm_{k-1}$ *позначає набір чисел* $\mathbf{m}$ *з* m_{k-1} *заміненим на* $m_{k-1}\pm 1$, *відповідно, та*

$$A(m_{k-1}) = \left(\frac{[m_{k-1}+m_{k-2}+k-3][m_{k-1}-m_{k-2}+1]}{[2m_{k-1}+k-3][2m_{k-1}+k-1]}\right)^{1/2}.$$

Порівнюючи оператори $T_m(I_{k,k-1})$ з операторами незвідного представлення R_m алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ з п. 2.2.1, ми отримуємо

Наслідок. *Представлення* T_m, *реалізоване на просторі* $\mathcal{H}_m$ *однорідних* q*-гармонічних поліномів є еквівалентним до незвідного представлення* R_m *класу 1 алгебри* $U'_q(\mathrm{so}_n)$.

2.2.6. q**-Аналог приєднаних сферичних гармонік по відношенню до** $U'_q(\mathrm{so}_p)\times U'_q(\mathrm{so}_{n-p})$**.** У п. 2.2.4 ми знайшли ортонормований базис простору $\mathcal{H}_m$ однорідних гармонічних поліномів, що відповідає ланцюжку підалгебр

(2.2.22). В цьому підрозділі ми знайдемо ортонормовані базиси цього самого простора, що відповідають звуженням

$$U_q'(\mathrm{so}_n) \supset U_q'(\mathrm{so}_p) \times U_q'(\mathrm{so}_{n-p}). \tag{2.2.33}$$

Як і в класичному випадку (див. [153], глава 10), подальші звуження можуть бути зробленими як в (2.2.22) або як в (2.2.33). Зокрема, звичайний метод дерев (див. [153], розділ 10.2) може бути застосований до опису різних ланцюжків підалгебр, що відповідають різними ортонормованим базисам $\mathcal{H}_m$.

Ми представляємо набір $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ як $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{t})$, де $\mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ та $\mathbf{t} = (x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n)$. Тоді q-оператор Лапласа Δ може бути записаний як

$$\Delta = q^{n-p}\Delta_{(\mathbf{y})} + \Delta_{(\mathbf{t})},$$

де $\Delta_{(\mathbf{y})}$ та $\Delta_{(\mathbf{t})}$ — q-оператори Лапласа для $\mathbf{y}$ та $\mathbf{t}$, відповідно.

Щоб знайти базиси $\mathcal{H}_m$, що відповідають звуженню (2.2.33), ми візьмемо невід'ємні числа s_1 та s_2, такі що m та $s_1 + s_2$ мають однакову парність і $m - s_1 - s_2 \geq 0$. Знайдемо гармонічну проекцію функції

$$Q_{\mathbf{t}}^{(m-s_1-s_2)/2} h_{s_1}(\mathbf{t}) h_{s_2}(\mathbf{y}) \in \mathcal{A}_m,$$

де $Q_{\mathbf{t}} := x_{p+1} + q^{-1}x_{p+2} + \cdots + q^{-(n-p)+1}x_n$ та $h_{s_1}(\mathbf{t})$ (відповідно $h_{s_2}(\mathbf{y})$) є однорідним степеня s_1 (відповідно степеня s_2) гармонічним поліномом від $\mathbf{t}$ (відповідно від $\mathbf{y}$). З визначення (2.2.3) похідних ∂_i та з (2.2.8), ми маємо

$$\begin{aligned}\Delta\left(Q_{\mathbf{t}}^r h_{s_1}(\mathbf{t}) h_{s_2}(\mathbf{y})\right) &= \Delta_{(\mathbf{t})}\left(Q_{\mathbf{t}}^r h_{s_1}(\mathbf{t}) h_{s_2}(\mathbf{y})\right) + q^{n-p} Q_{\mathbf{t}}^r h_{s_1}(\mathbf{t}) \Delta_{(\mathbf{y})} h_{s_2}(\mathbf{y}) \\ &= q^{-2s_2}\Delta_{(\mathbf{t})}\left(Q_{\mathbf{t}}^r h_{s_1}(\mathbf{t})\right) h_{s_2}(\mathbf{y}),\end{aligned}$$

де $r=(m-s_1-s_2)/2$. Взявши до уваги співвідношення (2.2.9), ми отримуємо

$$\Delta\left(Q_{\mathbf{t}}^r h_{s_1}(\mathbf{t})h_{s_2}(\mathbf{y})\right)=q^{-2s_2}Q_{\mathbf{t}}^{r-1}[2r][2r+n-p+2s_1-2]h_{s_1}(\mathbf{t})h_{s_2}(\mathbf{y}).$$

Застосовуючи повторно цю формулу, ми виводимо

$$H_m\left(Q_{\mathbf{t}}^r h_{s_1}(\mathbf{t})h_{s_2}(\mathbf{y})\right)=\sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor}\alpha_k\hat{Q}^k\Delta^k\left(Q_{\mathbf{t}}^r h_{s_1}(\mathbf{t})h_{s_2}(\mathbf{y})\right)=\left(\sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^k q^{-2s_2k}[2r]!!}{[n+2m-4]!!}\right.$$
$$\left.\times\frac{[2r+n-p+2s_1-2]!![n+2m-2k-4]!!}{[2r-2k]!![2r+n-p+2s_1-2k-2]!![2k]!!}Q^kQ_{\mathbf{t}}^{r-k}\right)h_{s_1}(\mathbf{t})h_{s_2}(\mathbf{y}),\quad (2.2.34)$$

де, як і раніше, $r=(m-s_1-s_2)/2$.

Ми позначаємо через $\hat{t}^{n,p;m}_{s_1,s_2}(Q_{\mathbf{t}},Q_{\mathbf{y}})$ вираз при $h_{s_1}(\mathbf{t})h_{s_2}(\mathbf{y})$ у правій частині (2.2.34):

$$\hat{t}^{n,p;m}_{s_1,s_2}(Q_{\mathbf{t}},Q_{\mathbf{y}})=$$
$$=\sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^k q^{-2s_2k}[2r]!!}{[n+2m-4]!!}\frac{[2r+n-p+2s_1-2]!![n+2m-2k-4]!!}{[2r-2k]!![2r+n-p+2s_1-2k-2]!![2k]!!}Q^kQ_{\mathbf{t}}^{r-k}.\quad (2.2.35)$$

Зокрема,

$$\hat{t}^{n,p;m}_{0,0}(Q_{\mathbf{t}},Q_{\mathbf{y}})=\frac{[2r]!![2r+n-p-2]!!}{[n+2m-4]!!}\sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^k[n+2m-2k-4]!!Q^kQ_{\mathbf{t}}^{r-k}}{[2r-2k]!![2r+n-p-2k-2]!![2k]!!},\quad (2.2.36)$$

де m — парне, є зональним поліномом у просторі $\mathcal{H}_m$ по відношенню до підалгебри $U_q'(\mathrm{so}_p)\times U_q'(\mathrm{so}_{n-p})$. Коли m — непарне, тоді простір $\mathcal{H}_m$ не має зональних поліномів.

Для нормування виразу (2.2.35), ми маємо порахувати коефіцієнт $c_m^{(s_1,s_2)}$ при $Q_{\mathbf{t}}^r$ в $\hat{t}^{n,p;m}_{s_1,s_2}(Q_{\mathbf{t}},Q_{\mathbf{t}})$. Завдяки формулі (2.2.25), ми маємо

$$c_m^{(s_1,s_2)}=\frac{(q^{4-4s_2-2p-4r};q^4)_r}{(q^{-2n-4m+8};q^4)_r}.$$

Повторюючи аргументацію з п. 2.2.4 для виведення формули (2.2.28), ми виконуємо нормування виразу (2.2.35). Нормований вираз має вигляд:

$$t^{n,p;\,m}_{s_1,s_2}(Q_{\mathbf{t}},Q_{\mathbf{y}}) = \left(\frac{[n+2s_1-p-2]!!q^{(n-p-1)r+2s_2r+s_1s_2}}{[2r]!![2s_1+n+2r-p-2]!!c_m^{(s_1,s_2)}}\right)^{1/2} \hat{t}^{n,p;\,m}_{s_1,s_2}(Q_{\mathbf{t}},Q_{\mathbf{y}}).$$

Для того, щоб побудувати ортонормований базис у просторі $\mathcal{H}_m$, що відповідає звуженню $U'_q(\mathrm{so}_n)\supset U'_q(\mathrm{so}_p)\times U'_q(\mathrm{so}_{n-p})$, у явному вигляді, ми зауважимо, що

$$\langle t^{n,p;\,m}_{s_1,s_2}(Q_{\mathbf{t}},Q_{\mathbf{y}})h_{s_1}(\mathbf{t})h_{s_2}(\mathbf{y}), t^{n,p;\,m}_{s_1,s_2}(Q_{\mathbf{t}},Q_{\mathbf{y}})h_{s_1}(\mathbf{t})h_{s_2}(\mathbf{y})\rangle$$

$$= \langle h_{s_1}(\mathbf{t}),h_{s_1}(\mathbf{t})\rangle\langle h_{s_2}(\mathbf{y}),h_{s_2}(\mathbf{y})\rangle.$$

Тому, для побудови такого базису ми маємо взяти ортонормовані базиси $h^{(i)}_{s_1}(\mathbf{t})$ та $h^{(j)}_{s_2}(\mathbf{y})$ на просторах $\mathcal{H}^{(\mathbf{t})}_{s_1}$ та $\mathcal{H}^{(\mathbf{y})}_{s_2}$ однорідних q-гармонічних поліномів від $\mathbf{t}$ та $\mathbf{y}$, відповідно, і побудувати добутки

$$t^{n,p;\,m}_{s_1,s_2}(Q_{\mathbf{t}},Q_{\mathbf{y}})h^{(i)}_{s_1}(\mathbf{t})h^{(j)}_{s_2}(\mathbf{y}), \tag{2.2.37}$$

$s_1+s_2\equiv m(\mathrm{mod}\ 2)$, $\quad s_1+s_2\le m$, $\quad i=1,2,\dots,\dim\mathcal{H}^{(\mathbf{t})}_{s_1}$, $\quad j=1,2,\dots,\dim\mathcal{H}^{(\mathbf{y})}_{s_2}$.

Легко порахувати, що кількість елементів (2.2.37) дорівнює $\dim\mathcal{H}_m$. З іншої сторони, доводиться як у випадку базисних елементів (2.2.29), що елементи (2.2.37) є взаємно ортогональними. Тому поліноми (2.2.37) складають ортонормований базис простору $\mathcal{H}_m$. Зокрема, ми можемо взяти елементи $\Xi_{\mathbf{s}_1}(\mathbf{t})$, $\mathbf{s}_1=(s_1,s'_1,\dots)$, та $\Xi_{\mathbf{s}_2}(\mathbf{y})$, $\mathbf{s}_2=(s_2,s'_2,\dots)$, типу (2.2.29) як ортонормовані базиси просторів $\mathcal{H}^{(\mathbf{t})}_{s_1}$ та $\mathcal{H}^{(\mathbf{y})}_{s_2}$, відповідно. Тоді елементи

$$t^{n,p;\,m}_{s_1,s_2}(Q_{\mathbf{t}},Q_{\mathbf{y}})\Xi_{\mathbf{s}_1}(\mathbf{t})\Xi_{\mathbf{s}_2}(\mathbf{y}) \tag{2.2.38}$$

формують ортонормований базис $\mathcal{H}_m$, який відповідає ланцюжку

$$U_q'(\mathrm{so}_n) \supset U_q'(\mathrm{so}_p) \times U_q'(\mathrm{so}_{n-p}) \supset U_q'(\mathrm{so}_{p-1}) \times U_q'(\mathrm{so}_{n-p-1}) \supset \cdots . \qquad (2.2.39)$$

Як вказано вище, для побудови різних ортонормованих базисів $\mathcal{H}_m$ може бути застосований метод дерев з розділу 10.2 в [153]. Різним деревам відповідають різні ланцюжки підалгебр $U_q'(\mathrm{so}_n)$ та асоційовані з ними ортонормовані базиси. Таким чином, як в п. 2.2.4, ми отримуємо q-аналоги різних розділень змінних.

Нижче, для виведення формул для дії операторів θ_j на базисні елементи, що відповідають звуженню (2.2.39), нам потрібно інший базис $\mathcal{H}_m$. Він отримується з базису (2.2.38), якщо елементи $\Xi_{\mathbf{s}_1}(\mathbf{t})$ простору $\mathcal{H}_{s_1}^{(\mathbf{t})}$ замінити на поліноми $\tilde{\Xi}_{\mathbf{s}_1}(\mathbf{t})$, де $\tilde{\Xi}_{\mathbf{s}_1}(\mathbf{t})$ отримується з $\Xi_{\mathbf{s}_1}(\mathbf{t})$ заміною $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ на $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{p+1}$, відповідно, та q на q^{-1}. Прямим обчисленням доводиться, що $\Delta_{\mathbf{t}}\tilde{\Xi}_{\mathbf{s}_1}(\mathbf{t}) = 0$. Отже, ми маємо ортонормований базис

$$\Xi^{n,p}_{\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2}(\mathbf{x}) = t^{n,p;\,m}_{s_1,s_2}(Q_{\mathbf{t}}, Q_{\mathbf{y}})\tilde{\Xi}_{\mathbf{s}_1}(\mathbf{t})\tilde{\Xi}_{\mathbf{s}_2}(\mathbf{y}) \qquad (2.2.40)$$

простору $\mathcal{H}_m$.

Для нижченаведених обчислень, нам будуть потрібні поліноми

$$\tilde{h}^{n-p}_{s_1,s_2}(\mathbf{t}) := \tilde{t}^{p,s_1}_{s_1'}(Q_{\mathbf{t}}, x_{p+1})\tilde{h}_{s_1'}(\mathbf{t}'), \qquad (2.2.41)$$

які кратні до $\tilde{\Xi}_{s_1}(\mathbf{t})$, де $\mathbf{t}' = (x_{p+2}, x_{p+3}, \ldots, x_n)$ та $\tilde{t}^{p,s_1}_{s_1'}(Q_{\mathbf{t}}, x_{p+1})$ і $\tilde{h}_{s_1'}(\mathbf{t}')$ отримуються з $\hat{t}^{p,s_1}_{s_1'}(Q_{\mathbf{t}}, x_n)$ та $h_{s_1'}(x_{p+1}, \ldots, x_{n-1})$ згаданою вище заміною. Для поліномів (2.2.41), аналогічно до Леми 2.1, доводиться наступна лема.

Лема 2.2. *У просторі q-гармонічних поліномів від $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$: справ-*

деливі наступні співвідношення

$$\gamma_{p+1}\partial_{p+1}\tilde{h}^{n-p}_{s_1,s_1'}(\mathbf{t}) = q^{s_1'}[s_1-s_1']\frac{[n-p+s_1+s_1'-3]}{[n-p+2s_1-4]}\tilde{h}^{n-p}_{s_1-1,s_1'}(\mathbf{t}),$$

$$\tilde{h}^{n-p}_{s_1,s_1'}(\mathbf{t})x_{p+1} - \frac{q^{n-p-1}Q_{\mathbf{t}}\gamma_{p+1}\partial_{p+1}\tilde{h}^{n-p}_{s_1,s_1'}(\mathbf{t})}{[n-p+2s_1-2]} = q^{-s_1'}\tilde{h}^{n-p}_{s_1+1,s_1'}(\mathbf{t}).$$

2.2.7. Представлення T_m у $U_q'(\mathrm{so}_p)\times U_q'(\mathrm{so}_{n-p})$-базисі. Основна мета в цьому пункті — вивести формули для дії операторів θ_j на базис (2.2.40), який відповідає звуженню (2.2.39).

Спочатку ми отримаємо дію оператора $T_m(I_{p+1,p}) = \theta_p$ на ненормовані базисні вектори. Маємо

$$\begin{aligned} \theta_p(Q^r_{\mathbf{t}}h_{s_1}(\mathbf{t})h_{s_2}(\mathbf{y})) = \\ = \frac{q^{s_2-2s_1-2r}[n-4+2s_1+2s_2+2r]}{[n-p+2s_1-2][p+2s_2-2]}Q^{r+1}_{\mathbf{t}}(\gamma_{p+1}\partial_{p+1}\tilde{h}^{n-p}_{s_1,s_1'}(\mathbf{t}))(\gamma_p^{-1}\partial_p h^p_{s_2,s_2'}(\mathbf{y})) \\ +q^{s_2-s_1'-2r-1}\frac{[p+2s_2+2r-2]}{[p+2s_2-2]}Q^r_{\mathbf{t}}\tilde{h}^{n-p}_{s_1+1,s_1'}(\mathbf{t})(\gamma_p^{-1}\partial_p h^p_{s_2,s_2'}(\mathbf{y})) \\ -q^{-s_2+s_2'+2r}\frac{[n-p+2s_1+2r-2]}{[n-p+2s_1-2]}Q^r_{\mathbf{t}}(\gamma_{p+1}\partial_{p+1}\tilde{h}^{n-p}_{s_1,s_1'}(\mathbf{t}))h^p_{s_2+1,s_2'}(\mathbf{y}) \\ -q^{2s_1-s_2-s_1'+s_2'+2r-1}[2r]Q^{r-1}_{\mathbf{t}}\tilde{h}^{n-p}_{s_1+1,s_1'}(\mathbf{t})h^p_{s_2+1,s_2'}(\mathbf{y}), \end{aligned} \tag{2.2.42}$$

де вирази $\gamma_{p+1}\partial_{p+1}\tilde{h}^{n-p}_{s_1,s_1'}(\mathbf{t})$ та $\gamma_p^{-1}\partial_p h^p_{s_2,s_2'}(\mathbf{y})$ рівні

$$\gamma_{p+1}\partial_{p+1}\tilde{h}^{n-p}_{s_1,s_1'}(\mathbf{t}) = q^{s_1'}[s_1-s_1']\frac{[n-p+s_1+s_1'-3]}{[n-p+2s_1-4]}\tilde{h}^{n-p}_{s_1-1,s_1'}(\mathbf{t}),$$

$$\gamma_p^{-1}\partial_p h^p_{s_2,s_2'}(\mathbf{y}) = q^{-s_2'}[s_2-s_2']\frac{[p+s_2+s_2'-3]}{[p+2s_2-4]}h^p_{s_2-1,s_2'}(\mathbf{y}).$$

Подіявши H_m на обидві частини (2.2.42) та враховуючи, що H_m комутує з θ_p, ми отримуємо формулу для ненормованих векторів. З цієї формули випливає як θ_p діє на нормовані поліноми $\Xi^{n,p}_{\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2}(\mathbf{x}) \equiv |m;\ \mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2\rangle$, де, як і раніше, $\mathbf{s}_1 = (s_1, s_1', s_1'', \ldots)$, $\mathbf{s}_2 = (s_2, s_2', s_2'', \ldots)$. Ця дія дається

$$\theta_p|m;\ \mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2\rangle = -K_{s_1}L_{s_2}\left([m-s_1-s_2][m+s_1+s_2+n-2]\right)^{1/2}|m;\ \mathbf{s}_1^{+1},\mathbf{s}_2^{+1}\rangle$$

$$+K_{s_1}L_{s_2-1}\left([m-s_1+s_2+p-2][m+s_1-s_2+n-p]\right)^{1/2}|m;\ \mathbf{s}_1^{+1},\mathbf{s}_2^{-1}\rangle$$

$$-K_{s_1-1}L_{s_2}\left([m+s_1-s_2+n-p-2][m-s_1+s_2+p]\right)^{1/2}|m;\ \mathbf{s}_1^{-1},\mathbf{s}_2^{+1}\rangle$$

$$+K_{s_1-1}L_{s_2-1}\left([m-s_1-s_2+2][m+s_1+s_2+n-4]\right)^{1/2}|m;\ \mathbf{s}_1^{-1},\mathbf{s}_2^{-1}\rangle,$$

де $\mathbf{s}_i^{\pm1}$ — набір $\mathbf{s}_i$ з s_i заміненим на $s_i \pm 1$, відповідно, та

$$K_{s_1} = \left(\frac{[s_1-s_1'+1][s_1+s_1'+n-p-2]}{[2s_1+n-p][2s_1+n-p-2]}\right)^{1/2},$$

$$L_{s_2} = \left(\frac{[s_2-s_2'+1][s_2+s_2'+p-2]}{[2s_2+p][2s_2+p-2]}\right)^{1/2}.$$

Ця формула співпадає з відповідною формулою для цього типу незвідного представлення $U_q'(\mathrm{so}_n)$ з [59].

Дія операторів θ_k, $1 \le k < p$, на базис (2.2.40) дається формулами Теореми 2.1, записаної для алгебри $U_q'(\mathrm{so}_p)$ з $m_p = s_2$, $m_{p-1} = s_2', \ldots$. Дія операторів θ_k, $p < k < n$, дається формулами Теореми 2.1 для операторів $-\theta_{n-k}$ алгебри $U_q'(\mathrm{so}_{n-p})$, відповідно, з $m_{n-p} = s_1$, $m_{n-p-1} = s_1', \ldots$.

2.2.8. Спектральний розклад деяких представлень. Результати, які були отримані вище, дозволяють розкласти звідне представлення, побудоване у попередніх пунктах, на незвідні складові. В п. 2.2.2 ми дали представлення ρ_m алгебри $U_q(\mathrm{sl}_n)$ на просторі $\mathcal{A}_m$ однорідних поліномів. Воно є незвідним представленням зі старшою вагою $(m, 0, \ldots, 0)$. Звуження цього представлення на підалгебру $U_q'(\mathrm{so}_n)$ було позначене $T^{(m)}$. Оскільки для $T^{(m)}$

ми маємо розклад (2.2.13) та $T_{m-2j} \sim R_{m-2j}$, де R_k — незвідні представлення класу 1 алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$, тому

$$\rho_m \downarrow_{U'_q(\mathrm{so}_n)} = \bigoplus_{0\le 2j\le m} R_{m-2j}, \qquad T^{(m)} = \bigoplus_{0\le 2j\le m} R_{m-2j},$$

де підсумовування проводиться як в (2.2.13).

Результати підрозділів показують як звуження представлення $T_m \sim R_m$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ на підалгебру $U'_q(\mathrm{so}_p) \times U'_q(\mathrm{so}_{n-p})$ розкладається на незвідні представлення:

$$R_m \downarrow_{U'_q(\mathrm{so}_p)\times U'_q(\mathrm{so}_{n-p})} = \bigoplus_{s_1,s_2} (R_{s_1} \times R_{s_2}),$$

де підсумовування проводиться по невід'ємних цілих s_1 та s_2, таких що $s_1 + s_2 \equiv 0 \pmod m$ та $s_1 + s_2 \le m$.

Формули

$$ke = q^4 ek, \quad kf = q^{-4} fk, \quad ef - fe = \frac{k - k^{-1}}{q^2 - q^{-2}}$$

визначають квантову алгебру $U_{q^2}(\mathrm{sl}_2)$. Гомоморфізм алгебр $\omega : U_{q^2}(\mathrm{sl}_2) \to \mathcal{A}$, однозначно визначений формулами

$$\omega(e) = \frac{\hat{Q}}{q+q^{-1}}, \quad \omega(f) = -\frac{\Delta}{q+q^{-1}}, \quad \omega(k) = q^n \gamma_1^2 \cdots \gamma_n^2 \equiv q^n \gamma^2\,,$$

є представленням $U_{q^2}(\mathrm{sl}_2)$ (див. [132]). Оскільки оператори $\omega(e)$, $\omega(f)$ та and $\omega(k)$ комутують з операторами θ_j (див. [132]), представлення $\omega \otimes T$ алгебри $U_{q^2}(\mathrm{sl}_2) \otimes U'(\mathrm{so}_n)$ діє на $\mathcal{A}$, де T визначається формулою (2.2.6). Це представлення є звідним. Розкладемо його на незвідні компоненти.

Завдяки (2.2.15), ми маємо $\mathcal{A} = \bigoplus_{m\ge 0}(\mathbb{C}[Q]\otimes\mathcal{H}_m)$. Підпростори $\mathbb{C}[Q]\otimes\mathcal{H}_m$ є незвідними по відношенню до $U_{q^2}(\mathrm{sl}_2) \otimes U'(\mathrm{so}_n)$, оскільки простір $\mathbb{C}[Q]$ є поточково інваріантним відносно дії $U'(\mathrm{so}_n)$ та для $f \in \mathbb{C}[Q]$ та $h_m \in \mathcal{H}_m$ ми маємо

$$\hat{Q}(f(Q) \otimes h_m) = Qf(Q) \otimes h_m, \tag{2.2.43}$$

$$\Delta(Q^r \otimes h_m) = [2r][2r + 2m + n - 2]Q^{r-1} \otimes h_m, \tag{2.2.44}$$

$$k(Q^r \otimes h_m) = q^n \gamma^2 (Q^r \otimes h_m) = q^{4r+2m+n}(Q^r \otimes h_m). \tag{2.2.45}$$

Ці формули показують, що $U_{q^2}(\mathrm{sl}_2)$ діє на $\mathbb{C}[Q]$ та $U'(\mathrm{so}_n)$ діє на $\mathcal{H}_m$. Однак ця дія $U_{q^2}(\mathrm{sl}_2)$ залежить від компонент $\mathcal{H}_m$. Взявши базис

$$|r\rangle := [2r]!Q^r, \quad r = 0, 1, 2, \ldots,$$

у просторі $\mathbb{C}[Q]$, ми знаходимо з (2.2.43)–(2.2.45), що

$$\omega(f)|r\rangle = -[r + m - 1 + n/2]_{q^2}|r - 1\rangle,$$

$$\omega(e)|r\rangle = [r + 1]_{q^2}|r + 1\rangle, \quad \omega(k)|r\rangle = (q^2)^{m+2r+n/2}|r\rangle.$$

Порівнюючи це представлення з відомими незвідними представленнями $U_{q^2}(\mathrm{sl}_2)$ (див., наприклад, [33]), ми виводимо, що на компоненті $\mathbb{C}[Q]$ простору $\mathbb{C}[Q] \otimes \mathcal{H}_m$ реалізовано незвідне представлення $U_{q^2}(\mathrm{sl}_2)$ дискретної серії з молодшою вагою $m + n/2$. Ми позначаємо це представлення $U_{q^2}(\mathrm{sl}_2)$ через $D_{m+n/2}$.

Отже ми показали, що на підпросторі $\mathbb{C}[Q] \otimes \mathcal{H}_m$ простору $\mathcal{A}$ діє незвідне представлення $D_{m+n/2} \otimes T_m$ алгебри $U_{q^2}(\mathrm{sl}_2) \otimes U'(\mathrm{so}_n)$. Це означає, що для звідного представлення $\omega \otimes T$ ми маємо наступний розклад на незвідні компоненти:

$$\omega \otimes T = \bigoplus_{m=0}^{\infty} D_{m+n/2} \otimes T_m.$$

Це є q-аналогом відповідного розкладу з класичної теорії (див. [153], розділ 12.3).

2.3. Оператор Лапласа та гармоніки на квантовому комплексному векторному просторі

2.3.1. Квантова алгебра $U_q(\mathrm{gl}_n)$ та квантовий векторний простір.

Квантова алгебра Дрінфельда–Джімбо $U_q(\mathrm{gl}_n)$ породжена елементами $k_i^{1/2} \equiv q^{h_i/2}$, $k_i^{-1/2} \equiv q^{-h_i/2}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, та e_j, f_j, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, що задовільняють співвідношення

$$k_i k_i^{-1} = k_i^{-1} k_i = 1, \quad k_i k_j = k_j k_i, \quad k_i e_j k_i^{-1} = q^{a_{ij}} e_j, \quad k_i f_j k_i^{-1} = q^{-a_{ij}} f_j,$$

$$[e_i, f_j] \equiv e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{k_i k_{i+1}^{-1} - k_i^{-1} k_{i+1}}{q - q^{-1}},$$

$$e_i^2 e_{i\pm1} - (q + q^{-1}) e_i e_{i\pm1} e_i + e_{i\pm1} e_i^2 = 0,$$

$$f_i^2 f_{i\pm1} - (q + q^{-1}) f_i f_{i\pm1} f_i + f_{i\pm1} f_i^2 = 0,$$

$$[e_i, e_j] = [f_i, f_j] = 0, \qquad |i - j| > 1,$$

де $a_{ii} = 1$, $a_{i,i-1} = a_{i-1,i} = -1$ та всі інші $a_{ij} = 0$ (див., наприклад, [102], Глава 6).

Алгебра $U_q(\mathrm{gl}_n)$ є алгеброю Хопфа з операціями комноження Δ, коодиниці ε та антиподу S, які даються формулами

$$\Delta(k_i^{\pm1}) = k_i^{\pm1} \otimes k_i^{\pm1}, \quad \Delta(e_i) = e_i \otimes k_i^{-1/2} k_{i+1}^{1/2} + k_i^{1/2} k_{i+1}^{-1/2} \otimes e_i,$$

$$\Delta(f_i) = f_i \otimes k_i^{-1/2} k_{i+1}^{1/2} + k_i^{1/2} k_{i+1}^{-1/2} \otimes f_i, \quad \varepsilon(k_i) = 1, \quad \varepsilon(e_i) = \varepsilon(f_i) = 0,$$

$$S(k_i) = k_i^{-1}, \quad S(e_i) = -q^{-1} e_i, \quad S(f_i) = -q f_i.$$

Група $GL(n, \mathbb{C})$ та її алгебра Лі $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ діє лінійно на n-вимірному комплексному векторному просторі. Аналогічно, квантова група $GL_q(n, \mathbb{C})$ та алгебра $U_q(\mathrm{gl}_n)$ діють на квантовому (некомутативному) аналозі комплексного векторного простору. Цей квантовий простір визначається алгеброю поліномів $\mathcal{A} \equiv \mathbb{C}_q[z_1, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_n]$ (див. [5]). Ця алгебра є асоціативною алгеброю, породженою елементами $z_1, z_2, \cdots, z_n, w_1, w_2, \cdots, w_n$, які задовільняють визначальні співвідношення

$$z_i z_j = q z_j z_i, \quad w_i w_j = q^{-1} w_j w_i, \quad i < j, \tag{2.3.46}$$

$$w_j z_i = q z_i w_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.3.47}$$

$$w_k z_k = z_k w_k + (1 - q^2) \sum_{s=1}^{k-1} z_s w_s. \tag{2.3.48}$$

Елементи $w_1, \cdots, w_n$ відіграють роль $\overline{z}_1, \cdots, \overline{z}_n$ з класичного аналізу.

На алгебрі $\mathcal{A}$ можна визначити $*$-операцію, яка перетворить її в $*$-алгебру. Ця $*$-операція однозначно визначається співвідношеннями $z_i^* = w_i$, $w_i^* = z_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Компактна квантова група $U_q(n)$ діє на цій $*$-алгебрі.

Відзначимо, що співвідношення (2.3.48) є еквівалентними до наступних:

$$z_k w_k = w_k z_k - (1 - q^2) \sum_{s=1}^{k-1} q^{2(k-s-1)} w_s z_s. \tag{2.3.49}$$

Набір всіх мономів

$$z_1^{r_1} z_2^{r_2} \cdots z_n^{r_n} w_1^{s_1} w_2^{s_2} \cdots w_n^{s_n}, \quad r_j, s_j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.3.50}$$

формує базис алгебри $\mathcal{A}$ (див. [129]). Набір

$$w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n} z_1^{s_1} z_2^{s_2} \cdots z_n^{s_n}, \quad r_j, s_j = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2.3.51}$$

також є базисом цієї алгебри.

Векторний простір алгебри $\mathcal{A}$ може бути представлений як пряма сума векторних підпросторів $\mathcal{A}_{m,m'}$, що складаються з однорідних поліномів степеня однорідності m по змінних $z_1, z_2, \cdots, z_n$ та степеня однорідності m' по змінних $w_1, w_2, \cdots, w_n$, $m, m' = 0, 1, 2, \cdots$:

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \bigoplus_{m'=0}^{\infty} \mathcal{A}_{m,m'}. \tag{2.3.52}$$

Ми маємо ізоморфізм лінійних просторів

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_z \otimes \mathcal{A}_w,$$

де асоціативна алгебра $\mathcal{A}_z$ (асоціативна алгебра $\mathcal{A}_w$) є підалгеброю $\mathcal{A}$, що співпадає з $\bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{A}_{m,0}$ (відповідно, з $\bigoplus_{m'=0}^{\infty} \mathcal{A}_{0,m'}$).

Ми можемо визначити дію алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$ на векторному просторі $\mathcal{A}$ визначивши її дію на z_j та w_j формулами (див. [129])

$$k_i \triangleright z_j = q^{\delta_{ij}} z_j, \quad e_i \triangleright z_j = \delta_{j,i+1} z_{j-1}, \quad f_i \triangleright z_j = \delta_{j,i} z_{j+1}, \tag{2.3.53}$$

$$k_i \triangleright w_j = q^{-\delta_{ij}} w_j, \quad e_i \triangleright w_j = -\delta_{j,i} q^{-1} w_{j+1}, \quad f_i \triangleright w_j = -\delta_{j,i+1} q w_{j-1}. \tag{2.3.54}$$

та поширивши її на $\mathcal{A}$ за допомогою комноження, тобто співвідношення

$$X \triangleright (p_1 p_2) = \sum (X_{(1)} \triangleright p_1)(X_{(2)} \triangleright p_2),$$

де $\Delta(X) = \sum X_{(1)} \otimes X_{(2)}$ (в позначеннях Свідлера), та по лінійності.

Ця дія алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$ на векторний простір $\mathcal{A}$ визначає представлення $U_q(\mathrm{gl}_n)$ на цьому просторі (ми позначаємо його через L). Зрозуміло, підпростори $\mathcal{A}_{m,m'}$ є інваріантними по відношенню до цієї дії. Тому L визначає представлення $U_q(\mathrm{gl}_n)$ на цих підпросторах, які позначимо через $L_{m,m'}$. Ми маємо розклад $L = \bigoplus_{m,m'=0}^{\infty} L_{m,m'}$.

2.3.2. Оператори на алгебрі $\mathcal{A}$. Для того, щоб визначити q-оператор Лапласа на $\mathcal{A}$ та вивчити q-гармонічні поліноми нам потрібні деякі оператори на лінійному просторі алгебри $\mathcal{A}$. Через γ_i та $\bar{\gamma}_i$ ми позначаємо лінійні оператори, що діють на мономах як

$$\gamma_i(z_1^{r_1}z_2^{r_2}\cdots z_n^{r_n}w_1^{s_1}w_2^{s_2}\cdots w_n^{s_n}) = q^{r_i}z_1^{r_1}z_2^{r_2}\cdots z_n^{r_n}w_1^{s_1}w_2^{s_2}\cdots w_n^{s_n},$$

$$\bar{\gamma}_i(w_1^{r_1}w_2^{r_2}\cdots w_n^{r_n}z_1^{s_1}z_2^{s_2}\cdots z_n^{s_n}) = q^{r_i}w_1^{r_1}w_2^{r_2}\cdots w_n^{r_n}z_1^{s_1}z_2^{s_2}\cdots z_n^{s_n}.$$

Визначення операторів γ_i^{-1} та $\bar{\gamma}_i^{-1}$ є очевидним.

Через $\hat{z}_i$ та $\breve{z}_i$ ми позначаємо лінійні оператори множення на елементи z_i:

$$\hat{z}_i(z_1^{r_1}z_2^{r_2}\cdots z_n^{r_n}w_1^{s_1}w_2^{s_2}\cdots w_n^{s_n}) = z_iz_1^{r_1}z_2^{r_2}\cdots z_n^{r_n}w_1^{s_1}w_2^{s_2}\cdots w_n^{s_n},$$

$$\breve{z}_i(z_1^{r_1}z_2^{r_2}\cdots z_n^{r_n}w_1^{s_1}w_2^{s_2}\cdots w_n^{s_n}) = z_1^{r_1}z_2^{r_2}\cdots z_n^{r_n}z_iw_1^{s_1}w_2^{s_2}\cdots w_n^{s_n}.$$

Відповідні лінійні оператори $\hat{w}_i$ та $\breve{w}_i$ визначаються як

$$\hat{w}_i(w_1^{r_1}w_2^{r_2}\cdots w_n^{r_n}z_1^{s_1}z_2^{s_2}\cdots z_n^{s_n}) = w_iw_1^{r_1}w_2^{r_2}\cdots w_n^{r_n}z_1^{s_1}z_2^{s_2}\cdots z_n^{s_n},$$

$$\breve{w}_i(w_1^{r_1}w_2^{r_2}\cdots w_n^{r_n}z_1^{s_1}z_2^{s_2}\cdots z_n^{s_n}) = w_1^{r_1}w_2^{r_2}\cdots w_n^{r_n}w_iz_1^{s_1}z_2^{s_2}\cdots z_n^{s_n}.$$

Ми визначаємо q-диференціювання ∂_i та $\bar{\partial}_i$ на $\mathcal{A}$. Лінійні оператори ∂_i діють як $\partial_i p = 0$ на мономи p у вигляді (2.3.50), що не містять z_i та як

$$\partial_i = \breve{z}_i^{-1}\frac{\gamma_i - \gamma_i^{-1}}{q - q^{-1}} \tag{2.3.55}$$

на мономи, що містять z_i. Оператори q-диференціювання $\bar{\partial}_i$ є лінійними операторами, які діють як $\bar{\partial}_i p = 0$ на мономи p у вигляді (2.3.51), що не містять w_i та як

$$\bar{\partial}_i = \breve{w}_i^{-1}\frac{\bar{\gamma}_i - \bar{\gamma}_i^{-1}}{q - q^{-1}} \tag{2.3.56}$$

на мономи, що містять w_i.

Формули для дії (2.3.53) та (2.3.54) означають, що оператори множення $\hat{z}_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$, та $\hat{w}_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$, складають тензорні оператори, які перетворюються, відповідно, по векторному та контргредієнтному до векторного представленням.

Дії (2.3.53) та (2.3.54) алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$ на z_j та w_j визначають її дію на оператори ∂_j та $\bar{\partial}_j$:

$$k_i \triangleright \partial_j = q^{-\delta_{ij}} \partial_j, \qquad e_i \triangleright \partial_j = -\delta_{j,i} q^{-1} \partial_{j+1}, \qquad f_i \triangleright \partial_j = -\delta_{j,i+1} q \partial_{j-1}, \tag{2.3.57}$$

$$k_i \triangleright \bar{\partial}_j = q^{\delta_{ij}} \bar{\partial}_j, \qquad e_i \triangleright \bar{\partial}_j = \delta_{j,i+1} q^{-2} \bar{\partial}_{j-1}, \qquad f_i \triangleright \bar{\partial}_j = \delta_{j,i} q^2 \bar{\partial}_{j+1}. \tag{2.3.58}$$

Тобто, набір $\bar{\partial}_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$, (відповідно, набір ∂_j, $j = 1, 2, \cdots, n$) є тензорним оператором, що перетворюється по векторному (відповідно, по контргредієнтному до векторного) представленню.

Оператори ∂_i, $\bar{\partial}_i$, $\hat{z}_i$, $\hat{w}_i$ задовільняють співвідношення, які будуть представлені за допомогою квантової R-матриці R для квантової алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$ (див., наприклад, [102], розділ 8.1, та [5] для визначення R-матриці). Нехай $\mathbf{R} = PR$, де матриця P переставляє простори у тензорному добутку двох просторів, на яких діє R-матриця. Тоді

$$\mathbf{R}^{ij}_{kl} = q^{\delta_{ij}} \delta_{il} \delta_{jk} + (q - q^{-1}) \delta_{ik} \delta_{jl} \theta(j - i),$$

де $\theta(k) = 1$, якщо $k > 0$, та $\theta(k) = 0$, якщо $k \leq 0$. Її оберенена матриця:

$$\left(\mathbf{R}^{-1}\right)^{ij}_{kl} = q^{-\delta_{ij}} \delta_{il} \delta_{jk} - (q - q^{-1}) \delta_{ik} \delta_{jl} \theta(i - j).$$

Нам також знадобиться матриця $\Phi^{ij}_{kl} = \mathbf{R}^{ji}_{lk} q^{2(i-l)}$, яка задовільняє співвідношення

$$\sum_{j,l} \Phi^{ul}_{pj} \big(\mathbf{R}^{-1}\big)^{ji}_{lk} = \sum_{j,l} \big(\mathbf{R}^{-1}\big)^{ul}_{pj} \Phi^{ji}_{lk} = \delta_{up}\delta_{ik},$$

$$\sum_{l} \Phi^{li}_{lk} = \delta_{ik} q^{2(n-i)+1}, \qquad \sum_{k} \Phi^{jk}_{lk} = \delta_{jl} q^{2l-1}.$$

Співвідношення (2.3.46)–(2.3.48) переписані для операторів $\hat{z}_i$ та $\hat{w}_i$ можуть бути представлені як

$$\hat{z}_i \hat{z}_j = q^{-1} \mathbf{R}^{kl}_{ij} \hat{z}_k \hat{z}_l, \qquad \hat{w}_i \hat{w}_j = q^{-1} \mathbf{R}^{ji}_{lk} \hat{w}_k \hat{w}_l, \qquad \hat{w}_i \hat{z}_j = q \big(\mathbf{R}^{-1}\big)^{ik}_{jl} \hat{z}_k \hat{w}_l,$$

Ми також маємо співвідношення

$$\partial_i \partial_j = q^{-1} \mathbf{R}^{ji}_{lk} \partial_k \partial_l, \qquad \bar{\partial}_i \bar{\partial}_j = q^{-1} \mathbf{R}^{kl}_{ij} \bar{\partial}_k \bar{\partial}_l, \qquad \partial_i \bar{\partial}_j = q^{-1} \Phi^{ki}_{lj} \bar{\partial}_k \partial_l,$$

$$\partial_i \hat{w}_j = q \big(\mathbf{R}^{-1}\big)^{ji}_{lk} \hat{w}_k \partial_l, \qquad \bar{\partial}_i \hat{z}_j = q \Phi^{lk}_{ji} \hat{z}_k \bar{\partial}_l,$$

$$\partial_i \hat{z}_j = \gamma^{\mp 1} \delta_{ij} + (\mathbf{R}^{\pm 1})^{ik}_{jl} \hat{z}_k \partial_l, \qquad \bar{\partial}_i \hat{w}_j = \bar{\gamma}^{\mp 1} \delta_{ij} + (\mathbf{R}^{\pm 1})^{lj}_{ki} \hat{w}_k \bar{\partial}_l,$$

які можуть бути представлені у вигляді

$$\partial_i \partial_j = q^{-1} \partial_j \partial_i, \qquad \bar{\partial}_i \bar{\partial}_j = q \bar{\partial}_j \bar{\partial}_i, \qquad i < j,$$

$$\bar{\partial}_i \partial_j = q \partial_j \bar{\partial}_i, \quad i \neq j, \qquad \bar{\partial}_i \partial_i = \partial_i \bar{\partial}_i + (1 - q^2) \sum_{k > i} \partial_k \bar{\partial}_k,$$

$$\partial_i \bar{\partial}_i = \bar{\partial}_i \partial_i + (1 - q^{-2}) \sum_{k > i} q^{2(k-i)} \bar{\partial}_k \partial_k.$$

$$\partial_i \hat{w}_i = \hat{w}_i \partial_i, \qquad \partial_i \hat{w}_j - q \hat{w}_j \partial_i = (1 - q^2) \hat{w}_i \partial_j, \qquad \partial_j \hat{w}_i = q \hat{w}_i \partial_j, \qquad i < j,$$

$$\bar{\partial}_i \hat{z}_i = \hat{z}_i \bar{\partial}_i, \qquad \bar{\partial}_i \hat{z}_j - q^{-1} \hat{z}_j \bar{\partial}_i = (1 - q^{-2}) q^{2(j-i)} \hat{z}_i \bar{\partial}_j, \qquad \bar{\partial}_j \hat{z}_i = q^{-1} \hat{z}_i \bar{\partial}_j, \qquad i < j,$$

$$\partial_i \hat{z}_j = \hat{z}_j \partial_i, \qquad \bar{\partial}_i \hat{w}_j = \hat{w}_j \bar{\partial}_i, \qquad i \neq j,$$

$$\partial_i \hat{z}_i = q \hat{z}_i \partial_i + (q - q^{-1}) \sum_{k > i} \hat{z}_k \partial_k + \gamma^{-1} = q^{-1} \hat{z}_i \partial_i - (q - q^{-1}) \sum_{k < i} \hat{z}_k \partial_k + \gamma,$$

$$\bar{\partial}_i\hat{w}_i = q\hat{w}_i\bar{\partial}_i + (q-q^{-1})\sum_{k<i}\hat{w}_k\bar{\partial}_k + \bar{\gamma}^{-1} = q^{-1}\hat{w}_i\bar{\partial}_i - (q-q^{-1})\sum_{k>i}\hat{w}_k\bar{\partial}_k + \bar{\gamma},$$

де $\gamma = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n$ та $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2\cdots\bar{\gamma}_n$. З двох останніх рядків ми отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n}\hat{z}_k\partial_k = \{\gamma\} \equiv \frac{\gamma-\gamma^{-1}}{q-q^{-1}}, \qquad \sum_{k=1}^{n}\hat{w}_k\bar{\partial}_k = \{\bar{\gamma}\} \equiv \frac{\bar{\gamma}-\bar{\gamma}^{-1}}{q-q^{-1}},$$

Ми також маємо співвідношення

$$\gamma\hat{z}_i = q\hat{z}_i\gamma, \qquad \gamma\hat{w}_i = \hat{w}_i\gamma, \qquad \bar{\gamma}\hat{z}_i = \hat{z}_i\bar{\gamma}, \qquad \bar{\gamma}\hat{w}_i = q\hat{w}_i\bar{\gamma},$$

$$\gamma\partial_i = q^{-1}\partial_i\gamma, \qquad \gamma\bar{\partial}_i = \bar{\partial}_i\gamma, \qquad \bar{\gamma}\partial_i = \partial_i\bar{\gamma}, \qquad \bar{\gamma}\bar{\partial}_i = q^{-1}\bar{\partial}_i\bar{\gamma}.$$

Зауважимо, що

$$\gamma p = q^{m}p, \qquad \bar{\gamma}p = q^{m'}p, \qquad p \in \mathcal{A}_{m,m'}. \tag{2.3.59}$$

Для того, щоб порівняти ці співвідношення з відомими у літературі, ми вводимо оператори $\partial_i' = \gamma\partial_i$, $\bar{\partial}_i' = \bar{\gamma}^{-1}\bar{\partial}_i$. Тоді оператори $\hat{z}_i$, $\hat{w}_i$, ∂_i', $\bar{\partial}_i'$, $i = 1, \cdots, n$, задовільняють співвідношення з [39], для яких відомо, що вони є коваріантними по відношенню до $U_q(\mathrm{gl}_n)$.

Зауважимо, що елементи $\hat{z}_1, \cdots \hat{z}_n, \partial_1', \cdots, \partial_n'$ породжують q-алгебру Вейля, тобто, вони задовільняють співвідношення

$$\hat{z}_i\hat{z}_j = q\hat{z}_j\hat{z}_i, \quad \partial_i'\partial_j' = q^{-1}\partial_j'\partial_i' \quad i<j, \qquad \partial_i'\hat{z}_j = q\hat{z}_j\partial_i', \qquad i \neq j,$$

$$\partial_i'\hat{z}_i - q^2\hat{z}_i\partial_i' = 1 + (q^2-1)\sum_{j>i}\hat{z}_j\partial_j'$$

(визначення q-алгебри Вейля дається, наприклад, в [102], глава 12). Аналогічно, елементи $\hat{w}_1, \cdots \hat{w}_n, \bar{\partial}_1', \cdots, \bar{\partial}_n'$ породжують q^{-1}-алгебру Вейля.

Оператори $D := \sum_{k=1}^{n}\hat{z}_k\partial_k$ та $\bar{D} := \sum_{k=1}^{n}\hat{w}_k\bar{\partial}_k$ називаються *q-операторами Ейлера*. Формула (2.3.52) дає розклад $\mathcal{A}$ в пряму суму власних підпросторів операторів D та $\bar{D}$.

Давайте покажемо, що наведені вище співвідношення для операторів ∂_i, $\bar{\partial}_i$, $\hat{z}_i$, $\hat{w}_i$ однозначно визначають формули (2.3.55) та (2.3.56) для $\partial_i, \bar{\partial}_i$. Ми використовуємо формули дії $\partial_i 1 = \bar{\partial}_i 1 = 0$, беремо до уваги, що $\hat{z}_i$, $\hat{w}_i$ діють як оператори лівого множення на базисні елементи (2.3.50) та (2.3.51), відповідно, та γ, $\bar{\gamma}$ — оператори градуювання на $\mathcal{A}$ (див. (2.3.59)). Використовуючи комутаційні співвідношення між ∂_i та $\hat{w}_j$, легко отримати, що $\partial_i w_1^{s_1} w_2^{s_2} \cdots w_n^{s_n} = 0$. Для обчислення $\partial_i (z_i^{r_i} w_1^{s_1} w_2^{s_2} \cdots w_n^{s_n})$ з $r_i > 0$, ми використовуємо співвідношення

$$\partial_i \hat{z}_i = q \hat{z}_i \partial_i + (q - q^{-1}) \sum_{k>i} \hat{z}_k \partial_k + \gamma^{-1}.$$

Це дає $\partial_i (z_i^{r_i} w_1^{s_1} w_2^{s_2} \cdots w_n^{s_n}) = [r_i] z_i^{r_i - 1} w_1^{s_1} w_2^{s_2} \cdots w_n^{s_n}$. Тому маємо формулу

$$\partial_i (z_1^{r_1} \cdots z_i^{r_i} \cdots z_n^{r_n} w_1^{s_1} \cdots w_n^{s_n}) =$$

$$= q^{r_{i+1} + \cdots + r_n} [r_i] z_1^{r_1} \cdots z_i^{r_i - 1} \cdots z_n^{r_n} w_1^{s_1} \cdots w_n^{s_n},$$

яка точно співпадає з формулою для дії (2.3.55). Формула для $\bar{\partial}_i$ відновлюється аналогічно.

Дія алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$ на $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_z \otimes \mathcal{A}_w$, визначена формулами (2.3.53) та (2.3.54), може бути записана в термінах дії операторів ∂_i та $\bar{\partial}_j$. Ми спочатку зауважимо, що дія $U_q(\mathrm{gl}_n)$ на $\mathcal{A}_z$ дається операторами

$$L(k_i) = \gamma_i, \quad L(e_i) = q^{-1/2} (\gamma_i \gamma_{i+1})^{1/2} \breve{z}_i \partial_{i+1}, \quad L(f_i) = q^{1/2} (\gamma_i \gamma_{i+1})^{-1/2} \breve{z}_{i+1} \partial_i$$

та на $\mathcal{A}_w$ операторами

$$L(k_i) = \bar{\gamma}_i^{-1}, \; L(e_i) = -q^{-3/2} (\bar{\gamma}_i \bar{\gamma}_{i+1})^{1/2} \breve{w}_{i+1} \bar{\partial}_i, \; L(f_i) = -q^{3/2} (\bar{\gamma}_i \bar{\gamma}_{i+1})^{-1/2} \breve{w}_i \bar{\partial}_{i+1}.$$

Взявши до уваги комноження на $U_q(\mathrm{gl}_n)$, ми отримуємо, що дія $U_q(\mathrm{gl}_n)$ на лінійний простір $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_z \otimes \mathcal{A}_w$ може бути записана як $L(k_i) = \gamma_i \otimes \bar{\gamma}_i^{-1}$ та

$$L(e_i) = q^{-1/2}(\gamma_i\gamma_{i+1})^{1/2}\breve{z}_i\partial_{i+1} \otimes (\bar{\gamma}_i\bar{\gamma}_{i+1}^{-1})^{1/2} - q^{-3/2}(\gamma_i\gamma_{i+1}^{-1})^{1/2} \otimes (\bar{\gamma}_i\bar{\gamma}_{i+1})^{1/2}\breve{w}_{i+1}\bar{\partial}_i,$$

$$L(f_i) = q^{1/2}(\gamma_i\gamma_{i+1})^{-1/2}\breve{z}_{i+1}\partial_i \otimes (\bar{\gamma}_i\bar{\gamma}_{i+1}^{-1})^{1/2} - q^{3/2}(\gamma_i\gamma_{i+1}^{-1})^{1/2} \otimes (\bar{\gamma}_i\bar{\gamma}_{i+1})^{-1/2}\breve{w}_i\bar{\partial}_{i+1}.$$

2.3.3. Квадрат q-радіуса та q-оператор Лапласа. Елемент

$$Q = \sum_{i=1}^{n} z_i w_i = \sum_{i=1}^{n} q^{2(n-i)} w_i z_i \in \mathcal{A}_{1,1} \tag{2.3.60}$$

алгебри $\mathcal{A}$ називається *квадратом q-радіуса* на квантовому комплексному векторному просторі. Він є важливим елементом з $\mathcal{A}$. Можна перевірити прямими обрахунками, що Q *є інваріантним по відношенню до представлення* $L_{1,1}$ (і тому по відношенню до представлення L), тобто $L(k_i^{\pm 1})Q = Q$, $L(e_j)Q = 0$ та $L(f_j)Q = 0$. Аналогічно, елемент $Q^k \in \mathcal{A}_{k,k}$ є інваріантним по відношенню до представлення $L_{k,k}$.

Квадрат q-радіуса Q належить центру алгебри $\mathcal{A}$, тобто $Qz_i = z_iQ$, $Qw_i = w_iQ$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Ми також будемо використовувати елементи

$$Q_j = \sum_{i=1}^{j} z_i w_i = \sum_{i=1}^{j} q^{2(j-i)} w_i z_i,$$

які є квадратами q-радіусів для підалгебр $\mathbb{C}_q[z_1, w_1, \cdots, z_j, w_j]$. Вони задовільняють співвідношення (див. [129])

$$Q_jQ_i = Q_iQ_j, \quad z_iw_i = Q_i - Q_{i-1}, \quad w_iz_i = Q_i - q^2Q_{i-1},$$

$$z_iQ_j = q^{-2}Q_jz_i, \quad w_iQ_j = q^2Q_jw_i \quad \text{при} \quad i > j,$$

$$z_iQ_j = Q_jz_i, \quad w_iQ_j = Q_jw_i \quad \text{при} \quad i \le j.$$

Прямим обчисленням можна перевірити (див. [129]), що

$$z_i^k w_i^k = Q_i^k \left(Q_{i-1}/Q_i; q^{-2}\right)_k, \quad w_i^k z_i^k = Q_i^k \left(q^2 Q_{i-1}/Q_i; q^2\right)_k, \tag{2.3.61}$$

де

$$(a;q)_s = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{s-1}).$$

Ми розгядаємо на $\mathcal{A}$ оператор

$$\Delta_q = \partial_1\bar{\partial}_1 + \partial_2\bar{\partial}_2 + \cdots + \partial_n\bar{\partial}_n = \sum_{i=1}^{n} q^{2(i-1)}\bar{\partial}_i\partial_i, \tag{2.3.62}$$

який називається *q-оператором Лапласа* на квантовому комплексному векторному просторі. Оскільки $\gamma\Delta_q = q^{-1}\Delta_q\gamma$ та $\bar{\gamma}\Delta_q = q^{-1}\Delta_q\bar{\gamma}$, маємо $\Delta_q : \mathcal{A}_{m,m'} \to \mathcal{A}_{m-1,m'-1}$.

Елементу (2.3.60) відповідає оператор $\hat{Q}$ на $\mathcal{A}$ визначений як

$$\hat{Q} = \hat{z}_1\hat{w}_1 + \hat{z}_2\hat{w}_2 + \cdots + \hat{z}_n\hat{w}_n.$$

Твердження 2.5. *Оператори Δ_q та $\hat{Q}$ задовільняють співвідношення*

$$\Delta_q\hat{Q}^k - \hat{Q}^k\Delta_q = q^{n-1}\hat{Q}^{k-1}[k]\{q^{k+n-1}\gamma\bar{\gamma}\}, \tag{2.3.63}$$

$$\Delta_q(Q^k) = q^{n-1}Q^{k-1}[k][k+n-1], \tag{2.3.64}$$

де

$$\{a\} = \frac{a-a^{-1}}{q-q^{-1}}$$

та $[r] \equiv \{q^r\}$ — q-число.

Твердження 2.6. *Оператори Δ_q та $\hat{Q}$ комутують з дією алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$ на $\mathcal{A}$, тобто з усіма операторами представлення L алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$.*

Доведення. З формул (2.3.57) та (2.3.58) випливає, що $k_i \triangleright \Delta_q = \Delta_q$, $e_j \triangleright \Delta_q = 0$ та $f_j \triangleright \Delta_q = 0$. Тепер використовуючи комноження для k_i, e_j та f_j, ми отримуємо твердження для q-оператора Лапласа. Для $\hat{Q}$ твердження доводиться аналогічно.

2.3.4. q-Гармонічні поліноми. Поліном $p \in \mathcal{A}$ називається *q-гармонічним*, якщо $\Delta_q p = 0$. Лінійний підпростір $\mathcal{A}$, якій складається з усіх q-гармонічних поліномів, позначимо через $\mathcal{H}$. Нехай

$$\mathcal{H}_{m,m'} = \mathcal{A}_{m,m'} \cap \mathcal{H}.$$

Твердження 2.7. *Простір $\mathcal{A}_{m,m'}$ може бути представлений як пряма сума*

$$\mathcal{A}_{m,m'} = \mathcal{H}_{m,m'} \oplus Q\mathcal{A}_{m-1,m'-1}. \qquad (2.3.65)$$

Зауваження. Якщо $n = 1$, тоді $\mathcal{A}$ складається з усіх поліномів від комутуючих елементів z_1 та w_1. У цьому випадку простір q-гармонічних поліномів $\mathcal{H}$ має базис, який складається з поліномів

$$1, \quad z_1^k, \quad w_1^k, \qquad k = 1, 2, \cdots . \qquad (2.3.66)$$

Розклад (2.3.65) має також має наступні наслідки:

Наслідок 1. *Якщо $p \in \mathcal{H}_{m,m'}$, тоді p не може бути представлений як $p = Q^k p'$, $k \neq 0$, з деяким поліномом p'.*

Наслідок 2. *Простір $\mathcal{A}_{m,m'}$ розкладається в пряму суму*

$$\mathcal{A}_{m,m'} = \bigoplus_{j=0}^{\min(m,m')} Q^j \mathcal{H}_{m-j,m'-j}. \qquad (2.3.67)$$

Наслідок 3. *Для розмірності простору q-гармонічних поліномів* $\mathcal{H}_{m,m'}$ *ми маємо формулу*

$$\dim \mathcal{H}_{m,m'} = \frac{(m+n-2)!(m'+n-2)!(m+m'+n-1)}{(n-1)!(n-2)!m!m'!}.$$

Наслідок 4. *Простір q-гармонічних поліномів* $\mathcal{H}$ *може бути представлений у вигляді прямої суми*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \bigoplus_{m'=0}^{\infty} \mathcal{H}_{m,m'}.$$

Наслідок 1 прямо випливаєз формули (2.3.65). Наслідок 2 легко випливає з повторного використання (2.3.65). Наслідок 3 доводиться так само як в класичному випадку (див., наприклад, [153], глава10). Для цього ми зауважимо, що

$$\dim \mathcal{A}_{m,m'} = \frac{(n+m-1)!(n+m'-1)!}{(n-1)!^2 m!m'!}.$$

Тому, для $\dim \mathcal{H}_{m,m'} = \dim \mathcal{A}_{m,m'} - \dim \mathcal{A}_{m-1,m'-1}$ ми отримуємо вираз наведений у наслідку. Для того щоб довести Наслідок 4, ми зауважимо, що

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{m\geq 0} \bigoplus_{m'\geq 0} \bigoplus_{j=0}^{p} Q^j \mathcal{H}_{m-j,m'-j} = \bigoplus_{m\geq 0} \bigoplus_{m'\geq 0} \left(\mathcal{H}_{m,m'} \bigoplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{p} Q^j \mathcal{H}_{m-j,m'-j} \Big) \right),$$

де $p = \min(m, m')$. Тепер з цієї рівності та з Наслідку 1 випливає Наслідок 4.

Теорема 2.2. *Має місце ізоморфізм лінійних просторів* $\mathcal{A} \simeq \mathbb{C}[Q] \otimes \mathcal{H}$, *де* $\mathbb{C}[Q]$ *— простір всіх поліномів від* Q.

Ця теорема випливає з Наслідку 2.

Розклад $\mathcal{A} \simeq \mathbb{C}[Q] \otimes \mathcal{H}$ є q-аналогом теореми про розділення змінних для груп Лі у абстрактній формі (див. [107]). Це випливає з розкладу

$$\mathcal{A} \simeq \mathbb{C}[Q] \otimes \mathcal{H} \simeq \mathbb{C}[Q] \otimes \bigoplus_{m\geq 0} \bigoplus_{m'\geq 0} \mathcal{H}_{m,m'} = \bigoplus_{m\geq 0} \bigoplus_{m'\geq 0} \left(\mathbb{C}[Q] \otimes \mathcal{H}_{m,m'} \right). \quad (2.3.68)$$

Оскільки підпростори $\mathcal{A}_{m,m'}$ є інваріантними по відношенню до дії алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$, з Твердження 2.6 для Δ_q випливає, що підпростір $\mathcal{H}_{m,m'}$ є інваріантним по відношенню до представлення $L_{m,m'}$ алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$. Ми позначаємо звуження цього представлення на $\mathcal{H}_{m,m'}$ через $T_{m,m'}$. З Твердження 2.6 для Q та з (2.3.67) випливає що

$$L_{m,m'} = \bigoplus_{j=0}^{\min(m,m')} T_{m-j,m'-j}. \tag{2.3.69}$$

Твердження 2.8. *Представлення $T_{m-j,m'-j}$ алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$ в (24) є незвідними зі старшими вагами $(m-j, 0, \cdots, 0, -m'+j)$, відповідно.*

Твердження 2.9. *Ми маємо $\mathcal{A}^{U_q(\mathrm{gl}_n)} = \mathbb{C}[Q]$ та*

$$\mathcal{A}^{U_q(\mathrm{gl}_{n-1})} \simeq \bigoplus_{k,l} \mathbb{C}[Q_{n-1}] z_n^k w_n^l \simeq \bigoplus_{k,l} \mathbb{C}[Q] z_n^k w_n^l.$$

2.3.5. Дуальна пара $(U_q(\mathrm{sl}_2), U_q(\mathrm{gl}_n))$. Формули

$$ke = q^2 ek, \quad kf = q^{-2} fk, \quad ef - fe = \frac{k - k^{-1}}{q - q^{-1}} \tag{2.3.70}$$

визначають квантову алгебру $U_q(\mathrm{sl}_2)$ породжену елементами k, k^{-1}, e, f. Нехай $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ — простір лінійних операторів на алгебрі $\mathcal{A}$. Безпосередньо перевіряється за допомогою формули (2.3.63) що оператори

$$\omega(k) = q^n \gamma\bar{\gamma}, \quad \omega(e) = q^{-n+1}\hat{Q}, \quad \omega(f) = -\Delta_q \tag{2.3.71}$$

задовільняють співвідношення (2.3.70). Це означає, що гоморфізм алгебр $\omega : U_q(\mathrm{sl}_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$ однозначно визначений формулами (2.3.71) є представленням $U_q(\mathrm{sl}_2)$.

Оскільки оператори $\omega(k)$, $\omega(e)$, $\omega(f)$ комутують з операторами $L(X)$, $X \in U_q(\mathrm{gl}_n)$, ми можемо ввести представлення $\omega \otimes L$ алгебри $U_q(\mathrm{sl}_2) \otimes U_q(\mathrm{gl}_n)$ на $\mathcal{A}$, де L — визначена вище природня дія $U_q(\mathrm{gl}_n)$ на $\mathcal{A}$. Це представлення є звідним. Розкладемо його на незвідні складові.

Завдяки (2.3.68), ми маємо $\mathcal{A} = \bigoplus_{m,m' \geq 0} (\mathbb{C}[Q] \otimes \mathcal{H}_{m,m'})$. Підпростори $\mathbb{C}[Q] \otimes \mathcal{H}_{m,m'}$ є інваріантними по відношенню до дії $U_q(\mathrm{sl}_2) \otimes U_q(\mathrm{gl}_n)$, оскільки простір $\mathbb{C}[Q]$ поелементно інваріантний при дії $U_q(\mathrm{gl}_n)$, та для $f \in \mathbb{C}[Q]$ та $h_{m,m'} \in \mathcal{H}_{m,m'}$ ми маємо

$$\hat{Q}(f(Q) \otimes h_{m,m'}) = Qf(Q) \otimes h_{m,m'}, \tag{2.3.72}$$

$$\Delta_q(Q^r \otimes h_{m,m'}) = q^{n-1}[r][r + m + m' + n - 1]Q^{r-1} \otimes h_{m,m'}, \tag{2.3.73}$$

$$\gamma\bar{\gamma}(Q^r \otimes h_{m,m'}) = q^{2r+m+m'}(Q^r \otimes h_{m,m'}). \tag{2.3.74}$$

Ці формули показують, що $U_q(\mathrm{sl}_2)$ діє на $\mathbb{C}[Q]$ та $U_q(\mathrm{gl}_n)$ діє на $\mathcal{H}_{m,m'}$. Однак ця дія $U_q(\mathrm{sl}_2)$ залежить від компоненти $\mathcal{H}_{m,m'}$. Взявши базис

$$|r\rangle := q^{-r(n-1)}[r + m + m' + n - 1]!^{-1} Q^r, \qquad r = 0, 1, 2, \cdots,$$

у просторі $\mathbb{C}[Q]$, ми знаходимо з (2.3.72)–(2.3.74) що

$$\omega(k)|r\rangle = q^{2r+m+m'+n}|r\rangle \qquad \omega(f)|r\rangle = -[r]|r-1\rangle,$$

$$\omega(e)|r\rangle = [r + m + m' + n]|r+1\rangle.$$

Порівнюючи це представлення з відомими незвідними представленнями $U_q(\mathrm{sl}_2)$ (див., наприклад, [33]) ми виводимо, що на компоненті $\mathbb{C}[Q]$ простору $\mathbb{C}[Q] \otimes \mathcal{H}_{m,m'}$ реалізоване незвідне представлення дискретної серії алгебри $U_q(\mathrm{sl}_2)$ з молодшою вагою $m + m' + n$. Ми позначаємо це представлення $U_q(\mathrm{sl}_2)$ через $D_{m+m'+n}$.

Отже ми вивели, що на підпросторі $\mathbb{C}[Q]\otimes\mathcal{H}_{m,m'} \subset \mathcal{A}$ діє незвідне представлення $D_{m+m'+n} \otimes T_{m,m'}$ алгебри $U_q(\mathrm{sl}_2) \otimes U_q(\mathrm{gl}_n)$. Це означає, що для звідного представлення $\omega \otimes L$ ми маємо наступний розклад на незвідні компоненти:

$$\omega \otimes L = \bigoplus_{m,m'=0}^{\infty} D_{m+m'+n} \otimes T_{m,m'},$$

Тобто, кожне незвідне представлення $U_q(\mathrm{gl}_n)$ у цьому розкладі визначає однозначно відповідне незвідне представлення алгебри $U_q(\mathrm{sl}_2)$ та навпаки. Це означає, що $U_q(\mathrm{sl}_2)$ та $U_q(\mathrm{gl}_n)$ утворюють *дуальну пару* при дії на $\mathcal{A}$.

2.3.6. Звуження q-гармонічних поліномів на квантову сферу. Асоціативна алгебра $\mathcal{F}(S^{\mathbb{C}}_{q,n-1})$ породжена елементами $z_1, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_n$, які задовільняють співвідношення (2.3.46)–(2.3.48) та співвідношення

$$z_1 w_1 + z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n = 1$$

називається *алгеброю функцій на квантовій сфері* $S^{\mathbb{C}}_{q,n-1}$ (див. [102], глава 11, та [5]). Зрозуміло, що має місце канонічний ізоморфізм алгебр:

$$\mathcal{F}(S^{\mathbb{C}}_{q,n-1}) \simeq \mathcal{A}/\mathcal{I},$$

де $\mathcal{I}$ — двосторонній ідеал в $\mathcal{A}$, породжений елементом $Q - 1 \equiv \sum_i z_i w_i - 1$. Ми позначаємо через τ канонічний гомоморфізм алгебр

$$\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I} \simeq \mathcal{F}(S^{\mathbb{C}}_{q,n-1}).$$

Цей гомоморфізм називається *звуженням* поліномів з $\mathcal{A}$ на квантову сферу $S^{\mathbb{C}}_{q,n-1}$.

Твердження 2.10. *Ми маємо* $\tau\mathcal{H} \simeq \mathcal{F}(S^{\mathbb{C}}_{q,n-1})$*. Це означає, що* $\tau : \mathcal{H} \to \mathcal{F}(S^{\mathbb{C}}_{q,n-1})$ *є взаємнооднозначним відображенням, тобто, звуження* q*-гармонічного полінома на сферу* $S^{\mathbb{C}}_{q,n-1}$ *визначає цей поліном однозначно.*

Доведення. З Теореми 2.2, ми маємо $\mathcal{F}(S^{\mathbb{C}}_{q,n-1}) = \tau\mathcal{A} = \tau(\mathbb{C}[Q] \otimes \mathcal{H}) = \tau\mathcal{H}$. Оскільки Q є інваріантними по відношенню до дії алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$, ідеал $\mathcal{I}$ є інваріантним підпростором по відношенню до дії $U_q(\mathrm{gl}_n)$ на $\mathcal{A}$. Тому визначена дія $U_q(\mathrm{gl}_n)$ на $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Ця дія співпадає з дією з [129]. Гомоморфізм τ переплітає дію $U_q(\mathrm{gl}_n)$ на $\mathcal{A}$ та на $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Оскільки $\tau\mathcal{H}_{m,m'} \neq \{0\}$, дія $U_q(\mathrm{gl}_n)$ реалізує те саме незвідне представлення на $\mathcal{H}_{m,m'}$ та на $\tau\mathcal{H}_{m,m'}$. Це означає, що $\dim \mathcal{H}_{m,m'} = \dim \tau\mathcal{H}_{m,m'}$, тобто, відображення τ є взаємнооднозначним на $\mathcal{H}_{m,m'}$. Тому воно є взаємнооднозначним на $\mathcal{H}$. Твердження доведено.

Твердження 2.10 дозволяє визначити скалярний добуток на $\mathcal{H}$. Для цього ми використовуємо інваріантний функціонал h на квантовій сфері, визначений в [129], розділ 4.2. Цей функціонал h визначається через введення лінійного градуювання в $\tau\mathcal{A}$: $\tau\mathcal{A} = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}(\tau\mathcal{A})^\lambda$, де $(\tau\mathcal{A})^\lambda = \{p \in \tau\mathcal{A} \mid p(\mathbf{t}\mathbf{z}, \mathbf{t}^{-1}\mathbf{w}) = \mathbf{t}^\lambda p(\mathbf{z}, \mathbf{w})\}$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ — n незалежних змінних та

$$\mathbf{t}\mathbf{z} = (t_1 z_1, \cdots, t_n z_n), \quad \mathbf{t}^{-1}\mathbf{w} = (t_1^{-1} w_1, \cdots, t_n^{-1} w_n), \quad \mathbf{t}^\lambda = t_1^{\lambda_1} \cdots t_n^{\lambda_n}.$$

Підалгебра $(\tau\mathcal{A})^0$ породжена мономами $z_1^{\mu_1} \cdots z_n^{\mu_n} w_n^{\mu_n} \cdots w_1^{\mu_1}$ (або мономами $w_1^{\mu_1} \cdots w_n^{\mu_n} z_n^{\mu_n} \cdots z_1^{\mu_1}$), $\mu_i = 0, 1, 2, \cdots$. Функціонал h визначається як лінійне відображення $h : \tau\mathcal{A} \to \mathbb{C}$, таке що $h(p) = 0$, якщо $p \in (\tau\mathcal{A})^\lambda$, $\lambda \neq 0$, та

$$h(w_1^{\mu_1} \cdots w_n^{\mu_n} z_n^{\mu_n} \cdots z_1^{\mu_1}) = \frac{(q^2; q^2)_{\mu_1} \cdots (q^2; q^2)_{\mu_n} (q^2; q^2)_{n-1}}{(q^2; q^2)_{\mu_1 + \cdots + \mu_n + n-1}}.$$

Наступні факти доведені в [129]:

(а) Підалгебра $(\tau\mathcal{A})^0$ є комутативною алгеброю, породженою елементами Q_{n-1}, $Q_{n-2}, \cdots, Q_1$.

(б) Алгебра $(\tau\mathcal{A})^0$ є ізоморфною алгебрі поліномів від $n-1$ незалежних змінних.

(в) Для будь-якого полінома $p(\mathbf{z},\mathbf{w}) = f(Q_1,\cdots,Q_{n-1}) \in (\tau\mathcal{A})^0$, значення $h(p)$ виражається через інтеграл Джексона:

$$h(p) = \frac{(q^2;q^2)_{n-1}}{(1-q^2)^{n-1}} \int_0^1 \int_0^{Q_{n-1}} \cdots \int_0^{Q_2} f(Q_1,\cdots,Q_{n-1}) d_{q^2}Q_1 \cdots d_{q^2}Q_{n-1}$$

(визначення інтеграла Джексона див., наприклад, в [46], глава 1).

Зараз ми можемо ввести скалярний добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathcal{H}$:

$$\langle p_1, p_2\rangle = h((\tau p_1)(\tau p_2)^*), \tag{2.3.75}$$

де a^* — елемент, спряжений до $a \in \mathcal{A}$ при дії $*$-операції.

Твердження 2.11. *Ми маємо* $\mathcal{H}_{m,m'} \perp \mathcal{H}_{r,r'}$, *якщо* $(m,m') \neq (r,r')$.

Доведення випливає з факту, що $(\tau p_1)(\tau p_2)^* \notin (\tau\mathcal{A})^0$ якщо $p_1 \in \mathcal{H}_{m,m'}$, $p_2 \in \mathcal{H}_{r,r'}$ та $(m,m') \neq (r,r')$.

2.3.7. Проекція $\mathcal{A}_{m,m'} \to \mathcal{H}_{m,m'}$. Повернемось до розкладу (2.3.65) та побудуємо проектор

$$\mathsf{H}_{m,m'} : \mathcal{A}_{m,m'} = \mathcal{H}_{m,m'} \oplus Q\mathcal{A}_{m-1,m'-1} \to \mathcal{H}_{m,m'}.$$

Ми представляємо цей проектор у вигляді

$$\mathsf{H}_{m,m'}p = \sum_{k=0}^{\min(m,m')} \alpha_k \hat{Q}^k \Delta_q^k p, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}, \quad p \in \mathcal{A}_{m,m'}. \tag{2.3.76}$$

Ми маємо обчислити коефіцієнти α_k. Для цього ми діємо оператором Δ_q на обидві частини (2.3.76) та використовуємо співвідношення (2.3.63). При цій дії ліва частина зануляється. Прирівнюючи праву частину до 0, ми виводимо рекурентне співвідношення

$$q^{n-1}[k][m+m'+n-k-1]\alpha_k + \alpha_{k-1} = 0$$

на α_k, яке дає

$$\alpha_k = (-1)^k q^{-(n-1)k} \frac{[m+m'+n-k-2]!}{[k]![m+m'+n-2]!}, \tag{2.3.77}$$

де $[s]! = [s][s-1][s-2]\cdots[1]$ для $s \neq 0$ та $[0]! = 1$.

Зауважимо, що коефіцієнти α_k визначаються рекурентним співвідношенням однозначно з точністю до константи. В (2.3.77) ми вибрали цю константу таким чином, щоб $\mathsf{H}_{m,m'}p = p$ для $p \in \mathcal{H}_{m,m'}$. Це означає, що $\mathsf{H}^2_{m,m'} = \mathsf{H}_{m,m'}$.

Твердження 2.12. *Оператор* $\mathsf{H}_{m,m'}$ *комутує з дією* $U_q(\mathrm{gl}_n)$*, тобто, з операторами представлення* $L_{m,m'}$ *алгебри* $U_q(\mathrm{gl}_n)$*.*

Доведення. Цей факт випливає з того, що оператори $L_{m,m'}(X)$, $X \in U_q(\mathrm{gl}_n)$, комутують з $\hat{Q}$ та Δ_q (див. Твердження 2.6). Твердження доведено.

Поліном φ з простору $\mathcal{H}_{m,m'}$ називається *зональним*, якщо він є інваріантним відносно дії операторів $L_{m,m'}(X)$, $X \in U_q(\mathrm{gl}_{n-1})$. Ми покажемо нижче, що зональні поліноми виражаються через базисну гіпергеометричну функцію ${}_2\varphi_1$, визначену формулою

$${}_2\varphi_1(a,\ b;\ c;\ q,\ x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k (b;q)_k}{(c;q)_k (q;q)_k} x^k$$

(див. [46, 9] про властивості цієї функції).

Твердження 2.13. (а) *Підпростір зональних поліномів в* $\mathcal{H}_{m,m'}$ *є одновимірним.* (б) *З точністю до постійного множника, зональний поліном з*

$\mathcal{H}_{m,m'}$ дається формулою

$$\varphi'_{m,m'} = z_n^{m-m'} Q^{m'} \sum_{s=0}^{m'} \frac{(q^{-2m'};q^2)_s (q^{2(m+n-1)};q^2)_s}{(q^{2(n-1)};q^2)_s (q^2;q^2)_s} \frac{Q_{n-1}^s}{Q^s} q^{2s}, \qquad (2.3.78)$$

якщо $m \geq m'$ та формулою

$$\varphi'_{m,m'} = Q^{m} \sum_{s=0}^{m} \frac{(q^{-2m};q^2)_s (q^{2(m'+n-1)};q^2)_s}{(q^{2(n-1)};q^2)_s (q^2;q^2)_s} \frac{Q_{n-1}^s}{Q^s} q^{2s} w_n^{m'-m}, \qquad (2.3.79)$$

якщо $m \leq m'$.

Доведення. (а) Як ми бачили, на $\mathcal{H}_{m,m'}$ реалізовано незвідне представлення $T_{m,m'}$ алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$ зі старшою вагою $(m, 0, \cdots, 0, -m')$. Відомо, що це представлення, при звуженні на $U_q(\mathrm{gl}_{n-1})$, містить тривіальне (одновимірне) представлення цієї підалгебри з кратністю 1. Це доводить перше твердження.

(б) Ми будуємо зональні поліноми з $\mathcal{H}_{m,m'}$ використовуючи проекційний оператор $\mathsf{H}_{m,m'}$. Щоб це зробити, ми маємо взяти деякий поліном $p \in \mathcal{A}_{m,m'}$, інваріантний відносно $U_q(\mathrm{gl}_{n-1})$ та подіяти на нього оператором $\mathsf{H}_{m,m'}$. Оскільки проектор $\mathsf{H}_{m,m'}$ комутує з дією $U_q(\mathrm{gl}_{n-1})$, поліном, отриманий таким чином, є зональним поліномом. Зрозуміло, що поліном $p = z_n^m w_n^{m'}$ належить $\mathcal{A}_{m,m'}$ та є інваріантним відносно дії $U_q(\mathrm{gl}_{n-1})$. Для того, щоб знайти вираз для $\mathsf{H}_{mm'}(z_n^m w_n^{m'})$, ми спочатку будемо вважати, що $m \geq m'$.

Використовуючи другий вираз для Δ_q в (2.3.62) та співвідношення $\bar{\partial}_n \hat{z}_n = \hat{z}_n \bar{\partial}_n$, ми маємо

$$\varphi_{m,m'} := \mathsf{H}_{m,m'}(z_n^m w_n^{m'}) = \sum_{s=0}^{m'} \alpha_s \hat{Q}^s \Delta_q^s z_n^m w_n^{m'}$$

$$= z_n^{m-m'} \sum_{s=0}^{m'} \alpha_s q^{2(n-1)s} \hat{Q}^s \frac{[m]!}{[m-s]!} \frac{[m']!}{[m'-s]!} z_n^{m'-s} w_n^{m'-s}.$$

Взявши до уваги вираз для коефіцієнтів α_s та використовуючи формули

$$[s]! = \frac{(q^2;q^2)_s(-1)^s}{(q-q^{-1})^s} q^{-s(s+1)/2}, \qquad \frac{[m]!}{[m-s]!} = \frac{(q^{-2m};q^2)_s}{(q-q^{-1})^s} q^{ms-s(s-1)/2},$$

ми отримуємо

$$\varphi_{m,m'} = z_n^{m-m'} \sum_{s=0}^{m'} q^{2s} \frac{(q^{-2m};q^2)_s(q^{-2m'};q^2)_s}{(q^2;q^2)_s(q^{-2(m+m'+n-2)};q^2)_s} Q^s z_n^{m'-s} w_n^{m'-s}. \qquad (2.3.80)$$

Використовуючи перше співвідношення з (2.3.61), ми отримуємо з (2.3.80), що

$$\varphi_{m,m'} = Q^{m'} z_n^{m-m'} \sum_{s=0}^{m'} q^{2s} \frac{(q^{-2m};q^2)_s(q^{-2m'};q^2)_s}{(q^2;q^2)_s(q^{-2(m+m'+n-2)};q^2)_s} (Q_{n-1}/Q;q^{-2})_{m'-s}.$$

Оскільки (див. співвідношення (II.4) з Додатку II в [46])

$$(Q_{n-1}/Q;q^{-2})_{m'-s} = \sum_{\nu=0}^{m'-s} q^{2\nu} \frac{(q^{-2(m'-s)};q^2)_\nu}{(q^2;q^2)_\nu} Q_{n-1}^\nu / Q^\nu,$$

ми маємо

$$\begin{aligned}\varphi_{m,m'} &= Q^{m'} z_n^{m-m'} \sum_{s=0}^{m'} \frac{q^{2s}(q^{-2m};q^2)_s(q^{-2m'};q^2)_s}{(q^2;q^2)_s(q^{-2(m+m'+n-2)};q^2)_s} \sum_{\nu=0}^{m'-s} q^{2\nu} \frac{(q^{-2(m'-s)};q^2)_\nu}{(q^2;q^2)_\nu} \frac{Q_{n-1}^\nu}{Q^\nu} \\ &= Q^{m'} z_n^{m-m'} \sum_{\nu=0}^{m'} \frac{Q_{n-1}^\nu}{Q^\nu} q^{2\nu} \sum_{s=0}^{m'-\nu} \frac{(q^{-2(m'-s)};q^2)_\nu}{(q^2;q^2)_\nu} \frac{q^{2s}(q^{-2m};q^2)_s(q^{-2m'};q^2)_s}{(q^2;q^2)_s(q^{-2(m+m'+n-2)};q^2)_s}.\end{aligned} \qquad (2.3.81)$$

Застосовуючи співвідношення (I.7), а потім співвідношення (I.13) з Додатку I в [46], ми знаходимо

$$(q^{-2(m'-s)};q^2)_\nu = (-1)^\nu q^{-2m'\nu} q^{\nu(\nu-1)} \frac{(q^{2m'-2\nu+2};q^2)_\nu (q^{-2m'+2\nu};q^2)_s}{(q^{-2m'};q^2)_s}.$$

Тому для суми по s в (2.3.81), яку ми позначимо через I_ν, ми отримуємо вираз

$$I_\nu = (-1)^\nu q^{-2m'\nu} q^{\nu(\nu-1)} \frac{(q^{2m'-2\nu+2};q^2)_\nu}{(q^2;q^2)_\nu} \sum_{s=0}^{m'-\nu} \frac{(q^{-2m'+2\nu};q^2)_s (q^{-2m};q^2)_s q^{2s}}{(q^2;q^2)_s(q^{-2(m+m'+n-2)};q^2)_s}.$$

Сума по s є базисною гіпергеометричною функцією

$$ {}_2\varphi_1(q^{-2m},\ q^{-2m'+2\nu};\ q^{-2(m+m'+n-2)};\ q^2;\ q^2) = \frac{q^{-2mm'+2m\nu}(q^{-2m'-2n+4};q^2)_{m'-\nu}}{(q^{-2(m+m'+n-2)};q^2)_{m'-\nu}}, $$

де ми використали формулу (II.6) з Додатку II в [46].

Тому для функції $\varphi_{m,m'}$ ми маємо вираз

$$ \varphi_{m,m'} = Q^{m'} z_n^{m-m'} \sum_{\nu=0}^{m'} \frac{Q_{n-1}^{\nu}}{Q^{\nu}} q^{2\nu}(-1)^{\nu} q^{-2m'\nu} q^{\nu(\nu-1)} q^{-2mm'+2m\nu} $$

$$ \times \frac{(q^{2m'-2\nu+2};q^2)_{\nu}}{(q^2;q^2)_{\nu}} \frac{(q^{-2m'-2n+4};q^2)_{m'-\nu}}{(q^{-2(m+m'+n-2)};q^2)_{m'-\nu}}. $$

Завдяки формулі (I.8) з Додатку I в [46], ми маємо

$$ (q^{2m'-2\nu+2};q^2)_{\nu} = (q^{-2m'};q^2)_{\nu}(-1)^{\nu} q^{2m'\nu} q^{-\nu(\nu-1)} $$

та завдяки формулі (I.11) з Додатку I в [46] ми отримуємо

$$ \frac{(q^{-2m'-2n+4};q^2)_{m'-\nu}}{(q^{-2(m+m'+n-2)};q^2)_{m'-\nu}} = q^{-2m\nu} \frac{(q^{-2m'-2n+4};q^2)_{m'}}{(q^{-2(m+m'+n-2)};q^2)_{m'}} \frac{(q^{2(m+n-1)};q^2)_{\nu}}{(q^{2n-2};q^2)_{\nu}}. $$

Тому ми маємо

$$ \mathsf{H}_{mm'}(z_n^m w_n^{m'}) = \varphi_{m,m'} = q^{-2mm'} \frac{(q^{-2m'-2n+4};q^2)_{m'}}{(q^{-2(m+m'+n-2)};q^2)_{m'}} Q^{m'} z_n^{m-m'} \times $$

$$ \times \sum_{\nu=0}^{m'} \frac{(q^{-2m'};q^2)_{\nu}(q^{2(m+n-1)};q^2)_{\nu}}{(q^2;q^2)_{\nu}(q^{2(n-1)};q^2)_{\nu}} \frac{Q_{n-1}^{\nu}}{Q^{\nu}} q^{2\nu} $$

$$ = \frac{(q^{2(n-1)};q^2)_{m'}}{(q^{2(m+n-1)};q^2)_{m'}} Q^{m'} z_n^{m-m'} {}_2\varphi_1(q^{-2m'}, q^{2(m+n-1)}; q^{2(n-1)}; q^2; q^2 Q_{n-1}/Q). $$

Це доводить друге твердження у випадку $m \geq m'$. Випадок $m < m'$ доводиться аналогічно. Твердження повністю доведене.

Формула

$$ P_k^{(\alpha,\beta)}(x;\ q) = {}_2\varphi_1(q^{-k},\ q^{\alpha+\beta+k+1};\ q^{\alpha+1};\ q;\ qx) $$

визначає так звані малі q-Якобі поліноми. Зональні поліноми з Твердження 2.13 можуть бути записані через ці поліноми як

$$\varphi'_{m,m'} = Q^{m'} z_n^{m-m'} P_{m'}^{(n-2,m-m')}(Q_{n-1}/Q;\ q^2),$$

якщо $m \geq m'$ та

$$\varphi'_{m,m'} = Q^{m} P_{m}^{(n-2,m'-m)}(Q_{n-1}/Q;\ q^2) w_n^{m'-m},$$

якщо $m \leq m'$. Звужуючи ці поліноми на квантову сферу $S^{\mathbb{C}}_{q,n-1}$, ми отримуємо

$$\tau\varphi'_{m,m'} = z_n^{m-m'} P_{m'}^{(n-2,m-m')}(Q_{n-1};\ q^2),$$

якщо $m \geq m'$ та

$$\tau\varphi'_{m,m'} = P_{m}^{(n-2,m'-m)}(Q_{n-1};\ q^2) w_n^{m'-m},$$

якщо $m \leq m'$. Ці поліноми називаються *зональними сферичними функціями* на квантовій сфері $S^{\mathbb{C}}_{q,n-1}$. Вони були обчислені в [129] (див. також [43, 44]).

2.3.8. q-Аналог приєднаних сферичних гармонік по відношенню до $U_q(\mathrm{gl}_{n-1})$. Відомо (див. [153], глава 11), що у просторі класичних однорідних гармонічних поліномів на унітарному (комплексному евклідовому) просторі $E^{\mathbb{C}}_n$ існують різні ортонормовані базиси. Вони відповідають різним розділенням змінних. Кожне розділення змінних відповідає певному ланцюжку підгруп унітарної групи $U(n)$. Ми маємо аналогічну картину для просторів $\mathcal{H}_{m,m'}$ однорідних q-гармонічних поліномів. В цьому пункті ми розгядаємо q-аналог розділення змінних, що відповідає сферичним координатам на сфері $S^{\mathbb{C}}_{n-1}$ (див. [153], глава 11).

У класичному випадку метод дерев розрізняє різні схеми розділення змінних. Різним схемам розділення змінних однозначно відповідають різні ланцюжки підгруп $U(n)$. Цей самий метод дерев може бути використаний для q-гармонічних поліномів, але замість ланцюжків підгруп $U(n)$ ми маємо взяти відповідні ланцюжкі підалгебр алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$. Такому ланцюжку підалгебр відповідає певний ортонормований базис.

Метою цього розділу є побудова ортогонального базису простору $\mathcal{H}_{m,m'}$ однорідних q-гармонічних поліномів, який відповідає ланцюжку

$$U_q(\mathrm{gl}_n) \supset U_q(\mathrm{gl}_{n-1}) \supset \cdots \supset U_q(\mathrm{gl}_3) \supset U_q(\mathrm{gl}_2) \supset U_q(\mathrm{gl}_1). \tag{2.3.82}$$

Цей базис є q-аналогом набору приєднаних сферичних гармонік на комплексному векторному просторі, які є добутками певних поліномів Якобі (див. [153], глава 11). Базисні елементи дають розв'язки рівняння $\Delta_q p = 0$ у "розділених змінних". Отже ми отримуємо q-аналог класичного розділення змінних.

Лема 2.3. *Нехай $f_{k'}(\mathbf{z}')$ та $g_{l'}(\mathbf{w}')$ — однорідні поліноми степені k' від $\mathbf{z}' \equiv (z_1, z_1, \cdots, z_{n-1})$ та степені l' від $\mathbf{w}' \equiv (w_1, w_1, \cdots, w_{n-1})$, відповідно. Тоді для будь-яких невід'ємних цілих k та l ми маємо*

$$\Delta_q(z_n^k w_n^l f_{k'}(\mathbf{z}') g_{l'}(\mathbf{w}')) = q^{l-k} z_n^k w_n^l \Delta_{n-1}(f_{k'}(\mathbf{z}') g_{l'}(\mathbf{w}'))$$

$$+q^{2(n-1)} q^{l'+k'} [k][l] z_n^{k-1} w_n^{l-1} f_{k'}(\mathbf{z}') g_{l'}(\mathbf{w}'),$$

де $\Delta_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} q^{2i-2} \bar{\partial}_i \partial_i$ — q-оператор Лапласа для елементів $\mathbf{z}' \equiv (z_1, \cdots, z_{n-1})$ та $\mathbf{w}' \equiv (w_1, \cdots, w_{n-1})$.

Твердження 2.14. *Нехай s та s' — цілі, такі що $0 \le s \le m$ та $0 \le s' \le m'$. Нехай $h_{s,s'}(\mathbf{z}', \mathbf{w}')$ — однорідний гармонічний поліном степені s від*

$\mathbf{z}' = (z_1, z_2, \cdots, z_{n-1})$ *та степені* s' *від* $\mathbf{w}' = (w_1, w_2, \cdots, w_{n-1})$. *Тоді для* $z_n^{m-s} w_n^{m'-s'} h_{s,s'}(\mathbf{z}', \mathbf{w}') \in \mathcal{A}_{m,m'}$, *ми маємо*

$$\mathsf{H}_{m,m'}(z_n^{m-s} w_n^{m'-s'} h_{s,s'}(\mathbf{z}', \mathbf{w}')) = z_n^{m-s-m'+s'} Q^{m'-s'} d_{ss'}^{mm'} h_{s,s'}(\mathbf{z}', \mathbf{w}'), \qquad (2.3.83)$$

де $m - s \geq m' - s'$,

$$d_{ss'}^{mm'} = q^{-2(m-s)(m'-s')} \frac{(q^{-2m'-2s-2n+4}; q^2)_{m'-s'}}{(q^{-2m-2m'-2n+4}; q^2)_{m'-s'}} \times$$
$$\times {}_2\varphi_1(q^{-2(m'-s')}, q^{2(m+s'+n-1)}; q^{2(s+s'+n-1)};\ q^2;\ q^2 Q_{n-1}/Q),$$

та

$$\mathsf{H}_{m,m'}(z_n^{m-s} w_n^{m'-s'} h_{s,s'}(\mathbf{z}', \mathbf{w}')) = Q^{m-s} d_{ss'}^{mm'} w_n^{m'-s'-m+s} h_{s,s'}(\mathbf{z}', \mathbf{w}'), \qquad (2.3.84)$$

де $m - s \leq m' - s'$,

$$d_{ss'}^{mm'} = q^{-2(m-s)(m'-s')} \frac{(q^{-2m-2s'-2n+4}; q^2)_{m-s}}{(q^{-2m-2m'-2n+4}; q^2)_{m-s}} \times$$
$$\times {}_2\varphi_1(q^{-2(m-s)}, q^{2(m'+s+n-1)}; q^{2(s+s'+n-1)};\ q^2;\ q^2 Q_{n-1}/Q).$$

Зауваження. Якщо $n = 2$, тоді поліноми $h_{s,s'}(z_1, w_1)$ з Твердження 2.14 є кратними елементам з (2.3.66), тобто, ми маємо $s = 0$ або $s' = 0$ або $s = s' = 0$.

Вирази для $d_{ss'}^{mm'}$ з Твердження 2.14 можуть бути представлені в термінах малих q-поліномів Якобі $P_k^{(\alpha,\beta)}(x; q)$ як

$$d_{ss'}^{mm'} = c_{ss'}^{mm'} P_{m'-s'}^{(s+s'+n-2, m-s-m'+s')}(Q_{n-1}/Q),$$

якщо $m - s \geq m' - s'$ та

$$d_{ss'}^{mm'} = c_{s's}^{m'm} P_{m-s}^{(s+s'+n-2, m'-s'-m+s)}(Q_{n-1}/Q),$$

якщо $m-s \le m'-s'$.

Ми позначаємо вираз $z_n^{m-s+m'+s'}Q^{m'-s'}d_{ss'}^{mm'}$ з (2.3.83) та вираз $Q^{m-s}d_{ss'}^{mm'}w_n^{m'-s'+m+s}$ з (2.3.84) через $t_{s,s'}^{n;m,m'}$. Тоді

$$\mathsf{H}_{m,m'}(z_n^{m-s}w_n^{m'-s'}h_{s,s'}(\mathbf{z}',\mathbf{w}')) = t_{s,s'}^{n;m,m'}h_{s,s'}(\mathbf{z}',\mathbf{w}'). \tag{2.3.85}$$

Більш того, простір $\mathcal{H}_{m,m'}$ може бути представлений як пряма сума

$$\mathcal{H}_{m,m'} = \bigoplus_{s=0}^{m}\bigoplus_{s'=0}^{m'} t_{s,s'}^{n;m,m'}\mathcal{H}_{s,s'}^{(n-1)}, \tag{2.3.86}$$

де $\mathcal{H}_{s,s'}^{(n-1)}$ — відповідні простори однорідних q-гармонічних поліномів від z_i, w_i, $i=1,2,\cdots,n-1$. Для того, щоб це довести, ми зауважимо, що підпростори $t_{s,s'}^{n;m,m'}\mathcal{H}_{s,s'}^{(n-1)}$ попарно не перетинаються та $\bigoplus_{s=0}^{m}\bigoplus_{s'=0}^{m'} t_{s,s'}^{n;m,m'}\mathcal{H}_{s,s'}^{(n-1)} \subset \mathcal{H}_{mm'}$. Зараз рівність (2.3.86) випливає з факту, що розмірності просторів зліва і справа співпадають.

Щоб мати відповідність з класичний випадком, нижче ми позначаємо $t_{s,s'}^{2;m,m'}$ (у цьому випадку $s=0$ або $s'=0$) через $t_s^{2;m,m'}$ якщо $s'=0$ та через $t_{-s'}^{2;m,m'}$ якщо $s=0$.

Взявши до уваги співвідношення ортогональності (7.3.3) з [46] для малих q-поліномів Якобі, ми отримуємо для скалярного добутку $t_{s,s'}^{n;m,m'}h_{s,s'}^{(n-1)}$ та $t_{r,r'}^{n;m,m'}h_{r,r'}^{(n-1)}$, $h_{p,p'}^{(n-1)} \in \mathcal{H}_{p,p'}^{(n-1)}$, вираз

$$\langle t_{s,s'}^{n;m,m'}h_{s,s'}^{(n-1)}, t_{r,r'}^{n;m,m'}h_{r,r'}^{(n-1)}\rangle = \delta_{sr}\delta_{s'r'}(c_{ss'}^{mm'})^{-2}b_{ss'}^{mm'}\langle h_{s,s'}^{(n-1)}, h_{r,r'}^{(n-1)}\rangle_{(n-1)},$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(n-1)}$ — скалярний добуток у просторі $\mathcal{H}_{ss'}^{(n-1)}$ та

$$b_{ss'}^{mm'} = \frac{(1-q^{2(n+s+s'-1)})q^{2(m'-s')(n+s+s'-1)}(q^2;q^2)_{m-s}(q^2;q^2)_{m'-s'}}{(1-q^{2(2m+n-1)})(q^{2(n+s+s'-1)};q^2)_{m-s}(q^{2(n+s+s'-1)};q^2)_{m'-s'}}.$$

Зауважимо, що обрахунок скалярного добутку зводиться до q-інтегрування (див. [43, 44] про обчислення q-інтегралів цього типу).

Зараз ми застосовуємо розклад (2.3.86) до підпросторів $\mathcal{H}_{s,s'}^{(n-1)}$ та отримуємо

$$\mathcal{H}_{m,m'} = \bigoplus_{s=0}^{m} \bigoplus_{s'=0}^{m'} \bigoplus_{r=0}^{s} \bigoplus_{r'=0}^{s'} t_{s,s'}^{n;m,m'} t_{r,r'}^{n-1;s,s'} \mathcal{H}_{r,r'}^{(n-2)},$$

де $\mathcal{H}_{r,r'}^{(n-2)}$ — підпростори однорідних q-гармонічних поліномів від z_i, w_i, $i = 1, 2, \cdots, n-2$. Продовжуючи цей розклад, ми отримуємо розклад

$$\mathcal{H}_{m,m'} = \bigoplus_{\mathbf{m},\mathbf{m}',m_1} \mathbb{C}\Xi_{\mathbf{m},\mathbf{m}',m_1}(\mathbf{z},\mathbf{w}),$$

де поліноми $\Xi_{\mathbf{m},\mathbf{m}',m_1}$ даються формулою

$$\Xi_{\mathbf{m},\mathbf{m}',m_1}(\mathbf{z},\mathbf{w}) = t_{m_{n-1},m'_{n-1}}^{n;m,m'} t_{m_{n-2},m'_{n-2}}^{n-1;m_{n-1},m'_{n-1}} \cdots t_{m_2,m'_2}^{3;m_3,m'_3} t_{m_1}^{2;m_2,m'_2} t^{1;m_1}, \tag{2.3.87}$$

та підсумовування йде по всіх наборах $2n-3$ цілих $\mathbf{m} = (m_{n-1}, \cdots, m_2)$, $\mathbf{m}' = (m'_{n-1}, \cdots, m'_2)$, m_1, таких що $m_i \geq 0$, $m'_i \geq 0$, $i = 2, 3, \cdots, n-1$, $m_2 \geq m_1 \geq -m'_2$,

$$m \geq m_{n-1} \geq m_{n-2} \geq \cdots \geq m_2, \quad m' \geq m'_{n-1} \geq m'_{n-2} \geq \cdots \geq m'_2.$$

Тут $t_{m_{p-1},m'_{p-1}}^{p;m_p,m'_p}$ та $t_{m_1}^{2;m_2,m'_2}$ визначаються формулами, які дано вище та

$$t^{1;m_1} = z_1^{m_1} \text{ при } m_1 > 0, \qquad t^{1;0} = 1, \qquad t^{1;m_1} = w_1^{-m_1} \text{ при } m_1 < 0.$$

Легко показати, що базис (2.3.87) є ортогональним по відношенню скалярного добутку, введеного вище.

При $q = 1$, поліноми (2.3.87) перетворюються у базисні елементи просторів однорідних гармонічних поліномів на $\mathbb{C}^n$ в розділених координатах, визначених формулами (2) з розділу 11.1.4 в [153]. Ці класичні однорідні гармонічні поліноми, при звуженні на сферу $S^{\mathbb{C}}_{n-1}$, співпадають з приєднаними сферичними функціями з розділу 11.3 в [153]. Вони є матричними елементами нульового стовпчика відповідних незвідних представлень групи $U(n)$.

Базисні елементи (2.3.87) дають розв'язки рівняння $\Delta p = 0$ в $\mathcal{H}_{m,m'}$. Представлення розв'язків у вигляді (2.3.87) може розгядатись як q-аналог відповідного класичного розділення змінних.

Для того, щоб мати ортонормований базис в $\mathcal{H}_{m,m'}$, ми кожне $t^{n-i;m_{n-i},m'_{n-i}}_{m_{n-i-1},m'_{n-i-1}}$ у виразі (2.3.87) для $\Xi_{\mathbf{m},\mathbf{m}',m_1}(\mathbf{z},\mathbf{w})$ замінюємо на

$$\hat{t}^{n-i;m_{n-i},m'_{n-i}}_{m_{n-i-1},m'_{n-i-1}} = c^{m_{n-i},m'_{n-i}}_{m_{n-i-1},m'_{n-i-1}} (b^{m_{n-i},m'_{n-i}}_{m_{n-i-1},m'_{n-i-1}})^{-1/2} t^{n-i;m_{n-i},m'_{n-i}}_{m_{n-i-1},m'_{n-i-1}}.$$

Ми позначаємо вираз (2.3.87) з такою заміною через $\hat{\Xi}_{\mathbf{m},\mathbf{m}',m_1}(\mathbf{z},\mathbf{w})$. Ці поліноми утворюють ортонормований базис $\mathcal{H}_{m,m'}$.

Вище показано, що у просторі $\mathcal{H}_{m,m'}$ діє незвідне представлення $T_{m,m'}$ з старшою вагою $(m, 0, \cdots, 0, -m')$. Справедливі наступні твердження.

Твердження 2.15. *Оператори $T_{m,m'}(e_j)$, $T_{m,m'}(f_j)$ та $T_{m,m'}(k_j)$, які відповідають породжуючим елементам e_j, f_j, k_j алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$, діють на базисні елементи $\hat{\Xi}_{\mathbf{m},\mathbf{m}',m_1} \equiv |\mathbf{m},\mathbf{m}',m_1\rangle$ як*

$$T_{m,m'}(e_{j-1})|\mathbf{m},\mathbf{m}',m_1\rangle = A(\mathbf{m},\mathbf{m}')|\mathbf{m}^{+1}_{j-1},\mathbf{m}',m_1\rangle + B(\mathbf{m},\mathbf{m}')|\mathbf{m},\mathbf{m}'^{-1}_{j-1},m_1\rangle,$$

$$T_{m,m'}(f_{j-1})|\mathbf{m},\mathbf{m}',m_1\rangle = A(\mathbf{m}^{-1}_{j-1},\mathbf{m}')|\mathbf{m}^{-1}_{j-1},\mathbf{m}',m_1\rangle + B(\mathbf{m},\mathbf{m}'^{+1}_{j-1})|\mathbf{m},\mathbf{m}'^{+1}_{j-1},m_1\rangle,$$

$$T_{m,m'}(k_{j-1})|\mathbf{m},\mathbf{m}',m_1\rangle = q^{m'_j - m_j + m_{j-1} - m'_{j-1}}|\mathbf{m},\mathbf{m}',m_1\rangle,$$

де

$A(\mathbf{m},\mathbf{m}') =$

$$= \left(\frac{[m_j - m_{j-1}][m'_j + m_{j-1} + j - 1][m_{j-1} - m_{j-2} + 1][m_{j-1} + m'_{j-2} + j - 2]}{[m_{j-1} + m'_{j-1} + j - 2][m_{j-1} + m'_{j-1} + j - 1]} \right)^{1/2},$$

$B(\mathbf{m}, \mathbf{m}') =$

$$= \left(\frac{[m'_j - m'_{j-1} + 1][m_j + m'_{j-1} + j - 2][m'_{j-1} - m'_{j-2}][m'_{j-1} + m_{j-2} + j - 3]}{[m_{j-1} + m'_{j-1} + j - 2][m_{j-1} + m'_{j-1} + j - 3]} \right)^{1/2},$$

$m_n \equiv m$, $m'_n \equiv m'$, $\mathbf{m}_j^{\pm 1}$ позначає набір чисел $\mathbf{m}_{j-1}$, в якому m_{j-1} замінено на, відповідно, $m_{j-1} \pm 1$.

Доведення цього твердження є громіздким. Оскільки воно аналогічне до доведення Теореми 1 з [72], ми його не наводимо.

2.3.9. q-Аналог приєднаних сферичних гармонік по відношенню до $U_q(\mathrm{gl}_p) \times U_q(\mathrm{gl}_{n-p})$. У п. 2.2.8 ми знайшли ортогональний базис у просторі $\mathcal{H}_{mm'}$ однорідних q-гармонічних поліномів, який відповідає ланцюжку підалгебр (2.3.82). У цьому пункті ми знайдемо ортогональні базиси у цьому самому просторі, які відповідають редукціям

$$U_q(\mathrm{gl}_n) \supset U_q(\mathrm{gl}_p) \times U_q(\mathrm{gl}_{n-p}) \supset \cdots . \tag{2.3.88}$$

У класичному випадку (див. [153], глава 11), подальші редукції можна взяти згідно будь-якому ланцюжку підгруп груп $U(p)$ та $U(n-p)$. Зокрема, звичайний метод дерев (див. [153], розділ 10.2) може бути застосований при описі різних ланцюжків цих груп, яким відповідають різні ортогональні базиси в $\mathcal{H}_{mm'}$. У нашому випадку існують деякі складнощі з побудовою ортогональних базисів, які відповідають довільним ланцюжкам підалгебр (2.3.88). Тому ми будуємо ортогональні базиси, які відповідають випадку, коли ми беремо ланцюжки типу (2.3.82) для підалгебр $U_q(\mathrm{gl}_p)$ та $U_q(\mathrm{gl}_{n-p})$ з (2.3.88).

Ми представляємо набір $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = (z_1, \cdots, z_n; w_1, \cdots, w_n)$ як $(\mathbf{y}, \mathbf{t})$, де $\mathbf{y} = (z_1, z_2, \cdots, z_p, w_1, w_2, \cdots, w_p)$ та $\mathbf{t} = (z_{p+1}, \cdots, z_n, w_{p+1}, \cdots, w_n)$. Тоді q-оператор Лапласа Δ_q можна записати як

$$\Delta_q = \Delta_{(\mathbf{y})} + \Delta_{(\mathbf{t})}, \tag{2.3.89}$$

де

$$\Delta_{(\mathbf{y})} = \partial_1 \bar{\partial}_1 + \cdots + \partial_p \bar{\partial}_p, \quad \Delta_{(\mathbf{t})} = \partial_{p+1} \bar{\partial}_{p+1} + \cdots + \partial_n \bar{\partial}_n = \sum_{i=1}^{n-p} q^{2(i-1)} \bar{\partial}_{p+i} \partial_{p+i}. \tag{2.3.90}$$

Оператор Δ_q також представляється як $\Delta_q = \hat{\Delta}_{(\mathbf{y})} + q^{2p} \Delta_{(\mathbf{t})}$, де

$$\hat{\Delta}_{(\mathbf{y})} = \bar{\partial}_1 \partial_1 + q^2 \bar{\partial}_2 \partial_2 + \cdots + q^{2(p-1)} \bar{\partial}_p \partial_p. \tag{2.3.91}$$

Ми маємо

$$\Delta_{(\mathbf{y})} - \hat{\Delta}_{(\mathbf{y})} = (1 - q^{2p}) \Delta_{(\mathbf{t})}. \tag{2.3.92}$$

Для того, щоб знайти базиси $\mathcal{H}_{m,m'}$, які відповідають редукції (2.3.88), ми візьмемо невід'ємне числа r, r', s, s', такі що

$$u := m - r - s = m' - r' - s' \geq 0.$$

Ми бажаємо знайти гармонічну проекцію поліномів

$$Q_{\mathbf{y}}^u h_{s,s'}(\mathbf{t}) h_{r,r'}(\mathbf{y}) \in \mathcal{A}_{mm'}, \quad h_{s,s'}(\mathbf{t}) \in \tilde{\mathcal{H}}_{ss'}^{(\mathbf{t})}, \ \ h_{r,r'}(\mathbf{y}) \in \mathcal{H}_{r,r'}^{(\mathbf{y})}, \tag{2.3.93}$$

де $Q_{\mathbf{y}} := z_1 w_1 + \cdots + z_p w_p$, $\mathcal{H}_{r,r'}^{(\mathbf{y})}$ — простір однорідних q-гармонічних поліномів від $\mathbf{y} = (z_1, z_2, \cdots, z_p, w_1, w_2, \cdots, w_p)$, та $\tilde{\mathcal{H}}_{s,s'}^{(\mathbf{t})}$ — простір, отриманий наступним чином: ми беремо простір $\mathcal{H}_{s,s'}^{(n-p)}$ однорідних q-гармонічних поліномів від $(z_1, \cdots, z_{n-p}, w_1, \cdots, w_{n-p})$ та, використовуючи співвідношення між z_i та w_j, представляємо кожний поліном у такому вигляді, що у кожному з доданків (мономів) елементів $z_1, \cdots, z_{n-p}$ стоять перед елементами $w_1, \cdots, w_{n-p}$. Тоді ми замінюємо, відповідно, $z_1, \cdots, z_{n-p}, w_1, \ \cdots, \ w_{n-p}$ на $z_{p+1}, \cdots, z_n, w_{p+1}, \cdots, w_n$ у кожному з цих поліномів. Простір цих поліномів від $z_{p+1}, \cdots, z_n, w_{p+1}, \cdots, w_n$ позначемо через $\tilde{\mathcal{H}}^{(\mathbf{t})}_{ss'}$.

Лема 2.4. *Поліноми P з $\tilde{\mathcal{H}}^{(\mathbf{t})}_{s,s'}$ задовільняють умовам $\partial_i P = 0$, $\bar{\partial}_i P = 0$, $i = 1, 2, \cdots, p$.*

Наслідок 1. *Елементи P простору $\tilde{\mathcal{H}}^{(\mathbf{t})}_{s,s'}$ задовільняють співвідношення $\Delta_{(\mathbf{t})} P = 0$.*

Наслідок 2. *Елементи P простору $\tilde{\mathcal{H}}^{(\mathbf{t})}_{s,s'}$ є q-гармонічними, тобто, $\Delta_q P = 0$.*

Наслідок 1 випливає з (2.3.90)–(2.3.92). Наслідок 2 випливає з Наслідку 1 та формули (2.3.89).

Лема 2.5. *Для полінома $h_{s,s'}(\mathbf{t}) \in \tilde{\mathcal{H}}^{(\mathbf{t})}_{s,s'}$ та довільного полінома $f(\mathbf{y})$, ми маємо*

$$\hat{\Delta}_{(\mathbf{y})} h_{s,s'}(\mathbf{t}) f(\mathbf{y}) = q^{s-s'} h_{s,s'}(\mathbf{t}) \hat{\Delta}_{(\mathbf{y})} f(\mathbf{y}).$$

Оскільки $\Delta_{(\mathbf{t})} \left(Q^u_{\mathbf{y}} h_{s,s'}(\mathbf{t}) h_{r,r'}(\mathbf{y}) \right) = 0$, тому використовуючи Лему 3.5 та співвідношення (2.3.63) з p замість n, ми маємо

$$\Delta_q \left(Q^u_{\mathbf{y}} h_{s,s'}(\mathbf{t}) h_{r,r'}(\mathbf{y}) \right) = \hat{\Delta}_{(\mathbf{y})} \left(Q^u_{\mathbf{y}} h_{s,s'}(\mathbf{t}) h_{r,r'}(\mathbf{y}) \right) = q^a h_{s,s'}(\mathbf{t}) \Delta_{(\mathbf{y})} Q^u_{\mathbf{y}} h_{r,r'}(\mathbf{y})$$

$$= q^a [u][p + u + r + r' - 1] \left(Q^{u-1}_{\mathbf{y}} h_{s,s'}(\mathbf{t}) h_{r,r'}(\mathbf{y}) \right),$$

де $a = 2(s - s')u + s' - s$.

Зараз ми можемо знайти гармонічну проекцію поліномів (2.3.93). Позначивши цю проекцію через $h^{(r,r';s,s')}_{m,m'}(\mathbf{z},\mathbf{w})$, ми маємо

$$h^{(r,r';s,s')}_{m,m'}(\mathbf{z},\mathbf{w}) = \sum_{k=0}^{\min\,(m,m')} \alpha_k Q^k \Delta_q^k \left(Q_{\mathbf{y}}^u h_{s,s'}(\mathbf{t}) h_{r,r'}(\mathbf{y})\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{u} \alpha_k Q^k q^{(s-s'+p-1)k} \frac{[u]![r+r'+p+u-1]!}{[u-k]![r+r'+p+u-k-1]!} Q_{\mathbf{y}}^{u-k}\right) h_{s,s'}(\mathbf{t}) h_{r,r'}(\mathbf{y}),$$

де α_k визначена формулою (2.3.77). Позначивши вираз у круглих дужках через $t^{n,p;m,m'}_{r,r';s,s'}(Q_{\mathbf{y}}, Q_{\mathbf{t}})$, ми маємо

$$h^{(r,r';s,s')}_{m,m'}(\mathbf{z},\mathbf{w}) = \mathsf{H}_{m,m'}\left(Q_{\mathbf{y}}^{m-r-s} h_{s,s'}(\mathbf{t}) h_{r,r'}(\mathbf{y})\right) = t^{n,p;m,m'}_{r,r';s,s'}(Q_{\mathbf{y}}, Q_{\mathbf{t}}) h_{s,s'}(\mathbf{t}) h_{r,r'}(\mathbf{y}). \tag{2.3.94}$$

Після простих перетворень ми отримуємо для $t^{n,p;m,m'}_{r,r';s,s'}(Q_{\mathbf{y}}, Q_{\mathbf{t}})$ вираз

$$t^{n,p;m,m'}_{r,r';s,s'}(Q_{\mathbf{y}}, Q_{\mathbf{t}}) = Q_{\mathbf{y}}^u \sum_{k=0}^{u} \frac{(q^{-2u};q^2)_k (q^{-2(r+r'+p+u-1)};q^2)_k}{(q^{-2(m+m'+n-2)};q^2)_k (q^2;q^2)_k} q^{k\sigma} Q^k Q_{\mathbf{y}}^{-k},$$

де $\sigma = -2n - 2s' + 2 + 2p$. Взявши до уваги визначення базисної гіпергеометричної функції ${}_2\varphi_1$, ми виводимо

$$t^{n,p;m,m'}_{r,r';s,s'}(Q_{\mathbf{y}}, Q_{\mathbf{t}}) = Q_{\mathbf{y}}^u \, {}_2\varphi_1(q^{-2u}, q^{-2(r+r'+p+u-1)};\; q^{-2(m+m'+n-2)};\; q^2,\; QQ_{\mathbf{y}}^{-1} q^{\sigma}).$$

Використовуючи співвідношення

$${}_2\varphi_1(q^{-n}, b;\; c;\; q, z) = q^{-(n+1)n/2}(-z)^n \frac{(b;q)_n}{(c;q)_n} {}_2\varphi_1(q^{-n}, q^{1-n}/c;\; q^{1-n}/b;\; q, cq^{n+1}/bz)$$

(див., наприклад, формулу (2) з Розділу 14.1.8 в [154]), ми зводимо цей вираз до

$$t^{n,p;m,m'}_{r,r';s,s'}(Q_{\mathbf{y}}, Q_{\mathbf{t}}) = (-q^{\sigma})^u q^{-(u+1)u} \frac{(q^{-2(r+r'+p+u-1)};q^2)_u}{(q^{-2(m+m'+n-2)};q^2)_u} Q^u$$

$$\times {}_2\varphi_1(q^{-2u}, q^{2(m+m'+n-u-1)};\ q^{2(r+r'+p)};\ q^2,\ q^{-2s+2}Q_{\mathbf{y}}/Q).$$

Використовуючи визначення малих q-поліномів Якобі, ми виводимо, що

$$t^{n,p;m,m'}_{r,r';s,s'}(Q_{\mathbf{y}}, Q_{\mathbf{t}}) = (-q^{\sigma})^u q^{-(u+1)u} \frac{(q^{-2(r+r'+p+u-1)}; q^2)_u}{(q^{-2(m+m'+n-2)}; q^2)_u} Q^u$$

$$\times P_u^{(r+r'+p-1, s+s'+n-p-1)}(q^{-2s}Q_{\mathbf{y}}/Q;\ q^2). \tag{2.3.95}$$

Отже ми довели, що *проекція* $\mathsf{H}_{m,m'}\left(Q_{\mathbf{y}}^{m-r-s} h_{s,s'}(\mathbf{t}) h_{r,r'}(\mathbf{y})\right)$ *дається формулою (2.3.94), де* $t^{n,p;m,m'}_{r,r';s,s'}$ *визначаються (2.3.95).* Звуження $\tau h^{(r,r';s,s')}_{m,m'}(\mathbf{z},\mathbf{w})$ цієї проекції на квантову сферу $S^{\mathbb{C}}_{q,n-1}$ дається формулою

$$\tau h^{(r,r';s,s')}_{m,m'}(\mathbf{z},\mathbf{w}) = (\tau t^{n,p;m,m'}_{r,r';s,s'})(Q_{\mathbf{y}}) h_{s,s'}(\mathbf{t}) h_{r,r'}(\mathbf{y}),$$

де $(\tau t^{n,p;m,m'}_{r,r';s,s'})(Q_{\mathbf{y}}) = cP_u^{(r+r'+p-1,s+s'+n-p-1)}(q^{-2s}Q_{\mathbf{y}}/Q; q^2)$ (c — множник з правої сторони (2.3.95)).

Для скалярного добутку поліномів у вигляді (2.3.94), ми маємо

$$\langle h^{(r,r';s,s')}_{m,m'}, h^{(r'',r''';s'',s''')}_{m,m'} \rangle = 0\ , \quad \text{якщо} \quad (r,r',s,s') \neq (r'',r''',s'',s''')$$

(оскільки простори $\mathcal{H}^{(\mathbf{y})}_{r,r'}$ і $\mathcal{H}^{(\mathbf{y})}_{r'',r'''}$ та простори $\tilde{\mathcal{H}}^{(\mathbf{t})}_{s,s'}$ і $\tilde{\mathcal{H}}^{(\mathbf{t})}_{s'',s'''}$ є ортогональними). Якщо $(r,r',s,s') = (r'',r''',s'',s''')$, тоді обчислення норми полінома (2.3.94) зводиться до використання співвідношення ортогональності для q-поліномів Якобі та норм $h_{s,s'}(\mathbf{t})$ і $h_{r,r'}(\mathbf{y})$.

Для того, щоб отримати q-аналог розділення змінних у цьому випадку, ми маємо взяти базиси у просторах $\mathcal{H}^{(\mathbf{y})}_{r,r'}$ та $\tilde{\mathcal{H}}^{(\mathbf{t})}_{s,s'}$ в розділених змінних, як це було зроблено в п. 2.3.8.

2.4. Висновки

В підрозділі 2.2 цього розділу вивчались q-гармонічні поліноми на квантовому векторному просторі, породженому q-комутуючими елементами x_1, $x_2, \ldots,$ x_n. Гармонічні поліноми визначені як розв'язки рівняння $\Delta_q p = 0$, де p — поліном від $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та q-оператор Лапласа Δ_q визначено через q-похідні. Для побудови явних формул дуже зручним є проектор H_m : $\mathcal{A}_m \to \mathcal{H}_m$, де $\mathcal{A}_m$ та $\mathcal{H}_m$ — простори однорідних (степені m) поліномів та q-гармонічних поліномів, відповідно. Цей проектор був зконструйований через q-оператори Лапласа та квадрата радіуса. Використовуючи цей проектор було вперше отримано q-аналог класичних приєднаних гармонічних поліномів. Вони складають ортонормовний базис в $\mathcal{H}_m$ відносно скалярного добутку Фішера. Дано q-аналог розділення змінних. Також у цьому розділі знайдено явні формули для представлень нестандартної q-деформованої алгебра $U'_q(\mathrm{so}_n)$, яка грає роль групи поворотів $SO(n)$ у випадку класичних гармонічних поліномів, на просторах $\mathcal{H}_m$.

В підрозділі 2.3 вивчався q-оператор Лапласа та q-гармонічні поліноми на квантовому *комплексному* векторному просторі, породженому елементами z_i, w_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, на якому діє квантова група $GL_q(n)$ (або $U_q(n)$). Тут z_i (відповідно, w_i) грають роль голоморфних (відповідно, антиголоморфних) координат на квантовому просторі. q-Гармонічні поліноми визначені як розв'язки $\Delta_q p = 0$, де p — поліном від z_i, w_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, та q-оператор Лапласа Δ_q визначено через q-похідні. q-Оператор Лапласа Δ_q комутує з дією $GL_q(n)$. Наступним кроком побудовано проектор $\mathsf{H}_{m,m'} : \mathcal{A}_{m,m'} \to \mathcal{H}_{m,m'}$, де $\mathcal{A}_{m,m'}$ та $\mathcal{H}_{m,m'}$ є, відповідно, простори однорідних (степені m по z_i та степені m' по w_i) поліномів та однорідних q-гармонічних поліномів. Використовуючі побудовані проектори, побудовано вперше q-аналоги класичних зональних сферичних та приєднаних сферичних гармонік. Вони утворюють ортогональний базис для $\mathcal{H}_{m,m'}$. Дано q-аналог розділення змінних. Квантова алгебра $U_q(\mathrm{gl}_n)$, що діє на $\mathcal{H}_{m,m'}$, визначає незвідні представлення $U_q(\mathrm{gl}_n)$. Побудовано явні формули для дії операторів відповідних представлень. Ці результати, зокрема, дозволили побудувати дуальну пару Хау $(U_q(\mathrm{sl}_2), U_q(\mathrm{gl}_n))$ (Howe duality) для квантових алгебр, що діють на квантовому комплексному векторному просторі. В цій парі квантова алегбра $U_q(\mathrm{sl}_2)$ породжена q-оператор Лапласа, інваріантним оператором, що грає роль квадрату радіуса, та оператором Ейлера.

РОЗДІЛ 3

Модель Рузінарса як приклад моделі, пов'язаної з квантовим симетричним простором

Основним методом побудови квантових інтегровних систем є квантовий метод оберненої задачі розсіяння. Але цей метод по суті є алгебраїчним. Інший підхід, який застосовний до побудови квантовомеханічних інтегровних задач зі скінченною кількістю ступенів вільності, в основному розвинутий Ольшанецьким та Переломовим [134], є геометричним. В цьому підході гамільтоніани та комутуючи з ними інтеграли руху інтегровних систем пов'язуються з радіальними частинами операторів Лапласа–Бельтрамі на симетричних просторах. Симетричні простори — це простори, які є однорідними по відношенню до дії деякою групи Лі та мають додаткову симетрію по відношенню до операції інверсії [6]. Задача знаходження хвильових функцій тісно пов'язана з гармонічним аналізом на цих просторах. А саме, хвильові функції комутуючих гамільтоніанів — це сферичні гармоніки на симетричних просторах. В дисертації показано, що цей підхід узагальнюється на квантові (тобто q-деформовані) симетричні простори. В результаті отримується q-деформація інтегровних систем, яка може розглядатися як деякий релятивістський аналог початкових інтегровних систем. В цьому розділі дисертації використовується нестандартна деформація $U_q'(\mathrm{so}_n)$ алгебри Лі групи обертань, яка розглядалась в Розділі 1 та гармонічний аналіз ще на одному типі квантових просторів, крім тих, що розглядався в Розділі 2.

3.1. Вступ

В роботі [131], М. Ноумі дав визначення квантового аналогу $\mathcal{F}_q(\mathrm{GL}(n)/\mathrm{SO}(n))$ алгебри функцій на однорідному просторі $\mathrm{GL}(n)/\mathrm{SO}(n)$ та зональних сферічних функцій на відповідному квантовому просторі. Виявляється, що ці сферичні функції при звуженні на підалгебру Картана є поліномами Макдональда, які є спільними власними функціями комутуючого набору різнецевих операторів Макдональда–Рузінарса (РОМР) [142]. Ці різнецеві оператори з'являються як радіальні компоненти елементів Казиміра $U_q(\mathrm{gl}_n)$. В [131] були пораховані радіальні компоненти "квадратичного" елемента Казиміра. Ми знаходимо радіальні компоненти інших базисних елементів Казиміра. Метод виведення є узагальненням методу, запропонованого в [131], але використовує техніку афінної алгебри Гекке, розвинуту в [37] І. Чередніком. З іншої сторони, РОМР (з точністю до заміни змінних) співпадають з комутуючими гамільтоніанами квантової тригонометричної n-частинкової моделі Рузінарса. Ці результати представлені нижче в підрозділі 3.2 та опубліковані в [81, 84]. В цих дослідженнях хвильові функції моделі Рузінарса визначені як матричні елементи $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle v|q^{\sum_{k=1}^{n} x_k \epsilon_k}|v\rangle$, де q^{ϵ_k} належить підалгебрі Картана, $\langle v|$ та $|v\rangle$ — інваріантні вектори по відношенню до правої та лівої дій нестандартної q-деформації Гаврилика–Клімика [47]. Показано, що хвильові функції, визначені таким чином, є спільними хвильовими функціями комутуючого набору різницевих операторів Макдональда–Рузінарса. Використовуючи цю інформацію було знайдено вирази для хвильових функцій через поліноми Макдональда. В [83] ці вирази отримані безпосередньо через використання явних формул для інваріантних векторів в просторі в базисі ГЦ. Щоб отримати хвильові функції через поліноми Макдональда нам була потрібна комбінаторна формула для таких поліномів [117]. Ці результати представлені в Підрозділі 3.3.

Квантові гамільтоніани тригонометричної моделі Рузінарса, які ми тут розглядаємо, є q-аналогами квантових гамільтоніанів моделі Сазерленда, пов'язаних з радіальними частинами операторів Лапласа на $\mathrm{GL}(n)/\mathrm{SO}(n)$. Отже обрахунки, які тут наводяться можуть розглядатись у дусі [134], де гамільтоніани інтегровних систем пов'язуються з радіальними частинами операторів Лапласа на симетричних просторах.

Герасимов, Харчев та Лебедєв використали [58] теорію представлень $\mathrm{GL}(n)$, щоб отримати хвильові функції для відкритого ланцюжка Тоди та моделі Сазерленда. Завдяки використанню теорії представлень та інваріантних векторів (у випадку моделі Тоди та гіперболічної моделі Сазерленда це вектори та функції Уіттекера) наведені в дисертації обрахунки споріднені до результатів в [58]. Але формули ГЦ, які використовувалися в [58] є відмінними від тих, що представлені тут. Важливим наслідком цієї відмінності є те, що хвильові функції, знайдені в [58] є хвильовими функціями в розділених змінних.

Хочеться звернути увагу також на статтю [40], де автори знаходять схожий до нашого зв'язок між елементами Казиміра квантової алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$ та РОМР.

Результати, що отримані автором по темі цього розділу і виносяться на захист опубліковані в роботах [81, 83, 84].

3.2. Квантова модель Рузінарса, квантовий однорідний простір та алгебри Гекке

3.2.1. Квантова алгебра $U_q(\mathrm{gl}_n)$ та її елементи Казиміра. За визначенням [2, 93, 102], квантова алгебра $U_q(\mathrm{gl}_n)$ є унітальної (тобто з одиничним елементом) асоціативною алгеброю з генераторами e_i, f_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, та генераторами q^h, де $h = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \cdots + x_n\epsilon_n$, $x_i \in \mathbb{R}$, є елементами векторного простору з базисом ϵ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Визначальними співвідношеннями, що містять комплексний деформаційний параметр $q \neq 0, \pm 1$, є

$$q^0 = 1, \qquad q^{h_1}q^{h_2} = q^{h_1+h_2}, \qquad q^h e_i = q^{x_i - x_{i+1}} e_i q^h, \qquad q^h f_i = q^{x_{i+1}-x_i} f_i q^h,$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij}(q^{\epsilon_i - \epsilon_{i+1}} - q^{\epsilon_{i+1}-\epsilon_i})/(q - q^{-1}),$$

$$[e_i, e_j] = 0, \quad |i-j| > 1, \qquad e_i^2 e_j - (q + q^{-1})e_i e_j e_i + e_j e_i^2 = 0, \quad |i-j| = 1,$$

$$[f_i, f_j] = 0, \quad |i-j| > 1, \qquad f_i^2 f_j - (q + q^{-1})f_i f_j f_i + f_j f_i^2 = 0, \quad |i-j| = 1.$$

В границі $q \to 1$, алгебра $U_q(\mathrm{gl}_n)$ перетворюється в універсальну огортуючу алгебру для алгебри Лі gl_n. Ми фіксуємо наступну структуру алгебри Хопфа на $U_q(\mathrm{gl}_n)$:

$$\Delta(q^h) = q^h \otimes q^h, \ \varepsilon(q^h) = 1, \ S(q^h) = q^{-h},$$

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + q^{\epsilon_i - \epsilon_{i+1}} \otimes e_i, \ \varepsilon(e_i) = 0, \ S(e_i) = -q^{-\epsilon_i + \epsilon_{i+1}} e_i,$$

$$\Delta(f_i) = f_i \otimes q^{-\epsilon_i + \epsilon_{i+1}} + 1 \otimes f_i, \ \varepsilon(f_i) = 0, \ S(f_i) = -f_i q^{\epsilon_i - \epsilon_{i+1}}.$$

Існує єдиний набір елементів E_{ij} $(1 \le i, j \le n, i \neq j)$ в $U_q(\mathrm{gl}_n)$, такий що

$$E_{i,i+1} = e_i, \qquad E_{ij} = E_{ik}E_{kj} - qE_{kj}E_{ik} \quad (i < k < j),$$

$$E_{i+1,i} = f_i, \qquad E_{ij} = E_{ik}E_{kj} - q^{-1}E_{kj}E_{ik} \quad (i > k > j).$$

За допомогою цих елементів визначаємо елементи $L^{\pm}_{ij} \in U_q(\mathrm{gl}_n)$ як

$$L^+_{ii} = q^{\epsilon_i}, \qquad L^+_{ij} = (q - q^{-1})q^{\epsilon_i}E_{ji} \quad (i < j), \qquad L^+_{ij} = 0 \quad (i > j), \quad (3.2.1)$$

$$L^-_{ii} = q^{-\epsilon_i}, \qquad L^-_{ij} = -(q - q^{-1})E_{ji}q^{-\epsilon_j} \quad (i > j), \qquad L^-_{ij} = 0 \quad (i < j). \; (3.2.2)$$

Тоді відомо [93, 5], що матриці $L^{\pm}$ з матричними елементами $L^{\pm}_{ij}$ задовільняють (позначення є стандартними [102]):

$$R^+_{12}L^{\epsilon}_1L^{\epsilon}_2 = L^{\epsilon}_2L^{\epsilon}_1R^+_{12} \quad (\epsilon = \pm) \quad \text{та} \quad R^+_{12}L^+_1L^-_2 = L^-_2L^+_1R^+_{12},$$

де R^+_{12} дається в термінах матричних одиниць e_{ij} як

$$R^+_{12} = \sum_{1 \le i,j \le n} q^{\delta_{ij}} e_{ii} \otimes e_{jj} + (q - q^{-1}) \sum_{1 \le i < j \le n} e_{ij} \otimes e_{ji}. \qquad (3.2.3)$$

Надалі для $1 \le i \le j \le n$ ми визначаємо $[i, j]$ як набір цілих k, таких що $i \le k \le j$. Нехай I, J, K — підмножини в $[1, n]$ фіксованої потужності r. Ми будемо завжди вважати, що ці елементи є впорядкованими. Наприклад, $I = \{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n\}$. Ці підмножини будуть грати роль індексів $\binom{n}{r} \times \binom{n}{r}$-матриці $\mathbf{X}$ з матричними елементами $\mathbf{X}^I_J$. Ми будемо казати, що така матриця є верхньотрикутньою, якщо $\mathbf{X}^I_J = 0$ при $I \not\preceq J$, де ми використовуємо наступне часткове впорядкування для підмножин I та J рівної потужності: $I \preceq J \Leftrightarrow \{i_k \le j_k, 1 \le k \le r\}$. Ще одне позначення: $||I|| = \sum_{s=1}^{r} i_s$.

Надалі нам буде потрібна верхньоунітрикутня $\binom{n}{r} \times \binom{n}{r}$-матриця $\mathbf{A}(t)$ з матричними елементами $(\mathbf{A}(t))^I_J$:

$$(\mathbf{A}(t))^I_J = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} t^{-\ell(\sigma)} A^{i_{\sigma(1)}}_{j_1} A^{i_{\sigma(2)}}_{j_2} \cdots A^{i_{\sigma(r)}}_{j_r}, \qquad (3.2.4)$$

де $\ell(\sigma)$ — довжина перестановки σ та

$$A^i_j = 0,\ \text{якщо}\ i > j, \qquad A^i_j = 1,\ \text{якщо}\ i = j, \qquad A^i_j = (1 - t^{-1}),\ \text{якщо}\ i < j. \tag{3.2.5}$$

Більш явна формула для $(\mathbf{A}(t))^I_J$ така:

$$(\mathbf{A}(t))^I_J = \prod_{s=1}^{r} \left\{ \begin{array}{ll} 1, & j_s \in I, \\ (1 - t^{s-p-1}), & j_s \notin I, p \text{ — максим. число, таке що } j_s > i_p \end{array} \right\}.$$

Відмітимо, що обернена до $\mathbf{A}(t)$ є також верхньоунітрикутньою матрицею. Її матричними елементами є

$$\left(\mathbf{A}(t)^{-1}\right)^I_J = t^{||I||-||J||}(\mathbf{A}(t^{-1}))^I_J. \tag{3.2.6}$$

Один з методів доведення цього факту є повторення доведення з Додатку A в [84], але з $\mathcal{R}^{-1}_{1,2,\ldots,2r}$ замість $\mathcal{R}_{1,2,\ldots,2r}$.

Для цієї матриці $\mathbf{A}(t)$ та набору комутуючих змінних X_1, $X_2, \ldots$, X_n, ми покладаємо $\mathbf{A}(X;t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{D}(X)$, де $\mathbf{D}(X)$ є діагональною матрицею з елементами $(\mathbf{D}(X))^I_I = X_I := \prod_{i\in I} X_i$. Нехай $\mathbf{F}(X,\xi;t)$ — верхньотрикутня $\binom{n}{r} \times \binom{n}{r}$-матриця з матричними елементами $(\mathbf{F}(X,\xi;t))^I_J$, які є раціональними функціями від t та $X = (X_1, \ldots, X_n)$, та поліномами від $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Нехай її діагональні елементами є $\mathbf{F}^I_I = \xi_I := \prod_{i\in I} \xi_i$. Наступна теорема дає зв'язок між матрицею $\mathbf{A}(t)$ та символами[1] POMP [142]

$$D^{(r)}_X := t^{\binom{r}{2}} \sum_I \left(\prod_{\substack{i\in I \\ j\notin I}} \frac{tX_i - X_j}{X_i - X_j} \right) \xi_I, \qquad r = 1, \ldots, n. \tag{3.2.7}$$

[1]Для отримання POMP необхідно замінити всі ξ_i на відповідні оператори зсуву τ_i. Оператори τ_i є автоморфізмами кільця поліномів від $\{X_j\}$, що діють як $\tau_i X_j = q^{\delta_{ij}} X_j$.

Теорема 3.1. *Співвідношення комутативності* $[\mathbf{A}(X;t), \mathbf{F}(X,\xi;t)] = 0$ *однозначно визначає матричні елементи* $\mathbf{F}_J^I$ *в термінах (як лінійна комбінація) діагональних* $\mathbf{F}_I^I = \xi_I$. *Більш того, має місце співвідношення*

$$t^{rn} \sum_{I,J} t^{-||I||} (\mathbf{F}(X,\xi;t))_J^I = D_X^{(r)}. \tag{3.2.8}$$

Доведення Теореми 3.1 дається в п. 3.2.3.

Використовуючи результати з [91] виводяться наступні явні формули для елементів Казиміра $U_q(\mathrm{gl}_n)$:

$$C_r = q^{2rn} \sum_{I,J} q^{-2||I||} \mathbf{Z}_J^I, \qquad r = 1, 2, \dots, n. \tag{3.2.9}$$

Матричні елементи $\mathbf{Z}_J^I$ матриці $\mathbf{Z}$ визначаються

$$\mathbf{Z}_J^I = \sum_{\sigma,\tau \in \mathcal{P}_r} (-q^{-1})^{\ell(\sigma)+\ell(\tau)} (L^+)_{j_1}^{i_{\sigma(1)}} (L^+)_{j_2}^{i_{\sigma(2)}} \cdots (L^+)_{j_r}^{i_{\sigma(r)}}$$
$$\times (S(L^-)^t)_{j_r}^{i_{\tau(r)}} (S(L^-)^t)_{j_{r-1}}^{i_{\tau(r-1)}} \cdots (S(L^-)^t)_{j_1}^{i_{\tau(1)}}.$$

Використовуючи (3.2.1)–(3.2.2) ми бачимо, що матриця $\mathbf{Z}$ є верхньотрикутньою матрицею з діагональними елементами $\mathbf{Z}_I^I = q^{2(\epsilon_{i_1}+\cdots+\epsilon_{i_r})}$, що належать підалгебрі Картана $U_q(\mathrm{gl}_n)$.

Згідно М. Ноумі [131], ми вводимо строго верхньотрикутню матрицю

$$M := L^+ - \mathcal{J} S(L^-)^t \, \mathcal{J}^{-1}, \tag{3.2.10}$$

де $\mathcal{J} = \mathrm{diag}(q^{n-1}, q^{n-2}, \dots, 1)$, та лінійний простір k_q, породжений матричними елементами M. Зауважимо, що в квазікласичній границі $q \to 1$, матричні елементи M стають генераторами алгебри Лі $\mathrm{so}(n)$, вкладеної в алгебру Лі

$\mathrm{gl}(n)$. Візьмемо елемент q^h з $h = \sum_{i=1}^{n} x_i \epsilon_i$ та порахуємо редукцію елемента $q^h C_r$ по модулю лінійного підпростору $U_q(\mathrm{gl}_n)\mathrm{k}_q + \mathrm{k}_q U_q(\mathrm{gl}_n)$ в $U_q(\mathrm{gl}_n)$ та знайдемо у явному вигляді представника, який належить підалгебрі Картана. Почнемо з пошуку співвідношень між класами $q^h \mathbf{Z}^I_J$. Виявляється, що співвідношення, які будуть наведені нижче дозволяють виразити будь-який елемент $q^h \mathbf{Z}^I_J$, а тому і $q^h C_r$, як лінійну комбінацію елементів $q^h \mathbf{Z}^K_K$ з підалгебри Картана.

З цією метою ми використовуємо комутаційні співвідношення подібні до

$$L_1^+ S(L_2^-)^t {R_{12}^+}^{t_2} = {R_{12}^+}^{t_2} S(L_2^-)^t L_1^+, \tag{3.2.11}$$

де ${R_{12}^+}^{t_2}$ — матриця (3.2.3), транспонована по другому просторі. Це дає

$$\mathcal{L}^+_{1,2,\ldots,r} \mathcal{L}^-_{r+1,r+2,\ldots,2r} \mathcal{R}_{1,2,\ldots,2r} = \mathcal{R}_{1,2,\ldots,2r} \mathcal{L}^-_{r+1,r+2,\ldots,2r} \mathcal{L}^+_{1,2,\ldots,r}, \tag{3.2.12}$$

де

$$\mathcal{L}^+_{i_1,i_2,\ldots,i_r} = L^+_{i_1} L^+_{i_2} \cdots L^+_{i_r}, \qquad \mathcal{L}^-_{i_1,i_2,\ldots,i_r} = S(L^-_{i_1})^t S(L^-_{i_2})^t \cdots S(L^-_{i_r})^t,$$

$$\mathcal{R}_{1,2,\ldots,2r} = (R^{+t_{r+1}}_{r,r+1} R^{+t_{r+2}}_{r,r+2} \cdots R^{+t_{2r}}_{r,2r})(R^{+t_{r+1}}_{r-1,r+1} R^{+t_{r+2}}_{r-1,r+2} \cdots R^{+t_{2r}}_{r-1,2r}) \cdots$$
$$\times (R^{+t_{r+1}}_{1,r+1} R^{+t_{r+2}}_{1,r+2} \cdots R^{+t_{2r}}_{1,2r}).$$

Зауважимо також, що ми маємо

$$q^h L^+ = H^{-1} L^+ H q^h, \qquad q^h S(L^-) = H^{-1} S(L^-) H q^h, \tag{3.2.13}$$

для матриці $H = \mathrm{diag}(q^{x_1}, \ldots, q^{x_n})$. Використовуючи (3.2.10)–(3.2.13), ми отримуємо наступні співвідношення еквівалентності в $U_q(\mathrm{gl}_n)$ по модулю лінійного підпростору $U_q(\mathrm{gl}_n)\mathrm{k}_q + \mathrm{k}_q U_q(\mathrm{gl}_n)$:

$$q^h \mathcal{L}^+_{1,2,\ldots,r} \mathcal{L}^-_{r+1,r+2,\ldots,2r} \widetilde{\mathcal{R}} \sim q^h \widetilde{\mathcal{R}} \mathcal{L}^+_{2r,2r-1,\ldots,r+1} \mathcal{L}^-_{r,r-1,\ldots,1}, \tag{3.2.14}$$

де $\widetilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_{1,2,\ldots,2r}\mathcal{R}_{\mathrm{R}}\mathcal{R}_{\mathrm{L}}$,

$$\mathcal{R}_{\mathrm{R}} = \mathcal{J}_r(R^{+t_r}_{r-1,r}R^{+t_r}_{r-2,r}\cdots R^{+t_r}_{1,r})\mathcal{J}_{r-1}(R^{+t_{r-1}}_{r-2,r-1}R^{+t_{r-1}}_{r-3,r-1}\cdots R^{+t_{r-1}}_{1,r-1})\cdots\mathcal{J}_1,$$

$$\mathcal{R}_{\mathrm{L}} = H^2_{r+1}\mathcal{J}^{-1}_{r+1}(R^{+t_{r+2}}_{r+1,r+2}R^{+t_{r+3}}_{r+1,r+3}\cdots R^{+t_{2r}}_{r+1,2r})$$
$$\times H^2_{r+2}\mathcal{J}^{-1}_{r+2}(R^{+t_{r+3}}_{r+2,r+3}R^{+t_{r+4}}_{r+2,r+4}\cdots R^{+t_{2r}}_{r+2,2r})\cdots H^2_{2r}\mathcal{J}^{-1}_{2r}.$$

Позначивши ліву (відповідно, праву) частину (3.2.14) через U (відповідно, V), для двух підмножин I та J ми маємо

$$\sum_{\sigma,\tau\in\mathcal{P}_r}(-q^{-1})^{\ell(\sigma)+\ell(\tau)}U^{i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)},\ldots,i_{\sigma(r)},i_{\tau(r)},i_{\tau(r-1)},\ldots,i_{\tau(1)}}_{j_1,j_2,\ldots,j_r,j_r,\ldots,j_2,j_1} = \sum_K q^h\mathbf{Z}^I_K\mathbf{R}^K_J,$$

$$\sum_{\sigma,\tau\in\mathcal{P}_r}(-q^{-1})^{\ell(\sigma)+\ell(\tau)}V^{i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)},\ldots,i_{\sigma(r)},i_{\tau(r)},i_{\tau(r-1)},\ldots,i_{\tau(1)}}_{j_1,j_2,\ldots,j_r,j_r,\ldots,j_2,j_1} = \sum_K \mathbf{R}^I_K q^h\mathbf{Z}^K_J,$$

де $\mathbf{R}^I_J = q^r(\mathbf{A}(X;q^2))^I_J$, $X_i = q^{2x_i}$. Грубо кажучи, $\mathcal{R}_{1,2,\ldots,2r}$ дає внесок $q^r\mathbf{A}(q^2)$ та матриця $\mathcal{R}_{\mathrm{R}}\mathcal{R}_{\mathrm{L}}$ дає внесок просто як діагональна матриця $\mathbf{D}(X)$. Отже ми отримуємо наступний матричний вигляд для співвідношень еквівалентності по модулю $U_q(\mathrm{gl}_n)\mathrm{k}_q + \mathrm{k}_qU_q(\mathrm{gl}_n)$:

$$q^h\mathbf{Z}\mathbf{A}(X;q^2) \sim \mathbf{A}(X;q^2)q^h\mathbf{Z} \mod U_q(\mathrm{gl}_n)\mathrm{k}_q + \mathrm{k}_qU_q(\mathrm{gl}_n). \tag{3.2.15}$$

Це означає, що класи еквівалентності $q^h\mathbf{Z}^I_J$ задовільняють тому самому рекурентному співвідношенню що і $(\mathbf{F}(X,\xi;t))^I_J$ з Теореми 3.1, якщо зафіксувати $t = q^2$ та $\xi_i = q^{2\epsilon_i+h/r}$. Зауважимо, що стосовно діагональних елементів ми маємо $q^h\mathbf{Z}^K_K = \xi_K = q^hq^{2\sum_{s=1}^r\epsilon_{k_s}}$. Отже ми робимо висновок, що

$$q^h\mathbf{Z}^I_J \sim (\mathbf{F}((q^{2x_1},\ldots,q^{2x_n}),(q^{2\epsilon_1+h/r},\ldots,q^{2\epsilon_n+h/r});q^2))^I_J.$$

Використавши явний вираз (3.2.9) для C_r в термінах матричних елементів $\mathbf{Z}_J^I$ та (3.2.8) з Теореми 3.1, ми отримуємо наступний вираз для класів еквівалентності $q^h C_r$:

$$q^h C_r \sim q^{r(r-1)} q^h \sum_{\substack{I\subset[1,n] \\ |I|=r}} \prod_{i\in I} \left(q^{2\epsilon_i} \prod_{j\notin I} \frac{q^2 q^{2x_i} - q^{2x_j}}{q^{2x_i} - q^{2x_j}} \right), \qquad r = 1, \ldots, n. \quad (3.2.16)$$

3.2.2. Квантова модель Рузінарса. Ідея як отримати рівняння Шрьодінгера для квантової моделі Рузінарса з елементів Казиміра $U_q(\mathrm{gl}_n)$ взято з неопублікованої роботи С. Харчева, де було розглянуто випадки $n = 2, 3$.

Нехай V_Λ — скінченно-вимірний простий $U_q(\mathrm{gl}_n)$-модуль зі старшою вагою $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \cdots \geq \Lambda_n$, що містить вектор $|v\rangle$, такий що $\mathrm{k}_q|v\rangle = 0$ (сферичний вектор). М. Ноумі [131] було доведено, що такий вектор існує (та єдиний з точністю до коефіцієнта) тоді і тільки тоді, коли $\Lambda_s - \Lambda_{s+1} \in 2\mathbb{Z}$, $1 \leq s \leq n-1$. Нехай $\langle v|$ — вектор з правого $U_q(\mathrm{gl}_n)$-модуля, зконструйованого на дуальному просторі до V_Λ, такий що $\langle v|\mathrm{k}_q = 0$. Тепер ми вводимо хвильову функцію

$$\Psi_\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \langle v|q^h|v\rangle = \langle v|q^{\sum_{k=1}^n x_k \epsilon_k}|v\rangle,$$

яка є поліномом від q^{x_1}, $q^{x_2}, \ldots,$ q^{x_n}. Тоді з (3.2.16) випливає

$$\begin{aligned}\langle v|q^h C_r|v\rangle &= q^{r(r-1)} \sum_{\substack{I\subset[1,n] \\ |I|=r}} \left(\prod_{\substack{i\in I \\ j\notin I}} \frac{q^2 q^{2x_i} - q^{2x_j}}{q^{2x_i} - q^{2x_j}} \right) \langle v|q^{h+2\sum_{i\in I}\epsilon_i}|v\rangle \\ &= \hat{H}_r \Psi_\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n),\end{aligned}$$

де $\hat{H}_r$ — r-ий квантовий гамільтоніан тригонометричної n-частинкової моделі

Рузінарса:

$$\hat{H}_r = q^{r(r-1)} \sum_{\substack{I\subset[1,n]\\|I|=r}} \left(\prod_{\substack{i\in I\\ j\notin I}} \frac{q^2 q^{2x_i} - q^{2x_j}}{q^{2x_i} - q^{2x_j}} \right) e^{2\sum_{i\in I}\partial_{x_i}}.$$

З іншого боку, оскільки $|v\rangle$ належить $U_q(\mathrm{gl}_n)$-модулю V_Λ зі старшою вагою $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$, ми маємо $C_r|v\rangle = E_\Lambda^{(r)}|v\rangle$, де

$$E_\Lambda^{(r)} = e_r(q^{2\Lambda_1+2n-2}, q^{2\Lambda_2+2n-4}, \ldots, q^{2\Lambda_n})$$

$$= q^{r(n-1)} e_r(q^{2(\Lambda_1+\rho_1)}, q^{2(\Lambda_2+\rho_2)}, \ldots, q^{2(\Lambda_n+\rho_n)}).$$

Ми використали $e_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для позначення елементарних симетричних поліномів та $\rho = (\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \ldots, \frac{1-n}{2})$. Отже

$$\langle v|q^h C_r|v\rangle = E_\Lambda^{(r)} \Psi_\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Прирівнюючи два вирази для $\langle v|q^h C_r|v\rangle$, ми отримуємо рівняння Шрьодінгера для квантової тригонометричної n-частинкової моделі Рузінарса:

$$\hat{H}_r \Psi_\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E_\Lambda^{(r)} \Psi_\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Розв'язок $\Psi_\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ цього рівняння дається в термінах полінома Макдональда $P_\lambda(X_1, X_2, \ldots, X_n; q, t)$:

$$\Psi_\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P_\lambda(q^{2x_1}, q^{2x_2}, \ldots, q^{2x_n}; q^4, q^2) q^{\ell(x_1+x_2+\cdots+x_n)},$$

де розбиття $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ та $\ell \in \mathbb{Z}$ визначається (неоднозначно) [131]

$$\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n) = (2\lambda_1 + \ell, 2\lambda_2 + \ell, \ldots, 2\lambda_n + \ell).$$

Інші неполіноміальні власні функції комутуючих РОМР описані в [35].

3.2.3. Доведення Теореми 3.1. Метою цього підрозділу є доведення Теореми 3.1 з підрозділу 3.1.2. Це доведення дається діагоналізацією матриці $\mathbf{A}(X;t)$. Зрозуміло, що існує єдина верхня унітрикутна матриця $\mathbf{G}(X;t)$, така що

$$\mathbf{A}(X;t)\mathbf{G}(X;t) = \mathbf{G}(X;t)\mathbf{D}(X). \tag{3.2.17}$$

З матрицею $\mathbf{G}(X;t)$, $\mathbf{F}(X,\xi;t)$ реалізується як

$$\mathbf{F}(X,\xi;t) = \mathbf{G}(X;t)\mathbf{D}(\xi)\mathbf{G}(X;t)^{-1}. \tag{3.2.18}$$

З метою дати вираз для матричних елементів $\mathbf{G}(X;t)$, нам потрібен зв'язок між РОМР з подвійними афінними алгебрами Гекке, знайдений І. Чередником [37]. Нижче ми будемо використовувати деякі позначення та твердження з [100].

Нехай $\mathcal{R}$ — кільце раціональних функцій від t та $\{X_i\}$ та поліноміальних від $\{\xi_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Група перестановок $\mathcal{P}_n$ діє природньо на наборах $\{X_i\}$ (відповідно, $\{\xi_i\}$): транспозиція s_i, $1 \le i \le n-1$, переставляє X_i та X_{i+1} (відповідно, ξ_i та ξ_{i+1}) залишаючі інші змінні. Ця дія природньо продовжується на автоморфізм $\mathcal{R}$. Нехай оператори T_i, $1 \le i \le n-1$, діють на $\mathcal{R}$, як

$$T_i = t + \frac{tX_i - X_{i+1}}{X_i - X_{i+1}}(s_i - 1) = A_{i,i+1} + B_{i,i+1}s_i, \tag{3.2.19}$$
$$A_{i,j} = \frac{(t-1)X_j}{X_j - X_i}, \qquad B_{i,j} = \frac{tX_i - X_j}{X_i - X_j}.$$

Вони задовільняють співвідношення алгебри Гекке $H_t(W)$ ($W \simeq \mathcal{P}_n$ — група Вейля алгебри Лі $\mathrm{sl}(n+1)$):

$$(T_i - t)(T_i + 1) = 0,$$

$$T_iT_j = T_jT_i, \qquad (|i-j|>1), \tag{3.2.20}$$

$$T_iT_jT_i = T_jT_iT_j, \qquad (|i-j|=1).$$

Формули (3.2.19) задають [38, 116] реалізацію Демазюра–Люстіга алгебри Гекке $H_t(W)$.

Ми також визначаємо оператори $\bar{T}_i$, $1 \le i \le n-1$, заміною $t \to t^{-1}$ у виразах (3.2.19) для T_i:

$$\bar{T}_i = t^{-1} + \frac{t^{-1}X_i - X_{i+1}}{X_i - X_{i+1}}(s_i - 1) = \bar{A}_{i,i+1} + \bar{B}_{i,i+1}s_i,$$

$$\bar{A}_{i,j} = \frac{(t^{-1}-1)X_j}{X_j - X_i}, \qquad \bar{B}_{i,j} = \frac{t^{-1}X_i - X_j}{X_i - X_j}.$$

Вони задовільняють співвідношення алгебри Гекке $H_{t^{-1}}(W)$.

Ми будемо використовувати наступні позначення:

$$T_{[i,j]} = T_iT_{i+1}\cdots T_j, \text{ якщо } i \le j, \qquad T_{[i,j]} = 1, \text{ якщо } i > j.$$

Для кожної підмножини $I \subset [1,n]$, $|I| = r$, ми визначаємо елемент w_I з $W \simeq \mathcal{P}_n$ як

$$w_I = (s_{i_r}\cdots s_{n-1})(s_{i_{r-1}}\cdots s_{n-2})\cdots(s_{i_1}\cdots s_{n-r}).$$

Він представлений у зведеній формі (тобто складається з мінімальної кількості породжуючих елементів). Його довжина $\ell(w_I) = rn - \binom{r}{2} - ||I||$. Зауважимо, що $w_I\xi_{[n-r+1,n]} = \xi_I$. Нехай $T_{w_I} \in H_t(W)$, що відповідає w_I, задається

$$T_{w_I} = T_{[i_r,n-1]}T_{[i_{r-1},n-2]}\cdots T_{[i_1,n-r]}.$$

Аналогічно, для кожної підмножини $I \subset [1,n]$, $|I| = r$, ми визначаємо елемент $\bar{w}_I$ з $W \simeq \mathcal{P}_n$ як

$$\bar{w}_I = (s_{i_1-1}\cdots s_1)(s_{i_2-1}\cdots s_2)\cdots(s_{i_r-1}\cdots s_r).$$

Він представлений у зведеному вигляді. Його довжина $\ell(\bar{w}_I) = ||I|| - \binom{r}{2}$. Зауважимо, що $\bar{w}_I \xi_{[1,r]} = \xi_I$. Нехай $\bar{T}_{\bar{w}_I} \in H_{t^{-1}}(W)$, що відповідає $\bar{w}_I$, задається

$$\bar{T}_{\bar{w}_I} = (\bar{T}_{i_1-1} \cdots \bar{T}_1)(\bar{T}_{i_2-1} \cdots \bar{T}_2) \cdots (\bar{T}_{i_r-1} \cdots \bar{T}_r).$$

Наступна теорема дає зв'язок між реалізацією Демазюра–Люстіга алгебри Гекке $H_t(W)$ та сиволами РОМР (3.2.7).

Теорема 3.2.

$$D_X^{(r)} = t^{\binom{r}{2}} \sum_{\substack{I \subset [1,n] \\ |I|=r}} T_{w_I} \xi_{[n-r+1,n]} = t^{\binom{r}{2}} t^{r(n-r)} \sum_{\substack{I \subset [1,n] \\ |I|=r}} \bar{T}_{\bar{w}_I} \xi_{[1,r]}.$$

Доведення. Перша рівність цієї теореми доведена в [100], друга рівність доводиться аналогічно.

Твердження 3.1. *Ми маємо наступні співвідношення:*

$$T_{w_I} X_{[n-r+1,n]} \xi_{[n-r+1,n]} = \sum_{I \preceq J \preceq [n-r+1,n]} t^{||J||-||I||} (\mathbf{A}(t))^I_J X_J T_{w_J} \xi_{[n-r+1,n]}, \quad (3.2.21)$$

$$\bar{T}_{\bar{w}_J} X^{-1}_{[1,r]} \xi_{[1,r]} = \sum_{[1,r] \preceq K \preceq J} (\mathbf{A}(t)^{-1})^K_J X^{-1}_K \bar{T}_{\bar{w}_K} \xi_{[1,r]}, \quad (3.2.22)$$

де матриця $\mathbf{A}(t)$ дається (3.2.4).

Доведення (3.2.21) використовує комутаційні співвідношення $(j \neq i, i+1)$

$$T_i \hat{X}_{i+1} = \hat{X}_i T_i + (t-1)\hat{X}_{i+1}, \quad T_i \hat{X}_i = \hat{X}_{i+1} T_i + (1-t)\hat{X}_{i+1}, \quad T_i \hat{X}_j = \hat{X}_j T_i, \quad (3.2.23)$$

де $\hat{X}_i$ — оператори множення на X_i. Ці співвідношення доводяться з використанням явної формули для T_i. Вони разом з (3.2.20) визначають афінну алгебру Гекке з генераторами T_j, $1 \leq j \leq n-1$, та $\hat{X}_i$, $1 \leq i \leq n$.

Лема 3.1. *Для $i \leq j$ ми маємо*

$$T_{[i,j-1]}\hat{X}_j = \hat{X}_i T_{[i,j-1]} + (t-1)\sum_{s=i+1}^{j} \hat{X}_s T_{[s,j-1]} T_{[i,s-2]}.$$

Доведення. Доведення проводиться за індукцією. Випадок $i = j$ — тривіальний. Випадок $i = j-1$ випливає напряму з (3.2.23). Діючи T_{i-1} на обидві частини співвідношення леми ми отримуємо

$$T_{[i-1,j-1]}\hat{X}_j = T_{i-1}\hat{X}_i T_{[i,j-1]} + (t-1)\sum_{s=i+1}^{j} \hat{X}_s T_{[s,j-1]} T_{[i-1,s-2]}.$$

Використовуючи (3.2.23), ми переписуємо його у вигляді співвідношення леми з i, що замінене на $i-1$. Це доводить лему.

Як наслідок, ми отримуємо доведення (3.2.21) при $r = 1$:

$$T_{[i,j-1]}X_j\xi_j = \sum_{s=i}^{j} \alpha_s^i X_s T_{[s,j-1]}\xi_j, \qquad 1 \leq i \leq j \leq n,$$

де $\alpha_s^i = t^{s-i}A_s^i$ (див. (3.2.5)). Ми використали співвідношення $T_{i-1}\xi_j = t\xi_j$ для $i < j$.

Лема 3.2. *Для $i > j$ та $s \leq p$, ми маємо $T_{[i,s]}T_{[j,p]} = T_{[j,p]}T_{[i-1,s-1]}$.*

Доведення. Використавши співвідношення (3.2.20) алгебри Гекке $H_t(W)$, ми отримуємо

$$T_{[i,s]}T_{[j,p]} = T_{[i,s-1]}T_s T_{[j,s-2]}T_{s-1}T_s T_{[s+1,p]} = T_{[i,s-1]}T_{[j,s-2]}T_{s-1}T_s T_{s-1}T_{[s+1,p]} =$$

$$= T_{[i,s-1]}T_{[j,p]}T_{s-1} = \cdots = T_{[j,p]}T_{[i-1,s-1]}.$$

Формула

$$T_{[i,s]}(T_{[j,p]}\hat{X}_{p+1}) = (T_{[j,p]}\hat{X}_{p+1})T_{[i-1,s-1]}, \qquad \text{якщо } i > j \text{ та } s \leq p. \qquad (3.2.24)$$

є простим наслідком Леми 3.2. Наша наступна задача — перемістити всі $\hat{X}_s$ в

$$T_{w_I}X_{[n-r+1,n]}\xi_{[n-r+1,n]}$$

$$=(T_{[i_r,n-1]}\hat{X}_n)(T_{[i_{r-1},n-2]}\hat{X}_{n-1})\cdots(T_{[i_1,n-r]}\hat{X}_{n-r+1})\xi_{[n-r+1,n]}.$$

наліво. Ми застосовуємо Лему 3.1 до $T_{[i_r,n-1]}\hat{X}_n$, а потім Лему 3.2 до $T_{[i_r,s-2]}$, $s\leq n$:

$$T_{w_I}X_{[n-r+1,n]}\xi_{[n-r+1,n]}=(\hat{X}_{i_r}T_{[i_r,n-1]}+(t-1)\sum_{s=i_r+1}^{n}\hat{X}_sT_{[s,n-1]}T_{[i_r,s-2]})$$

$$\times(T_{[i_{r-1},n-2]}\hat{X}_{n-1})\cdots(T_{[i_1,n-r]}\hat{X}_{n-r+1})\xi_{[n-r+1,n]}=$$

$$=(\hat{X}_{i_r}T_{[i_r,n-1]})(T_{[i_{r-1},n-2]}\hat{X}_{n-1})\cdots(T_{[i_1,n-r]}\hat{X}_{n-r+1})\xi_{[n-r+1,n]}+$$

$$+(t-1)\sum_{s=i_r+1}^{n}\hat{X}_sT_{[s,n-1]}(T_{[i_{r-1},n-2]}\hat{X}_{n-1})\cdots$$

$$\times(T_{[i_1,n-r]}\hat{X}_{n-r+1})T_{[i_r-r+1,s-r-1]}\xi_{[n-r+1,n]}=$$

$$=(\sum_{s=i_r}^{n}\alpha_s^{i_r}\hat{X}_sT_{[s,n-1]})(T_{[i_{r-1},n-2]}\hat{X}_{n-1})\cdots(T_{[i_1,n-r]}\hat{X}_{n-r+1})\xi_{[n-r+1,n]}.$$

Ми використали формулу дії $T_{[i_r-r+1,s-r-1]}\xi_{[n-r+1,n]}=t^{s-i_r-2}\xi_{[n-r+1,n]}$, яка справедлива при умові $s\leq n$. Ми продовжуємо перетворення застосовуючи ту саму процедуру до факторів $(T_{[i_{r-1},n-2]}\hat{X}_{n-1}),\ldots,(T_{[i_1,n-r]}\hat{X}_{n-r+1})$. Ми маємо

$$T_{w_I}X_{[n-r+1,n]}\xi_{[n-r+1,n]}=(\sum_{k_r=i_r}^{n}\alpha_{k_r}^{i_r}\hat{X}_{k_r}T_{[k_r,n-1]})$$

$$\times(\sum_{k_{r-1}=i_{r-1}}^{n-1}\alpha_{k_{r-1}}^{i_{r-1}}\hat{X}_{k_{r-1}}T_{[k_{r-1},n-2]})\cdots(\sum_{k_1=i_1}^{n-r+1}\alpha_{k_1}^{i_1}\hat{X}_{k_1}T_{[k_1,n-r]})\xi_{[n-r+1,n]}. \tag{3.2.25}$$

Наша наступна задача — перемістити всі $\hat{X}_{k_s}$ наліво. Спочатку ми доведемо

Лема 3.3. *Якщо* $i \leq j$ *та* $s > p$, *ми маємо*

$$T_{[i,s]}\hat{X}_j T_{[j,p]} = \hat{X}_{j+1}T_{[j+1,p+1]}T_{[i,s]} + (1-t)\hat{X}_{j+1}T_{[j+1,s]}T_{[i,p]}.$$

Доведення. Використовуючи (3.2.20) та (3.2.23), ми отримуємо

$$T_{[i,s]}\hat{X}_j T_{[j,p]} = T_{[i,j-1]}(T_j\hat{X}_j)T_{[j+1,s]}T_{[j,p]} = \hat{X}_{j+1}T_{[i,j-1]}(T_j + (1-t))T_{[j+1,s]}T_{[j,p]}$$

$$= \hat{X}_{j+1}(T_{[i,s]}T_{[j,p]} + (1-t)T_{[j+1,s]}T_{[i,p]}).$$

Лема 3.2 дає $T_{[i,s]}T_{[j,p]} = T_{[j+1,p+1]}T_{[i,s]}$. Це доводить лему.

Як наслідок, для $i \leq j$ та $p = s-1$, ми маємо

$$T_{[i,s]}\hat{X}_j T_{[j,s-1]} = \hat{X}_{j+1}T_{[j+1,s]}T_{[i,s-1]}(T_s + (1-t)). \tag{3.2.26}$$

Розгянемо перші два множники в (3.2.25), які є сумами по k_{r-1} та k_r. Для того, щоб перемістити $\hat{X}_{k_{r-1}}$ наліво ми маємо розгянути два випадки. Перший: якщо $k_{r-1} < k_r$, тоді $T_{[k_r,n-1]}$ комутує з $\hat{X}_{k_{r-1}}$. Другий: якщо $k_{r-1} \geq k_r$, тоді ми використовуємо (3.2.26) для отримання

$$T_{[k_r,n-1]}\hat{X}_{k_{r-1}}T_{[k_{r-1},n-2]} = \hat{X}_{k_{r-1}+1}T_{[k_{r-1}+1,n-1]}T_{[k_r,n-2]}(T_{n-1} + (1-t)).$$

Далі T_{n-1} можна перемістити направо (він комутує з усіма множниками, що стоять правіше від нього). Оскільки $T_{n-1}\xi_{[n-r+1,n]} = t\xi_{[n-r+1,n]}$, $T_{[k_r,n-1]}\hat{X}_{k_{r-1}}T_{[k_{r-1},n-2]}$ може бути замінений на $\hat{X}_{k_{r-1}+1}T_{[k_{r-1}+1,n-1]}T_{[k_r,n-2]}$. Остаточно, перші два множники в (3.2.25) стають

$$\sum_{k_r=i_r}^{n}\sum_{k_{r-1}=i_{r-1}}^{k_r-1}\alpha_{k_r}^{i_r}\alpha_{k_{r-1}}^{i_{r-1}}\hat{X}_{k_r}\hat{X}_{k_{r-1}}T_{[k_r,n-1]}T_{[k_{r-1},n-2]}$$

$$+\sum_{k_r=i_r}^{n}\sum_{k_{r-1}=k_r}^{n-1}\alpha_{k_r}^{i_r}\alpha_{k_{r-1}}^{i_{r-1}}\hat{X}_{k_r}\hat{X}_{k_{r-1}+1}T_{[k_{r-1}+1,n-1]}T_{[k_r,n-2]}$$

$$= \sum_{\{i_{r-1},i_r\}\preceq\{k_{r-1},k_r\}\preceq\{n-1,n\}} \alpha^{i_{r-1},i_r}_{k_{r-1},k_r} \hat{X}_{k_r}\hat{X}_{k_{r-1}} T_{[k_r,n-1]} T_{[k_{r-1},n-2]},$$

де після деякого аналізу ми отримуємо

$$\alpha^{i_{r-1},i_r}_{k_{r-1},k_r} = \alpha^{i_{r-1}}_{k_{r-1}}\alpha^{i_r}_{k_r} + \alpha^{i_{r-1}}_{k_r-1}\alpha^{i_r}_{k_{r-1}}. \qquad (3.2.27)$$

Продовжуючи описану процедуру ми отримуємо

$$T_{w_I} X_{[n-r+1,n]}\xi_{[n-r+1,n]} = \sum_{I\preceq K\preceq[n-r+1,n]} \alpha^I_K \hat{X}_K T_{w_K}\xi_{[n-r+1,n]},$$

де

$$\alpha^I_K = \sum_{\sigma\in\mathcal{P}_r} \alpha^{i_1}_{k_{\sigma(1)}-|\theta(\sigma,1)|}\alpha^{i_2}_{k_{\sigma(2)}-|\theta(\sigma,2)|}\cdots\alpha^{i_r}_{k_{\sigma(r)}-|\theta(\sigma,r)|},$$

та $|\theta(\sigma,l)|$ — число елементів в наборі

$$\theta(\sigma,l) = \{m|\ l < m \le r, \sigma(m) < \sigma(l)\}.$$

Наприклад, для $r = 2$ ми маємо (3.2.27), для $r = 3$ ми маємо

$$\alpha^{i_1,i_2,i_3}_{k_1,k_2,k_3} = \alpha^{i_1}_{k_1}\alpha^{i_2}_{k_2}\alpha^{i_3}_{k_3} + \alpha^{i_1}_{k_1}\alpha^{i_2}_{k_3-1}\alpha^{i_3}_{k_2} + \alpha^{i_1}_{k_2-1}\alpha^{i_2}_{k_1}\alpha^{i_3}_{k_3} +$$

$$\alpha^{i_1}_{k_2-1}\alpha^{i_2}_{k_3-1}\alpha^{i_3}_{k_1} + \alpha^{i_1}_{k_3-2}\alpha^{i_2}_{k_1}\alpha^{i_3}_{k_2} + \alpha^{i_1}_{k_3-2}\alpha^{i_2}_{k_2-1}\alpha^{i_3}_{k_1},$$

де $i_1 < i_2 < i_3$ та $k_1 < k_2 < k_3$. Використовуючи A^i_j (див. (3.2.5)), ми отримуємо

$$\alpha^I_K = t^{||K||-||I||} \sum_{\sigma\in\mathcal{P}_r} t^{-\ell(\sigma)} A^{i_1}_{k_{\sigma(1)}-|\theta(\sigma,1)|} A^{i_2}_{k_{\sigma(2)}-|\theta(\sigma,2)|}\cdots A^{i_r}_{k_{\sigma(r)}-|\theta(\sigma,r)|}.$$

Хочеться показати, що ми можемо опустити зсуви на $|\theta(\sigma,l)|$ у цьому виразі. Зафіксуємо деякий доданок, що відповідає $\sigma\in\mathcal{P}_r$ та деяке l, таке що

$|\theta(\sigma,l)|\neq 0$. Якщо цей доданок ненульовий, тоді $i_l < k_{\sigma(l)} - |\theta(\sigma,l)|$. Дійсно, ми маємо ланцюжок нерівностей

$$i_l < i_{m_1} < i_{m_2} < \cdots < i_{m_{|\theta(\sigma,l)|}} \leq k_{\sigma(m_{|\theta(\sigma,l)|})} < k_{\sigma(l)}, \tag{3.2.28}$$

який дає нерівність, яка нам потрібна. В (3.2.28) ми використали позначення $m_1 < m_2 < \cdots < m_{|\theta(\sigma,l)|}$ для елементів набору $\theta(\sigma,l)$. Хочеться прокоментувати (3.2.28). Визначення набору $\theta(\sigma,p)$ дає $|\theta(\sigma,m_{|\theta(\sigma,l)|})| = 0$, а тому $i_{m_{|\theta(\sigma,l)|}} \leq k_{\sigma(m_{|\theta(\sigma,l)|})}$. Остання нерівність в (3.2.28) випливає безпосередньо з визначення набору $\theta(\sigma,l)$. Остаточно, використовуючи нерівності $i_l < k_{\sigma(l)} - |\theta(\sigma,l)|$, ми отримуємо $A^{i_l}_{k_{\sigma(l)}-|\theta(\sigma,l)|} = 1 - t^{-1} = A^{i_l}_{k_{\sigma(l)}}$. Повторюючи процедуру для іншого $\sigma \in \mathcal{P}_r$ та всіх інших l, таких що $|\theta(\sigma,l)|\neq 0$ ми отримуємо

$$\alpha^I_K = t^{||K||-||I||}\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_r} t^{-\ell(\sigma)} A^{i_1}_{k_{\sigma(1)}} A^{i_2}_{k_{\sigma(2)}} \cdots A^{i_r}_{k_{\sigma(r)}}.$$

Це завершує доведення (3.2.21). Доведення (3.2.22) є аналогічним до доведення (3.2.21) та використовує комутаційні співвідношення ($j\neq i, i+1$)

$$\bar{T}_i\hat{X}^{-1}_{i+1} = \hat{X}^{-1}_i\bar{T}_i + (1-t^{-1})\hat{X}^{-1}_i, \quad \bar{T}_i\hat{X}^{-1}_j = \hat{X}^{-1}_j\bar{T}_i,$$
$$\bar{T}_i\hat{X}^{-1}_i = \hat{X}^{-1}_{i+1}\bar{T}_i + (t^{-1}-1)\hat{X}^{-1}_i,$$

де $\hat{X}^{-1}_i$ — оператори множення на X^{-1}_i.

Щоб дати наступну лему, нам потрібні додаткові позначення:

$$\mathbf{B}^+_J = \prod_{\substack{j\in J,\ k\notin J\\ j<k}} B_{j,k}, \quad \bar{\mathbf{B}}^+_J = \prod_{\substack{j\in J, k\notin J\\ j<k}} \bar{B}_{k,j}, \quad \mathbf{B}^-_J = \prod_{\substack{j\in J, k\notin J\\ j>k}} B_{j,k}, \quad \bar{\mathbf{B}}^-_J = \prod_{\substack{j\in J,\ k\notin J\\ j>k}} \bar{B}_{k,j}.$$

Лема 3.4. (а) *Функції* $\mathbf{G}^I_J$ *та* $\bar{\mathbf{G}}^I_J$*, визначені співвідношеннями*

$$T_{w_I}\xi_{[n-r+1,n]} = \sum_{I\preceq J\preceq[n-r+1,n]} t^{||J||-||I||}\mathbf{G}^I_J\mathbf{B}^+_J\xi_J, \tag{3.2.29}$$

$$\bar{T}_{\bar{w}_I}\xi_{[1,r]} = \sum_{[1,r]\preceq J\preceq I} \bar{\mathbf{G}}_I^J \bar{\mathbf{B}}_J^- \xi_J\,, \tag{3.2.30}$$

є матричними елементами верхньо-унітрикутної матриці $\mathbf{G}(X;t)$, *що задовільняє (3.2.17) та* $\mathbf{G}(X;t)^{-1}$, *відповідно.*

(б) *Справедливі наступні формула підсумовування:*

$$\sum_{[1,r]\preceq I\preceq J} t^{-||I||}\mathbf{G}_J^I = t^{-||J||}\mathbf{B}_J^-, \tag{3.2.31}$$

$$\sum_{J\preceq I\preceq [n-r+1,n]} \bar{\mathbf{G}}_I^J = \bar{\mathbf{B}}_J^+ = t^{-\ell(w_J)}\mathbf{B}_J^+. \tag{3.2.32}$$

Доведення. Щоб довести Лему 3.4, ми переписуємо (3.2.17) у термінах матричних елементів як

$$X_K(\mathbf{G}(X;t))_K^I = \sum_{I\preceq J\preceq K} (\mathbf{A}(t))_J^I (\mathbf{G}(X;t))_K^J X_J. \tag{3.2.33}$$

Ці співвідношення однозначно визначають матричні елементи верхньо-трикутної матриці $\mathbf{G}(X;t)$ з діагональними елементами $(\mathbf{G}(X;t))_I^I = 1$. Ці співвідношення (3.2.21) приводять до (3.2.33). Дійсно, ми беремо до уваги (3.2.29) та отримуємо з (3.2.21) наступні співвідношення:

$$\sum_{I\preceq K\preceq [n-r+1,n]} t^{||K||-||I||}\mathbf{G}_K^I \mathbf{B}_K^+ X_K \xi_K$$
$$= \sum_{I\preceq J\preceq [n-r+1,n]} \Big(t^{||J||-||I||}(\mathbf{A}(t))_J^I X_J \sum_{J\preceq K\preceq [n-r+1,n]} t^{||K||-||J||}\mathbf{G}_K^J \mathbf{B}_K^+ \xi_K \Big).$$

Прирівнюючи вирази при ξ_K з різними K та скорочуючи $t^{||K||-||I||}\mathbf{B}_K^+$ в кожному з них, ми отримуємо (3.2.33). Оскільки $\mathbf{G}_I^I = 1$, ми довели першу частину Леми 3.4 (а).

За визначенням ми маємо $t^{-\binom{r}{2}} D_X^{(r)} = \sum_J \mathbf{B}_J^+ \mathbf{B}_J^- \xi_J$. З іншого сторони, Теорема 3.2 та формула (3.2.29) дають

$$t^{-\binom{r}{2}} D_X^{(r)} = \sum_I \sum_{I \preceq J \preceq [n-r+1,n]} t^{||J||-||I||} \mathbf{G}_J^I \mathbf{B}_J^+ \xi_J.$$

Прирівнюючи праві частини цих двох формул при кожному фіксованому J, ми отримуємо (3.2.31).

Другі частини Леми 3.4 (а) та (б), які відповідають матричним елементам $\mathbf{G}(X;t)^{-1}$ доводяться цілком аналогічно до перших частин. У цьому випадку рекурентне співвідношення випливає з (3.2.22). Отже ми довели Лему 3.4.

Використовуючи (3.2.18), (3.2.31), (3.2.32), ми отримуємо формулу (3.2.8) Теореми 3.1.

3.2.4. q-Антисиметризація добутку R-матриць. Зафіксуємо набори індеків $I = \{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n\}$, $I' = \{1 \le i'_1 < i'_2 < \cdots < i'_r \le n\}$ та $1 \le j_1, j_2, \ldots, j_r, j'_1, j'_2, \ldots, j'_r \le n$. Зараз для цих наборів ми розглянемо матричні елементи

$$\sum_{\sigma,\tau \in \mathcal{P}_r} (-q^{-1})^{\ell(\sigma)+\ell(\tau)} \left(\mathcal{R}_{1,2,\ldots,2r}\right)^{i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)},\ldots,i_{\sigma(r)},i'_{\tau(r)},i'_{\tau(r-1)},\ldots,i'_{\tau(1)}}_{j_1,j_2,\ldots,j_r,j'_r,\ldots,j'_2,j'_1} \tag{3.2.34}$$

матриці $\mathcal{R}_{1,2,\ldots,2r} = \mathcal{R}_{1,2,\ldots,r;r+1} \mathcal{R}_{1,2,\ldots,r;r+2} \cdots \mathcal{R}_{1,2,\ldots,r;2r}$, яка є добутком матриць $\mathcal{R}_{1,2,\ldots,r;k} = R_{r,k}^{+t_k} R_{r-1,k}^{+t_k} \cdots R_{1,k}^{+t_k}$, $r+1 \le k \le 2r$. Наведемо наступне твердження, яке доведено в [84].

Твердження 3.2. *Для того, щоб матричні елементи (3.2.34) були ненульові, мають виконуватись наступні умови:*

(a) немає співпадінь серед елементів в кожному з наборів $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ *та* $\{j'_1, j'_2, \ldots, j'_r\}$. *Тому існує певні перестановки* π, $\rho \in \mathcal{P}_r$, *такі що* $j_{\pi(1)} <$

$j_{\pi(2)} < \cdots < j_{\pi(r)}$ та $j'_{\rho(1)} < j'_{\rho(2)} < \cdots < j'_{\rho(r)}$. Тоді (3.2.34) дорівнює

$$(-q^{-1})^{\ell(\pi)+\ell(\rho)} \sum_{\sigma,\tau\in\mathcal{P}_r} (-q^{-1})^{\ell(\sigma)+\ell(\tau)} \left(\mathcal{R}_{1,2,\ldots,2r}\right)^{i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)},\ldots,i_{\sigma(r)},i'_{\tau(r)},i'_{\tau(r-1)},\ldots,i'_{\tau(1)}}_{j_{\pi(1)},j_{\pi(2)},\ldots,j_{\pi(r)},j'_{\rho(r)},\ldots,j'_{\rho(2)},j'_{\rho(1)}}$$

Отже ми можемо вважати, що $J = \{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n\}$ та $J' = \{1 \leq j'_1 < j'_2 < \cdots < j'_r \leq n\}$.

(б) якщо $I = I'$, тоді два набори J та J' мають співпадати. Тоді (3.2.34) дорівнює $q^r(\mathbf{A}(q^2))^I_J$, де вираз для $(\mathbf{A}(q^2))^I_J$ дається (3.2.4) з $t = q^2$.

(в) якщо $J = J'$, тоді обидви набори I та I' також мають співпадати. Далі, див. (б).

3.3. Хвильові функції моделі Рузінарса, пов'язаної з q-аналогом симетричного простору $\mathrm{GL}(n)/\mathrm{SO}(n)$

3.3.1. Квантові алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$ та їх скінченновимірні представлення. У цьому пункті ми даємо деякі відомості про скінченновимірні представлення квантової алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$ (див., наприклад, [102]). Визначення цієї алгебри дано в п. 3.2.1. Кожному набору n цілих чисел
$\mathbf{m}_n = (m_{1,n}, m_{2,n}, \ldots, m_{n,n})$, таких що

$$m_{1,n} \geq m_{2,n} \geq \cdots \geq m_{n,n},$$

відповідає простий скінченновимірний лівий модуль $\mathcal{V}^{\mathrm{L}}_{\mathbf{m}_n}$ над алгеброю $U_q(\mathrm{gl}_n)$. Його явна конструкція дається у формалізмі Гельфанда–Цетліна. Базисні елементи цього модуля позначаються наборами цілих

$\mathbf{m}_j = (m_{1,j}, m_{2,j}, \dots, m_{j,j})$, $j = 1, \dots, n-1$, таких що

$$m_{i,j+1} \geq m_{i,j} \geq m_{i+1,j+1}, \qquad i = 1, 2, \cdots, j, \quad j = 1, 2, \cdots, n-1.$$

Корисно візуалізувати їх таблицями Гельфанда–Цетліна:

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,n} & & m_{2,n} & & \cdots & & m_{n,n} \\ & m_{1,n-1} & & m_{2,n-1} & \cdots & m_{n-1,n-1} & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & m_{1,1} & & & \end{pmatrix}. \tag{3.3.35}$$

Таблиці (3.3.35) відповідає базисний елемент, який позначається як $|M\rangle$.

Генератори $U_q(\mathrm{gl}_n)$ діють на базис Гельфанда–Цетліна за формулами [102]

$$q^{\epsilon_j}|M\rangle = q^{a_j}|M\rangle, \quad a_j = \sum_{i=1}^{j} m_{i,j} - \sum_{i=1}^{j-1} m_{i,j-1}, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{3.3.36}$$

$$e_j|M\rangle = \sum_{i=1}^{j} A_j^i(M)|M_j^{+i}\rangle, \qquad f_j|M\rangle = \sum_{i=1}^{j} B_j^i(M)|M_j^{-i}\rangle, \qquad 1 \leq j \leq n-1. \tag{3.3.37}$$

Тут $M_j^{\pm i}$ є таблицею Гельфанда–Цетліна, що отримується з таблиці (3.3.35) заміною $m_{i,j}$ на $m_{i,j} \pm 1$, та

$$A_j^i(M) = -\frac{\prod_{s=1}^{j+1}[l_{s,j+1} - l_{i,j}]}{\prod_{s \neq i}[l_{s,j} - l_{i,j}]}, \qquad B_j^i(M) = \frac{\prod_{s=1}^{j-1}[l_{s,j-1} - l_{i,j}]}{\prod_{s \neq i}[l_{s,j} - l_{i,j}]},$$

де

$$l_{s,j} := m_{s,j} - s, \tag{3.3.38}$$

та q-числа визначені

$$[m] = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}.$$

У повній аналогії до побудови лівого модуля будується простий скінченновимірний правий модуль $\mathcal{V}^{\mathrm{R}}_{\mathbf{m}_n}$ над алгеброю $U_q(\mathrm{gl}_n)$, який є дуальним до вищеописаного. Базисні елементи цього модуля також параметризуються цим самим набором таблиць Гельфанда–Цетліна. Таблиці (3.3.35) відповідає базисний елемент $\langle M|$, який є дуальним до $|M\rangle$.

Генератори $U_q(\mathrm{gl}_n)$ діють на ці базисні елементи за формулами

$$\langle M|q^{\epsilon_j} = q^{a_j}\langle M|, \quad a_j = \sum_{i=1}^{j} m_{i,j} - \sum_{i=1}^{j-1} m_{i,j-1}, \quad 1 \le j \le n, \tag{3.3.39}$$

$$\langle M|e_j = \sum_{i=1}^{j} A^i_j(M^{-i}_j)\langle M^{-i}_j|, \qquad \langle M|f_j = \sum_{i=1}^{j} B^i_j(M^{+i}_j)\langle M^{+i}_j|, \qquad 1 \le j \le n-1. \tag{3.3.40}$$

3.3.2. $U'_q(\mathrm{so}_n)$-інваріантні елементи в $U_q(\mathrm{gl}_n)$-модулі. У цьому пункті ми даємо явні формули для елементів з лівого та правого модулів над $U_q(\mathrm{gl}_n)$, які зануляються

$$\theta_k = q^{\epsilon_k} f_k - q q^{\epsilon_{k+1}} e_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

В границі $q \to 1$, елементи θ_k стають генераторами огортуючої алгебра для алгебри Лі so_n, вкладеної в gl_n. Насправді елементи $q^{-\epsilon_k}\theta_k$ породжують [131] нестандартну деформацію $U'_q(\mathrm{so}_n)$ огортуючої алгебри $U(\mathrm{so}_n)$, введеної Гавриликом та Клімиком [47].

Наступна теорема доведена Ноумі [131].

Теорема 3.3. *Елемент $|v\rangle \in \mathcal{V}^{\mathrm{L}}_{\mathbf{m}_n}$ (відповідно, $\langle v| \in \mathcal{V}^{\mathrm{R}}_{\mathbf{m}_n}$), такий що $\theta_k|v\rangle = 0$, (відповідно, $\langle v|\theta_k = 0$), $k = 1, \ldots, n-1$, існує тоді і тільки тоді, коли $(m_{i,n} - m_{i+1,n})$ — парні для всіх $i = 1, \ldots, n-1$. Якщо такий елемент $|v\rangle$ (відповідно, $\langle v|$) існує, то він є єдиний з точністю до множника.*

Елементи $|v\rangle$ та $\langle v|$, які зануляються при дії θ_k називаються інваріантними елементами по відношенню до дії θ_k. Зараз у випадку, коли умови теореми для $\mathbf{m}_n$ виконуються, ми дамо явну формулу для таких елементів $|v\rangle$ та $\langle v|$. Нехай $\mathcal{S}$ — набір всіх таблиць Гельфанда–Цетліна, які відповідають $\mathbf{m}_n$ та задовільняють додатковим умовам:

$$(m_{i,j+1} - m_{i,j}) \quad \text{парне для всіх} \quad i = 1, 2, \cdots, j, \quad j = 1, 2, \cdots, n-1.$$

Тоді

$$|v\rangle = \sum_{M \in \mathcal{S}} \alpha(M)|M\rangle, \qquad \langle v| = \sum_{M \in \mathcal{S}} \beta(M)\langle M|, \tag{3.3.41}$$

де

$$\alpha(M) = \prod_{k=2}^{n} \alpha_k, \qquad \beta(M) = \prod_{k=2}^{n} \beta_k, \tag{3.3.42}$$

$$\alpha_k = q^{\gamma_k} \prod_{1 \le i < j \le k} \frac{[l_{i,k-1} - l_{j-1,k-1}]!![l_{i,k-1} - l_{j,k} - 2]!!}{[l_{i,k} - l_{j,k} - 2]!![l_{i,k} - l_{j-1,k-1}]!!}, \tag{3.3.43}$$

$$\beta_k = q^{-\gamma_k} \prod_{1 \le i < j \le k} \frac{[l_{i,k} - l_{j,k} - 1]!![l_{i,k} - l_{j-1,k-1} - 1]!!}{[l_{i,k-1} - l_{j-1,k-1} - 1]!![l_{i,k-1} - l_{j,k} - 1]!!}, \tag{3.3.44}$$

$$\gamma_k = \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le k} (l_{i,k} - l_{i,k-1})(l_{j-1,k-1} - l_{j,k} - 2). \tag{3.3.45}$$

Ми використали позначення (3.3.38) та

$$[s]!! := [s][s-2]\cdots[2](\text{or } [1]), \qquad [0]!! = [-1]!! = 1.$$

Ці вирази для елементів $|v\rangle$ та $\langle v|$ отримуються прямим обрахунком з використанням формул дії (3.3.36)–(3.3.37) та (3.3.39)–(3.3.40).

3.3.3. Поліноми Макдональда. Поліноми Макдональда задають лінійний базис у просторі симетричних поліномів від $X = \{X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}\}$ з коефіцієнтами, які є раціональними функціями двох формальних змінних q та t. Кожний поліном Макдональда $P_{\boldsymbol{\lambda}}(X; q, t)$ позначається набором n цілих чисел $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, таких що

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n.$$

Вводиться часткове впорядкування між такими наборами. Для двох таких наборів $\boldsymbol{\lambda}$ та $\boldsymbol{\mu}$, ми покладаємо

$$\boldsymbol{\lambda} \succeq \boldsymbol{\mu} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n & \text{та} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r \geq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r, & r = 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Набір $\boldsymbol{\lambda}$ визначає моном $X^{\boldsymbol{\lambda}} = X_1^{\lambda_1} \cdots X_n^{\lambda_n}$. Мономіальна симетрична функція $m_{\boldsymbol{\lambda}}(X)$ є сумою всіх *різних* мономів, що отримуються з $X^{\boldsymbol{\lambda}}$ перестановками X. Зокрема, якщо $\boldsymbol{\lambda}$ таке, що $\lambda_i = 1$ для $i \leq r$ та $\lambda_j = 0$ для $j > r$, ми маємо $m_{\boldsymbol{\lambda}}(X) = e_r(X)$, r-ий елементарний симетричний поліном.

Щоб дати визначення поліномів Макдональда, нам необхідна комутуюча сім'я q-різницевих операторів

$$M_r = t^{-r(n-r)/2} \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\ldots,n\} \\ |I| = r}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{tX_i - X_j}{X_i - X_j} \prod_{i \in I} \tau_i, \qquad r = 1, \ldots, n,$$

де τ_i представляє оператор q-зсуву по відношенню до змінної X_i. А саме, τ_i є автоморфізмом алгебри поліномів від $X_1^{\pm 1}$, $X_2^{\pm 1}$, …, $X_n^{\pm 1}$, який визначається дією $\tau_i(X_j) = q^{\delta_{ij}} X_j$. Макдональд довів [117] наступну теорему.

Теорема 3.4. *Існує однозначно визначений лінійний базис* $\{P_{\boldsymbol{\lambda}}(X)\}$ *у про-*

сторі симетричних поліномів від $X_1^{\pm 1}$, $X_2^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}$, *який задовільняє наступним двом умовам:*

- *Для кожного* $\boldsymbol{\lambda}$, $P_{\boldsymbol{\lambda}}$ *представляється як*

$$P_{\boldsymbol{\lambda}}(X) = m_{\boldsymbol{\lambda}}(X) + \sum_{\boldsymbol{\mu} \prec \boldsymbol{\lambda}} u_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu}} m_{\boldsymbol{\mu}}(X),$$

  де $u_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu}}$ — *певні раціональні функції від* q *та* t.

- *Для кожного* $\boldsymbol{\lambda}$, $P_{\boldsymbol{\lambda}}(X)$ *є спільною власною функцією* M_r, $r = 1, 2, \ldots, n$:

$$M_r P_{\boldsymbol{\lambda}}(X) = e_r(q^{\lambda_1} t^{\rho_1}, \ldots, q^{\lambda_n} t^{\rho_n}) P_{\boldsymbol{\lambda}}(X),$$

  де $\rho_i = (n - 2i + 1)/2$.

Ми дамо зараз явні формули для поліномів Макдональда. Набору $\boldsymbol{\lambda}$, що параметризує $P_{\boldsymbol{\lambda}}$, відповідає таблиця ГЦ (подібна до (3.3.35))

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{1,n} & & \lambda_{2,n} & & \cdots & & \lambda_{n,n} \\ & \lambda_{1,n-1} & & \lambda_{2,n-1} & \cdots & \lambda_{n-1,n-1} & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & \lambda_{1,1} & & & \end{pmatrix},$$

де $\lambda_{i,n} = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$, та $\lambda_{i,j}$, $i = 1, \ldots, j$, $j = 1, \ldots, n-1$, — цілі, які задовільняють

$$\lambda_{i,j+1} \geq \lambda_{i,j} \geq \lambda_{i+1,j+1}, \qquad i = 1, 2, \cdots, j, \quad j = 1, 2, \cdots, n-1.$$

Ми вважаємо, що Λ пробігає всі можливі таблиці ГЦ, що відповідають фіксованому $\boldsymbol{\lambda}$. Наступна теорема є переформулюванням в термінах таблиць

ГЦ комбінаторної формули [117] для поліномів Макдональда. Нам потрібно наступне позначення:

$$(a;q)_s := (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{s-1}).$$

Теорема 3.5. *Вираз для полінома Макдональда $P_{\boldsymbol{\lambda}}$ має вигляд*

$$P_{\boldsymbol{\lambda}}(X_1, X_2, \ldots, X_n; q, t) = \sum_{\Lambda} \varphi(\Lambda; q, t) X^{\Lambda}, \tag{3.3.46}$$

де

$$X^{\Lambda} = \prod_{k=1}^{n} X_k^{a_k}, \qquad a_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{i,k} - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{i,k-1},$$

$$\varphi(\Lambda; q, t) = \prod_{k=2}^{n} \varphi_k(\boldsymbol{\lambda}_{k-1}, \boldsymbol{\lambda}_k; q, t), \qquad \boldsymbol{\lambda}_k = (\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, \ldots, \lambda_{k,k}),$$

$$\begin{aligned}
\varphi_k(\boldsymbol{\lambda}_{k-1}, \boldsymbol{\lambda}_k; q, t) = \prod_{1 \le i < j \le k} & \frac{(t^{j-i}; q)_{\lambda_{i,k} - \lambda_{j-1,k-1}}}{(t^{j-i-1}q; q)_{\lambda_{i,k} - \lambda_{j-1,k-1}}} \cdot \frac{(t^{j-i-1}q; q)_{\lambda_{i,k} - \lambda_{j,k}}}{(t^{j-i}; q)_{\lambda_{i,k} - \lambda_{j,k}}} \\
& \times \frac{(t^{j-i}; q)_{\lambda_{i,k-1} - \lambda_{j,k}}}{(t^{j-i-1}q; q)_{\lambda_{i,k-1} - \lambda_{j,k}}} \cdot \frac{(t^{j-i-1}q; q)_{\lambda_{i,k-1} - \lambda_{j-1,k-1}}}{(t^{j-i}; q)_{\lambda_{i,k-1} - \lambda_{j-1,k-1}}} \\
= \prod_{1 \le i < j \le k} & \frac{(qt^{j-i-1}q^{\lambda_{i,k} - \lambda_{j-1,k-1}}; q)_{\lambda_{j-1,k-1} - \lambda_{j,k}}}{(t^{j-i}q^{\lambda_{i,k} - \lambda_{j-1,k-1}}; q)_{\lambda_{j-1,k-1} - \lambda_{j,k}}} \\
& \times \frac{(t^{j-i}q^{\lambda_{i,k-1} - \lambda_{j-1,k-1}}; q)_{\lambda_{j-1,k-1} - \lambda_{j,k}}}{(qt^{j-i-1}q^{\lambda_{i,k-1} - \lambda_{j-1,k-1}}; q)_{\lambda_{j-1,k-1} - \lambda_{j,k}}}.
\end{aligned} \tag{3.3.47}$$

Доведення. З [117] випливає, що

$$\varphi(\Lambda; q, t) = \prod_{k=2}^{n} \frac{b_{\boldsymbol{\lambda}_k}(C_k)}{b_{\boldsymbol{\lambda}_k}} \frac{b_{\boldsymbol{\lambda}_{k-1}}}{b_{\boldsymbol{\lambda}_{k-1}}(C_k)} = \frac{1}{b_{\boldsymbol{\lambda}_n}} \prod_{k=1}^{n} \frac{b_{\boldsymbol{\lambda}_k}(C_k)}{b_{\boldsymbol{\lambda}_{k-1}}(C_k)}$$

Комбінаторне визначення $b_{\boldsymbol{\lambda}_k}$ та $b_{\boldsymbol{\lambda}_k}(C_j)$ дано в [117]. Ця комбінаторіка, переписана в термінах таблиць ГЦ дає

$$\frac{b_{\boldsymbol{\lambda}_k}(C_k)}{b_{\boldsymbol{\lambda}_k}} = \prod_{1 \le i < j \le k} \frac{(t^{j-i}; q)_{\lambda_{i,k} - \lambda_{j-1,k-1}}}{(t^{j-i-1}q; q)_{\lambda_{i,k} - \lambda_{j-1,k-1}}} \cdot \frac{(t^{j-i-1}q; q)_{\lambda_{i,k} - \lambda_{j,k}}}{(t^{j-i}; q)_{\lambda_{i,k} - \lambda_{j,k}}},$$

$$\frac{b_{\boldsymbol{\lambda}_{k-1}}}{b_{\boldsymbol{\lambda}_{k-1}}(C_k)} = \prod_{1\le i<j\le k} \frac{(t^{j-i};q)_{\lambda_{i,k-1}-\lambda_{j,k}}}{(t^{j-i-1}q;q)_{\lambda_{i,k-1}-\lambda_{j,k}}} \cdot \frac{(t^{j-i-1}q;q)_{\lambda_{i,k-1}-\lambda_{j-1,k-1}}}{(t^{j-i};q)_{\lambda_{i,k-1}-\lambda_{j-1,k-1}}}.$$

3.3.4. Хвильові функції моделі Рузінарса. В [84] хвильова функція рівняння Шрьодінгера для квантової n-частинкової моделі Рузінарса була визначена як

$$\Psi_{\mathbf{m}_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) := \langle v|q^h|v\rangle = \langle v|q^{\sum_{k=1}^n x_k\epsilon_k}|v\rangle,$$

де інваріантні елементи $\langle v|$ та $|v\rangle$ визначені в пункті 3.3.2 (там також дані умови, при яких вони існують). Тут ми даємо пряме доведення того, що $\Psi_{\mathbf{m}_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ виражається в термінах поліномів Макдональда.

З (3.3.36) та (3.3.41)–(3.3.42) випливає

$$\Psi_{\mathbf{m}_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \langle v|q^{\sum_{k=1}^n x_k\epsilon_k}|v\rangle = \sum_{M\in\mathcal{S}}\prod_{k=2}^n \alpha_k\beta_k\cdot\prod_{k=1}^n q^{x_k(\sum_{i=1}^k m_{i,k}-\sum_{i=1}^{k-1} m_{i,k-1})},$$

де α_k та β_k даються (3.3.43)–(3.3.45). Ми робимо заміну змінних $\lambda_{i,j} = (m_{i,j} - m_{n,n})/2$ для всіх можливих i та j. Оскільки $M \in \mathcal{S}$ всі $\lambda_{i,j}$ є невід'ємними цілими. Для $\alpha_k\beta_k$ ми маємо

$$\alpha_k\beta_k =$$

$$= \prod_{1\le i<j\le k} \frac{[l_{i,k}-l_{j,k}-1]!![l_{i,k}-l_{j-1,k-1}-1]!![l_{i,k-1}-l_{j,k}-2]!![l_{i,k-1}-l_{j-1,k-1}]!!}{[l_{i,k}-l_{j-1,k-1}]!![l_{i,k}-l_{j,k}-2]!![l_{i,k-1}-l_{j-1,k-1}-1]!![l_{i,k-1}-l_{j,k}-1]!!}$$

$$= \prod_{1\le i<j\le k} \frac{[2\lambda_{i,k}-2\lambda_{j,k}-i+j-1]!!}{[2\lambda_{i,k}-2\lambda_{j-1,k-1}-i+j-1]!!}\cdot\frac{[2\lambda_{i,k}-2\lambda_{j-1,k-1}-i+j-2]!!}{[2\lambda_{i,k}-2\lambda_{j,k}-i+j-2]!!}$$

$$\times\frac{[2\lambda_{i,k-1}-2\lambda_{j,k}-i+j-2]!!}{[2\lambda_{i,k-1}-2\lambda_{j-1,k-1}-i+j-2]!!}\cdot\frac{[2\lambda_{i,k-1}-2\lambda_{j-1,k-1}-i+j-1]!!}{[2\lambda_{i,k-1}-2\lambda_{j,k}-i+j-1]!!} =$$

$$= \prod_{1\le i<j\le k} \frac{(q^4q^{2(j-i-1)}q^{4(\lambda_{i,k}-\lambda_{j-1,k-1})};q^4)_{\lambda_{j-1,k-1}-\lambda_{j,k}}}{(q^{2(j-i)}q^{4(\lambda_{i,k}-\lambda_{j-1,k-1})};q^4)_{\lambda_{j-1,k-1}-\lambda_{j,k}}}$$

$$\times\frac{(q^{2(j-i)}q^{4(\lambda_{i,k-1}-\lambda_{j-1,k-1})};q^4)_{\lambda_{j-1,k-1}-\lambda_{j,k}}}{(q^4q^{2(j-i-1)}q^{4(\lambda_{i,k-1}-\lambda_{j-1,k-1})};q^4)_{\lambda_{j-1,k-1}-\lambda_{j,k}}}=\varphi_k(\boldsymbol{\lambda}_{k-1},\boldsymbol{\lambda}_k;q^4,q^2),$$

де використано визначення (3.3.47) для $\varphi_k(\boldsymbol{\lambda}_{k-1},\boldsymbol{\lambda}_k;q,t)$. Отже

$$\Psi_{\mathbf{m}_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{\Lambda}\varphi(\Lambda;q,t)\prod_{k=1}^{n}q^{x_k(m_{n,n}+2(\sum_{i=1}^{k}\lambda_{i,k}-\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_{i,k-1}))}$$

$$=q^{(x_1+\cdots+x_n)m_{n,n}}\sum_{\Lambda}\varphi(\Lambda;q,t)\prod_{k=1}^{n}q^{2x_k(\sum_{i=1}^{k}\lambda_{i,k}-\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_{i,k-1})}.$$

Порівнюючи з (3.3.46), ми отримуємо

$$\Psi_{\mathbf{m}_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=q^{(x_1+\cdots+x_n)m_{n,n}}P_{\boldsymbol{\lambda}}(q^{2x_1},q^{2x_2},\ldots,q^{2x_n};q^4,q^2).$$

Ця хвильова функція задовільняє рівняння

$$\hat{H}_r\Psi_{\mathbf{m}_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=E^{(r)}_{\Lambda}\Psi_{\mathbf{m}_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n),\qquad r=1,2,\ldots,n,\quad(3.3.48)$$

де $\hat{H}_r$ — r-ий гамільтоніан моделі Рузінарса:

$$\hat{H}_r=q^{r(r-1)}\sum_{\substack{I\subset\{1,2,\ldots,n\}\\|I|=r}}\left(\prod_{\substack{i\in I\\j\notin I}}\frac{q^2q^{2x_i}-q^{2x_j}}{q^{2x_i}-q^{2x_j}}\right)e^{2\sum_{i\in I}\partial_{x_i}},$$

$$E^{(r)}_{\mathbf{m}_n}=e_r(q^{2m_{1,n}+2n-2},q^{2m_{2,n}+2n-4},\ldots,q^{m_{n,n}}).$$

Це твердження легко випливає з Теореми 3.5. Зауважимо, рівняння (3.3.48) при $r=1$ є точно рівнянням Шрьодінгера для квантової тригонометричної n-частинкової моделі Рузінарса.

3.4. Висновки

В цьому розділі було виведено у явному вигляді радіальні компоненти елементів Казиміра квантової алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$, які відповідають квантовому аналогу однорідного простору $\mathrm{GL}(n)/\mathrm{SO}(n)$. Вони співпадають з різницевими операторами Макдональда–Рузінарса, якщо стартувати з набору елементів Казиміра з центру $U_q(\mathrm{gl}_n)$, які відповідають фундаментальним представленням. Вивід суттєво використовує підхід Івана Чередника до різницевих операторі Макдональда–Рузінарса через використання афінних алгебр Гекке. З іншого боку, ці оператори співпадають з гамільтоніаном та інтегралами руху квантової тригонометричної n-частинкової моделі Рузінарса. Хвильові функції в цій моделі визначаються як матричні елементи операторів представлення підалгебри Картана між векторами інваріантними по відношенню до q-деформації $U_q'(\mathrm{so}_n)$ алгебри Лі $\mathrm{so}(n)$. В дисертації знайдено явний вираз для цих інваріантних векторів в базисі Гельфанда–Цетліна. Це дозволило знайти комбінаторним чином хвильові функції моделі через поліноми Макдональда.

В майбутньому цікаво узагальнити описану процедуру на вивід радіальних частин елементів Казиміра, що відповідають іншим квантовим симетричним просторам (див. [130]).

РОЗДІЛ 4

Розділення змінних в квантових інтегровних моделях

4.1. Вступ.

Стандартним методом для знаходження власних станів гамільтоніанів квантових інтегровних систем є алгебраїчний анзац Бете, але цей метод не застосовний для низки квантових інтегровних систем (наприклад, для ланцюжка Тоди та для ланцюжків з $\mathbb{Z}_N$-симетрією), які важливі у фізиці. Потрібно було розробити новий метод для розв'язання такого типу задач. Перший крок в розробці цього методу був зроблений Гуцвілером (Gutzwiller) [61] в 1981 р., який знайшов розв'язок задачі на власні значення для $n = 2, 3, 4$-частинкового періодичного ланцюжка Тоди. У 1985 р. Є. Склянін, узагальнивши цю ідею та поєднавши її з квантовим методом оберненої задачі розсіяння, запропонував *квантовий метод розділення змінних* (або метод *функціонального анзацу Бете*) на прикладі ланцюжка Тоди [146]. Цей метод дозволив йому знайти власні стани для гамільтоніану моделі Тоди з періодичними граничними умовами та довільною кількістю частинок. Різні аспекти цього методу представлено в оглядах [150, 148, 149].

Наступний важливий крок було зроблено Харчевим та Лебедєвим [96], які зкомбінували аналітичний метод Гуцвілера та алгебраїчний підхід Склянiна. Вони отримали власні функції n-частинкового періодичного ланцюжка Тоди через певне інтегральне перетворення власних функцій допоміжної задачі —

відкритого $(n-1)$-частинкового ланцюжка Тоди. Виявляється, що ядро цього перетворення допускає розділення змінних. Розділені рівняння співпадають з рівнянням Бакстера. Розв'язок цього рівняння можна знайти в [136] (див. також [96]). Пізніше Харчев та Лебедєв [97] винайшли рекурентне співвідношення між власними функціями N-частинковим та $(N-1)$-частинковим відкритим ланцюжком Тоди. Розуміння цих формул з точки зору теорії представлень [58] дало можливість розширити їх підхід до інших інтегровних систем [58, 98].

В цьому розділі метод розділення змінних адаптується до моделі квантового ланцюжка Тоди з граничною взаємодією та моделі Бакстера–Бажанова–Строганова (ББС), моделі з $\mathbb{Z}_N$-симетрією. Модель ББС при довільному N має наступні застосування. Вона пов'язана з кіральною моделлю Поттса, яка описує фазові переходи між співрозмірною та неспіврозмірною фазами в задачі адсорбції газу на кристалічних гратках [128]. ББС модель на 3 вузлах еквівалентна моделі Хофштадера: задача про рух електрона на двовимірній (квадратній чи трикутній) гратці в однорідному магнітному полі [67, 62, 155, 41, 63, 105, 112, 113]. Зокрема в цих напрямках слід очікувати майбутні застосування отриманих в дисертації результатів. Остання модель при $N = 2$ пов'язана з моделлю Ізінга [31] і тому метод розділення змінних дає можливість побудувати власні стани трансфер-матриці моделі Ізінга. Інша можливість отримати гамільтоніани квантового ланцюжка Ізінга з різноманітними граничними умовами описана в роботах [25, 26, 7], де показано, що ці гамільтоніани отримуються після редукції простору станів квантового XXZ ланцюжка на вектори старшої ваги квантової алгебри $U_q(sl_2)$ при $q^4 = -1$.

Алгебра $U_q(sl_2)$ є алгеброю симетрії XXZ ланцюжка. Спільним з нашим підходом є те, що в [25, 26] будується ієрархія функціональних співвідношень для трансфер-матриць, які відповідають різним представленням допоміжного простору. При цьому важливою є умова обриву є цієї ієрархії. Відмінним є те, що в згаданих роботах квантовий простір відповідає представленню зі спіном 1/2, а в наших роботах — представленню циклічного типу.

Протягом останніх 60 років було проведено багато досліджень по вивченню двовимірної моделі Ізінга (МІ). Було отримано багато аналітичних результатів про статистичну суму моделі та про кореляційні функції. Вони багато дали для нашого сучасного розуміння фазових переходів другого роду в системах з короткосяжною взаємодією [135, 158, 95, 125, 119, 157]. Недавні огляди з багатьма посиланнями дано, наприклад, в [120, 138, 137]. Було розвинуто багато різних математичних підходів, так що ще 30 років тому Бакстер та Ентінг опублікували “399-тий” розв’язок для вільної енергії [14], див. також [21]. Спін-спін кореляційні функції можуть бути переписані через пфафіани детермінантів Тепліца. Більша частина роботи була зконцентрована на термодинамічній границі та скейлінгових властивостях оскільки вони дають зв’язок з теоретико-польовими результатам та прекрасною властивістю Пенлеве [119, 157, 13].

Тільки останнє десятиліття багато уваги приділялося кореляціям та спіновим матричним елементам (формфакторам [28]) в скінченних ізінговських системах [45, 8, 145]. Експерименти в нанофізиці часто мають справу з системами, де важливим є врахування скінченності системи. Недавня теоретична робота щодо МІ скінченного розміру стартувала з пфафіанів та відповідного підходу кліфордових алгебр. В [29] було вказано, що можна написати повністю факторизовані вирази для спінових матричних елементів ізінговських систем скінченного розміру. Однією нашою метою є доведення формули (12) в [29], див. (4.3.133). Для цього, ми вводимо метод, який ще не застосовувався до моделі Ізінга: метод розділення змінних для циклічних квантових спінових систем. Наш підхід — адаптація до циклічних моделей методу, введеного Скляніним [148, 149] та далі розвинутого Харчевим та Лебедєвим [96, 97]. Ми також широко застосовуємо аналіз квантових циклічних систем, який було проведено Тарасовим в [152].

Мало відомо про вектори станів двовимірної МІ скінченного розміру. В роботі [95] отримана лише часткова інформація про ці вектори станів. Недавно Лісовий [114] знайшов явні вирази для цих векторів з використанням методу алгебри Грасмана. Ми представляємо наш підхід розділення змінних [54, 55, 56], який, зокрема, дає також явні формули для векторів станів для системи скінченного розміру. Однак формули даються в зовсім іншому базисі ніж в [114]. Ми будемо обчислювати спінові матричні елемент безпосередньо обкладаючи спіновий оператор між векторами станів. В результаті, після проведення багатократного підсумовування по спіновим змінних проміжних станів, отримуємо факторизовані вирази.

Прототипом загальної N-станової циклічної моделі є модель Бакстера–Бажанова–Строганова (ББС) [17, 23, 106], також відома як $\tau^{(2)}$-модель. Стандартна МІ є дуже спеціальним виродженим випадком моделі ББС. Щоб уникнути багатьох зауважень при роботі з виродженим випадком — МІ, ми будемо розвивати нашу версію розділення змінних для загальної ББС моделі.

Іншим аргументом для цього є великий інтерес до ББС моделі завдяки факту, що її трансфер-матриця комутує з трансфер-матрицею [23, 19] кіральної моделі Поттса (КМП) [16, 18]. Отримання векторів станів для КМП є дуже актуальною нерозв'язаною задачою [10, 11]. Хоча власні вектори для трансфер-матриці ББС моделі з періодичними граничними умовами є невідомими при $N > 2$, явні формули для власних векторів ББС моделі з відкритими та фіксованими граничними умовами було знайдено в [88, 90].

Інша задача, яка розв'язана автором — задача про розділення змінних в моделі Тоди з граничною взаємодією. З алгебраїчної точки зору модель задається рівнянням відбиття (reflection equation). В дисертації, зокрема, знайдено інтегральне представлення для хвильових функцій квантової N-частинкового ланцюжка Тоди з граничною взаємодією. Хвильові функції у випадку ланцюжка Тоди з однією границею були отримані певним інтегральним перетворенням з хвильових функцій відкритого ланцюжка Тоди. Ядро цього перетворення знайдено у явному вигляді через Г-функції. Хвильові функції у випадку ланцюжка Тоди з двома границями отримано інтегральним перетворенням з попередніх хвильових функцій для ланцюжка Тоди з однією границею. У цьому випадку різницеве рівняння на ядро цього інтегрального перетворення допускає *розділення змінних.* Різницеві рівняння для розділенних змінних мають форму $T-Q$-рівнянь Бакстера. З точки зору алгебри симетрії, ця модель відповідає представленням твістованих янгіанів B-серії. Також автором дисертації розглянуто [89] комбінована модель — релятивістський ланюжок Тоди [143] при корені з одиниці. Ця модель в об'ємі є частковим випадком моделі ББС, а на границях описується рівнянням відбиття.

Результати, що отримані автором по темі цього розділу і виносяться на захист, опубліковані в роботах [31, 54, 55, 56, 57, 89, 88, 90, 85, 86].

4.2. Власні стани в моделі Бакстера–Бажанова–Строганова

4.2.1. Неоднорідна ББС-модель для загального N. Ми визначаємо модель Бакстера–Бажанова–Строганова (ББС-модель) як модель квантового ланцюжка. З кожним вузлом k квантового ланцюжка ми асоціюємо циклічний L-оператор [23, 106], що діє на двовимірному допоміжному просторі

$$L_k(\lambda) = \begin{pmatrix} 1+\lambda\varkappa_k\mathbf{v}_k, & \lambda\mathbf{u}_k^{-1}(a_k - b_k\mathbf{v}_k) \\ \\ \mathbf{u}_k(c_k - d_k\mathbf{v}_k), & \lambda a_k c_k + \mathbf{v}_k b_k d_k/\varkappa_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.2.1}$$

Тут λ — спектральний параметр, n — число вузлів. З кожним вузлом асоційовано п'ять параметрів $\varkappa_k$, a_k, b_k, c_k, d_k. Оператори $\mathbf{u}_k$ та $\mathbf{v}_k$ — елементи ультралокальної алгебри Вейля, що задовільняють комутаційні співвідношення

$$\mathbf{u}_j\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k\mathbf{u}_j\,, \quad \mathbf{v}_j\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k\mathbf{v}_j\,, \quad \mathbf{u}_j\mathbf{v}_k = \omega^{\delta_{j,k}}\mathbf{v}_k\mathbf{u}_j\,,$$
$$\omega = e^{2\pi i/N}, \quad \mathbf{u}_k^N = \mathbf{v}_k^N = 1. \tag{4.2.2}$$

На кожному вузлі k ми визначаємо N-вимірний лінійний простір (квантовий простір) $\mathcal{V}_k$ з базисом $|\gamma\rangle_k$, $\gamma \in \mathbb{Z}_N$, дуальний простір $\mathcal{V}_k^*$ з базисом ${}_k\langle\gamma|$, $\gamma \in \mathbb{Z}_N$, та природнім спарюванням ${}_k\langle\gamma'|\gamma\rangle_k = \delta_{\gamma',\gamma}$. В $\mathcal{V}_k$ та $\mathcal{V}_k^*$ елемент Вейля $\mathbf{u}_k$ та $\mathbf{v}_k$ діють згідно формул:

$$\mathbf{u}_k|\gamma\rangle_k = \omega^\gamma|\gamma\rangle_k\,, \quad \mathbf{v}_k|\gamma\rangle_k = |\gamma+1\rangle_k;$$

$$ {}_k\langle\gamma|\mathbf{u}_k = {}_k\langle\gamma|\,\omega^\gamma\,, \quad {}_k\langle\gamma|\mathbf{v}_k = {}_k\langle\gamma-1|\,. \tag{4.2.3} $$

Матриця монодромії $T_n(\lambda)$ та трансфер-матриця $\mathbf{t}_n(\lambda)$ для n вузлів ланцюжка визначаються як

$$ T_n(\lambda) = L_1(\lambda)\,\cdots L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} A_n(\lambda) & B_n(\lambda) \\ C_n(\lambda) & D_n(\lambda) \end{pmatrix}, $$

$$ \mathbf{t}_n(\lambda) = \operatorname{tr} T_n(\lambda) = A_n(\lambda) + D_n(\lambda). \tag{4.2.4} $$

Цей квантовий ланцюжок є інтегровним оскільки L-оператори (4.2.1) переплітаються твістованою 6-вершинною R-матрицею при коренях з одиниці

$$ R(\lambda,\nu) \;=\; \begin{pmatrix} \lambda-\omega\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega(\lambda-\nu) & \lambda(1-\omega) & 0 \\ 0 & \nu(1-\omega) & \lambda-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-\omega\nu \end{pmatrix}, \tag{4.2.5} $$

$$ R(\lambda,\nu)\, L_k^{(1)}(\lambda) L_k^{(2)}(\nu) \;=\; L_k^{(2)}(\nu)\, L_k^{(1)}(\lambda)\, R(\lambda,\nu), \tag{4.2.6} $$

де $L_k^{(1)}(\lambda) = L_k(\lambda)\otimes\mathbb{I}$, $L_k^{(2)}(\lambda) = \mathbb{I}\otimes L_k(\lambda)$. Співвідношення (4.2.6) приводить до $[\mathbf{t}_n(\lambda), \mathbf{t}_n(\mu)] = 0$. Отже $\mathbf{t}_n(\lambda)$ — породжуюча функція для комутуючого набору нелокальних та неермітових гамільтоніанів $\mathbf{H}_0,\ldots,\mathbf{H}_n$:

$$ \mathbf{t}_n(\lambda) \;=\; \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1\lambda + \cdots + \mathbf{H}_{n-1}\lambda^{n-1} + \mathbf{H}_n\lambda^n. \tag{4.2.7} $$

З (4.2.6) також випливає, що верхній правий елемент $B_n(\lambda)$ матриці $T_n(\lambda)$ — породжуюча функція для іншого комутуючого набору операторів $\mathbf{h}_1,\ldots,\mathbf{h}_n$:

$$ [\,B_n(\lambda),\,B_n(\mu)\,] \;=\; 0, \qquad B_n(\lambda) \;=\; \mathbf{h}_1\lambda \,+\, \mathbf{h}_2\lambda^2 \,+\cdots+\, \mathbf{h}_n\lambda^n\,. \tag{4.2.8} $$

Зауважимо, що $\mathbf{H}_0$ та $\mathbf{H}_n$ записуються явно в термінах глобального оператора повороту $\mathbb{Z}_N$-заряду $\mathbf{V}_n$:

$$\mathbf{H}_0 \;=\; 1+\mathbf{V}_n\prod_{k=1}^{n}\frac{b_k d_k}{\varkappa_k}\,, \qquad \mathbf{H}_n \;=\; \prod_{k=1}^{n} a_k\, c_k + \mathbf{V}_n\prod_{k=1}^{n}\varkappa_k\,, \qquad \mathbf{V}_n \;=\; \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\cdots\mathbf{v}_n. \tag{4.2.9}$$

Ми не будемо в дисертації пояснювати великий інтерес до ББС-моделі завдяки другому переплітаючому співвідношенню по індексам простору Вейля, знайденому в [23] (див. також [152, 27]), та зв'язаного з цим фактом, що для певних параметрів Q-оператор Бакстера ББС-моделі є трансфер-матрицею інтегровної кіральної моделі Поттса, див. [23, 19, 141]. Ми також не будемо тут обговорювати узагальнення моделі ББС, введеної Бакстером в [20], та не будемо пояснювати як (4.2.1) виникає в циклічних представленнях квантової групи $U_q(sl_2)$, див., наприклад, [151, 152, 140].

Трансфер-матриця (4.2.4) переписується еквівалентно як добуток по плакетним больцманівським вагам [17, 19]:

$\mathbf{t}_n(\lambda) \;=\; \prod_{k=2}^{n+1}\, W_\tau(\gamma'_{k-1},\gamma'_k,\gamma_k,\gamma_{k-1})$ з плакетним больцманівським вагами

$$W_\tau(\gamma_{k-1},\ \gamma_k,\ \gamma'_{k-1},\ \gamma'_k) = \sum\nolimits_{m_{k-1}=0}^{1}\omega^{m_{k-1}(\gamma'_k-\sigma_{k-1})}\times$$
$$\times\,(-\omega t_q)^{\sigma_k-\gamma'_k-m_{k-1}}F'_{k-1}(\sigma_{k-1}-\gamma'_{k-1},m_{k-1})\;F''_k(\sigma_k-\gamma'_k,m_{k-1}) \tag{4.2.10}$$

де $m_k\in\{0,1\}$ та $F'_k(\Delta\gamma,m_k) = F''_k(\Delta\gamma,m_k) = 0$, якщо $\Delta\gamma\neq\{0,1\}$, та ненульовими значеннями є

$$F'_k = \begin{pmatrix} 1 & \lambda\, a_k \\ \varkappa_k & -b_k/\omega \end{pmatrix},\quad F''_k = \begin{pmatrix} 1 & \lambda\, c_k \\ 1 & -d_k/\varkappa_k \end{pmatrix}. \tag{4.2.11}$$

Занулення $F'_k(\Delta\gamma,m_k)$ та $F''_k(\Delta\gamma,m_k)$ для $\Delta\gamma\neq\{0,1\}$ означає, що сусідні $\mathbb{Z}_N$-спіни по вертікалі не можуть розрізнятись більше ніж на одиницю.

Еквіваленентність трансфер-матриць, визначених (4.2.1) та (4.2.4), видно з переписаних матричних елементів (4.2.1) у вигляді

$$\langle\gamma'_k|L_k(\lambda)_{m_{k-1},m_k}|\gamma_k\rangle = \omega^{m_{k-1}\gamma'_k - m_k\gamma_k}\lambda^{\gamma'_k-\gamma_k-m_{k-1}}F''_k(\gamma'_k-\gamma_k,m_{k-1})F'_k(\gamma'_k-\gamma_k,m_k). \tag{4.2.12}$$

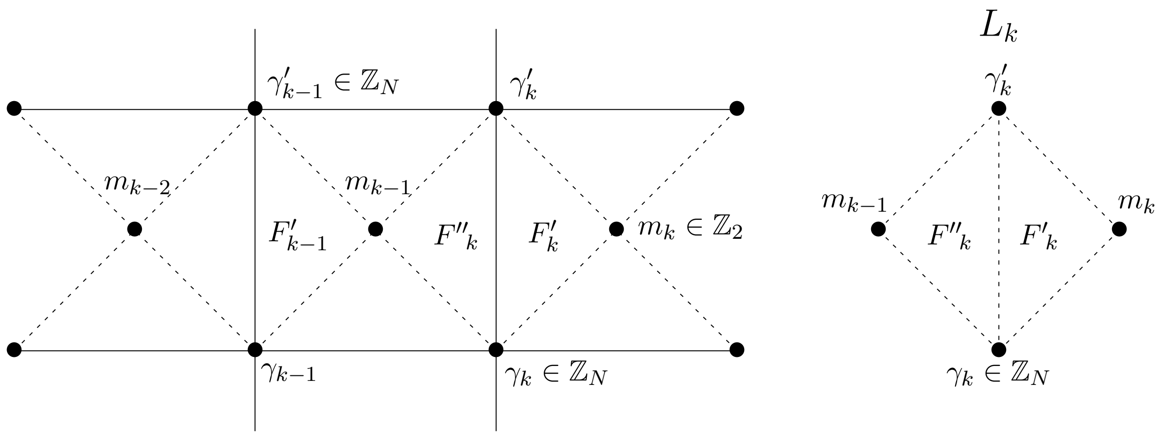

Рис. 4.1. Ілюстрація двох версій: зліва ми бачимо W з (4.2.10), які позначені товстими лініями. Трансфер-матриця (4.2.4) з L_k (4.2.1) виникає, якщо ми дивимось на гратку зформовану пунктирними лініями лівого малюнка та пунктирними ромбами, показаних справа. Гратка побудована з $\mathbb{Z}_N$-спінами на перетинах товстих ліній та $\mathbb{Z}_2$-спінами в центрах.

4.2.2. Однорідна ББС-модель для $N=2$**.** Інтегровність ББС-моделі справедлива, якщо параметри $\varkappa_k,\ a_k,\ldots,d_k$ різні в різних вузлах. Навіть у цьому загальному випадку можуть бути знайдені власні значення і власні вектори. Однак, щоб отримати явні компактні формули для матричних елементів, ми будемо часто покладати всі параметри рівними: $\varkappa_k=\varkappa,\ldots,\ d_k=d$ та будемо називати відповідну модель однорідною ББС-моделлю. В [31] показано, що при $N = 2$ загальна однорідна ББС-модель переписується як узагальнена плакетна модель Ізінга з больцманівськими вагами

$$W(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \;=\; a_0 \Big(1 \,+\, \textstyle\sum_{1 \le i < j \le 4} a_{ij}\, \sigma_i \sigma_j \,+\, a_4\, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \Big)\,, \qquad (4.2.13)$$

з додатковою умовою вільних ферміонів $a_4 = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$.

При $N = 2$ вейлівські елементи представляються матрицями Паулі. При $\varkappa = 1$, L-оператор стає

$$L_k(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + \lambda\, \sigma_k^x & \lambda\, \sigma_k^z\, (a - b\, \sigma_k^x) \\ \sigma_k^z\, (c - d\, \sigma_k^x) & \lambda a c + \sigma_k^x\, b\, d \end{pmatrix}$$

виродженим при $\lambda = b/a$:

$$L_k(b/a) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \,+\, b/a\, \sigma_k^x \\ \sigma_k^z (c - d \sigma_k^x) \end{pmatrix} \Big(1\,,\; b\, \sigma_k^z \Big).$$

Матричні елементи відповідної трансфер-матриці є

$$\langle \{\sigma'\} \,|\, \mathbf{t}_n(b/a) \,|\, \{\sigma\} \rangle \;=\; \prod_{k=1}^{n} \big(\delta_{\sigma_k, \sigma'_k} (1 \,+\, b\, c\, \sigma_{k-1}\, \sigma'_k) +$$

$$+ \delta_{\sigma_k, -\sigma'_k}\; b/a\, (1 \,-\, a\, d\, \sigma_{k-1}\, \sigma'_k) \big)\,,$$

де $\{\sigma\} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ та $\{\sigma'\} = \{\sigma'_1, \ldots, \sigma'_n\}$ — значення спінових змінних двох сусідніх рядків, $\sigma_k = (-1)^{\gamma_k}$, $\sigma'_k = (-1)^{\gamma'_k} \in \{+1, -1\}$. Використовується ототожнення $\sigma_{n+k} = \sigma_k$, $\sigma'_{n+k} = \sigma'_k$.

Матричні елементи трансфер-матриці моделі Ізінга на трикутній гратці (див. Рис. 4.2) дорівнюють

$$\langle \{\sigma'\} | \mathbf{t}_\triangle | \{\sigma\} \rangle \;=\; \prod_{k=1}^{n}\; \exp(K_x\, \sigma_{k-1} \sigma_k + K_y\, \sigma_k \sigma'_k + K_d\, \sigma_{k-1} \sigma'_k)\,. \qquad (4.2.14)$$

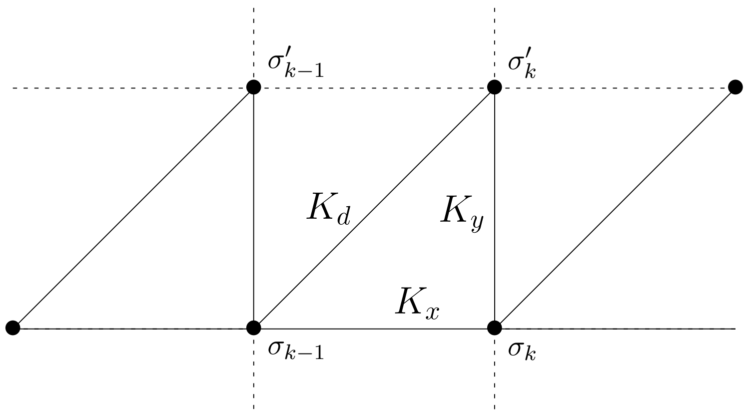

Рис. 4.2. Трансфер-матриця для моделі Ізінга на трикутній гратці. Товсті лінії показують взаємодію між спінами.

k-ий множник в цьому добутку, взятий при $\sigma_k = \sigma'_k$ є

$$\exp(K_y)\,\exp((K_x + K_d)\,\sigma_{k-1}\,\sigma'_k) \;=$$
$$=\;\exp(K_y)\,\cosh(K_x\,+\,K_d)\,(1\,+\,\tanh(K_x\,+\,K_d)\,\sigma_{k-1}\,\sigma'_k)\,,$$

та при $\sigma_k = -\sigma'_k$ є

$$\exp(-K_y)\,\exp((K_d - K_x)\,\sigma_{k-1}\,\sigma'_k) =$$
$$=\;\exp(-K_y)\,\cosh(K_d - K_x)\,(1\,+\,\tanh(K_d - K_x)\,\sigma_{k-1}\,\sigma'_k)\;.$$

Зараз легко порівняти трансфер-матриці $\mathbf{t}_n(b/a)$ та $\mathbf{t}_\triangle$:

$$\mathbf{t}_\triangle = \exp(nK_y)\,\cosh^n(K_x + K_d)\,\mathbf{t}_n(b/a)\,,$$
$$\exp(-2K_y)\,\frac{\cosh(K_d - K_x)}{\cosh(K_d + K_x)}\;=\;b/a\,,$$
$$\tanh(K_x + K_d)\;=\;b\,c\,,\qquad \tanh(K_x - K_d)\;=\;a\,d\,.$$

Хоча ми розгядали $\mathbf{t}_n(\lambda)$ при спеціальному значенні спектрального параметра $\lambda = b/a$, власні стани трансфер-матриці не залежать від цього вибору λ. Отже власні стани трансфер-матриці моделі Ізінга на трикутній гратці з'являються як власні стани загальної однорідної ББС-моделі для $N = 2$ (параметр $\varkappa$ та один з параметрів a, ..., d у випадку однорідної періодичної ББС моделі можуть бути поглинуті перемаштабуванням інших параметрів та діагональним перетворенням подібності L-операторів). Формули для них будуть дані нижче. На жаль, в загальному випадку, не вдалось знайти факторізовані формули для матричних елементів спінового оператора. Є тільки два спеціальні випадки, для яких такі формули знайдені:

а) Трансфер-матриця ряд-в-ряд для моделі Ізінга на квадратній гратці:

$$a = c, \quad b = d: \qquad K_d = 0, \qquad e^{-2K_y} = b/a\,, \quad \tanh K_x = a\,b\,. \quad (4.2.15)$$

Цей випадок є основним об'єктом нашої уваги. Це найбільш загальний випадок, де ми маємо факторізовану формулу для матричних елементів спінового оператора. Ця формула була знайдена А.Бугрієм та О.Лісовим.

б) Трансфер-матриця діагональ-в-діагональ для моделі Ізінга на квадратній гратці:

$$a = c, \quad b = -d: \qquad K_x = 0, \quad e^{-2K_y} = b/a\,, \quad \tanh K_d = a\,b\,. \quad (4.2.16)$$

Відомо [15], що трансфер-матриці з різними параметрами $K_y = L$, $K_d = K$ (та відповідними a, b) утворюють комутуючий набір матриць, що мають спільні власні вектори, при умові, що

$$\sinh 2K \;\; \sinh 2L \; = \; \frac{a^2 \, - \, b^2}{1 \, - a^2 \, b^2} \; = \; \frac{1}{\mathsf{k}'} \qquad (4.2.17)$$

є однаковим. Отже в цьому випадку власні вектори залежать тільки від k'. Тому, для того, щоб знайти власні вектори та відповідні матричні елементи спінового оператора, достатньо зафіксувати $a = c = 1/(\mathsf{k}')^{1/2}$ та $b = d = 0$ і, таким чином, отримати частковий випадок формул для трансфер-матриці ряд-в-ряд для моделі Ізінга на квадратній гратці. Зауважимо, що ми отримали в [56] ці самі матричні елементи у випадку квантового ланцюжка Ізінга в поперечному полі k' оскільки відповідний гамільтоніан комутує з трансфер-матрицями, що мають такий самий k'. Інше зауваження: у випадку зв'язку параметрів $a = c$, $b = -d$, $\varkappa = 1$, трансфер-матриці комутують між собою при незалежних значеннях *двох* спектральних параметрах: λ та параметрі, який уніформізує (4.2.17) (параметр еліптичної кривої з модулем k', див. [15]).

4.2.3. Розв'язання допоміжної системи (4.2.8): власні значення та власні вектори $B_n(\lambda)$. Ми починаємо з огляду методу розділення змінних застосованного до загальної неоднорідної $\mathbb{Z}_N$-ББС моделі [54]. Мета — знайти власні значення та власні вектори n-вузольної періодичної трансфер-матриці $\mathbf{t}_n(\lambda)$ з (4.2.4). Ідея [148, 149, 96, 97] — спочатку зконструювати базис N^n-вимірного простору власних векторів $B_n(\lambda)$, див. (4.2.8). Це може бути виконано за допомогою рекурентної процедури. Тоді власні стани $\mathbf{t}_n(\lambda)$ шукаються як лінійні комбінації власних векторів $B_n(\lambda)$. Коефіцієнти від багатьох змінних визначаються $T-Q$-рівняннями Бакстера, в яких змінні розділяються і отримується набір рівнянь від розділених змінних.

З (4.2.8) випливає, що власні значення $B_n(\lambda)$ є поліномами від спектральної змінної λ. Розфакторизовуючи цей поліном для $n \geq 2$, ми отримуємо

$$B_n(\lambda)\,|\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}\rangle \;=\; \lambda\lambda_0 \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda - \lambda_k)\,|\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}\rangle; \qquad \boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}\}, \qquad (4.2.18)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ — $n-1$ нуль власного значення-полінома та λ_0 — нормуючий множник. Ми можемо маркирувати власні вектори набором $\boldsymbol{\lambda}$.

Огляд простору власних станів $B_n(\lambda)$ легко отримується за допомогою переплітаючих співвідношень (4.2.6). З (4.2.6) випливає, що елементи $A_n(\lambda)$ та $D_n(\lambda)$ матриці монодромії (4.2.4) в нулях $\lambda = \lambda_k$ є циклічними сходинковими операторами по відношенню до k-ої компоненти $\boldsymbol{\lambda}$ в $|\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}\rangle$. Щоб це побачити, розглянемо переплітаюче співвідношення

$$(\lambda - \omega\mu)A_n(\lambda)B_n(\mu) \;=\; \omega(\lambda - \mu)B_n(\mu)A_n(\lambda) + \mu(1-\omega)A_n(\mu)B_n(\lambda)\,, \quad (4.2.19)$$

яке є компонентою (4.2.6). Фіксуючи $\lambda = \lambda_k,\;\; k = 1, \ldots, n-1$, в (4.2.19) та діючи на $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}$, останній доданок в (4.2.19) зникає та ми отримуємо

$$B_n(\mu)\,(A_n(\lambda_k)\,|\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}\rangle) \;= \mu\,\lambda_0\,(\mu - \omega^{-1}\lambda_k)\prod_{s\neq k}(\mu - \lambda_s)\;\,(A_n(\lambda_k)\,|\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}\rangle). \quad (4.2.20)$$

Це означає, що

$$A_n(\lambda_k)\,|\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}\rangle \;=\; \varphi_k\cdot|\Psi_{\lambda_0\,,\,\ldots\,,\,\omega^{-1}\lambda_k,\,\ldots\,,\,\lambda_{n-1}}\rangle\,. \quad (4.2.21)$$

Пізніше ми дамо явний вираз для коефіцієнта пропорційності φ_k. Аналогічно, з іншої компоненти (4.2.6) та з іншим фактором $\widetilde{\varphi}_k$ ми отримуємо

$$D_n(\lambda_k)|\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}\rangle \;=\; \widetilde{\varphi}_k\cdot|\Psi_{\omega^{-1}\lambda_0\,,\,\ldots\,,\,\omega\,\lambda_k\,,\,\ldots,\,\lambda_{n-1}}\rangle. \quad (4.2.22)$$

Більш того, діючи (4.2.19) на $|\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}\rangle$ та виділяючи коефіцієнт при $\lambda^{n+1}\mu^n$, ми отримуємо

$$\mathbf{V}_n|\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}\rangle \;=\; |\Psi_{\omega^{-1}\lambda_0\,,\,\lambda_1\,,\,\ldots\,,\,\lambda_{n-1}}\rangle\,. \quad (4.2.23)$$

Вважаємо, що параметри в L_k знаходяться у загальному положенні. При цьому всі коефіцієнти пропорційності є ненульовими і повторною дією $A_n(\lambda_k)$,

$D_n(\lambda_k)$ та $\mathbf{V}_n$ на будь-який власний стан $|\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}\rangle$ ми породжуємо N^n-вимірний простір станів. Пізніше, коли ми отримуємо явні вирази для φ_k та $\widetilde{\varphi}_k$, ми зможемо дослідити коли ці фактори занулюються.

Отже, якщо для данного набору параметрів $a_k, b_k, c_k, d_k, \varkappa_k$, $k = 1, \ldots, n$, існує власний вектор з власним значенням-поліномом, визначеним нулями $\boldsymbol{\lambda}$, тоді також існують власні вектори для всіх власних значень-поліномів, визначених нулями

$$\left\{\lambda_0\,\omega^{\rho_{n,1}},\,\ldots\,,\lambda_{n-1}\,\omega^{\rho_{n,n-1}}\right\} \quad \text{з} \quad \boldsymbol{\rho}_n = (\rho_{n,0},\ldots,\rho_{n,n-1}) \in (\mathbb{Z}_N)^n. \qquad (4.2.24)$$

Тому запишемо нулі як

$$\lambda_{n,k} \;=\; -r_{n,k}\,\omega^{\rho_{n,k}}, \qquad (4.2.25)$$

де для фіксованого n, n дійсних чисел $r_{n,k}$ визначаються $5n$ параметрами $a_l, \ldots, \varkappa_l$. Надалі, для фіксованих параметрів, будемо маркирувати власні вектори набором $\boldsymbol{\rho}_n$. Для даних параметрів набір власних значень визначається через $r_{n,0}, \ldots, r_{n,n-1}$. Рівняння на власні значення для $B_n(\lambda)$ стає наступним:

$$B_n(\lambda)|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle = \lambda\, r_{n,0}\,\omega^{-\rho_{n,0}} \prod_{k=1}^{n-1}\left(\lambda + r_{n,k}\omega^{-\rho_{n,k}}\right)|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle\,, \qquad (4.2.26)$$

Для того, щоб обчислити $r_{n,k}$ в термінах параметрів моделі нам не потрібна повна квантова трансфер-матриця та L_k-оператори, що включають вейлівські змінні. Ми усереднюємо оператори від λ згідно наступної процедури [152]:

$$\mathcal{O}(\lambda^N) \;=\; \langle\, O(\lambda^N)\,\rangle = \;\prod\nolimits_{s\,\in\,\mathbb{Z}_N} O(\omega^s\lambda). \qquad (4.2.27)$$

Ми ставимо у відповідність квантовому оператору $O(\lambda)$, залежному від спектрального параметра, класичний аналог $\mathcal{O}(\lambda^N)$. Ми визначаємо класичну

ББС-модель через L-оператор $\mathcal{L}_m(\lambda^N)$

$$\mathcal{L}_m(\lambda^N) \;=\; \begin{pmatrix} \langle\, L_{00}\,\rangle & \langle\, L_{01}\,\rangle \\ \langle\, L_{10}\,\rangle & \langle\, L_{11}\,\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\epsilon\varkappa_m^N\lambda^N & -\epsilon\lambda^N(a_m^N-b_m^N) \\ c_m^N-d_m^N & b_m^N d_m^N/\varkappa_m^N-\epsilon\lambda^N a_m^N c_m^N \end{pmatrix}, \tag{4.2.28}$$

де $\epsilon=(-1)^N$. Аналогічно ми визначаємо класичний оператор монодромії $\mathcal{T}_n$:

$$\mathcal{T}_n \;=\; \mathcal{L}_1(\lambda^N)\,\mathcal{L}_2(\lambda^N)\cdots\,\mathcal{L}_n(\lambda^N) \;=\; \begin{pmatrix} \mathcal{A}_n(\lambda^N) & \mathcal{B}_n(\lambda^N) \\ \mathcal{C}_n(\lambda^N) & \mathcal{D}_n(\lambda^N) \end{pmatrix} \tag{4.2.29}$$

Твердження 1.5 з [152] дає нам, що класичні поліноми $\mathcal{A}_n(\lambda^N)$, $\mathcal{B}_n(\lambda^N)$, $\mathcal{C}_n(\lambda^N)$ та $\mathcal{D}_n(\lambda^N)$ є середніми їх квантових аналогів в (4.2.4): $\mathcal{A}_n(\lambda^N) \;=\; \langle\, A_n(\lambda)\,\rangle$, і т.д. Для $n\geq 2$ ми маємо

$$\mathcal{B}_m(\lambda^N)=(-\epsilon)^m\lambda^N r_{m,0}^N\prod_{s=1}^{m-1}(\lambda^N-\epsilon\, r_{m,s}^N). \tag{4.2.30}$$

Легко вивести [54] трьохчленну рекурсію, яка виражає $\mathcal{B}_m(\lambda^N)$ через $\mathcal{B}_{m-1}(\lambda^N)$ та $\mathcal{B}_{m-2}(\lambda^N)$. Використовуючи початкові значення $\mathcal{B}_1(\lambda^N)=-\epsilon\lambda^N r_1^N$, $\mathcal{B}_0(\lambda^N)\,=\,0$ та визначаючи $r_1^N\,=\,a_1^N-b_1^N$ отримуємо алгебраїчне співвідношення степені $(n-1)$ для $r_{m,s}^N$.

Для однорідної моделі (параметри моделі не залежать від номера вузла) це співвідношення замінюється на квадратичне рівняння, див. Додаток в [54].

4.2.4. Розв'язок допоміжної задачі: явна конструкція власних векторів $B_n(\lambda)$. Покрокова побудова власних векторів, починаючи з одновузольної задачі, потім для двовузольної і т.д. є громіздкою, тому що нам потрібно розв'язати задачу до 4 вузлів для того, щоб з'явилась загальна структура формул.

Почнемо зі знаходження одновузольних правих власних векторів $|\psi_\rho\rangle_1$ оператора $B_1(\lambda)$ як власних комбінацій спінових станів $|\gamma\rangle_1,\ \gamma\in\mathbb{Z}_N$, записуючи

$$|\psi_\rho\rangle_1=\prod_{\gamma\,\in\,\mathbb{Z}_N} w_p(\gamma\,-\,\rho)\,|\gamma\rangle_1,\qquad \rho\in\mathbb{Z}_N\,. \tag{4.2.31}$$

Застовуючи зліва B_1 з (4.2.1) та справа (4.2.26) ми вимагаємо

$$\lambda\mathbf{u}_1^{-1}(a_1-b_1\mathbf{v}_1)\prod_{\gamma\,\in\,\mathbb{Z}_N} w_p(\gamma-\rho)|\gamma\rangle_1\;=\;\lambda r_{1,0}\,\omega^{-\rho_{1,0}}\prod_{\gamma\,\in\,\mathbb{Z}_N} w_p(\gamma-\rho)|\gamma\rangle_1. \tag{4.2.32}$$

Застосовуючи (4.2.3) та зсовуючи підсумовування зліва для доданку з $|\gamma{+}1\rangle_1$, ми отримуємо

$$(a_1\,-\,r_{1,0}\omega^{\gamma-\rho})\,w_p(\gamma\,-\,\rho)\;=\;b_1\,w_p(\gamma\,-\,\rho\,-1). \tag{4.2.33}$$

Це є різницевим рівнянням для функції $w_p(\gamma)$ [24]:

$$\frac{w_p(\gamma)}{w_p(\gamma-1)}\;=\;\frac{y}{1\,-\,\omega^\gamma\,x}\,;\qquad\qquad w_p(0)=1\,;\qquad \gamma\in\mathbb{Z}_N\,, \tag{4.2.34}$$

де ми поклали $y\,=\,b_1/a_1,\ r_{1,0}\,=\,x\,a_1$ та вибрали початкове значення $w_p(0)=1$. Циклічна властивість $w_p(\gamma)\,=\,w_p(\gamma\,+\,N)$ накладає умову Ферма $x^N+y^N\,=\,1$ на двохкомпонентний вектор $p\,=\,(x,\,y\,)$. Ми вказуємо p як індекс функцій $w_p(\gamma)$. Ми розглядаємо випадок "загальних параметрів". Зокрема, ми виключаємо випадок $a_k^N\,-\,b_k^N\,=\,0$, та "суперінтегровний" випадок

$$a_k\;=\;\omega^{-1}\,b_k\;=\;c_k\;=\;d_k\;=\;\varkappa_k\;=\;1, \tag{4.2.35}$$

оскільки в останньому випадку має місце виродження і нижченаведена конструкція перестає працювати.

Аналогічно ми записуємо лівий власний вектор як

$${}_1\langle\psi_\rho|=\prod_{\gamma\,\in\,\mathbb{Z}_N}\frac{1}{w_p(\gamma-\rho-1)}\;{}_1\langle\gamma|,\qquad \rho\in\mathbb{Z}_N \tag{4.2.36}$$

з тими самими функціями $w_p(\gamma)$, тільки зараз $p = (r_{1,0}/a_1,\ \omega^{-1}b_1/a_1)$. Функції параметризовані точкою на кривій Ферма $w_p(\gamma)$ грають важливу роль для циклічних моделей. Вони є аналогами q-гамма функції при корені з одиниці.

Аналогічне обчислення для двохвузольних власних векторів дає

$$|\Psi_{\rho_{2,0},\,\rho_{2,1}}\rangle = \sum_{\rho_1,\,\rho_2\in\mathbb{Z}_N} \frac{\omega^{-(\rho_{2,0}+\rho_{2,1}-\rho_1)(\rho_{2,0}-\rho_2)}}{w_{p_{2,0}}(\rho_{2,0}-\rho_1-1)w_{\tilde{p}_2}(\rho_{2,0}+\rho_{2,1}-\rho_2-1)}\ |\psi_{\rho_1}\rangle_1\otimes|\psi_{\rho_2}\rangle_2\,. \tag{4.2.37}$$

де $p_{2,0}=(x_{2,0},y_{2,0})$, $\tilde{p}_2=(\tilde{x}_2,\tilde{y}_2)$ та

$$x_{2,0}=a_2\,c_2\frac{r_1}{r_{2,0}}\,,\qquad y_{2,0}=\varkappa_1\,\frac{r_2}{r_{2,0}}\,,\qquad \tilde{x}_2=\frac{r_2}{r_{2,0}\,r_{2,1}}\,,\qquad \tilde{y}_2=\frac{b_2\,d_2}{\varkappa_2}\frac{r_1}{r_{2,0}\,r_{2,1}}\,. \tag{4.2.38}$$

Умова належності $p_{2,0}$ та $\tilde{p}_2$ до кривої Ферма визначає $r_{2,0}$ та $r_{2,1}$.

Явні формули для лівих та правих власних векторів $B_n(\lambda)$ для загального числа вузлів n доводиться складною індукцією і дано в [54]. Додатковим результатом цих обчислень є формули для φ_k та $\widetilde{\varphi}_k$, введені в (4.2.21),(4.2.22):

$$A_n(\lambda_{n,k})\,|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle=\varphi_k(\boldsymbol{\rho}'_n)\,|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n^{+k}}\rangle, \tag{4.2.39}$$

$$\varphi_k(\boldsymbol{\rho}'_n)\ =\ -\frac{\tilde{r}_{n-1}}{r_n}\,\omega^{-\tilde{\rho}_n+\rho_{n,0}}\,F_n(\lambda_{n,k}/\omega)\prod_{s=1}^{n-2}\,y^{n,k}_{n-1,s}, \tag{4.2.40}$$

$$D_n(\lambda_{n,k})|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle=\tilde{\varphi}_k(\boldsymbol{\rho}'_n)\,|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n^{+0,-k}}\rangle, \tag{4.2.41}$$

$$\tilde{\varphi}_k(\boldsymbol{\rho}'_n)=-\frac{r_n}{\tilde{r}_{n-1}}\frac{\omega^{\tilde{\rho}_n-\rho_{n,0}-1}}{\prod_{s=1}^{n-2}y^{n,k}_{n-1,s}}\prod_{m=1}^{n-1}\,F_m(\lambda_{n,k}), \tag{4.2.42}$$

$$F_n(\lambda)\ =\ (\,b_n\ +\omega a_n\,\varkappa_n\lambda)\ (\,\lambda\,c_n\ +d_n/\varkappa_n\,)\,. \tag{4.2.43}$$

Зліва (4.2.39) та (4.2.41), власні вектори $\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}$ оператору $B_n(\lambda)$ маркируються вектором

$$\boldsymbol{\rho}_n = (\rho_{n,0}, \ldots, \rho_{n,n-1}) \in (\mathbb{Z}_N)^n. \tag{4.2.44}$$

Набір $\boldsymbol{\rho}_n^{\pm k}$ є набором $\boldsymbol{\rho}_n$, в якому $\rho_{n,k}$ замінено на $\rho_{n,k} \pm 1$:

$$\boldsymbol{\rho}_n^{\pm k} = (\rho_{n,0}, \ldots, \rho_{n,k} \pm 1, \ldots, \rho_{n,n-1}), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\tilde{r}_n = r_{n,0}\, r_{n,1} \ldots r_{n,n-1} \qquad \text{та} \qquad \tilde{\rho}_n = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \rho_{n,k}. \tag{4.2.45}$$

$\boldsymbol{\rho}'_n$ позначає вектор $\boldsymbol{\rho}_n$ без компоненти $\rho_{n,0}$:

$$\boldsymbol{\rho}'_n = (\rho_{n,1}, \ldots, \rho_{n,n-1}) \in (\mathbb{Z}_N)^{n-1}. \tag{4.2.46}$$

Величини $y^{n,k}_{n-1,s}$ є компонентами точки $p^{n,k}_{n-1,s} = (x^{n,k}_{n-1,s}, y^{n,k}_{n-1,s})$ на кривій Ферма, визначеної співвідношенням $x^{n,k}_{n-1,s} = r_{n,k}/r_{n-1,s}$, див. Розділ 2.4 в [54]. Величина $F_m(\lambda)$, яка з'являється в (4.2.40) та (4.2.42) є множником в квантовому детермінанті:

$$A_n(\omega\lambda) D_n(\lambda) - C_n(\omega\lambda) B_n(\lambda) = \mathbf{V}_n \cdot \prod_{m=1}^{n} F_m(\lambda), \tag{4.2.47}$$

З (4.2.1) ми можемо знайти безпосередньо λ^0- та λ^n-коефіцієнти поліному $A_n(\lambda)$:

$$A_n(\lambda) = 1 + \ldots + \varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n \, \mathbf{V} \, \lambda^n \,. \tag{4.2.48}$$

Тоді використовуючи (4.2.40), загальна дія $A_n(\lambda)$ на власні вектори B_n може бути отримана інтерполяцією полінома

$$\begin{aligned} A_n(\lambda) |\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle \;=\; & \prod_{s=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{n,s}}\right) |\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle + \lambda \varkappa_1 \cdots \varkappa_n \prod_{s=1}^{n-1} (\lambda - \lambda_{n,s}) \, |\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n^{+0}}\rangle \;+ \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{s \neq k} \frac{\lambda - \lambda_{n,s}}{\lambda_{n,k} - \lambda_{n,s}} \right) \frac{\lambda}{\lambda_{n,k}} \, \varphi_k(\boldsymbol{\rho}'_n) \, |\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n^{+k}}\rangle \,. \end{aligned} \tag{4.2.49}$$

Значне зусилля необхідне, щоб представити норму довільного вектору $|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle$ у факторизованому вигляді, оскільки необхідно виконати багатократні підсумовування по проміжним індексам. Норми є незалежними від фази $\rho_{n,0}$ та їх залежність від $\boldsymbol{\rho}'_n$ наступна:

$$\langle\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle \;=\; \frac{C_n}{\prod_{l<m}(\lambda_{n,l}-\lambda_{n,m})} \;=\; \frac{C_n}{\prod_{l<m}(r_{n,m}\omega^{-\rho_{n,m}}-r_{n,l}\omega^{-\rho_{n,l}})}\,. \quad (4.2.50)$$

Нормуючий множник C_n є незалежним від $\boldsymbol{\rho}_n$ та записується рекурсивно [55]. Його найнижчі значення такі:

$$C_1 \;=\; \frac{N}{\omega}\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{N-1}, \qquad C_2 \;=\; C_1\frac{N^3}{\omega}\left(\frac{x_2}{y_2\,\tilde{y}_2\,y_{2,0}}\right)^{N-1}. \quad (4.2.51)$$

4.2.5. Періодична модель: рівняння Бакстера та обірвані функціональні рівняння. В допоміжній задачі ми шукали власні функції B_n. B_n не комутує з $\mathbf{V}_n$ (4.2.9), див. (4.2.23): $\mathbf{V}_n|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle = |\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n^{+0}}\rangle$. Зараз ми шукаємо власні функції для $\mathbf{t}_n$, якій комутує з $\mathbf{V}_n$. Перетворенням Фур'є по $\rho_{n,0}$ ми будуємо базис діагональний для $\mathbf{V}$, де компонента Фур'є $\rho\in\mathbb{Z}_N$ є повним $\mathbb{Z}_N$-зарядом:

$$|\tilde{\Psi}_{\rho,\boldsymbol{\rho}'_n}\rangle = \textstyle\sum_{\rho_{n,0}\in\mathbb{Z}_N}\omega^{-\rho\cdot\rho_{n,0}}|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle, \qquad \mathbf{V}_n\,|\tilde{\Psi}_{\rho,\boldsymbol{\rho}'_n}\rangle \;=\; \omega^{\rho}\,|\tilde{\Psi}_{\rho,\boldsymbol{\rho}'_n}\rangle\,. \quad (4.2.52)$$

Зараз ми записуємо власні функції $|\Phi_{\rho,\mathbf{E}}\rangle$ для $\mathbf{t}_n(\lambda)$ як лінійну комбінацію $|\tilde{\Psi}_{\rho,\boldsymbol{\rho}'_n}\rangle$. Власні значення $\mathbf{t}_n(\lambda)$ на цих станах є знову поліномами порядку n від λ:

$$\mathbf{t}_n(\lambda)|\Phi_{\rho,\mathbf{E}}\rangle \;=\; (E_0+E_1\lambda+\cdots+E_{n-1}\lambda^{n-1}+E_n\lambda^n)|\Phi_{\rho,\mathbf{E}}\rangle\,. \quad (4.2.53)$$

Оскільки значення E_0 та E_n знаходяться безпосередньо з (4.2.9):

$$E_0 \;=1+\omega^{\rho}\textstyle\prod_{m=1}^{n}b_m d_m/\varkappa_m, \quad E_n \;=\; \prod_{m=1}^{n}a_m c_m \;+\omega^{\rho}\prod_{m=1}^{n}\varkappa_m\,, \quad (4.2.54)$$

ми комбінуємо всі інші коефіцієнти у вектор $\mathbf{E} = \{E_1, \ldots, E_{n-1}\}$ та маркуємо власні вектори зарядом ρ та $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{t}_n(\lambda)\ |\Phi_{\rho,\mathbf{E}}\rangle \ = \ t_n(\lambda|\rho,\mathbf{E})\ |\Phi_{\rho,\mathbf{E}}\rangle, \qquad |\Phi_{\rho,\mathbf{E}}\rangle \ = \ \sum_{\boldsymbol{\rho}'_n} \mathcal{Q}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\rho}'_n|\,\rho,\mathbf{E})\ |\tilde{\Psi}_{\rho,\boldsymbol{\rho}'_n}\rangle\,. \tag{4.2.55}$$

Зараз для того, щоб розділити змінні в багатозмінних функціях $\mathcal{Q}^{\mathrm{R}}$, ми відокремлюємо з $\mathcal{Q}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\rho}'_n|\,\rho,\mathbf{E})$ міру Скляніна:

$$\mathcal{Q}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\rho}'_n|\,\rho,\mathbf{E}) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} Q_k^{\mathrm{R}}(\rho_{n,k})}{\prod_{\substack{s,s'=1\\(s\neq s')}}^{n-1} w_{p_{n,s}^{n,s'}}(\rho_{n,s}-\rho_{n,s'})}\,. \tag{4.2.56}$$

Ми не будемо детально пояснювати обчислення, а лише дамо основний механізм. Ми виражаємо $\mathbf{t}_n(\lambda)$ як інтерполяційний поліном від нулів $\lambda_{n,k}$ оператору $B_n(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
&(A_n(\lambda)+D_n(\lambda))|\tilde{\Psi}_{\rho,\boldsymbol{\rho}'_n}\rangle = \\
&= \left\{ E_0 \prod_{s=1}^{n-1}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{n,s}}\right) + \lambda\, E_n \prod_{s=1}^{n-1}(\lambda-\lambda_{n,s}) \right\} \tilde{\Psi}_{\rho,\boldsymbol{\rho}'_n} \ + \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{s\neq k} \frac{\lambda-\lambda_{n,s}}{\lambda_{n,k}-\lambda_{n,s}} \right) \frac{\lambda}{\lambda_{n,k}} \left(\varphi_k(\boldsymbol{\rho}'_n)\,|\tilde{\Psi}_{\rho,\boldsymbol{\rho}'^{+k}_n}\rangle + \omega^{\rho}\, \tilde{\varphi}_k(\boldsymbol{\rho}'_n)\,|\tilde{\Psi}_{\rho,\boldsymbol{\rho}'^{-k}_n}\rangle \right).
\end{aligned} \tag{4.2.57}$$

Коли ми обчислюємо (4.2.57) послідовно в $n-1$ значеннях $\lambda = \lambda_{n,k}$, $k = 1,\ldots,n-1$, члени другого рядка (4.2.57) не дають внесок. Завдяки мірі Скляніна дужки, що містять різниці $\lambda_{n,k}-\lambda_{n,s}$, скорочуються, що веде до розділення змінних. Це приводить до $n-1$ однозмінних $\lambda_{n,k}$ рівнянь Бакстeра $(k=1,\ldots,n-1)$

$$t_n(\lambda_{n,k}|\rho,\mathbf{E})\ \ Q^{\rm R}_k(\rho_{n,k})=\Delta^+_k(\lambda_{n,k})\ Q^{\rm R}_k(\rho_{n,k}+1)+\Delta^-_k(\omega\lambda_{n,k})\ Q^{\rm R}_k(\rho_{n,k}-1)\,. \tag{4.2.58}$$

Стартуючи з лівих власних векторів отримуємо аналогічні рівняння Бакстера:

$$t_n(\lambda_{n,k}|\rho,\mathbf{E})\ \ Q^{\rm L}_k(\rho_{n,k})=\omega^{n-1}\Delta^-_k(\lambda_{n,k})\ Q^{\rm L}_k(\rho_{n,k}+1)+\omega^{1-n}\Delta^+_k(\omega\lambda_{n,k})\ Q^{\rm L}_k(\rho_{n,k}-1)\,, \tag{4.2.59}$$

де ми ввели скорочені позначення

$$\Delta^+_k(\lambda)\ =\ (\omega^\rho/\chi_k)\,(\lambda/\omega)^{1-n}\prod_{m=1}^{n-1}F_m(\lambda/\omega)\,,\qquad \Delta^-_k(\lambda)\ =\ \chi_k\,(\lambda/\omega)^{n-1}\,F_n(\lambda/\omega)\,. \tag{4.2.60}$$

χ_k містить декілька множників (які частково з'являються з φ_k та $\widetilde{\varphi}_k$), визначених тільки константами $\varkappa_k, a_k,\ldots,d_k$. Зараз зауважимо, що більш явний вигляд лівої сторони (4.2.58) такий:

$$\Big(E_0+\textstyle\sum_{s=1}^{n-1}E_s\,\lambda^s_{n,k}\ +\ E_n\lambda^n_{n,k}\Big)\ Q^{\rm R}_k(\rho_{n,k})\ =\ \ldots \tag{4.2.61}$$

де $\mathbf{E}$ — невідомі, які треба визначити з системи однорідних рівнянь (4.2.58) разом з $n-1$ функціями $Q^{\rm R}_k(\rho_{n,k})$. Для того, щоб отримати нетривіальний розв'язок, визначники коефіцієнтів мають вироджуватись. При певному k, визначник задає одне співвідношення між $E_0,\ldots,E_n$. Всіх $n-1$ систем для різних k має бути достатньо щоб визначити всі компоненти $\mathbf{E}$. Виявляється, що умова існування нетривіальних розв'язків (4.2.58) може бути переписана як добре відомі обірвані функціональні рівняння:

Визначимо $\tau^{(2)}(\lambda)\ =\ t(\lambda)$[1] та зконструюємо ієрархію злиття (a fusion

[1]Це визначення з [23] є причиною чому ББС-модель називають $\tau^{(2)}$-моделлю

hierarchy) [108, 19] покладаючи $\tau^{(0)}(\lambda)=0$, $\tau^{(1)}(\lambda)=1$, та, для $j=2,3,\ldots,N$,

$$\tau^{(j+1)}(\lambda) \;=\; \tau^{(2)}(\omega^{j-1}\lambda)\,\tau^{(j)}(\lambda) \;-\; \omega^{\rho}\,z(\omega^{j-1}\lambda)\,\tau^{(j-1)}(\lambda), \qquad (4.2.62)$$

де

$$z(\lambda) \;=\; \omega^{-\rho}\,\Delta^{+}(\lambda)\,\Delta^{-}(\lambda) \;=\; \textstyle\prod_{m=1}^{n} F_m(\lambda/\omega). \qquad (4.2.63)$$

Тоді можна показати [54], що, якщо $\tau^{(N+1)}(\lambda)$ задовільняє тотожності обриву (truncation identity)

$$\tau^{(N+1)}(\lambda) \;-\; \omega^{\rho}\,z(\lambda)\,\tau^{(N-1)}(\omega\lambda) \;=\; \mathcal{A}_n(\lambda^N) \;+\; \mathcal{D}_n(\lambda^N) \qquad (4.2.64)$$

з $\mathcal{A}_n(\lambda^N)+\mathcal{D}_n(\lambda^N)$, що дано в (4.2.29), тоді система (4.2.58) має нетривіальний розв'язок для всіх k. Ця обірвана ієрархія може бути використана для знаходження власних значень трансфер-матриці [99, 22]. В нашій конструкції ми маємо навіть більше: для кожного розв'язку (4.2.62) та (4.2.64) ми можемо побудувати власний вектор.

4.2.6. Дія $\mathbf{u}_k$ та $\mathbf{v}_k$ на власні стани $B_n(\lambda)$. Наша головна мета — обчислити матричні елементи локальних операторів $\mathbf{u}_k$ та $\mathbf{v}_k$ між власними станами $|\Phi_{\rho,\mathbf{E}}\rangle$ оператора $\mathbf{t}_n(\lambda)$. Оскільки ми знаємо як отримати ці стани з власних станів $B_n(\lambda)$ (4.2.55), (4.2.56), (4.2.58), ми спочатку знайдемо дію локальних операторів на $|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle$. Оскільки ми будуємо наші допоміжні стани послідовно з одновузольного до n-вузольного, формули не будуть симетричні між, наприклад, $\mathbf{u}_j$ та $\mathbf{u}_k$ з $j\neq k$.

Для $\mathbf{u}_n$ ми можемо обчислити дію безпосередньо. Стартуючи з

$$\mathbf{u}_n^{-1}(a_n-b_n\mathbf{v}_n)|\psi_{\rho_n}\rangle_n \;=\; r_n\omega^{-\rho_n}|\psi_{\rho_n}\rangle_n\,,$$

ми отримуємо формулу для дії $\mathbf{u}_n$ на одновузольні власні вектори:

$$\mathbf{u}_n|\psi_{\rho_n}\rangle_n \;=\; \frac{\omega^{\rho_n}}{r_n}\left(a_n|\psi_{\rho_n}\rangle_n - b_n|\psi_{\rho_n+1}\rangle_n\right). \tag{4.2.65}$$

Тоді використовуючи явну рекурсивну формулу, що зв'язує $|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle$ та $|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_{n-1}}\rangle$ знаходимо [55]:

$$\mathbf{u}_n\,|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle = \frac{a_n}{\tilde{r}_n\omega^{-\tilde{\rho}_n}}\,|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle - \frac{b_n\varkappa_1\varkappa_2\cdots\varkappa_{n-1}}{r_{n,0}\omega^{-\rho_{n,0}}}\,|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n^{+0}}\rangle + \tag{4.2.66}$$

$$+\;\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_n\,b_n\,\varphi_k(\boldsymbol{\rho}'_n)}{r_{n,0}\omega^{-\rho_{n,0}}\,\lambda_{n,k}\,(b_n+a_n\varkappa_n\lambda_{n,k})\,\prod_{s\neq k}(\lambda_{n,k}-\lambda_{n,s})}\,|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n^{+k}}\rangle\,.$$

Ми виведемо цей результат більш простим чином, виражаючи локальні оператори $\mathbf{u}_k$ та $\mathbf{v}_k$ в термінах A_n та B_n з матриці монодромії, взятих при певних значеннях λ. Існує добре відомий метод, розроблений Ліонською групою [118]. Однак цей метод потребує виконання умови $R(0) = P$, де R — квантова R-матриця, що переплітає два L-оператора в квантових просторах та P — оператор перестановки. Ця вимога виконується для циклічних L-операторів тільки при спеціальних значеннях параметрів і R-матриця, при цьому, є добутком чотирьох ваг кіральної моделі Поттса [23]. Інша вимога стосується можливості отримати таку R-матрицю злиттям по допоміжному просторі початкового L-оператора. Ця вимога не може бути виконана для циклічних L-операторів (4.2.1) оскільки злиття в допоміжному просторі [139] дає L-оператори в представленнях обчислення (evaluation representations) зі старшою вагою відповідної квантової афінної алгебри, але нам потрібно представлення циклічного типу у допоміжному просторі.

Ми використаємо ідею з роботи В.Кузнецова по розділенню змінних в класичних інтегровних системах [110]. Процедура наступна: розглядаємо обернений до оператора $L_k(\lambda)$:

$$L_k^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} \omega\,\lambda\,a_k\,c_k \,+\, \mathbf{v}_k\,b_k\,d_k/\varkappa_k & -\lambda\,\mathbf{u}_k^{-1}\,(a_k \,-\, b_k\,\mathbf{v}_k) \\ -\omega\,\mathbf{u}_k\,(c_k - d_k\mathbf{v}_k), & 1\,+\omega\,\lambda\,\varkappa_k\,\mathbf{v}_k \end{pmatrix} \cdot\, (\det{}_q L_k(\lambda))^{-1}\,, \tag{4.2.67}$$

де $\det_q L_k(\lambda) = \mathbf{v}_k F_k(\lambda)$, $F_k(\lambda) = (b_k + \omega\lambda a_k \varkappa_k)(\lambda c_k + d_k/\varkappa_k)$. Вираз для $L_k^{-1}(\lambda)$ є сингулярним в нулях $\lambda_k' = -b_k/(\omega a_k \varkappa_k)$ та $\lambda_k'' = -d_k/(c_k \varkappa_k)$ поліному $F_k(\lambda)$. Зрозуміло, що

$$T_{n-1}(\lambda) \;=\; T_n(\lambda)\, L_n^{-1}(\lambda)\,. \tag{4.2.68}$$

Тому в нулях $F_n(\lambda)$ ліва частина є регулярною по λ і права частина теж має бути регулярною. При $\lambda \,=\, \lambda_n' \,=\, -b_n/(\omega a_n \varkappa_n)$ ми маємо

$$A_n(\lambda_n')\,\mathbf{u}_n^{-1}\,b_n/(\omega\varkappa_n) \;+\; B_n(\lambda_n') \;=\; 0\,.$$

Тому ми отримуємо формулу для $\mathbf{u}_n$:

$$\mathbf{u}_n \;=\; \lambda_n'\,a_n\,B_n^{-1}(\lambda_n')\,A_n(\lambda_n')\,. \tag{4.2.69}$$

З умови регулярності правої частини (4.2.68) при $\lambda = \lambda_n'' = -d_n/(c_n\varkappa_n)$ ми отримуємо

$$A_n(\lambda_n'')(-\lambda_n'')\mathbf{u}_n^{-1}(a_n - b_n\mathbf{v}_n) + B_n(\lambda_n'')(1 - d_n/(\omega c_n)\mathbf{v}_n) = 0\,.$$

Виключаючи $\mathbf{u}_n$ завдяки (4.2.69), ми отримуємо формулу для $\mathbf{v}_n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_n \;=\; -1/(\omega\varkappa_n)\,(A_n(\lambda_n')\,B_n(\lambda_n'') \;-\; A_n(\lambda_n'')\,B_n(\lambda_n'))^{-1}\times \\ \times(A_n(\lambda_n')\,B_n(\lambda_n'')/\lambda_n'' \;-\; A_n(\lambda_n'')\,B_n(\lambda_n')/\lambda_n'). \end{aligned} \tag{4.2.70}$$

Використовуючи RTT-співвідношення, що випливають з (4.2.6), ми можемо переставити A_n та B_n^{-1} в (4.2.69) щоб отримати еквівалентну формулу

$$\mathbf{u}_n \;=\; \omega\,\lambda'_n\,a_n\,A_n(\omega\lambda'_n)\,B_n^{-1}(\omega\lambda'_n)\,. \tag{4.2.71}$$

Використовуючи (4.2.49) та (4.2.26) ми отримуємо (4.2.66).

Ми можемо також отримати формули для $\mathbf{u}_{n-1}$ та $\mathbf{v}_{n-1}$. Ми виражаємо $L_n^{-1}(\lambda)$ в термінах $A_n(\lambda)$ та $B_n(\lambda)$ використовуючи (4.2.69) та (4.2.70). Зараз формула (4.2.68) дозволяє знайти вирази для $A_{n-1}(\lambda)$ та $B_{n-1}(\lambda)$ через $A_n(\lambda)$ та $B_n(\lambda)$. Наприкінець ми підставляємо ці вирази в (4.2.69) та (4.2.70), в яких індекс n замінено на $n-1$. Це дає нам вирази для $\mathbf{u}_{n-1}$ та $\mathbf{v}_{n-1}$ через $A_n(\lambda)$ та $B_n(\lambda)$. Продовжуючи описану процедуру можна виразити локальні оператори $\mathbf{u}_k$ та $\mathbf{v}_k$ через $A_n(\lambda)$ та $B_n(\lambda)$. Наприклад, результат для $\mathbf{u}_{n-1}$ є наступним:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{n-1} = \omega\lambda'_{n-1}a_{n-1}\Big(&A_n(\omega\lambda'_{n-1})(\omega^2\lambda'_{n-1}a_nc_n+\mathbf{v}_nb_nd_n/\varkappa_n)\\ &-B_n(\omega\lambda'_{n-1})\omega\mathbf{u}_n(c_n-d_n\mathbf{v}_n)\Big)\\ \times\Big(-A_n(\omega\lambda'_{n-1})\omega\lambda'_{n-1}&\mathbf{u}_n^{-1}(a_n-b_n\mathbf{v}_n)+B_n(\omega\lambda'_{n-1})(1+\omega^2\lambda'_{n-1}\varkappa_n\mathbf{v}_n)\Big)^{-1},\end{aligned}$$

де $\omega\,\lambda'_{n-1} \;=\; -b_{n-1}/(a_{n-1}\,\varkappa_{n-1})$ та треба підставити вирази (4.2.71) та (4.2.70) для $\mathbf{u}_n$ та $\mathbf{v}_n$. Це дає дію $\mathbf{u}_{n-1}$ на $|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle$. Ми бачимо, що формула стає дуже складною. Однак, $\mathbf{u}_1$ легко виражається через D_n та B_n:

$$\mathbf{u}_1 \;=\; \frac{1}{c_1}\,D_n\left(-\frac{d_1}{c_1\varkappa_1}\right)B_n^{-1}\left(-\frac{d_1}{c_1\varkappa_1}\right)\,. \tag{4.2.72}$$

Для нашої мети знаходження матричних елементів спінового оператора між власними станами $|\Phi_{\rho,\mathbf{E}}\rangle$ однорідної $\mathbf{t}_n(\lambda)$ ми можемо вибрати будь-який спіновий оператор $\mathbf{u}_k$, тому що вони всі пов'язані дією оператора трансляції, що має ті самі власні стани $|\Phi_{\rho,\mathbf{E}}\rangle$. Надалі ми розгядаємо матричні елементи спінового оператора $\mathbf{u}_n$ оскільки відповідна формула для дії (4.2.66) є найпростішою.

В кінці цього підрозділу ми хочемо відмітити деяку схожість наших формул з формулами в [12], де локальні оператори для квантового ланцюжка Тоди виражаються через квантові розділені змінні за допомогою рекурсивної конструкції власних векторів [97].

4.3. Матричні елементи спінового оператора в моделі Ізінга

4.3.1. Загальна неоднорідна $N = 2$ ББС-модель: розв'язок рівнянь Бакстера та норми станів. У випадку $N = 2$ ми маємо два зарядових сектора $\rho = 0, 1$. Використовуючи термінологію, наприклад [45, 29, 114], сектор $\rho = 0$ будемо називати Невьо–Шварца (NS)-сектор, та $\rho = 1$ — Рамона (R)-сектор. Ми покажемо, що спінові матричні елементи можуть бути записані достатньо компактно, хоча й не у факторізованій формі (4.3.89),(4.3.90). Повна факторизація буде досягнута пізніше для однорідної моделі Ізінга.

Зафіксуємо власне значення-поліном $t(\lambda|\rho, \mathbf{E})$ оператора $\mathbf{t}(\lambda)$, що відповідає правому власному вектору $|\Phi_{\rho,\mathbf{E}}\rangle$. Оскільки в наступному наш ланцюжок буде мати фіксовану довжину n, ми будемо часто не писати індекс n. Також інколи ми не будемо писати $\rho, \mathbf{E}$ в t.

Щоб знайти $|\Phi_{\rho,\mathbf{E}}\rangle$ явно, ми маємо розв'язати асоційовані $n - 1$ системи

$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ (правих) рівнянь Бакстера:

$$\begin{aligned} t(-r_{n,k})\, Q^{\mathrm{R}}_k(0) \;&=\; \big(\Delta^+_k(-r_{n,k}) + \Delta^-_k(r_{n,k})\big)\, Q^{\mathrm{R}}_k(1), \\ t(r_{n,k})\;\; Q^{\mathrm{R}}_k(1) \;&=\; \big(\Delta^+_k(r_{n,k}) + \Delta^-_k(-r_{n,k})\big)\, Q^{\mathrm{R}}_k(0). \end{aligned} \tag{4.3.73}$$

Оскільки $t(\lambda|\rho, \mathbf{E})$ є власним значенням-поліномом, функціональне співвідношення (4.2.64) забезпечує існування нетривіальних розв'язків (4.3.73) по відношенню до невідомих змінних $Q^{\mathrm{R}}_k(0)$ та $Q^{\mathrm{R}}_k(1)$ для кожного $k = 1$, $2, \ldots,\ n-1$. У випадку $N = 2$, це означає, що для кожного k ми маємо одне незалежне лінійне рівняння (у випадку вироджених власних значень, можливо жодного). У випадку загальних параметрів, обидві частини кожного рівняння будуть ненульовими. Отже, фіксуючи $Q^{\mathrm{R}}_k(0) = 1$, ми отримуємо два еквівалентних виразa для $Q^{\mathrm{R}}_k(1)$:

$$Q^{\mathrm{R}}_k(1) = \frac{t(-r_{n,k})}{\Delta^+_k(-r_{n,k}) + \Delta^-_k(r_{n,k})} = \frac{\Delta^+_k(r_{n,k}) + \Delta^-_k(-r_{n,k})}{t(r_{n,k})}\,. \tag{4.3.74}$$

Аналогічно з лівих рівнянь Бакстера, фіксуючи $Q^{\mathrm{L}}_k(0) = 1$, ми отримуємо

$$Q^{\mathrm{L}}_k(1) = \frac{(-1)^{n-1} t(-r_{n,k})}{\Delta^+_k(r_{n,k}) + \Delta^-_k(-r_{n,k})} = \frac{\Delta^+_k(-r_{n,k}) + \Delta^-_k(r_{n,k})}{(-1)^{n-1} t(r_{n,k})}\,.$$

Оскільки для загальних параметрів $t(r_{n,k}|\rho, \mathbf{E}) \neq 0$, ці явні формули дають

$$Q^{\mathrm{L}}_k(\rho_{n,k})\, Q^{\mathrm{R}}_k(\rho_{n,k}) \;=\; (-1)^{\rho_{n,k}(n-1)}\, t((-1)^{\rho_{n,k}}\, r_{n,k})/t(r_{n,k})\,.$$

Щоб отримати стани періодичної задачі, ми маємо вставити міру Скляніна (4.2.56). Зараз при $N = 2$ функції w_p є простими:

$$w_p(0) \;=\; 1\,, \quad w_p(1) = \frac{y}{1+x} = \frac{1-x}{y}\,, \quad (w_p(1))^2 \;=\; \frac{1-x}{1+x}\,. \tag{4.3.75}$$

В мірі Скляніна ми маємо використовувати точки Ферма $p_{n,l}^{n,m} = (x_{n,l}^{n,m}, y_{n,l}^{n,m})$, визначені координатою $x_{n,l}^{n,m} = r_{n,m}/r_{n,l}$. Вона виражається лише через $x_{n,l}^{n,m}$ і ми отримуємо

$$\frac{\langle \Phi_{\rho,\mathbf{E}} | \Phi_{\rho,\mathbf{E}} \rangle}{\langle \tilde{\Psi}_{\rho,\boldsymbol{\rho}'_n} | \tilde{\Psi}_{\rho,\boldsymbol{\rho}'_n} \rangle} = \sum_{\boldsymbol{\rho}'_n} \frac{\prod_{l<m}^{n-1} (-1)^{\rho_{n,l}+\rho_{n,m}} (r_{n,m} + r_{n,l})^2 \ \prod_{k=1}^{n-1} Q_k^{\mathrm{L}}(\rho_{n,k}) Q_k^{\mathrm{R}}(\rho_{n,k})}{\prod_{l<m}^{n-1} \left((-1)^{\rho_{n,l}} r_{n,l} + (-1)^{\rho_{n,m}} r_{n,m} \right)^2} \,. \tag{4.3.76}$$

Ми можемо нормалізувати матричний елемент відповідно до будь-якого стану. Зараз прості формули виникають, якщо для нормування ми вибрали допоміжні стани $|\tilde{\Psi}_{0,\mathbf{0}}\rangle$, де $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. З (4.2.50) ми отримуємо

$$\frac{\langle \tilde{\Psi}_{\rho,\boldsymbol{\rho}'_n} | \tilde{\Psi}_{\rho,\boldsymbol{\rho}'_n} \rangle}{\langle \tilde{\Psi}_{0,\mathbf{0}} | \tilde{\Psi}_{0,\mathbf{0}} \rangle} = \frac{\prod_{l<m}^{n-1} (r_{n,m}(-1)^{\rho_{n,m}} + r_{n,l}(-1)^{\rho_{n,l}})}{\prod_{l<m}^{n-1} (r_{n,m} + r_{n,l})} \,. \tag{4.3.77}$$

Збираючи всі ці формули, ми отримуємо для спарювання лівих та правих власних векторів трансфер-матриці періодичної ББС-моделі при $N = 2$:

$$\frac{\langle \Phi_{\rho,\mathbf{E}} \,|\, \Phi_{\rho,\mathbf{E}} \rangle}{\langle \tilde{\Psi}_{0,\mathbf{0}} | \tilde{\Psi}_{0,\mathbf{0}} \rangle} = \frac{\prod_{l<m}^{n-1} (r_{n,m} + r_{n,l})}{\prod_{l=1}^{n-1} \ t(r_{n,l})} \sum_{\boldsymbol{\rho}'_n} \frac{\prod_{l=1}^{n-1} (-1)^{\rho_{n,l}} \ t((-1)^{\rho_{n,l}} r_{n,l})}{\prod_{l<m}^{n-1} ((-1)^{\rho_{n,m}} r_{n,m} + (-1)^{\rho_{n,l}} r_{n,l})} . \tag{4.3.78}$$

Ця формула не дуже корисна оскільки з (4.2.55) вона містить підсумовування по $n-1$ $\mathbb{Z}_2$-змінних $\boldsymbol{\rho}'_n$, визначених в (4.2.46). Однак в [55] показано як виконати це підсумовування явно. Повністю факторизований результат такий:

$$\frac{\langle \Phi_{\rho,\mathbf{E}} \,|\, \Phi_{\rho,\mathbf{E}} \rangle}{\langle \tilde{\Psi}_{0,\mathbf{0}} | \tilde{\Psi}_{0,\mathbf{0}} \rangle} = 2^{n-1} \, \tilde{r}'_n \, \frac{\prod_{l<m}^{n-1} (r_{n,m} + r_{n,l})}{\prod_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{n-1} (r_{n,l} + \mu_k)} \prod_{i<j}^{n} (\mu_i + \mu_j) \,, \tag{4.3.79}$$

де $-\mu_i$ — нулі власного значення-полінома $\mathbf{t}(\lambda | \rho, \mathbf{E})$:

$$\mathbf{t}(\lambda | \rho, \mathbf{E}) | \Phi_{\rho,\mathbf{E}} \rangle = \Lambda \prod_{i=1}^{n} (\lambda + \mu_i) \, | \Phi_{\rho,\mathbf{E}} \rangle. \tag{4.3.80}$$

Ми не конкретизуємо множник Λ, оскільки в подальшому він скоротиться.

4.3.2. Матричні елементи між власними векторами періодичної неоднорідної $N=2$ моделі ББС. В (4.2.66) ми отримали дію $\mathbf{u}_n$ на власний вектор $|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle$ оператора $B_n(\lambda)$: результат — лінійна комбінація початкового вектора та векторів, в яких одна з компонент $\boldsymbol{\rho}_n$ зсунута. Щоб отримати матричні елементи $\mathbf{u}_n$ періодичної моделі, використовуючи (4.2.52), ми спочатку переходимо до зарядових власних станів $\langle\tilde\Psi_{\rho,\boldsymbol{\rho}'_n}|$, $|\tilde\Psi_{\rho,\boldsymbol{\rho}'_n}\rangle$:

$$\langle\tilde\Psi_{\rho,\boldsymbol{\rho}'_n}| = \langle\Psi_{0,\boldsymbol{\rho}'_n}| + (-)^\rho\langle\Psi_{1,\boldsymbol{\rho}'_n}|\,, \quad |\tilde\Psi_{\rho,\boldsymbol{\rho}'_n}\rangle = |\Psi_{0,\boldsymbol{\rho}'_n}\rangle + (-)^\rho|\Psi_{1,\boldsymbol{\rho}'_n}\rangle. \qquad (4.3.81)$$

Оскільки $\omega=-1$, $\mathbf{u}_n$ антикомутує з $\mathbf{V}_n$ так що тільки матричні елементи $\mathbf{u}_n$ між станами з різними зарядами ρ можуть бути ненульовими. Надалі ми виберемо праві власні вектори з сектору $\rho=1$, тоді як ліві вектори мають бути з сектору $\rho=0$ (протилежний вибір дає інші знаки в (4.3.82)). Використовуючи (4.2.66), ми знаходимо

$$\frac{\langle\tilde\Psi_{0,\boldsymbol{\rho}'_n}|\mathbf{u}_n|\tilde\Psi_{1,\boldsymbol{\rho}'_n}\rangle}{\langle\tilde\Psi_{0,\boldsymbol{\rho}'_n}|\tilde\Psi_{0,\boldsymbol{\rho}'_n}\rangle} \;=\; \frac{a_n}{\tilde r_n}(-1)^{\tilde\rho'_n} \;-\; \frac{\varkappa_1\varkappa_2\cdots\varkappa_{n-1}b_n}{r_{n,0}}\,, \qquad (4.3.82)$$

$$\begin{aligned}\frac{\langle\tilde\Psi_{0,\boldsymbol{\rho}'^{+k}_n}|\mathbf{u}_n|\tilde\Psi_{1,\boldsymbol{\rho}'_n}\rangle}{\langle\tilde\Psi_{0,\boldsymbol{\rho}'_n}|\tilde\Psi_{0,\boldsymbol{\rho}'_n}\rangle} \;&=\; \frac{\tilde r_{n-1}a_nb_nc_n}{r_nr_{n,0}}\left(1+\frac{(-1)^{\rho_{n,k}}d_n}{\varkappa_nc_nr_{n,k}}\right)\times\\ &\times\; \frac{(-1)^{\tilde\rho'_n}\;\prod_{l=1}^{n-2}y^{n,k}_{n-1,l}}{\prod_{s\neq k}(r_{n,k}(-1)^{\rho_{n,k}}+r_{n,s}(-1)^{\rho_{n,s}})}\,. \end{aligned}\qquad (4.3.83)$$

Фізичний інтерес представляють матричні елементи між власними станами періодичної задачі. Щоб їх отримати, ми маємо зформувати лінійні комбінації, визначені розв'язками рівнянь Бакстера: нагадаємо (4.2.55): $|\Phi_{\rho,\mathbf{E}}\rangle = \sum_{\boldsymbol{\rho}'_n}\mathcal{Q}^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\rho}'_n|\,\rho,\mathbf{E})\;|\tilde\Psi_{\rho,\boldsymbol{\rho}'_n}\rangle$ та відповідні ліві рівняння.

Нехай $\langle\Phi_0|$ — лівий власний вектор трансфер-матриці $\mathbf{t}_n(\lambda)$ з $\rho=0$ та $|\Phi_1\rangle$

— правий власний вектор з $\rho = 1$ (будемо часто опускати індекси $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}'$):

$$\langle \Phi_{0,\mathbf{E}'} |\, \mathbf{t}(\lambda|0,\mathbf{E}') = t^{(0)}(\lambda)\, \langle \Phi'_{0,\mathbf{E}} |\,, \qquad \mathbf{t}(\lambda|1,\mathbf{E})\, |\Phi_{1,\mathbf{E}}\rangle \;=\; t^{(1)}(\lambda)\, |\Phi_{1,\mathbf{E}}\rangle. \tag{4.3.84}$$

Нехай $Q_k^{L(0)}(\rho_{n,k})$ та $Q_k^{R(1)}(\rho_{n,k})$ — розв'язки рівняння Бакстера, що відповідають цим двом власним векторам. Після деякого спрощення ми отримуємо для матричних елементів (тримаючись нормалізації на стан допоміжної задачі):

$$\frac{\langle\, \Phi_0\, |\sigma_n^z|\, \Phi_1\, \rangle}{\langle\, \tilde\Psi_{0,\mathbf{0}}\, |\, \tilde\Psi_{0,\mathbf{0}}\, \rangle} \;=\; \sum_{\boldsymbol{\rho}'} \mathcal{N}(\boldsymbol{\rho}')\times$$

$$\times \left(R_0(\boldsymbol{\rho}') \left(\frac{a_n}{\tilde r} (-1)^{\tilde\rho'} - \frac{\varkappa_1 \varkappa_2 \cdots \varkappa_{n-1} b_n}{r_0} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} R_k(\boldsymbol{\rho}') \right), \tag{4.3.85}$$

де

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(\boldsymbol{\rho}') \;&=\; (-1)^{n\tilde\rho'} \prod_{l<m}^{n-1} \frac{r_l \,+\, r_m}{r_l(-1)^{\rho_l} \,+\, r_m(-1)^{\rho_m}}, \\
R_0(\boldsymbol{\rho}') \;&=\; \prod_{l=1}^{n-1} Q_l^{\mathrm{L}(0)}(\rho_l) Q_l^{\mathrm{R}(1)}(\rho_l), &(4.3.86)\\
R_k(\boldsymbol{\rho}') \;&=\; -\frac{a_n b_n c_n}{r_0}\, Q_k^{\mathrm{L}(0)}(\rho_k+1)\, Q_k^{\mathrm{R}(1)}(\rho_k) \prod_{l\neq k}^{n-1} Q_l^{\mathrm{L}(0)}(\rho_l)\, Q_l^{\mathrm{R}(1)}(\rho_l) \;\times \\
&\times\; \left(1 - \frac{d_n}{\varkappa_n c_n\, \nu_k} \right) \frac{\nu_k^{n-1} \chi_k}{\prod_{s\neq k} (\nu_k \,-\, \nu_s)} &(4.3.87)
\end{aligned}$$

з $r_k = r_{n,k}$, $\rho_k = \rho_{n,k}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$\nu_k = -r_k(-1)^{\rho_k}\,, \quad \tilde r = r_0\, r_1 \cdots r_{n-1} \quad \text{та} \quad \tilde\rho' = \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k. \tag{4.3.88}$$

Походження різних доданків в (4.3.85) таке: сума по $\boldsymbol{\rho}'$ йде з (4.2.55), $\mathcal{N}(\boldsymbol{\rho}')$ — нормуючий множник з (4.3.77). Доданки при $R_0(\boldsymbol{\rho}')$ виникають з першого рядка (4.2.66): зсув у $\rho_{n,0}$ впливає лише на зарядовий сектор. Сума по k та вираз для $R_k(\boldsymbol{\rho}')$ йде з другого рядка в (4.2.66). Зараз може бути виконана сума по k. Дійсно, як показано в [56], використовуючи рівняння Бакстера, (4.3.85) може бути переписано як

$$\frac{\langle\, \Phi_0 \,|\, \mathbf{u}_n \,|\, \Phi_1 \,\rangle}{\langle\, \tilde{\Psi}_{0,\mathbf{0}} \,|\, \tilde{\Psi}_{0,\mathbf{0}} \,\rangle} \;=\; \frac{a_n}{2\, r_0} \sum_{\boldsymbol{\rho}' \in \mathbb{Z}_2^{n-1}} \mathcal{N}(\boldsymbol{\rho}')\, R_0(\boldsymbol{\rho}')\, R(\boldsymbol{\rho}') \tag{4.3.89}$$

з

$$R(\boldsymbol{\rho}') \;=\; \frac{t^{(0)}(-\zeta_n)}{\prod_{l=1}^{n-1}(-\zeta_n + (-1)^{\rho_l} r_l)} \;+\; \frac{t^{(1)}(\zeta_n)}{\prod_{l=1}^{n-1}(\zeta_n + (-1)^{\rho_l} r_l)}, \qquad \zeta_n \;=\; \frac{b_n}{a_n\, \varkappa_n}\,. \tag{4.3.90}$$

Незважаючи на простий вигляд, виконання підсумовування по $\mathbb{Z}_2$-змінним явно для загальної $N = 2$ ББС-моделі здається на сьогоднішній день безнадійною задачою. Однак, для однорідної моделі буде показано, що це можливо.

4.3.3. Однорідна $N = 2$ ББС-модель: спектр та нулі B_n- та t_n-власних значень-поліномів. Ми зараз звужуємо наш розгляд на випадок $N = 2$ та беремо всі параметри незалежними від вузла (“однорідними”):

$$a_m = a,\;\; b_m = b,\;\; c_m = c,\;\; d_m = d,\;\; \varkappa_m = \varkappa,\;\; r_m = r,\;\; \mathcal{L}_m(\lambda^2) = \mathcal{L}(\lambda^2),\;\; \forall\, m. \tag{4.3.91}$$

Тоді класична монодромія має вигляд

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_n(\lambda^2) & \mathcal{B}_n(\lambda^2) \\ \mathcal{C}_n(\lambda^2) & \mathcal{D}_n(\lambda^2) \end{pmatrix} = \big(\mathcal{L}(\lambda^N)\big)^n. \tag{4.3.92}$$

Розгянемо слід, визначник та власні значення $x_\pm$ матриці $\mathcal{L}$:

$$\tau(\lambda^2) = tr\, \mathcal{L}(\lambda^2) = 1 + \frac{b^2 d^2}{\varkappa^2} - \lambda^2(\varkappa^2 + a^2 c^2), \tag{4.3.93}$$

$$\delta(\lambda^2) = \det\, \mathcal{L}(\lambda^2) \;=\; (b^2/\varkappa^2 - \lambda^2 a^2)\, (d^2 - \lambda^2 c^2 \varkappa^2) \;=\; F(\lambda)\, F(-\lambda), \tag{4.3.94}$$

$$x_{\pm} = \tfrac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\,\delta}), \qquad F(\lambda) = (b - a\varkappa\lambda)(\lambda c + d/\varkappa). \tag{4.3.95}$$

З матриці $\mathcal{L}(\lambda^2)$ ми отримуємо

$$\mathcal{B}_m(\lambda^2) = -\lambda^2\,(a^2 - b^2)\,(x_+^n - x_-^n)/(x_+ - x_-), \tag{4.3.96}$$

так що нулі $\mathcal{B}_m$ з'являються при $x_+/x_- = e^{\mathrm{i}\,m\,\phi_{n,s}}$ з

$$\phi_{n,s} = 2\pi s/n, \qquad s = 1, 2, \dots, n-1, \quad s \neq 0. \tag{4.3.97}$$

Використовуючи $\tau^2 = 4\,\delta\,\cos^2(\phi/2)$ та (4.3.93), (4.3.94) ми можемо перевести нулі позначені $\phi_{n,s}$ в нулі $\lambda_{n,s}$.

Зараз ми розв'язуємо функціональні співвідношення (4.2.62),(4.2.64) для спектру трансфер-матриці. Використовуючи (4.2.62) для $j = 2$ та виключаючи $\tau^{(3)}$ завдяки (4.2.64) ми отримуємо функціональне співвідношення

$$t(\lambda)\,t(-\lambda) = (-1)^{\rho}(z(\lambda) + z(-\lambda)) + \mathcal{A}_n(\lambda^2) + \mathcal{D}_n(\lambda^2)\,, \tag{4.3.98}$$

яке ми будемо використовувати, щоб знайти $t(\lambda)$. В термінах (4.3.93) та (4.3.94) це дає

$$t(\lambda)\,t(-\lambda) = (-1)^{\rho}\,(\delta_+^n + \delta_-^n) + x_+^n + x_-^n. \tag{4.3.99}$$

де $\delta_{\pm} = (b \pm a\varkappa\lambda)\,(d \mp c\varkappa\lambda)$; $\delta_+\delta_- = \delta(\lambda^2) = x_+\,x_-$. Вводячи q, яке приймає n значень $\pi(2s + 1 - \rho)/n$, $s = 0, \dots, n-1$, ми можемо записати (4.3.98) як

$$\begin{aligned} t(\lambda)\,t(-\lambda) &= (-1)^n \prod_{\mathsf{q}} (e^{\mathrm{i}\mathsf{q}}\delta_+ - \tau(\lambda^2) + e^{-\mathrm{i}\mathsf{q}}\delta_-) = \\ &= (-1)^n \prod_{\mathsf{q}} \big(A(\mathsf{q})\lambda^2 - C(\mathsf{q}) + 2\mathrm{i}\,B(\mathsf{q})\lambda\big) \end{aligned} \tag{4.3.100}$$

з

$$A(\mathsf{q}) = a^2 c^2 - 2\varkappa ac \cos \mathsf{q} + \varkappa^2; \qquad B(\mathsf{q}) = (ad - bc) \sin \mathsf{q}\,;$$

$$C(\mathsf{q}) = 1 - 2(b\,d/\varkappa) \cos \mathsf{q} + b^2 d^2/\varkappa^2\,. \qquad (4.3.101)$$

Факторизуючи поліном від λ, ми отримуємо

$$t(\lambda)\, t(-\lambda) = (-1)^n \prod_{\mathsf{q}} A(\mathsf{q})\,(\lambda - s_{\mathsf{q}})\,(\lambda + s_{-\mathsf{q}}) \qquad (4.3.102)$$

з

$$s_{\mathsf{q}} = \frac{1}{A(\mathsf{q})}(\sqrt{D(\mathsf{q})} - \mathrm{i}B(\mathsf{q})), \qquad D(\mathsf{q}) = A(\mathsf{q})\, C(\mathsf{q}) - B(\mathsf{q})^2, \qquad (4.3.103)$$

(фіксація знака перед $\sqrt{D(q)}$ вимагає спеціальної домовленості, див. [54]) та після деякого міркування знаходимо спектр

$$t(\lambda) = (a^n c^n + (-1)^\rho \varkappa^n)\ \textstyle\prod_{\mathsf{q}} (\lambda \pm s_{\mathsf{q}}), \qquad (4.3.104)$$

де знаки ще не є зафіксованими. Порівнюючи λ-незалежний доданок в (4.2.53)

$$t(\lambda) = 1 + (-1)^\rho b^n\, d^n/\varkappa^n + E_1\lambda + \cdots + E_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n(a^n c^n + (-1)^\rho \varkappa^n). \quad (4.3.105)$$

з відповідним доданком в (4.3.104) показує, що число мінусів в (4.3.104) має бути парним (непарним) для NS-сектора $\rho = 0$ (R-сектора $\rho = 1$).

Корисно ввести наступне поняття: власні значення (4.3.104) з усіма знаками + відповідає стану без “квазічастинкових” збуджень. Кожний множник позначений q з знаком мінус дає внесок “збудження q-квазі-імпульсу”. Ці знаки ми будемо записувати через змінні $\sigma_{\mathsf{q}} \in \mathbb{Z}_2$, де для незбуджених (збуджених) квазічастинок з квазі-імпульсом q ми покладаємо $\sigma_{\mathsf{q}} = 0$ ($\sigma_{\mathsf{q}} = 1$). Так що замість (4.3.104), ми будемо писати більш точно

$$t^{(\rho)}(\lambda) = (a^n c^n + (-1)^\rho \varkappa^n)\ \textstyle\prod_{\mathsf{q}} (\lambda + (-1)^{\sigma_{\mathsf{q}}} s_{\mathsf{q}}). \qquad (4.3.106)$$

Для неоднорідного випадку відповідні власні вектори розгянуто в пункті 4.3.2.

4.3.4. Функціональне співвідношення для діагональ-в-діагональ трансфер-матриці моделі Ізінга. В цьому пункті ми звужуємо результати попереднього пункту на випадок діагональ-в-діагональ трансфер-матриці моделі Ізінга на квадратній гратці (4.2.16). Отже, ми покладаємо $a = c$, $b = -d$, $\varkappa = 1$ та $\lambda = b/a$. Порахуємо інгредієнти функціонального співвідношення (4.3.98). Ми маємо $F_m(\lambda) = -(b - a\lambda)^2$. Тому завдяки (4.2.63), $z(\lambda) = (-1)^n(b + a\,\lambda)^{2n}$, $z(b/a) = (-1)^n\,(2b)^{2n}$, $z(-b/a) = 0$ та усереднений L-оператор (4.2.28) при $\lambda^2 = b^2/a^2$ стає

$$\mathcal{L}_k(b^2/a^2) = \begin{pmatrix} 1 - b^2/a^2, & -b^2/a^2\,(a^2 - b^2) \\ a^2 - b^2, & b^2(b^2 - a^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \end{pmatrix} \cdot (1 - b^2/a^2) \cdot \begin{pmatrix} 1, & -b^2 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$\mathcal{A}_n(b^2/a^2) + \mathcal{D}_n(b^2/a^2) \;=\; \mathrm{tr}\,\mathcal{T}_n(b^2/a^2) \;=\; (1 - b^2/a^2)^n(1 - a^2b^2)^n\,.$$

Підставляючи ці вирази в (4.3.98), ми отримуємо наступне функціональне співвідношення

$$t(b/a)\;t(-b/a) \;=\; (-1)^{\rho+n}(2b)^{2n} + (1 - b^2/a^2)^n(1 - a^2b^2)^n\,.$$

Ми хочемо порівняти його з функціональним співвідношенням (7.5.5) в [15]:

$$V(K, L)\;V(L + \mathrm{i}\pi/2, -K)\;C \;=\; (2\mathrm{i}\sinh 2L)^n\,I + (-2\mathrm{i}\sinh 2K)^n\,R\,,$$

де C — оператор трансляції, R — оператор перегортання спіну $\mathbf{V}_n$ та $V(K, L)$ — трансфер-матриця (4.2.14) з $K_x = 0$, $K_y = L$, $K_d = K$, $e^{-2L} = b/a$,

$\tanh K = a\,b$. Тому $V(K,L) = \exp(nL)\ \cosh^n K\ \mathbf{t}_n(b/a)$. Подібний аналіз дає $V(L + \mathrm{i}\pi/2, -K)C\ =\ \mathrm{i}^n \exp(n\,L)\ \cosh^n K\ \mathbf{t}_n(-b/a)$. Зараз взявши до уваги те, що власними значеннями R є $(-1)^\rho$ та

$$2\sinh 2K\ =\ \frac{4ab}{1-a^2b^2},\quad 2\sinh 2L\ =\ \frac{a^2-b^2}{ab},\quad \frac{\exp(-2L)}{\cosh^2 K}\ =\ (1-a^2b^2)\,b/a\,,$$

ми бачимо, що обидва функціональні співвідношення є тотожніми.

4.3.5. Модель Ізінга: спектр та нулі $B_n(\lambda)$- та $t_n(\lambda)$-власних значень-поліномів. Ми зараз розглянемо ще більш спеціальний випадок — випадок (4.2.15), вказаний в пункті 4.2.2:

$$a_j\ =\ c_j\ =\ a,\qquad b_j\ =\ d_j\ =\ b,\qquad \varkappa_j\ =\ 1;\qquad \forall\, j\,. \tag{4.3.107}$$

У випадку моделі Ізінга (4.3.107), 2^n власних значень (4.3.106) з (4.3.103) можуть бути записані (по 2^{n-1} в кожному секторі $\rho = 0,\,1$):

$$t^{(\rho)}(\lambda) = (a^{2n}+(-1)^\rho)\prod_{\mathsf{q}}(\lambda+(-1)^{\sigma_\mathsf{q}}\,s_\mathsf{q}),\quad s_\mathsf{q}\ =\ s_{-\mathsf{q}}\ =\ \sqrt{\frac{b^4\ -2\,b^2\cos\mathsf{q}+1}{a^4\ -2\,a^2\cos\mathsf{q}+1}}\,, \tag{4.3.108}$$

де квазіімпульс q в кожному секторі приймає n значень:

$$\mathsf{q} = \frac{2\pi}{n}\,m,\qquad m \text{ — ціле для } \rho = 1 \text{ (R)};\quad m \text{ напівціле для } \rho = 0 \text{ (NS)}. \tag{4.3.109}$$

Нагадаємо, що ми знайшли з (4.3.105) те, що в NS (R) секторі, власні стани $\mathbf{t}(\lambda)$ мають парну (непарну) кількість збуджень: $\prod_\mathsf{q}(-1)^{\sigma_\mathsf{q}}\ =\ (-1)^\rho$.

Для $\mathsf{q} = 0$ (такий імпульс квазічастинки допускається лише в R-секторі) та $\mathsf{q} = \pi$ ми визначаємо

$$s_0 = \frac{b^2-1}{a^2-1}\,,\qquad s_\pi = \frac{b^2+1}{a^2+1}\,. \tag{4.3.110}$$

Імпульс $\mathsf{q} = \pi$ належить R-сектору при парному n. Однак, для непарного n він належить NS-сектору. Присутність в різних місцях фпкторів $(\lambda \pm s_0)$ та $(\lambda \pm s_\pi)$ в (4.3.108) для парного n та для непарного часто приводить до необхідності окремого розгляду випадів парного та непарного n. Надалі ми резервуємо позначення λ_{q} для $\lambda_{\mathsf{q}} = (-1)^{\sigma_{\mathsf{q}}} s_{\mathsf{q}}$ та в інших випадках використовуємо s_{q}, яке визначено в (4.3.108).

Нулі $\lambda_{n,k}$ власного значення-полінома для оператора $B_n(\lambda)$ визначені (4.3.97), (4.3.93), (4.3.94):

$$\tau(\lambda_{n,k}^2) \;=\; 4\cos^2 q_{n,k}\, F(\lambda_{n,k})F(-\lambda_{n,k}), \qquad q_{n,k} = \pi\, k/n, \qquad k = 1, \ldots, n-1. \tag{4.3.111}$$

Оскільки зараз

$$F(\lambda) \;=\; F(-\lambda) \;=\; b^2 \,-\, a^2\, \lambda^2; \qquad \tau(\lambda^2) \;=\; 1 \,+\, b^4 \,-(1 \,+\, a^4)\, \lambda^2, \tag{4.3.112}$$

ми отримуємо

$$r_{n,k} \;=\; \sqrt{(b^4 \,-2\, b^2 \cos q_{n,k} + 1)/(a^4 \,-2\, a^2 \cos q_{n,k} + 1)} = s_{q_{n,k}}\,. \tag{4.3.113}$$

Зауважимо, що s_{q} та $r_{n,k}$ можуть співпадати.

4.3.6. Власні стани в моделі Ізінга з рівнянь Бакстера. Щоб отримати власні вектори $\mathbf{t}(\lambda)$, ми маємо розв'язати рівняння Бакстера. При обмеженні параметрів (4.3.107) ми маємо $F(\lambda) = F(-\lambda)$ та ліві і праві рівняння Бакстера (4.2.59), (4.2.58) стають ідентичними. Опускаючи індекси L та R в Q_k та використовуючи $\lambda_{n,k} = -(-1)^{\rho_{n,k}} r_{n,k}$, $\rho_{n,k} = 0, 1$ ми отримуємо:

$$t_n(\lambda_{n,k})\, Q_k(\rho_{n,k}) \;=\; \left(\frac{(-1)^\rho F^{n-1}(\lambda_{n,k})}{(\lambda_{n,k})^{n-1}\, \chi_k} \;+\; (-\lambda_{n,k})^{n-1}\, \chi_k\, F(\lambda_{n,k}) \right) Q_k(\rho_{n,k}+1). \tag{4.3.114}$$

З (4.3.114) ми маємо наступну умову сумісності:

$$t(-r_{n,k})t(r_{n,k}) = (-1)^{n-1}\left(\frac{(-1)^{\rho}\,F^{n-1}(r_{n,k})}{(r_{n,k})^{n-1}\,\chi_k} + (-r_{n,k})^{n-1}\,\chi_k\,F(r_{n,k})\right)^2,$$

якщо $t(\lambda)$ — власне значення з сектору ρ. Якщо $(-1)^k = (-1)^{\rho+1}$ тоді квазіімпульс $\mathsf{q} = q_{n,k}$ належить сектору ρ та для $r_{n,k} = s_{q_{n,k}}$ ми маємо $t(-r_{n,k})\,t(r_{n,k}) = 0$. Це приводить до співвідношення, незалежного від конкретного $t(\lambda)$ та його ρ:

$$\chi_k^2\,r_{n,k}^{2(n-1)} = (-1)^{n+k+1}F^{n-2}(r_{n,k})\,. \tag{4.3.115}$$

Хоча власне значення-поліном $t(\lambda)$ відоме з (4.3.108), при розв'язанні (4.3.114) для $Q_k(\rho_{n,k})$ може виникнути складність, якщо $t_n(\lambda_{n,k})$ зануляється або якщо, завдяки (4.3.115), вираз у великих дужках справа (4.3.114) зануляється.Тому ми маємо розрізняти чотири випадки (ми не пишемо n та пишемо просто $r_k = r_{n,k}$ та $\rho_k = \rho_{n,k}$):

(i) $\underline{(-1)^{\rho} = (-1)^k:}$ Це легкий випадок, оскільки з (4.3.109) та (4.3.111) маємо $t^{\rho}(r_k) \neq 0$ та $t^{\rho}(-r_k) \neq 0$ та

$$Q_k^{\mathrm{L,R}}(0) = 1\,, \quad Q_k^{\mathrm{L,R}}(1) = \frac{(-1)^{n-1}t^{\rho}(-r_k)}{2\chi_k\,r_k^{n-1}\,F(r_k)}\,.$$

Інші три випадки трапляються при $\underline{(-1)^{\rho} = (-1)^{k-1}:}$

(ii) $t^{\rho}(r_k) \neq 0,\ t^{\rho}(-r_k) = 0$: $t^{\rho}(\lambda)$ містить множник $(\lambda + r_k)^2$ (обидва $\mathsf{q} = \pm q_k$ не є збудженими), ми можемо нормалізувати

$$Q_k^{\mathrm{L,R}}(0) = 1, \quad Q_k^{\mathrm{L,R}}(1) = 0\,.$$

(iii) $t^{\rho}(r_k) = 0,\ t^{\rho}(-r_k) \neq 0$: $t^{\rho}(\lambda)$ містить множник $(\lambda - r_k)^2$ (обидва $\mathsf{q} = \pm q_k$ є збудженими), ми не можемо вибрати $Q_k^{\mathrm{L,R}}(0) = 1$, але ми можемо нормалізувати

$$Q_k^{\mathrm{L,R}}(0) \;=\; 0\,, \quad Q_k^{\mathrm{L,R}}(1) \;=\; 1\,.$$

(iv) $t^\rho(r_k) = t^\rho(-r_k) = 0$: $t^\rho(\lambda)$ містить $(\lambda^2 - r_k^2)$ ($\mathsf{q} = +q_k$ або $\mathsf{q} = -q_k$ є збудженим): процедура Лопіталя, з використанням збурення (4.3.107) як описано в [55] (щоб отримати власні вектори оператора трансляції), веде до

$$Q_k^{\mathrm{R}}(0) = Q_k^{\mathrm{L}}(0) = 1\,, \;\; Q_k^{\mathrm{R}}(1) = -Q_k^{\mathrm{L}}(1) = \frac{(-1)^{n+\sigma_{q_k}+1} 2\mathrm{i} \sin q_k \, t^\rho_{\breve{q}_k}(-r_k)}{n\,\chi_k\, r_k^{n-1}\, A(q_k)}$$

(зауважимо, що з границі Лопіталя $Q_k^{\mathrm{R}}(1) = -\,Q_k^{\mathrm{L}}(1)$), де

$$t^\rho(\lambda) \;=\; t^\rho_{\breve{q}_k}(\lambda)\,(\lambda + (-1)^{\sigma_{q_k}} s_{q_k})(\lambda - (-1)^{\sigma_{q_k}} s_{-q_k}), \quad A(\mathsf{q}) \;=\; a^4 - 2a^2\cos\mathsf{q} + 1. \tag{4.3.116}$$

Надалі ми будемо розгядати тільки три випадки, які дозволяють нормування $Q_k^{\mathrm{L,R}}(0) = 1$. Випадок (iii) також може бути розглянутий, але ми поки що не будемо цього робити. У відповідності до якого випадку відповідне власне значення-поліном належить, визначимо набори $\breve{\mathcal{D}}^{(\rho)}$, $\widehat{\mathcal{D}}^{(\rho)}$, $\mathcal{D}^{(\rho)}$:

$k \in \breve{\mathcal{D}}^{(\rho)}$,, якщо t^ρ має множник $(\lambda + r_k)^2$, тобто ми маємо випадок (ii),

$k \in \widehat{\mathcal{D}}^{(\rho)}$, якщо t^ρ має множник $(\lambda - r_k)^2$, випадок (iii), та

$k \in \mathcal{D}^{(\rho)}$, якщо t^ρ має множник $(\lambda^2 - r_k^2)$, тобто ми маємо випадок (iv).

Через $D = |\mathcal{D}|$ ми позначаємо число елементів в $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{(0)} \cup \mathcal{D}^{(1)}$, аналогічно для $\breve{\mathcal{D}}$ і т.д.

4.3.7. Явне обчислення факторів $\mathcal{N}(\boldsymbol{\rho}')R_0(\boldsymbol{\rho}')R(\boldsymbol{\rho}')$ в (4.3.89). Ми зараз починаємо обчислення (4.3.89) з (4.3.86) та (4.3.90) для однорідної моделі Ізінга, коли параметри сильно спрощуються. Зараз

$$\zeta \;=\; b/a, \qquad r_0^2 \;=\; (a^2 - b^2)(a^{4n} - 1)/(a^4 - 1). \tag{4.3.117}$$

та $\mathbf{u}_n$ представляється матрицею Паулі σ_z.

Для визначенності, нехай кет-вектора належить R-сектору. Тоді для матричних елементів σ_z бра-вектор має бути з NS-сектора. Ми задаємо стани вказуючи набори збудженних імпульсів (відповідні $\sigma_k = 1$). Виключаючи тимчасово випадок (iii), ми вибираємо $\widehat{\mathcal{D}}^{(\rho)}$ пустим.

Справа (4.3.86) ми маємо обчислити множники $\mathcal{N}(\boldsymbol{\rho}')\, R_0(\boldsymbol{\rho}')\, R(\boldsymbol{\rho}')$. Стартуємо з $R_0(\boldsymbol{\rho}') \;=\; \prod_{l=1}^{n-1} Q_l^{(0)}(\rho_l) Q_l^{(1)}(\rho_l)$.

Для будь-якого вибору збуджень, завжди один з множників $Q_l^{(0)}(\rho_l)$ або $Q_l^{(1)}(\rho_l)$ відповідає випадку (i) з пункту (4.3.6). Оскільки ми виключаємо для імпульсів випадок (iii), інший фактор тоді має бути з (ii) або (iv). Отже завжди $Q_l^{(0)}(0) Q_l^{(1)}(0) \;=\; 1$. Для $l \in \breve{\mathcal{D}}$, випадок (ii), ми маємо $Q_l^{(0)}(1) Q_l^{(1)}(1) = 0$ оскільки або $Q_l^{(0)}(1) = 0$ або $Q_l^{(1)}(1) = 0$ в залежності від парності l. Отже, в (4.3.86) підсумовування зводиться тільки до підсумовування по ρ_l для $l \in \mathcal{D}$, з фіксованим $\rho_l = 0$ для $l \in \breve{\mathcal{D}}$.

$R_0(\boldsymbol{\rho}')$ отримує нетривіальний внесок $Q_k(1)$ з випадків (i) та (iv). Він може бути переписаний у простому вигляді, якщо ми використовуємо явні формули для $t^{(\rho)}(-r_k)$. Для обох значень $\rho_l = 0,\ 1$, результатом є

$$Q_l^{(0)}(\rho_l)\, Q_l^{(1)}(\rho_l) \;=\; (-1)^{(n-1)\rho_l}\, \frac{(-1)^{\rho_l} r_l + \xi_l}{r_l \,+\, \xi_l} \cdot \prod_{k \in \breve{\mathcal{D}}} \frac{(-1)^{\rho_l} r_l + r_k}{r_l + r_k}\,, \qquad (4.3.118)$$

де ми отримали різні результати, відповідно, якщо s_0 або s_π або обидва (4.3.110) є збудженими:

$$\xi_l = \begin{cases} (-1)^{\sigma_0}\ \dfrac{b^2 - e^{\mathrm{i}q}}{a^2 - e^{\mathrm{i}q}} \\[2ex] (-1)^{\sigma_0}\ \dfrac{b^2\, e^{\mathrm{i}q} - 1}{a^2 - e^{\mathrm{i}q}} \end{cases} \quad \text{для}\ \ (-1)^{\sigma_0} \;=\; \pm (-1)^{\sigma_\pi}\,; \qquad \tilde{q}_l = (-1)^{\sigma_{q_l} + |\mathcal{D}| + l}\, q_l\,. \qquad (4.3.119)$$

Зараз, помноживши на $\mathcal{N}(\boldsymbol{\rho}')$, легко бачити, що добутки $k \in \check{\mathcal{D}}$ в (4.3.118) скорочуються (нагадаємо, що $\rho_k = 0$ для $k \in \check{\mathcal{D}}$) та ми отримуємо остаточно

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{\rho}) \cdot R_0(\boldsymbol{\rho}') \;=\; \prod_{l\in\mathcal{D}} (-1)^{\rho_l} \, \frac{(-1)^{\rho_l} r_l \,+\, \xi_l}{r_l \,+\, \xi_l} \prod_{m\in\mathcal{D}, m>l} \frac{r_l + r_m}{(-1)^{\rho_l} r_l + (-1)^{\rho_m} r_m} \,. \tag{4.3.120}$$

При обрахунку $R(\boldsymbol{\rho}')$ в (4.3.90) ми маємо підставити явні вирази для $t^{(0)}(-\zeta_n)$ та $t^{(1)}(\zeta_n)$ з (4.3.108). Тут, як вже було зауважено після (4.3.110), випадок парного n та непарного n дає різні формули. Наприклад, множник $(\lambda - (-1)^{\sigma_\pi} s_\pi)$ з'являється тільки для R-сектора при парному n та в NS-секторі при непарному n. Отже

$$\text{NS}, \;\; n \text{ odd:} \;\; t^{(0)}(-\zeta) \,=\, (a^{2n}+1)(-\zeta + (-1)^{\sigma_\pi} s_\pi) \prod_{k\in\check{\mathcal{D}}^{(0)}} (-\zeta + r_k)^2 \prod_{l\in\mathcal{D}^{(0)}} (\zeta^2 - r_l^2)\,, \tag{4.3.121}$$

(для парного n ми опустили дужку з s_π), оскільки в NS-секторі тільки з'являються лише непарні k і вони попадають в один із класів (ii) та (iv) (клас (iii) тимчасово виключений). Аналогічно:

$$\text{R}, \;\; n\text{ -непарне:} \quad t^{(1)}(\zeta) \,=\, (a^{2n}-1)(\zeta + (-1)^{\sigma_0} s_0) \prod_{k\in\check{\mathcal{D}}^{(1)}} (\zeta + r_k)^2 \prod_{l\in\mathcal{D}^{(1)}} (\zeta^2 - r_l^2). \tag{4.3.122}$$

Нескладними перетвореннями ми можемо пересунути ρ_l-залежні доданки таким чином, що вони з'являться лише в одному місці в чисельнику та отримати

$$\begin{aligned} R^{(n\text{-непарне})}(\boldsymbol{\rho}') \;=\; \mathsf{R} \,\cdot\, \Big\{ &(-1)^{\sigma_\pi} (a^2+1)\,(-\zeta \,+ (-1)^{\sigma_\pi} s_\pi)\, \textstyle\prod_{l\in\mathcal{D}} ((-1)^{\rho_l}\, r_l \,+\zeta) \\ &-(-1)^{\sigma_0} (a^2-1)\,(\zeta \,+ (-1)^{\sigma_0} s_0)\, \textstyle\prod_{l\in\mathcal{D}} ((-1)^{\rho_l}\, r_l \,-\zeta) \Big\} \cdot \textstyle\prod_{k\in\check{\mathcal{D}}} ((-1)^k \zeta \,+ r_k) \end{aligned} \tag{4.3.123}$$

з

$$\mathsf{R} \,=\, (\boldsymbol{\alpha\beta})^{-(n-1)/2}\, a^{n-1}(a^{4n}-1)/(a^4-1), \quad \boldsymbol{\alpha} \,=\, a^2 - b^2, \quad \boldsymbol{\beta} \,=\, 1 - a^2 b^2.$$

Перший доданок у фігурних дужках з бра-вектора з NS-сектору, другий — з кет-вектора з R-сектору. Формула для $R^{(n\,\text{парне})}$ є аналогічною.

4.3.8. Підсумовування, квадрат матричного елементу. Комбінуючи (4.3.120) з (4.3.123), отримуємо, що матричний елемент спінового оператора дається багатократною сумою по всіх компонентах $\boldsymbol{\rho}'$:

$$\frac{\langle\, \Phi_0\, |\sigma_n^z|\, \Phi_1\,\rangle}{\langle\, \tilde{\Psi}_{\mathbf{0}}\, |\, \tilde{\Psi}_{\mathbf{0}}\,\rangle} \;=\; \sum_{\boldsymbol{\rho}' \in \mathbb{Z}_2^{n-1}} \left(\mathcal{R}_+^\nu \prod_{l\in\mathcal{D}} ((-1)^{\rho_l}\, r_l \,+ \zeta) + \mathcal{R}_-^\nu \prod_{l\in\mathcal{D}} ((-1)^{\rho_l}\, r_l \,- \zeta) \right) \;\times$$

$$\times \prod_{l\in\mathcal{D}} (-1)^{\rho_l}\, \frac{(-1)^{\rho_l} r_l \,+\, \xi_l}{r_l \,+\, \xi_l} \prod_{m\in\mathcal{D}, m>l} \frac{r_l + r_m}{(-1)^{\rho_l} r_l + (-1)^{\rho_m} r_m}\,, \tag{4.3.124}$$

з деякими $\boldsymbol{\rho}'$-незалежними факторами $\mathcal{R}_\pm^\nu$. Індекс ν вказано, щоб нагадувати, що ми маємо різні вирази для парного та непарного n. В [56] показано, що підсумовування може бути виконано. Воно приводить до факторізованого виразу. Для прикладу ми наводимо формулу підсумовування по ρ_l з $l \in \mathcal{D}$, якщо розмірність $\mathcal{D}$ є непарною та ξ_l визначено верхньою формулою (4.3.119):

$$\sum_{\rho_l,\, l\in\mathcal{D}} \frac{\prod_{l\in\mathcal{D}} (-1)^{\rho_l}\, (\,(-1)^{\rho_l} r_l \,+\, \xi_l)(\,(-1)^{\rho_l} r_l \,+\, \zeta)}{\prod_{l<m,\, l,m\in\mathcal{D}} (\,(-1)^{\rho_l} r_l \,+\, (-1)^{\rho_m} r_m)} =$$

$$= \; \mathcal{C}\,(b \pm a) \left(\textstyle\prod_{j\in\mathcal{D}} e^{\mathrm{i}\tilde{q}_j} \mp ab \right) \;\times$$

$$\times \frac{\prod_{l\in\mathcal{D}} (2\, r_l/a)\, (a^2\, e^{\mathrm{i}\tilde{q}_l} - 1)^{(D-1)/2}\, (e^{\mathrm{i}\tilde{q}_l} - a^2)^{(D-3)/2}}{\prod\limits_{l,m\in\mathcal{D},\, l<m} (\pm(e^{\mathrm{i}\tilde{q}_l + \mathrm{i}\tilde{q}_m} - 1))}\,, \tag{4.3.125}$$

$$\mathcal{C} \;=\; \boldsymbol{\alpha}^{-(D-1)(D-3)/4}\, \boldsymbol{\beta}^{-(D-1)^2/4}.$$

Випадок парного $\mathcal{D}$ є аналогічним, див. (52) в [56].

Надалі нас буде цікавити добуток матричних елементів спінового оператора між довільними станами періодичної задачі, який не залежить від нормування лівих та правих власних станів, тобто ми хочемо порахувати

$$\frac{\langle\Phi_0|\mathbf{u}_n|\Phi_1\rangle\langle\Phi_1|\mathbf{u}_n|\Phi_0\rangle}{\langle\Phi_0|\Phi_0\rangle\langle\Phi_1|\Phi_1\rangle}\,. \tag{4.3.126}$$

Обчислюємо квадрат модуля матричного елемента. При цьому деякі фактори з (4.3.125) можуть бути переписані. Наприклад

$$|a^2\, e^{\mathrm{i}\tilde{q}_l} \,-\, 1\,|^2 \;=\; |e^{\mathrm{i}\tilde{q}_l} - a^2|^2 \;=\; A(\tilde{q}_l) \;=\; a^4 \,-\, 2a^2\cos\tilde{q}_l \,+\, 1, \tag{4.3.127}$$

$$|\, e^{\mathrm{i}\tilde{q}_l + \mathrm{i}\tilde{q}_m} \,-\, 1\,|^2 \;=\; \frac{r_m^2 \,-\, r_l^2}{\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}}\; A(\tilde{q}_m)\; A(\tilde{q}_l)\;\; \frac{\sin\frac{1}{2}(\tilde{q}_l + \tilde{q}_m)}{\sin\frac{1}{2}(\tilde{q}_l \,-\, \tilde{q}_m)} \tag{4.3.128}$$

та всі фактори $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ та $A(\tilde{q}_m)$ скорочуються. Отже ми отримуємо для довільного n та $\sigma_0 = \sigma_\pi$:

$$\begin{aligned} &\frac{\langle\, \Phi_0\,|\, \sigma_n^z\,|\, \Phi_1\,\rangle\; \langle\, \Phi_1\,|\, \sigma_n^z\,|\, \Phi_0\,\rangle}{\langle\, \tilde{\Psi}_{0,\mathbf{0}}\,|\, \tilde{\Psi}_{0,\mathbf{0}}\,\rangle^2} = \\ &= (\lambda_\pi^2 \,-\, \lambda_0^2\,)^{(D-\delta)/2}\, (\lambda_0 \,+\, \lambda_\pi)^\delta \prod_{l\in\mathcal{D}} \frac{2\, r_l}{(\lambda_0 \,+ r_l)\,(\lambda_\pi \,+ r_l)} \;\times \\ &\times \prod_{l<m,\; l,m\in\mathcal{D}} \frac{r_l \,+ r_m}{r_l \,- r_m} \;\cdot\; \frac{\sin\,\frac{1}{2}(\tilde{q}_l - \tilde{q}_m)}{\sin\,\frac{1}{2}(\tilde{q}_l \,+ \tilde{q}_m)} \end{aligned} \tag{4.3.129}$$

де $\delta = 1$. Аналогічно ми можемо знайти добуток матричних елементів у випадку $\sigma_0 \neq \sigma_\pi$. Остаточний результат — це (4.3.129) з $\delta = 0$. Зауважимо, що збудження типу (ii), тобто $k \in \breve{\mathcal{D}}$, явно не входять у нашу формулу (нагадаємо, що ми поки що виключаємо випадок $k \in \widehat{\mathcal{D}}$).

4.3.9. Нормування станів періодичної задачі та кінцевий результат через змінні $\lambda_0, \lambda_\pi, r_k$ та $\tilde{q}_l$. Щоб порівняти (4.3.129) з результатами, отриманими А. Бугрієм та О. Лісовим [29, 30], ми змінюємо нормування та обчислюємо відношення (4.3.126). Для цього ми маємо поділити (4.3.129) на

$$\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle \langle \Phi_1 | \Phi_1 \rangle / \langle \tilde{\Psi}_{0,\mathbf{0}} | \tilde{\Psi}_{0,\mathbf{0}} \rangle^2 \,. \tag{4.3.130}$$

Однак формула (4.3.79) не може бути використана безпосередньо у нашому виродженому випадку моделі Ізінга (4.3.107). Як і у випадку (iv), ми маємо спочатку відійти від ізінговської точки, розглянути $ad-bc=\eta$ та використати правило Лопіталя для $\eta \to 0$. Результат для непарного n такий:

$$\frac{\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle \; \langle \Phi_1 | \Phi_1 \rangle}{\langle \tilde{\Psi}_{0,\mathbf{0}} | \tilde{\Psi}_{0,\mathbf{0}} \rangle^2} = 2^{|\mathcal{D}|} \prod_{k=1}^{n} (2 r_{n,k}) \cdot \frac{\prod_{k-\mathrm{odd}} (\lambda_\pi \pm r_{n,k})}{\prod_{k-\mathrm{even}} (\lambda_\pi + r_{n,k})} \cdot \frac{\prod_{k-\mathrm{even}} (\lambda_0 \pm r_{n,k})}{\prod_{k-\mathrm{odd}} (\lambda_0 + r_{n,k})} \times$$
$$\times \frac{\prod_{k<l, k,l-\mathrm{odd}} (r_{n,k} + r_{n,l})(\pm r_{n,k} \pm r_{n,l}) \prod_{k<l, k,l-\mathrm{even}} (r_{n,k} + r_{n,l})(\pm r_{n,k} \pm r_{n,l})}{\prod_{k-\mathrm{odd}, l-\mathrm{even}} (\pm r_{n,k} + r_{n,l})(r_{n,k} \pm r_{n,l})} \,,$$

та аналогічно для парного n, див. [55].

Включаючи також випадок (iii), який був до цього виключений, наша фінальна формула для матричного елемента є

$$\frac{\langle \Phi_0 | \sigma_n^z | \Phi_1 \rangle \langle \Phi_1 | \sigma_n^z | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle \langle \Phi_1 | \Phi_1 \rangle} =$$
$$= (\lambda_\pi^2 - \lambda_0^2)^{(D-\delta)/2} (\lambda_0 + \lambda_\pi)^\delta \prod_{\substack{l<m \\ l,m \in \mathcal{D}}} \left(\frac{r_l + r_m}{r_l - r_m} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\tilde{q}_l - \tilde{q}_m)}{\sin \frac{1}{2}(\tilde{q}_l + \tilde{q}_m)} \right) \frac{\Lambda_n}{2^D \prod_{k \in \overline{\mathcal{D}}} (\dot{+} 2 r_k)} \times$$
$$\times \frac{\prod_{k\,\mathrm{odd},\, l\,\mathrm{even}} \Big((\dot{-} r_k \dot{+} r_l)(\dot{+} r_k \dot{-} r_l) \Big)}{\prod_{k<l, k,l\,\mathrm{odd}} \Big((\dot{+} r_k \dot{+} r_l)(\dot{-} r_k \dot{-} r_l) \Big) \prod_{k<l, k,l\,\mathrm{even}} \Big((\dot{+} r_k \dot{+} r_l)(\dot{-} r_k \dot{-} r_l) \Big)}, \tag{4.3.131}$$

де для непарного та парного n маємо відповідно

$$\Lambda_n = \frac{\prod_{k \in \overline{\mathcal{D}}^{(0)}} (\lambda_0 \dot{+} r_k)}{\prod_{k \in \overline{\mathcal{D}}^{(1)}} (\lambda_0 \dot{+} r_k) \prod_{k \in \mathcal{D}^{(1)}} (\lambda_0^2 - r_k^2)} \cdot \frac{\prod_{k \in \overline{\mathcal{D}}^{(1)}} (\lambda_\pi \dot{+} r_k)}{\prod_{k \in \overline{\mathcal{D}}^{(0)}} (\lambda_\pi \dot{+} r_k) \prod_{k \in \mathcal{D}^{(0)}} (\lambda_\pi^2 - r_k^2)} \,,$$

$$\Lambda_n = \frac{\prod_{k\in\overline{\mathcal{D}}^{(0)}}(\lambda_0\dot{+}r_k)(\lambda_\pi\dot{+}r_k)}{(\lambda_0+\lambda_\pi)\prod_{k\in\overline{\mathcal{D}}^{(1)}}(\lambda_0\dot{+}r_k)(\lambda_\pi\dot{+}r_k)\prod_{k\in\mathcal{D}^{(1)}}(\lambda_0^2-r_k^2)(\lambda_\pi^2-r_k^2)}\,.$$

Тут ми використали точку зверху, $\dot{\pm}r_m$, для скороченого позначення, відповідно, для r_m, якщо $m\in\breve{\mathcal{D}}$, для $\pm r_m$, якщо $m\in\mathcal{D}$ та для $-r_m$, якщо $m\in\widehat{\mathcal{D}}$. Ми використали такі скоречені позначення $\overline{\mathcal{D}}=\breve{\mathcal{D}}\cup\widehat{\mathcal{D}}$, $\overline{\mathcal{D}}^{(0)}=\breve{\mathcal{D}}^{(0)}\cup\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}$, $\overline{\mathcal{D}}^{(1)}=\breve{\mathcal{D}}^{(1)}\cup\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$.

4.3.10. Кінцева формула через імпульси. Нехай $\{\mathsf{q}_1,\ \mathsf{q}_2,\ldots,\ \mathsf{q}_K\}$ та $\{\mathsf{p}_1,\ \mathsf{p}_2,\ldots,\ \mathsf{p}_L\}$ — набори імпульсів збуджень, що представляють стани $|\Phi_0\rangle$ з NS-сектору та $|\Phi_1\rangle$ з R-сектору, відповідно. Після довгих, але прямих перетворень (4.3.131), ми отримуємо

$$\frac{\langle\,\Phi_0\,|\,\sigma_n^z\,|\,\Phi_1\,\rangle\langle\,\Phi_1\,|\,\sigma_n^z\,|\,\Phi_0\,\rangle}{\langle\,\Phi_0\,|\,\Phi_0\,\rangle\,\langle\,\Phi_1\,|\,\Phi_1\,\rangle} \;=\; J\,(s_\pi+s_0)\,(s_\pi^2-s_0^2)^{(K+L-1)/2}\;\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{K}\frac{P^{\mathrm{NS}}_{\mathsf{q}_k}\prod_{\mathsf{q}\neq|\mathsf{q}_k|}^{\frac{\mathrm{NS}}{2}}N_{\mathsf{q},\mathsf{q}_k}}{\prod_{\mathsf{p}}^{\frac{\mathrm{R}}{2}}N_{\mathsf{p},\mathsf{q}_k}}\cdot\prod_{l=1}^{L}\frac{P^{\mathrm{R}}_{\mathsf{p}_l}\prod_{\mathsf{p}\neq|\mathsf{p}_l|}^{\frac{\mathrm{R}}{2}}N_{\mathsf{p},\mathsf{p}_l}}{\prod_{\mathsf{q}}^{\frac{\mathrm{NS}}{2}}N_{\mathsf{q},\mathsf{p}_l}}\cdot\frac{\prod_{k=1}^{K}\prod_{l=1}^{L}M_{\mathsf{q}_k,\mathsf{p}_l}}{\prod_{k<k'}^{K}M_{\mathsf{q}_k,\mathsf{q}_{k'}}\prod_{l<l'}^{L}M_{\mathsf{p}_l,\mathsf{p}_{l'}}}\,, \tag{4.3.132}$$

де NS/2 (R/2) — підмножина квазіімпульсів з NS (R), що приймають значення в сегменті $0<\mathsf{q}<\pi$, NS/2 (R/2) містить q_k з непарним k (парним k):

$$M_{\alpha,\beta}=\frac{s_\alpha+s_\beta}{s_\alpha-s_\beta}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\,,\qquad M_{\alpha,-\alpha}=\frac{s_\alpha^2\,(s_0^2-s_\pi^2)}{(s_\pi^2-s_\alpha^2)(s_0^2-s_\alpha^2)}\,,$$

$$N_{\alpha,\beta}=\frac{s_\alpha+s_\beta}{s_\alpha-s_\beta},\quad \mathcal{J}\;=\;\frac{\prod_{\mathsf{q}}^{\frac{\mathrm{NS}}{2}}(s_0+s_\mathsf{q})}{\prod_{\mathsf{p}}^{\frac{\mathrm{R}}{2}}(s_0+s_\mathsf{p})}\cdot\frac{\prod_{\mathsf{q}}^{\frac{\mathrm{NS}}{2}}\prod_{\mathsf{p}}^{\frac{\mathrm{R}}{2}}(s_\mathsf{q}+s_\mathsf{p})^2}{\prod_{\mathsf{q},\mathsf{q}'}^{\frac{\mathrm{NS}}{2}}(s_\mathsf{q}+s_{\mathsf{q}'})\prod_{\mathsf{p},\mathsf{p}'}^{\frac{\mathrm{R}}{2}}(s_\mathsf{p}+s_{\mathsf{p}'})}\,.$$

Для непарного n:

$$P^{\mathrm{NS}}_{\mathsf{q}}=\frac{s_\mathsf{q}}{(s_\pi-s_\mathsf{q})(s_0+s_\mathsf{q})},\ \ \mathsf{q}\neq\pi,\ \ P^{\mathrm{R}}_{\mathsf{p}}=\frac{s_\mathsf{p}}{(s_\pi+s_\mathsf{p})(s_0-s_\mathsf{p})},\ \ \mathsf{p}\neq 0,$$

$$P_0^{\mathrm{R}} = P_\pi^{\mathrm{NS}} = \frac{1}{s_\pi + s_0}, \qquad J = \frac{\prod_{\mathsf{p}}^{\frac{\mathrm{R}}{2}} (s_\pi + s_{\mathsf{p}})}{\prod_{\mathsf{q}}^{\frac{\mathrm{NS}}{2}} (s_\pi + s_{\mathsf{q}})} \ \mathcal{J},$$

для парного n:

$$P_{\mathsf{q}}^{\mathrm{NS}} = \frac{s_{\mathsf{q}}}{(s_\pi + s_{\mathsf{q}})(s_0 + s_{\mathsf{q}})}, \quad P_{\mathsf{p}}^{\mathrm{R}} = \frac{s_{\mathsf{p}}}{(s_\pi - s_{\mathsf{p}})(s_0 - s_{\mathsf{p}})}, \quad \mathsf{p} \neq 0,\ \pi,$$

$$P_0^{\mathrm{R}} = -P_\pi^{\mathrm{NS}} = \frac{1}{s_\pi - s_0}, \qquad J = \frac{\prod_{\mathsf{p}}^{\frac{\mathrm{NS}}{2}} (s_\pi + s_{\mathsf{q}})}{\prod_{\mathsf{q}}^{\frac{\mathrm{R}}{2}} (s_\pi + s_{\mathsf{p}})} \ \mathcal{J}\,.$$

4.3.11. Формула Бугрія–Лісового для матричних елементів. В роботі [30] була запропонована (обгрунтовано, але без доведення) наступна формула для квадрату матричного елемента спінового оператора для моделі Ізінга скінченного розміру:

$$\begin{aligned} &\left| {}_{\mathrm{NS}}\langle\, \mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \ldots, \mathsf{q}_K \,|\, \sigma_n^z \,|\, \mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \ldots, \mathsf{p}_L \,\rangle_{\mathrm{R}} \right|^2 = \\ &= \xi\, \xi_T \prod_{k=1}^{K} \frac{\prod_{\mathsf{q}\neq\mathsf{q}_k}^{\mathrm{NS}} \sinh\frac{\gamma(\mathsf{q}_k)+\gamma(q)}{2}}{n \prod_{\mathsf{p}}^{\mathrm{R}} \sinh\frac{\gamma(\mathsf{q}_k)+\gamma(\mathsf{p})}{2}} \prod_{l=1}^{L} \frac{\prod_{\mathsf{p}\neq\mathsf{p}_l}^{\mathrm{R}} \sinh\frac{\gamma(\mathsf{p}_l)+\gamma(\mathsf{p})}{2}}{n \prod_{\mathsf{q}}^{\mathrm{NS}} \sinh\frac{\gamma(\mathsf{p}_l)+\gamma(\mathsf{q})}{2}} \cdot \left(\frac{t_y - t_y^{-1}}{t_x - t_x^{-1}} \right)^{(K-L)^2/2} \times \\ &\times \prod_{k<k'}^{K} \frac{\sin^2\frac{\mathsf{q}_k - \mathsf{q}_{k'}}{2}}{\sinh^2\frac{\gamma(\mathsf{q}_k)+\gamma(\mathsf{q}_{k'})}{2}} \prod_{l<l'}^{L} \frac{\sin^2\frac{\mathsf{p}_l - \mathsf{p}_{l'}}{2}}{\sinh^2\frac{\gamma(\mathsf{p}_l)+\gamma(\mathsf{p}_{l'})}{2}} \prod_{\substack{1\le k\le K\\ 1\le l\le L}} \frac{\sinh^2\frac{\gamma(\mathsf{q}_k)+\gamma(\mathsf{p}_l)}{2}}{\sin^2\frac{\mathsf{q}_k - \mathsf{p}_l}{2}}. \end{aligned} \tag{4.3.133}$$

В цій формулі стани позначені імпульсами збуджень. Множники на початку правої сторони (4.3.133) визначені як

$$\xi = ((\sinh 2K_x \sinh 2K_y)^{-2} - 1)^{1/4},$$

$$\xi_T = \left(\frac{\prod_{\mathsf{q}}^{\mathrm{NS}} \prod_{\mathsf{p}}^{\mathrm{R}} \sinh^2\frac{\gamma(\mathsf{q})+\gamma(\mathsf{p})}{2}}{\prod_{\mathsf{q},\mathsf{q}'}^{\mathrm{NS}} \sinh\frac{\gamma(\mathsf{q})+\gamma(\mathsf{q}')}{2} \prod_{\mathsf{p},\mathsf{p}'}^{\mathrm{R}} \sinh\frac{\gamma(\mathsf{p})+\gamma(\mathsf{p}')}{2}} \right)^{1/4},$$

де $\gamma(\mathsf{q})$ — енергія збудження з квазіімпульсом q:

$$\cosh\gamma(\mathsf{q}) = \frac{(t_x + t_x^{-1})(t_y + t_y^{-1})}{2(t_x^{-1} - t_x)} - \frac{t_y - t_y^{-1}}{t_x - t_x^{-1}} \cos\mathsf{q}\,, \tag{4.3.134}$$

та $t_x = \tanh K_x$, $t_y = \tanh K_y$.

Формула (4.3.133) легко виводиться з (4.3.132), якщо прийняти до уваги ототоженення парметрів (4.2.15). Зокрема ми маємо $t_x = a\,b$, $t_y = (a-b)/(a+b)$ та співвідношення

$$e^{\gamma(\mathsf{q})} = \frac{a\,s_{\mathsf{q}} + b}{a\,s_{\mathsf{q}} - b} \tag{4.3.135}$$

між енергією $\gamma(\mathsf{q})$ збудження з квазіімульсом q та відповідним нульом s_{q} власного значення-полінома $t(\lambda)$, див. (4.3.108). Наступні формули дають відповідність між різними частинами (4.3.133) та (4.3.132):

$$\frac{\xi\,\xi_T}{\sinh\frac{1}{2}(\gamma(0)+\gamma(\pi))}\left(\frac{t_y - t_y^{-1}}{t_x - t_x^{-1}}\right)^{1/2} = J, \quad \frac{\sinh^2\frac{\gamma(\alpha)+\gamma(\beta)}{2}}{\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}} = -\frac{t_y - t_y^{-1}}{t_x - t_x^{-1}}\ M_{\alpha,\beta}\,.$$

$$\frac{\prod_{\mathsf{q}\neq\mathsf{q}_k}^{\mathrm{NS}}\sinh\frac{\gamma(\mathsf{q}_k)+\gamma(\mathsf{q})}{2}}{n\prod_{\mathsf{p}}^{\mathrm{R}}\sinh\frac{\gamma(\mathsf{q}_k)+\gamma(\mathsf{p})}{2}} = \frac{s_0+s_\pi}{\sinh\frac{\gamma(0)+\gamma(\pi)}{2}}\frac{P_{\mathsf{q}_k}^{\mathrm{NS}}\prod_{\mathsf{q}\neq|\mathsf{q}_k|}^{\frac{\mathrm{NS}}{2}}N_{\mathsf{q},\mathsf{q}_k}}{\prod_{\mathsf{p}}^{\frac{\mathrm{R}}{2}}N_{\mathsf{p},\mathsf{q}_k}}\,,$$

$$\frac{\prod_{\mathsf{p}\neq\mathsf{p}_l}^{\mathrm{R}}\sinh\frac{\gamma(\mathsf{p}_l)+\gamma(\mathsf{p})}{2}}{n\prod_{\mathsf{q}}^{\mathrm{NS}}\sinh\frac{\gamma(\mathsf{p}_j)+\gamma(\mathsf{q})}{2}} = \frac{s_0+s_\pi}{\sinh\frac{\gamma(0)+\gamma(\pi)}{2}}\frac{P_{\mathsf{p}_l}^{\mathrm{R}}\prod_{\mathsf{p}\neq|\mathsf{p}_l|}^{\frac{\mathrm{R}}{2}}N_{\mathsf{p},\mathsf{p}_l}}{\prod_{\mathsf{q}}^{\frac{\mathrm{NS}}{2}}N_{\mathsf{q},\mathsf{p}_l}}\,,$$

Детальніше відповідність розглянуто в [56].

4.3.12. Матричні елементи для діагональ-в-діагональ трансфер-матриці двовимірної моделі Ізінга та для квантового ланцюжка Ізінга в поперечному полі. В цьому пункті ми виводимо матричні елементи спінового оператора між власними векторами діагональ-в-діагональ трансфер-матриці для моделі Ізінга на квадратній гратці (див. підрозділ 2.2). У цьому випадку параметри даються (4.2.16). Як там пояснювалось, якщо ми змінюємо параметри a та b таким чином, що $(a^2-b^2)/(1-a^2b^2) = 1/\mathsf{k}'$ залишається фіксованим, власні вектори (а тому і матричні елементи) не змінюються. Отже ми фіксуємо $a = c = \mathsf{k}'^{-1/2}$ та $b = d = 0$. Розкладаючи трансфер-матрицю (4.2.4) по цим параметрам ми отримуємо

$$\mathbf{t}_n(\lambda) = \mathbf{1} - \frac{2\lambda}{\mathsf{k}'}\,\widehat{\mathcal{H}} + \cdots\,, \qquad \widehat{\mathcal{H}} \,=\, -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sigma_k^z\,\sigma_{k+1}^z \,+\, \mathsf{k}'\,\sigma_k^x\right),$$

де $\widehat{\mathcal{H}}$ — гамільтоніан періодичного квантового ланцюжка Ізінга в поперечному полі. З (4.3.108) ми отримуємо спектр цього гамільтоніану:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2}\sum_{\mathsf{q}} \pm\,\varepsilon(\mathsf{q}) \tag{4.3.136}$$

де енергії квізічастнкових збуджень даються формулами

$$\varepsilon(\mathsf{q}) = (1\,-2\,\mathsf{k}'\cos\mathsf{q} + \mathsf{k}'^2)^{1/2} \;=\; \left((\mathsf{k}'-1)^2 \,+\, 4\,\mathsf{k}'\sin^2\frac{\mathsf{q}}{2}\right)^{1/2}, \qquad \mathsf{q}\neq 0,\,\pi\,,$$

$$\varepsilon(0) \;=\; \mathsf{k}'-1, \qquad \varepsilon(\pi) \;=\; \mathsf{k}'+1\,.$$

В (4.3.136) знаки $+/-$ перед $\varepsilon(\mathsf{q})$ відповідають відсутності/присутності збудження з імпульсом q. NS-сектор включає стани з парним числом збуджень, а R-сектор — з непарним числом збуджень. Імпульс q пробігає той самий набір як в (4.3.108). Оскільки ми маємо $a = c$ та $b = d$, ми можемо використати формулу (4.3.132) з $s_{\mathsf{q}} = \mathsf{k}'/\varepsilon(\mathsf{q})$ для матричних елементів σ_n^z. Після деяких спрощень ми отримуємо аналог (4.3.133) для квантового ланцюжка Ізінга:

$$\begin{aligned}|{}_{\mathrm{NS}}\langle \mathsf{q}_1,\mathsf{q}_2,\ldots,\mathsf{q}_K\,|\,\sigma_m^z\,|\,\mathsf{p}_1,\mathsf{p}_2,\ldots,\mathsf{p}_L\rangle_{\mathrm{R}}|^2 = \mathsf{k}'^{\frac{(K-L)^2}{2}}\xi\,\xi_T\prod_{k=1}^{K}\frac{e^{\eta(\mathsf{q}_k)}}{n\,\varepsilon(\mathsf{q}_k)}\prod_{l=1}^{L}\frac{e^{-\eta(\mathsf{p}_l)}}{n\,\varepsilon(\mathsf{p}_l)}\;\times\\ \times\prod_{k<k'}^{K}\left(\frac{2\sin\frac{\mathsf{q}_k-\mathsf{q}_{k'}}{2}}{\varepsilon(\mathsf{q}_k)+\varepsilon(\mathsf{q}_{k'})}\right)^2\prod_{l<l'}^{L}\left(\frac{2\sin\frac{\mathsf{p}_l-\mathsf{p}_{l'}}{2}}{\varepsilon(\mathsf{p}_l)+\varepsilon(\mathsf{p}_{l'})}\right)^2\prod_{k=1}^{K}\prod_{l=1}^{L}\left(\frac{\varepsilon(\mathsf{p}_l)+\varepsilon(\mathsf{q}_k)}{2\sin\frac{\mathsf{p}_l-\mathsf{q}_k}{2}}\right)^2,\end{aligned} \tag{4.3.137}$$

де

$$\xi \;=\; \left(\mathsf{k}'^2 - 1\right)^{\frac{1}{4}}\;, \quad \xi_T \;=\; \frac{\prod_{\mathsf{q}}^{\mathrm{NS}}\;\prod_{\mathsf{p}}^{\mathrm{R}}(\varepsilon(\mathsf{q})+\varepsilon(\mathsf{p}))^{\frac{1}{2}}}{\prod_{\mathsf{q},\mathsf{q}'}^{\mathrm{NS}}\,(\varepsilon(\mathsf{q})+\varepsilon(\mathsf{q}'))^{\frac{1}{4}}\;\prod_{\mathsf{p},\mathsf{p}'}^{\mathrm{R}}\,(\varepsilon(\mathsf{p})+\varepsilon(\mathsf{p}'))^{\frac{1}{4}}}$$

та

$$e^{\eta(\mathsf{q})} = \frac{\prod_{\mathsf{q}'}^{\mathrm{NS}}\,(\varepsilon(\mathsf{q})+\varepsilon(\mathsf{q}'))}{\prod_{\mathsf{p}}^{\mathrm{R}}\,(\varepsilon(\mathsf{q})+\varepsilon(\mathsf{p}))}\,.$$

Формально всі ці формули є справедливими як для парамагнитної фази, де $\mathsf{k}' > 1$, так і для феромагнитної фази, де $0 \le \mathsf{k}' < 1$. Але для випадку $0 \le \mathsf{k}' < 1$ природньо перевизначити енергію збудження з нульовим імпульсом як $\varepsilon(0) = 1 - \mathsf{k}'$, щоб вона була додатньою. З формули (4.3.136) випливає, що ця зміна знаку $\varepsilon(0)$ у феромагнітній фазі веде до формальної заміни між відсутнім–присутнім збудженням з нульовим імпульсом у позначенні для власних станів. Тому число збуджень в обох секторах (NS та R) стає парним. Прямі обрахунки показують, що заміна знаку перед $\varepsilon(0)$ в (4.3.137) може бути поглинуте, що приводить формально до тієї самої формули (4.3.137), але з новим $\varepsilon(0)$ та парним L (число збуджень в R-секторі) та новим $\xi = (1-\mathsf{k}'^2)^{1/4}$.

Формули (4.3.133) та (4.3.137) дозволяють переотримати добре відомі формули для моделі Ізінга, наприклад, спонтанну намагніченність [135, 158]. Дійсно, для квантового ланцюжка Ізінга у феромагнітній фазі ($0 \le \mathsf{k}' < 1$) та в термодинамічній границі $n \to \infty$ (коли енергії $|\mathrm{vac}\rangle_{\mathrm{NS}}$ та $|\mathrm{vac}\rangle_{\mathrm{R}}$ співпадають та приводять до виродженості основного стану), ми маємо $\xi_T \to 1$ і тому спонтанна намагніченність ${}_{\mathrm{NS}}\langle\, \mathrm{vac} \,|\, \sigma_m^z \,|\, \mathrm{vac}\,\rangle_{\mathrm{R}} \;=\; \xi^{1/2} \;=\; (1-\mathsf{k}'^2)^{1/8}$.

4.4. Хвильові функції в моделі Тоди з граничною взаємодією

4.4.1. Розділення змінних в квантовій моделі Тоди з граничною взаємодією. В дисертації ми адаптуємо метод розділення змінних для знаходження явних формул для власних хвильових функцій комутуючих гамільтоніанів n-частинкового квантового ланцюжка Тоди з граничною взаємодією. Ми використовуємо підхід Скляніна [147] до квантових інтегровних моделей з граничною взаємодією. n-Частинкові власні функції квантового ланцюжка Тоди, в яких перша та остання частинки експоненційно взаємодіють зі стінками (взаємодія з обома стінками), будуються через інтегральне перетворення власних функцій ланцюжка Тоди з взаємодією з однією стінкою (допоміжна задача). Ці власні функції, в свою чергу, будуються з використанням власних функцій n-частинкового відкритого ланцюжка Тоди. Така складна ієрархія дозволяє розділити змінні в різницевих рівняннях для ядра згаданого інтегрального перетворення зводячи його до деякого варіанту рівняння Бакстера. Зауважимо, що для класичного ланцюжка Тоди з загальною граничною взаємодією, розділення змінних було виконано Кузнєцовим [109].

4.4.2. Рівняння руху для відкритого ланцюжка Тоди. Щоб описати інтеграли руху квантового n-частинкового відкритого ланцюжка Тоди ми використовуємо L-оператори (по одному для кожної частинки)

$$L_k(u) = \begin{pmatrix} u - p_k & e^{-q_k} \\ -e^{q_k} & 0 \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

де n — число частинок в ланцюжку, p_k та q_k — оператори імпульсу та координати k-ої частинки, відповідно. Матриця монодромії визначається як

$$T(u) := L_n(u)L_{n-1}(u)\cdots L_2(u)L_1(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \qquad (4.4.138)$$

Комутаційні співвідношення для матричних елементів $T(u)$ випливають з канонічних комутаційних співвідношень $[p_k, q_l] = -\mathrm{i}\hbar\delta_{kl}$ та можуть бути записані як

$$R(u-v)\left(T(u)\otimes\mathbf{1}\right)\left(\mathbf{1}\otimes T(v)\right) = \left(\mathbf{1}\otimes T(v)\right)\left(T(u)\otimes\mathbf{1}\right)R(u-v), \quad (4.4.139)$$

де $R(u)$ — квантова раціональна R-матриця:

$$R(u) = \begin{pmatrix} 1+\frac{\mathrm{i}\hbar}{u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\mathrm{i}\hbar}{u} & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{i}\hbar}{u} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\frac{\mathrm{i}\hbar}{u} \end{pmatrix}. \qquad (4.4.140)$$

З (4.4.138) випливає, що $A(u)$ є поліномом від u степені n:

$$A(u) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m u^{n-m} H_m(p_1, q_1; p_2, q_2; \dots; p_n, q_n) =$$

$$= u^n - H_1 u^{n-1} + H_2 u^{n-2} - \cdots + (-1)^n H_n.$$

Зокрема, співвідношення (4.4.139) дають $[A(u), A(v)] = 0$ і, тому, $[H_m, H_k] = 0$, тобто, $A(u)$ є породжуючою функцією для комутуючих операторів H_m. Оскільки

$$H_1 = \sum_{k=1}^{n} p_k, \qquad H_2 = \sum_{\substack{k,l \\ k<l}} p_k p_l - \sum_{k=1}^{n-1} e^{q_k - q_{k+1}},$$

ми отримуємо гамільтоніан для відкритого ланцюжка Тоди у вигляді

$$H = H_1^2/2 - H_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k^2}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} e^{q_k - q_{k+1}}.$$

Тому оператори H_m є інтегралами руху (гамільтоніанами) відкритого ланцюжка Тоди.

4.4.3. Власні функції для відкритого ланцюжка Тоди. Нехай хвильова функція $\psi(q_1, \ldots, q_n)$ для відкритого ланцюжка Тоди є спільною власною функцією комутуючих гамільтоніанів H_m:

$$H_m \psi(q_1, \ldots, q_n) = E_m \psi(q_1, \ldots, q_n).$$

Тоді

$$A(u)\psi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(q_1, \ldots, q_n) = \prod_{l=1}^{n} (u - \gamma_{nl}) \psi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(q_1, \ldots, q_n),$$

де $\boldsymbol{\gamma}_n = (\gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \ldots, \gamma_{nn})$ — квантові числа n-частинкової системи, $E_m = e_m(\gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \ldots, \gamma_{nn})$ та e_m — m-тий елементарний симетричний поліном. Для кожного набору $\boldsymbol{\gamma}_n$ розмірність простору власних функцій є $n!$. Фізична власна функція $\psi_{\boldsymbol{\gamma}_n}$ фіксується умовою, що $\psi_{\boldsymbol{\gamma}_n}$ швидко спадає в класично забороненій області, тобто при $q_k >> q_{k+1}$ для деяких k. При $q_1 << q_2 << \cdots << q_n$, $\psi_{\boldsymbol{\gamma}_n}$ є суперпозицією плоских хвиль.

Недавно Харчев і Лебедєв [97] винайшли рекурсивну процедуру для побудови n-частинкової хвильової функції $\psi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ через $(n-1)$-частинкові хвильові функції $\psi_{\boldsymbol{\gamma}_{n-1}}(q_1, q_2, \ldots, q_{n-1})$. Співвідношення рекурсії має вигляд:

$$\psi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \int d\boldsymbol{\gamma}_{n-1} \mu(\boldsymbol{\gamma}_{n-1}) Q(\boldsymbol{\gamma}_{n-1}|\boldsymbol{\gamma}_n) \psi_{\boldsymbol{\gamma}_{n-1}}(q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}) \times$$
$$\times e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\sum_{j=1}^{n} \gamma_{n,j} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{n-1,k}) q_n}, \tag{4.4.141}$$

де інтегрування виконується по $\gamma_{n-1,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, вздовдж будь-якого набору прямих, паралельних дійсній осі та таких, що

$$\min_k \operatorname{Im} \gamma_{n-1,k} > \max_j \operatorname{Im} \gamma_{n,j}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{4.4.142}$$

$$Q(\boldsymbol{\gamma}_{n-1}|\boldsymbol{\gamma}_n) = \prod_{k=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{n} \hbar^{\frac{\gamma_{n-1,k}-\gamma_{n,j}}{\mathrm{i}\hbar}} \Gamma\left(\frac{\gamma_{n-1,k}-\gamma_{n,j}}{\mathrm{i}\hbar}\right),$$

$$\mu^{-1}(\boldsymbol{\gamma}_{n-1}) = \prod_{\substack{k,l\\k\neq l}} \Gamma\left(\frac{\gamma_{n-1,k}-\gamma_{n-1,l}}{\mathrm{i}\hbar}\right).$$

Аналогічно $(n-1)$-частинкові хвильові функції виражаються через $(n-2)$-частинкові хвильові функції і т.д. Хвильова функція для 1-частинкового відкритого ланцюжка Тоди — це просто плоска хвиля:

$$\psi_{\gamma_{11}}(q_1) = e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\gamma_{11}q_1}.$$

Надалі ми використовуємо позначення $\boldsymbol{\gamma} := \boldsymbol{\gamma}_n$, $\gamma_k := \gamma_{n,k}$. Як показано в [97], хвильова функція $\psi_{\boldsymbol{\gamma}}$ задовільняє співвідношення

$$A(u)\psi_{\boldsymbol{\gamma}} = \prod_{l=1}^{n}(u-\gamma_l)\,\psi_{\boldsymbol{\gamma}}, \tag{4.4.143}$$

$$B(u)\psi_{\boldsymbol{\gamma}} = \mathrm{i}^{n-1}\sum_{p=1}^{n}\left(\prod_{l\neq p}\frac{u-\gamma_l}{\gamma_p-\gamma_l}\right)\psi_{\boldsymbol{\gamma}^{+p}}, \tag{4.4.144}$$

$$C(u)\psi_{\boldsymbol{\gamma}} = \mathrm{i}^{-n-1}\sum_{p=1}^{n}\left(\prod_{l\neq p}\frac{u-\gamma_l}{\gamma_p-\gamma_l}\right)\psi_{\boldsymbol{\gamma}^{-p}}, \tag{4.4.145}$$

де $\psi_{\boldsymbol{\gamma}^{\pm p}} := \psi_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_p\pm\mathrm{i}\hbar,\ldots,\gamma_n}$.

Щоб знайти дію $D(u)$ на $\psi_{\boldsymbol{\gamma}}$, ми використовуємо наступну властивість квантового детермінанту $T(u)$ для ланцюжка Тоди:

$$D(u)A(u-\mathrm{i}\hbar) - C(u)B(u-\mathrm{i}\hbar) = 1. \tag{4.4.146}$$

В результаті маємо:

$$D(u)\psi_{\boldsymbol{\gamma}} = \sum_{p=1}^{n}\left(\prod_{l\neq p}\frac{u-\gamma_l}{\gamma_p-\gamma_l}\right)\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left(\frac{1}{\prod_{l\neq p}(\gamma_p-\gamma_l+\mathrm{i}\hbar)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\prod_{l\neq p}(\gamma_p-\gamma_l-\mathrm{i}\hbar)}\right)\psi_{\boldsymbol{\gamma}}-$$

$$-\sum_{\substack{p,q\\ p\neq q}}\frac{1}{\gamma_q-\gamma_p-\mathrm{i}\hbar}\frac{1}{\prod_{l\neq p}(\gamma_p-\gamma_l)}\prod_{l\neq p,q}\frac{u-\gamma_l}{\gamma_q-\gamma_l}\ \psi_{\boldsymbol{\gamma}^{+p,-q}}\,. \tag{4.4.147}$$

4.4.4. Інтеграли руху для ланцюжка Тоди з граничною взаємодією. В цьому пункті ми коротко описуємо R-матричний формалізм для квантового ланцюжка Тоди з граничною взаємодією, який було запропоновано Скляніним [147]. Цей формалізм є важливим для побудови хвильових функцій. Ключовий об'єкт в цьому підході — це матриця

$$U(u) := T(u)K^{(-)}(u-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2})\tilde{T}(-u) = \begin{pmatrix}\mathcal{A}(u) & \mathcal{B}(u)\\ \mathcal{C}(u) & \mathcal{D}(u)\end{pmatrix}, \tag{4.4.148}$$

де $T(u)$ — матриця монодромії (4.4.138) для n-частинкового відкритого ланцюжка Тоди та

$$\tilde{T}(-u) = \sigma_2 T^t(-u)\sigma_2 = (\sigma_2 L_1^t(-u)\sigma_2)(\sigma_2 L_2^t(-u)\sigma_2)\cdots(\sigma_2 L_n^t(-u)\sigma_2).$$

Тут σ_2 — матриця Паулі. Матриця $K^{(-)}(u-\mathrm{i}\hbar/2)$ це

$$K^{(-)}(u-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}) = \begin{pmatrix}\alpha_1 & u-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\\ -\beta_1(u-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}) & \alpha_1\end{pmatrix}. \tag{4.4.149}$$

Як показано в [147], матриця $U(u)$ задовільняє рівнянню відбиття (reflection equation)

$$R(u-v)\,(U(u)\otimes\mathbf{1})\,R(u+v-\mathrm{i}\hbar)\,(\mathbf{1}\otimes U(v)) =$$

$$= (\mathbf{1} \otimes U(v))\, R(u+v-\mathrm{i}\hbar)\, (U(u) \otimes \mathbf{1})\, R(u-v), \tag{4.4.150}$$

де $R(u)$ дається (4.4.140).

Це рівняння приводить до $\mathcal{B}(u)\mathcal{B}(v) = \mathcal{B}(v)\mathcal{B}(u)$. Тому розклад $\mathcal{B}(u)$ по степенях u дає комутуючи оператори, серед яких є гамільтоніан ланцюжка Тоди з однією границею, а інші оператори є інтегралами руху.:

$$\mathcal{B}(u) = (-1)^n (u - \mathrm{i}\hbar/2) \left(u^{2n} - u^{2n-2} H_1^{\mathrm{B}} + u^{2n-4} H_2^{\mathrm{B}} - \cdots + (-1)^n H_n^{\mathrm{B}}\right), \tag{4.4.151}$$

де

$$H_1^{\mathrm{B}} = \sum_{k=1}^{n} p_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} e^{q_k - q_{k+1}} - 2\alpha_1 e^{-q_1} + \beta_1 e^{-2q_1}.$$

Тут останні два доданки описують взаємодію першої частинки зі стінкою.

Трансфер-матриця Скляніна

$$t(u) := \operatorname{Tr} K^{(+)}(u + \mathrm{i}\hbar/2) U(u), \tag{4.4.152}$$

де

$$K^{(+)}(u + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}) = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n (u + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}) \\ -(u + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}) & \alpha_n \end{pmatrix},$$

задовільняє комутаційне співвідношення [147]

$$t(u)t(v) = t(v)t(u). \tag{4.4.153}$$

Тому $t(u)$ є породжуючою функцією для комутуючих операторів. Серед цих операторів є гамільтоніан ланцюжка Тоди з двома границями, а інші оператори — інтеграли руху.

Для простоти надалі ми фіксуємо $\beta_1 = \beta_n = 0$ та використовуємо позначення $e^{\kappa_1} := -2\alpha_1$, $e^{-\kappa_n} := -2\alpha_n$. У цьому випадку ми маємо

$$t(u) = (-1)^{n-1}(u^2 + \hbar^2/4)\Big(u^{2n} - u^{2n-2}H_1^{\mathrm{BB}} + \\ + u^{2n-4}H_2^{\mathrm{BB}} - \cdots + (-1)^n H_n^{\mathrm{BB}}\Big) + 2\alpha_1\alpha_n, \tag{4.4.154}$$

де

$$H_1^{\mathrm{BB}} = \sum_{k=1}^{n} p_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} e^{q_k - q_{k+1}} - 2\alpha_1 e^{-q_1} - 2\alpha_n e^{q_n}.$$

У випадку ланцюжка Тоди, матриця $U(u)$ має додаткову симетрію (унітарність) [147]:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}(-u) & \mathcal{B}(-u) \\ \mathcal{C}(-u) & \mathcal{D}(-u) \end{pmatrix} = \frac{1}{2u - \mathrm{i}\hbar} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\hbar\mathcal{A}(u) + 2u\mathcal{D}(u) & -(2u + \mathrm{i}\hbar)\mathcal{B}(u) \\ -(2u + \mathrm{i}\hbar)\mathcal{C}(u) & 2u\mathcal{A}(u) - \mathrm{i}\hbar\mathcal{D}(u) \end{pmatrix}. \tag{4.4.155}$$

Зокрема це приводить до

$$\mathcal{A}(u) = \frac{1}{u}\left((u - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2})\mathcal{D}(-u) + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\mathcal{D}(u)\right). \tag{4.4.156}$$

Тому, використовуючи цю рівність та (4.4.152), ми отримуємо

$$t(u) = \alpha_n \frac{(u + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2})}{u}\,\mathcal{D}(u) + \alpha_n \frac{(u - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2})}{u}\,\mathcal{D}(-u) - (u + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2})\mathcal{B}(u). \tag{4.4.157}$$

Використовуючи (4.4.148), ми отримуємо наступні вирази для матричних елементів $U(u)$ через матричні елементи матриці монодромії $T(u)$ для n-частинкового відкритого ланцюжка Тоди:

$$\mathcal{A}(u) = \alpha_1\left(A(u)D(-u) - B(u)C(-u)\right) - \left(u - \mathrm{i}\frac{\hbar}{2}\right)A(u)C(-u), \tag{4.4.158}$$

$$\mathcal{B}(u) = -\alpha_1\left(A(u)B(-u) - B(u)A(-u)\right) + \left(u - \mathrm{i}\frac{\hbar}{2}\right)A(u)A(-u), \tag{4.4.159}$$

$$\mathcal{C}(u)=\alpha_1\left(C(u)D(-u)-D(u)C(-u)\right)-\left(u-\mathrm{i}\frac{\hbar}{2}\right)C(u)C(-u), \quad (4.4.160)$$

$$\mathcal{D}(u)=\alpha_1\left(D(u)A(-u)-C(u)B(-u)\right)+\left(u-\mathrm{i}\frac{\hbar}{2}\right)C(u)A(-u). \quad (4.4.161)$$

Дамо деякі приклади:

$$\underline{n=1:} \qquad \mathcal{B}(u)=-(u-\mathrm{i}\hbar/2)(u^2-(p_1^2+e^{\kappa-q_1})),$$

$$t(u)=(u^2+\hbar^2/4)\left(u^2-(p^2+e^{\kappa-q_1}+e^{q_1-\kappa'})\right)+2\alpha\alpha';$$

$$\underline{n=2:} \qquad \mathcal{B}(u)=(u-\mathrm{i}\hbar/2)\left(u^4-u^2(p_1^2+p_2^2+2e^{q_1-q_2}+e^{\kappa_1-q_1})+\right.$$

$$\left.+(p_1p_2-e^{q_1-q_2})^2-\alpha_1p_2^2e^{-q_1}-2\alpha_1e^{-q_2}\right),$$

$$t(u)=-(u^2+\hbar^2/4)\left(u^4-u^2(p_1^2+p_2^2+2e^{q_1-q_2}+e^{\kappa_1-q_1}+e^{q_2-\kappa_2})+\cdots\right)+2\alpha_1\alpha_2.$$

4.4.5. Хвильові функції для ланцюжка Тоди з однією границею.

Ми визначаємо функцію $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}\equiv\Psi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$ як

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(q_1,\ldots,q_n)=\int d\gamma_1\cdots d\gamma_n\mu(\boldsymbol{\gamma})Q(\boldsymbol{\gamma}|\boldsymbol{\lambda})e^{-\frac{\mathrm{i}\kappa_1(\gamma_1+\cdots+\gamma_n)}{\hbar}}\psi_{\boldsymbol{\gamma}}(q_1,\ldots,q_n), \quad (4.4.162)$$

де $e^{\kappa_1}=-2\alpha_1$ та

$$Q(\boldsymbol{\gamma}|\boldsymbol{\lambda})=\frac{\prod_{k,l}\Gamma\left(\frac{\lambda_l-\gamma_k}{\mathrm{i}\hbar}\right)\Gamma\left(\frac{-\lambda_l-\gamma_k}{\mathrm{i}\hbar}\right)}{\prod_{\substack{k,l\\k<l}}\Gamma\left(-\frac{\gamma_k+\gamma_l}{\mathrm{i}\hbar}\right)}\prod_k\hbar^{-\frac{(n+1)\gamma_k}{\mathrm{i}\hbar}}, \quad \mu^{-1}(\boldsymbol{\gamma})=\prod_{\substack{k,l\\k\neq l}}\Gamma\left(\frac{\gamma_k-\gamma_l}{\mathrm{i}\hbar}\right). \quad (4.4.163)$$

Ми покажемо, що це є хвильова функція для квантового ланцюжка Тоди з однією границею і

$$\mathcal{B}(u)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(q_1,\ldots,q_n)=(-1)^n(u-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2})\prod_{l=1}^n(u^2-\lambda_l^2)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(q_1,\ldots,q_n), \quad (4.4.164)$$

де структура правої частини відповідає (4.4.151). Інтегрування в (4.4.162) виконується вздовж будь-якого набору прямих, паралельних дійсній осі та таких, що

$$\max_k \operatorname{Im}\gamma_k < -\min_j \operatorname{Im}\lambda_j, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4.4.165}$$

Спочатку доведемо абсолютну збіжність (4.4.162). Для цього ми використовуємо нерівності

$$|\Gamma(x + \mathrm{i}y)| \le \Gamma(x) p_x(|y|) e^{-\frac{\pi|y|}{2}}, \qquad x > 0,$$

де $p_x(|y|)$ — деякий поліноми від $|y|$ степені, що лінійно залежить від x,

$$\frac{1}{|\Gamma(x + \mathrm{i}y)|} \le \frac{\left(1 + \frac{|y|}{x}\right) e^{\frac{\pi|y|}{2}}}{\Gamma(x)}, \qquad x > 0,$$

а також нерівність

$$\sum_{k,l=1}^{n} \left(|\tilde{\lambda}_k - \tilde{\gamma}_{n,l}| + |\tilde{\lambda}_k + \tilde{\gamma}_{n,l}|\right) + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{k,l} |\tilde{\gamma}_{r+1,k} - \tilde{\gamma}_{r,l}| -$$

$$-2 \sum_{r=2}^{n} \sum_{k<l} |\tilde{\gamma}_{r,k} - \tilde{\gamma}_{r,l}| - \sum_{k<l} |\tilde{\gamma}_{n,k} + \tilde{\gamma}_{n,l}| \ge$$

$$\ge -2n \sum_{k=1}^{n} |\tilde{\lambda}_k| + 2 \sum_{k<l} \left(|\tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_l| + |\tilde{\lambda}_k + \tilde{\lambda}_l|\right) + \frac{2}{n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} |\tilde{\gamma}_{r,k}|,$$

яка є справедливою для будь-якого набору дійсних змінних $\tilde{\lambda}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $\tilde{\gamma}_{r,l}$, $l = 1, 2, \ldots, r$, $r = 1, 2, \ldots, n$. Доведення останньої нерівності дано в [86], Додаток A. Для нашої цілі ми фіксуємо $\tilde{\lambda}_k$ (відповідно, $\tilde{\gamma}_{r,l}$) значеннями $\operatorname{Re}\lambda_k$ (відповідно, $\operatorname{Re}\gamma_{r,l}$).

Представляючи (4.4.162) як

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(q_1, \ldots, q_n) = \int \prod_{r=1}^{n} \prod_{k=1}^{r} d\tilde{\gamma}_{r,k} F(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_n, \boldsymbol{\lambda}; q_1, \ldots, q_n),$$

ми отримуємо наступну нерівність для залежності підінтегрального виразу від $\gamma_{r,k}$:

$$|F(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_n, \boldsymbol{\lambda}; q_1, \ldots, q_n)| \leq P(\{\tilde{\gamma}_{r,k}\}) \exp\left(-\frac{\pi}{\hbar n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} |\tilde{\gamma}_{r,k}|\right), \tag{4.4.166}$$

де $P(\{\tilde{\gamma}_{r,k}\})$ має поліноміальну залежність від змінних $\tilde{\gamma}_{r,k}$ та певну залежність від інших змінних. Оцінка (4.4.166) приводить до абсолютною збіжності інтегралу справа (4.4.162). Зауважимо, що інтеграл (4.4.162) не залежить від значень уявних частин $\gamma_{r,k}$ (тобто прямих інтегрування) при умові що виконуються нерівності (4.4.142) та (4.4.165). Це випливає з двох фактів. Перший, ми не перетинаємо полюси при зсуві контурів інтегрування. Другий, завдяки оцінці (4.4.166), підінтегральний вираз зануляється на безмежностях контурів інтегрування. Це виправдовує коректність зсувів контурів інтегрування, які ми будемо робити надалі.

З фізичної точки зору функція $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(q_1, \ldots, q_n)$, що дається (4.4.162), має правильну асимптотичну поведінку — швидко спадає в класично забороненій області, тобто, при $q_k >> q_{k+1}$ для деяких k або при $q_1 << 0$. В області $0 << q_1 << q_2 << \cdots << q_n$ функція $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(q_1, \ldots, q_n)$ є суперпозицією плоских хвиль.

В Додатку В роботи [86] знайдено наступні формули для дії матричних елементів $U(u)$ на $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}$:

$$\mathcal{B}(u)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}} = (-1)^n (u - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}) \prod_{l=1}^{n} (u^2 - \lambda_l^2) \Psi_{\boldsymbol{\lambda}}, \tag{4.4.167}$$

$$\mathcal{D}(u)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}} = \alpha_1 \sum_{p=1}^{n} \left(\prod_{l\neq p} \frac{u^2-\lambda_l^2}{\lambda_p^2-\lambda_l^2} \right) \left[\frac{(u+\lambda_p)}{2\lambda_p} \frac{(u-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2})}{(\lambda_p-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2})} \Psi_{\boldsymbol{\lambda}^{-p}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(u-\lambda_p)}{2\lambda_p} \frac{(u-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2})}{(\lambda_p+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2})} \Psi_{\boldsymbol{\lambda}^{+p}} \right] + \alpha_1 \left(\prod_{l=1}^{n} \frac{\lambda_l^2-u^2}{\lambda_l^2+(\frac{\hbar}{2})^2} \right) \Psi_{\boldsymbol{\lambda}}, \qquad (4.4.168)$$

$$\tilde{t}(u)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}} = (-1)^{n-1} \frac{t(u)-2\alpha_1\alpha_n}{u^2+\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2} \Psi_{\boldsymbol{\lambda}} = \prod_{l=1}^{n} (u^2-\lambda_l^2) \Psi_{\boldsymbol{\lambda}} +$$

$$+(-1)^{n-1}\alpha_1\alpha_n \sum_{p=1}^{n} \left(\prod_{l\neq p} \frac{u^2-\lambda_l^2}{\lambda_p^2-\lambda_l^2} \right) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\lambda_p(\lambda_p-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2})} \Psi_{\boldsymbol{\lambda}^{-p}} + \frac{1}{\lambda_p(\lambda_p+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2})} \Psi_{\boldsymbol{\lambda}^{+p}} - \frac{2}{\lambda_p^2+\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2} \Psi_{\boldsymbol{\lambda}} \right]. \qquad (4.4.169)$$

Зокрема формула (4.4.168) дає

$$\mathcal{D}(\lambda_r)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}} = \alpha_1\Psi_{\boldsymbol{\lambda}^{-r}}, \qquad \mathcal{D}(-\lambda_r)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}} = \alpha_1\Psi_{\boldsymbol{\lambda}^{+r}}, \qquad \mathcal{D}(\mathrm{i}\hbar/2)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}} = \alpha_1\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}. \qquad (4.4.170)$$

Дія $\mathcal{A}(u)$ та $\mathcal{C}(u)$ на $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}$ виведена з використанням (4.4.156) та детермінанту Скляніна [147] для $U(u)$, відповідно.

Тут ми дамо деяке евристичне пояснення формул (4.4.170)

$$\mathcal{D}(\lambda_r)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}} = \alpha_1\Psi_{\boldsymbol{\lambda}^{-r}}, \qquad \mathcal{D}(-\lambda_r)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}} = \alpha_1\Psi_{\boldsymbol{\lambda}^{+r}}.$$

Нехай $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(q_1,\ldots,q_n)$ — деяка власна функція $\mathcal{B}(u)$, що задовільняє (4.4.164). Тоді комутаційне співвідношення

$$\left(u^2-(v-\mathrm{i}\hbar)^2\right)\mathcal{D}(v)\mathcal{B}(u) - (u^2-v^2)\mathcal{B}(u)\mathcal{D}(v) =$$

$$= \mathrm{i}\hbar(u+v-\mathrm{i}\hbar)\mathcal{D}(u)\mathcal{B}(v) + \mathrm{i}\hbar(u-v)\mathcal{A}(u)\mathcal{B}(v),$$

яке випливає з (4.4.150), дає

$$\mathcal{B}(u)\mathcal{D}(\lambda_r)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}} = (-1)^n(u - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2})(u^2 - (\lambda_r - \mathrm{i}\hbar)^2)\prod_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{n}(u^2 - \lambda_k^2)\cdot\mathcal{D}(\lambda_r)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}$$

при $v = \lambda_r$ і, тому, $\mathcal{D}(\lambda_r)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}$ є власною функцією $\mathcal{B}(u)$ з λ_r, що замінено на $(\lambda_r - \mathrm{i}\hbar)$. Зрозуміло, що цей аргумент не є достатнім для доведення співвідношення $\mathcal{D}(\lambda_r)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}} = \alpha_1\Psi_{\boldsymbol{\lambda}^{-r}}$.

4.4.6. Хвильові функції для ланцюжка Тоди з двома границями. Прийнявши до уваги (4.4.154), корисне ввести

$$\tilde{t}(u) := (-1)^{n-1}\frac{t(u) - 2\alpha_1\alpha_n}{u^2 + \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2} = u^{2n} - u^{2n-2}H_1^{\mathrm{BB}} + u^{2n-4}H_2^{\mathrm{BB}} - \cdots + (-1)^n H_n^{\mathrm{BB}}.$$

Нехай $\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{q})$ — хвильова функція для ланцюжка Тоди з двома границями:

$$\tilde{t}(u)\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{q}) = \prod_{k=1}^{n}(u^2 - \rho_k^2)\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{q}) =: \tilde{t}(u|\boldsymbol{\rho})\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{q}),$$

де $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n\}$ — квантові числа відповідного стану.

Ми шукаємо $\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{q})$ у вигляді

$$\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{q}) = \int d\lambda_1\cdots d\lambda_n\ \tilde{\mu}(\boldsymbol{\lambda})C(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\rho})\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{q}), \tag{4.4.171}$$

де

$$\tilde{\mu}^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{\substack{i,j\\i<j}}\Gamma\left(\frac{\lambda_i - \lambda_j}{\mathrm{i}\hbar}\right)\Gamma\left(-\frac{\lambda_i - \lambda_j}{\mathrm{i}\hbar}\right)\prod_{\substack{i,j\\i\leq j}}\Gamma\left(\frac{\lambda_i + \lambda_j}{\mathrm{i}\hbar}\right)\Gamma\left(-\frac{\lambda_i + \lambda_j}{\mathrm{i}\hbar}\right),$$

та інтегрування по $\{\lambda_k\}$ виконується по довільних прямих, паралельних дійсній осі. Використовуючи (4.4.169) та

$$\frac{\tilde{\mu}(\boldsymbol{\lambda}^{+p})}{\tilde{\mu}(\boldsymbol{\lambda})} = \frac{(\lambda_p + \mathrm{i}\hbar)}{\lambda_p}\prod_{l\neq p}\frac{(\lambda_p + \mathrm{i}\hbar)^2 - \lambda_l^2}{\lambda_p^2 - \lambda_l^2},$$

ми отримуємо

$$(-1)^{n-1}\tilde{t}(u|\boldsymbol{\rho})\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{q}) = \int d\lambda_1 \cdots d\lambda_n \; \Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{q})\times$$

$$\times \left[\alpha_1\alpha_n \sum_{p=1}^{n} \left[\frac{\tilde{\mu}(\boldsymbol{\lambda}^{+p})C(\boldsymbol{\lambda}^{+p}|\boldsymbol{\rho})}{(\lambda_p + \mathrm{i}\hbar)(\lambda_p + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2})} \left(\prod_{l \neq p} \frac{u^2 - \lambda_l^2}{(\lambda_p + \mathrm{i}\hbar)^2 - \lambda_l^2} \right) + \right.\right.$$

$$+ \frac{\tilde{\mu}(\boldsymbol{\lambda}^{-p})C(\boldsymbol{\lambda}^{-p}|\boldsymbol{\rho})}{(\lambda_p - \mathrm{i}\hbar)(\lambda_p - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2})} \left(\prod_{l \neq p} \frac{u^2 - \lambda_l^2}{(\lambda_p - \mathrm{i}\hbar)^2 - \lambda_l^2} \right) -$$

$$\left.\left. - \frac{2\tilde{\mu}(\boldsymbol{\lambda})C(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\rho})}{(\lambda_p^2 + \frac{\hbar^2}{4})} \left(\prod_{l \neq p} \frac{u^2 - \lambda_l^2}{\lambda_p^2 - \lambda_l^2} \right) \right] - \prod_{l=1}^{n} (\lambda_l^2 - u^2) \right] =$$

$$= \int d\lambda_1 d\lambda_2 \cdots d\lambda_n \; \mu(\boldsymbol{\lambda})C(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\rho})\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{q}) \left[\alpha_1\alpha_n \sum_{p=1}^{n} \left(\prod_{l \neq p} \frac{u^2 - \lambda_l^2}{(\lambda_p + \mathrm{i}\hbar)^2 - \lambda_l^2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{1}{\lambda_p(\lambda_p + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2})} \frac{C(\boldsymbol{\lambda}^{+p}|\boldsymbol{\rho})}{C(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\rho})} + \frac{1}{\lambda_p(\lambda_p - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2})} \frac{C(\boldsymbol{\lambda}^{-p}|\boldsymbol{\rho})}{C(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\rho})} - \frac{2}{(\lambda_p^2 + \frac{\hbar^2}{4})} \right] - \prod_{l=1}^{n} (\lambda_l^2 - u^2) \right].$$

Ми покладаємо $u = \lambda_p$. Тоді попереднє співвідношення виконується, якщо

$$(-1)^{n-1}\tilde{t}(\lambda_p|\boldsymbol{\rho}) = \frac{t(\lambda_p|\boldsymbol{\rho}) - 2\alpha_1\alpha_n}{\lambda_p^2 + \frac{\hbar^2}{4}} =$$

$$= \alpha_1\alpha_n \left[\frac{1}{\lambda_p(\lambda_p + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2})} \frac{C(\boldsymbol{\lambda}^{+p}|\boldsymbol{\rho})}{C(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\rho})} + \frac{1}{\lambda_p(\lambda_p - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2})} \frac{C(\boldsymbol{\lambda}^{+p}|\boldsymbol{\rho})}{C(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\rho})} - \frac{2}{(\lambda_p^2 + \frac{\hbar^2}{4})} \right],$$

де $t(u|\boldsymbol{\rho}) = (-1)^{n-1}(u^2 + \hbar^2/4)\prod_{k=1}^{n}(u^2 - \rho_k^2) + 2\alpha_1\alpha_n$. Це багатозмінне різницеве рівняння допускає розділення змінних. А саме, ми представляємо розв'язок у факторизованому вигляді:

$$C(\boldsymbol{\lambda}|\boldsymbol{\rho}) = \prod_{p=1}^{n} \; c(\lambda_p|\boldsymbol{\rho}).$$

Тоді $c(\lambda|\boldsymbol{\rho})$ задовільняє рівняння Бакстера

$$\frac{1}{\lambda(\lambda+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2})}c(\lambda+\mathrm{i}\hbar|\boldsymbol{\rho})+\frac{1}{\lambda(\lambda-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2})}c(\lambda-\mathrm{i}\hbar|\boldsymbol{\rho})=\frac{t(\lambda|\boldsymbol{\rho})c(\lambda|\boldsymbol{\rho})}{\alpha_1\alpha_n(\lambda^2+\frac{\hbar^2}{4})}$$

або, еквівалентно,

$$(\lambda-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2})c(\lambda+\mathrm{i}\hbar|\boldsymbol{\rho})+(\lambda+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2})c(\lambda-\mathrm{i}\hbar|\boldsymbol{\rho})=\frac{\lambda\ t(\lambda|\boldsymbol{\rho})\ c(\lambda|\boldsymbol{\rho})}{\alpha_1\alpha_n}.$$

Розв'язки цього рівняння можуть бути побудовані як відношення нескінченних детермінантів як у випадку періодичного ланцюжка Тоди [136, 96]. Ми очікуємо, що аналогічно до випадку періодичного ланцюжка Тоди, вимога на аналітичні властивості $c(\lambda|\boldsymbol{\rho})$ (які є важливими, зокрема, для збіжності інтегралу (4.4.171)) обмежує можливі значення $\boldsymbol{\rho}$ та дає дискретний спектр гамільтоніану квантового ланцюжка Тоди з двома границями.

4.5. Висновки

В цьому розділі був адаптований метод розділення змінних (розроблений Скляніним, Харчевим та Лебедевим для моделі Тоди) на дві інші квантові інтегровні моделі. Перша задача, яка була розглянута — це модель з $\mathbb{Z}_N$ симетрією — модель Бакстера–Бажанова–Строганова (або $\tau^{(2)}$-модель). Ми вивели формули для власних векторів трансфер-матриці цієї моделі. Задача звелась до розв'язання T-Q-рівняння Бакстера, в якому змінні розділяються. Є два випадки коли ці рівняння можуть бути ров'язаними явно: модель Бакстера–Бажанова–Строганова з фіксованими граничними умовами [90] та випадок $N = 2$, коли ця модель зводиться до узагальненої моделі Ізінга (в тому числі і на трикутній гратці). Явні формули для власних векторів трансфер-матриці моделі Ізінга дозволили вивести факторізовані вирази для матричних елементів спінового оператора в моделі Ізінга, які були раніше знайдені без доведення А. Бугрієм та О. Лісовим [29, 30]. Ми також розширюємо цей результат для отримання факторизованої формули для матричних елементів скінченного квантового ланцюжка Ізінга в поперечному полі. Ми показуємо як конкретні локальні оператори можуть бути виражені через глобальні елементи матриці монодромії матриця. Обірвані (truncated) функціональні співвідношення, що гарантують існування нетривіальних розв'язків рівняння Бакстера, порівняно з відповідним співвідношенням для діагональ-в-діагональ трансфер-матриці для моделі Ізінга на квадратній гратці [15]. В роботі [88] показано, що модель Бакстера–Бажанова–Строганова з відкритими граничними умовами також дозволяє розділення змінних. З точки зору алгебри симетрії, ця модель відповідає представленням циклічного типу для квантових алгебр, коли параметр деформації є коренем з одиниці.

Інша задача, яка розв'язана в цьому розділі — розділення змінних в моделі Тоди з граничною взаємодією. З алгебраїчної точки зору модель задається рівнянням відбиття (reflection equation). В дисертації, зокрема, знайдено інтегральне представлення для хвильових функцій квантового N-частинкового ланцюжка Тоди з граничною взаємодією. Хвильові функції у випадку ланцюжка Тоди з однією границею були отримані певним інтегральним перетворенням з хвильових функцій відкритого ланцюжка Тоди. Ядро цього перетворення знайдено у явному вигляді через Γ-функції. Хвильові функції у випадку ланцюжка Тоди з двома границями отримано інтегральним перетворенням з попередніх хвильових функцій для ланцюжка Тоди з однією границею. У цьому випадку різницеве рівняння на ядро цього інтегрального перетворення допускає *розділення змінних.* Різницеві рівняння для розділенних змінних мають форму $T-Q$-рівнянь Бакстера. З точки зору алгебри симетрії, ця модель відповідає представленням твістованих янгіанів B-серії.

Також автором дисертації розглянуто комбінована модель — релятивістський ланюжок Тоди при корені з одиниці [89]. Ця модель в об'ємі є частковим випадком моделі Бакстера–Бажанова–Строганова, а на границях описується рівнянням відбиття.

Розв'язані в дисертації задачі показують, що метод розділення змінних в квантових інтегровних системах застосовний не лише в моделі Тоди, для якої він початково був запропонований, але й для більш широкого класу моделей. Але загальна ситуація з розділенням змінних в квантових інтегровних системах залишається незрозумілою. Наприклад, в розглянутій моделі Тоди з граничною взаємодією існують інші типи граничних умов, які не портять інтегровності, але не дозволяють розділення змінних. Отже залишається проблема знаходження чіткого алгебраїчного пояснення методу розділення змінних в квантових інтегровних системах. Ймовірно, що ця проблема тісно пов'язана з існуванням ланцюжків Гельфанда–Цетліна вкладених підалгебр алгебри симетрії.

ВИСНОВКИ

На завершення сформулюємо основні результати дисертаційної роботи:

1. Досліджено модель Бакстера–Бажанова–Строганова (ББС). Зокрема, побудовано власні вектори для компонент $A_n(\lambda)$ та $B_n(\lambda)$ матриці монодромії для неоднорідного ланцюжка скінченної довжини. Для періодичного ланцюжка проведено розділення змінних та отримано $T-Q$-рівняння Бакстера для кожної з розділенних змінних. Доведено, що функціональні співвідношення для трансфер-матриць ББС-моделі є необхідними і достатніми умовами для існування нетривіальних розв'язків рівнянь Бакстера. Модель ББС при довільному N має наступні застосування. Вона пов'язана з кіральною моделлю Поттса, яка описує фазові переходи між співрозмірною та неспіврозмірною фазами в задачі адсорбції газу на кристалічних гратках. ББС модель на 3 вузлах еквівалентна моделі Хофштадера: задача про рух електрона на двовимірній (квадратній чи трикутній) гратці в однорідному магнітному полі. Зокрема в цих напрямках слід очікувати майбутні застосування отриманих результатів.

2. Описано процедуру отримання формул для локальних операторів через глобальні оператори матриці монодромії. Ці формули необхідні для знаходження матричних елементів локальних опертаторів (зокрема, оператора спіну на одному вузлі ланцюжка) між власними станами трансфер-матриці.

3. Показано, що модель ББС при $N = 2$ еквівалентна узагальненій моделі Ізінга в точці вільних ферміонів. У цьому випадку знайдено розв'язки рівняння Бакстера, які дають явні формули для власних векторів трансфер-матриці моделі Ізінга. Доведена формула Бугрія–Лісового для матричних елементів спінового оператора між цими векторами.

4. Граничним переходом з формул для власних векторів періодичної моделі ББС отримано власні вектори трансфер-матриці моделі з фіксованими спінами на кінцях ланцюжка. Як частковий випадок, отримано власні стани для гамільтоніану $\mathbb{Z}_N$-аналогу квантового ланцюжка Ізінга в трансверсальному полі з фіксованими спінами на кінцях ланцюжка.

5. Методом квантового розділення змінних знайдено інтегральне представлення для хвильових функцій квантового n-частинкового ланцюжка Тоди з граничною взаємодією. Хвильові функції у випадку ланцюжка Тоди з двома границями отримано інтегральним перетворенням з хвильових функцій для ланцюжка Тоди з однією границею. Різницеве рівняння на ядро цього інтегрального перетворення допускає розділення змінних і розпадається на систему різницевих $T - Q$-рівнянь Бакстера від однієї змінної.

6. Метод квантового розділення змінних застосовано для знаходження власних станів гамільтоніану квантового релятивістського ланцюжка Тоди з інтегровними граничними умовами та параметром деформації, що є коренем з одиниці. Ця модель в об'ємі є частковим випадком моделі ББС, а її інтегровні граничні умови описуються рівнянням відбиття.

7. Отримано у явному вигляді радіальні компоненти елементів Казиміра квантової алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$, які відповідають квантовому аналогу однорідного простору $\mathrm{GL}(n)/\mathrm{SO}(n)$. Показано, що вони співпадають з різницевими операторами Макдональда, які є гамільтоніаном та інтегралами руху квантової тригонометричної n-частинкової моделі Рузінарса.

8. Знайдено явний вираз для інваріантних векторів по відношенню до дії $U'_q(\mathrm{so}_n)$ в скінченновимірних представленнях квантової алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$ в базисі Гельфанда–Цетліна. За їх допомогою знайдено хвильові функції квантової тригонометричної n-частинкової моделі Рузінарса через поліноми Макдональда.

9. Отримано скінченновимірні представлення некласичного типу нестандартної деформації $U'_q(\mathrm{so}_n)$ алгебри Лі so_n групи обертань з представлень класичного типу в базисі Гельфанда–Цетліна методом аналітичного продовження по ваговим параметрам представлень. Представлення некласичного типу є сингулярними в границі $q \to 1$ і не мають класичного аналогу на відміну від представлень класичного типу, які при $q \to 1$ перетворюються в представлення алгебри Лі so_n.

10. Доведено, що представленнями класичного та некласичного типу вичерпуються всі скінченновимірні незвідні представлення алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ коли q не є коренем з одиниці. Доведена теорема про повну звідність скінченновимірних представлень алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ коли q не є коренем з одиниці.

11. Описано представлення циклічного типу алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ в базисі Гельфанда–Цетліна коли q є коренем з одиниці.

12. Введено визначення тензорного добутку $T^{\otimes}$ векторного та довільного представлення T алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$. Описано розклад $T^{\otimes}$ на незвідні підпредставлення та знайдено коефіцієнти Клебша–Гордана у випадку, коли T є незвідним скінченновимірним представленням класичного або некласичного типу. Розклад $T^{\otimes}$ у випадку представлень класичного типу має такий самий вигляд як у випадку алгебри Лі so_n та відповідні коефіцієнти Клебша–Гордана є q-деформацією їх класичних аналогів.

13. Введено визначення векторного оператора алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ та для нього доведено q-аналог теореми Вігнера–Екарта. Ця теорема суттєво використовується в доведенні теореми про класифікацію скінченновимірних представлень алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$.

14. Введено поняття антисиметричних тензорних операторів алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ та на їх основі побудовано елементи Казиміра. Обрахувано власні значення цих елементів Казиміра в представленнях Гельфанда–Цетліна. З явних формул випливає, що отримані елементи Казиміра породжують центр алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ коли q не є коренем з одиниці. Коли q є коренем з одиниці існують додаткові центральні елементи. У цьому випадку для алгебри $U_q'(so_3)$ знайдено їх алгебраїчну залежність. Ці результати важливі для побудови алгебри спостережуваних в 2+1-вимірній квантовій гравітації з нетривіальною топологією.

15. Вивчено q-гармонічні поліноми на квантовому векторному просторі, породженому q-комутуючими елементами $x_1, \ldots, x_n$. Гармонічні поліноми визначені як розв'язки рівняння $\Delta_q p = 0$, де p — поліном від $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та q-оператор Лапласа Δ_q визначено через q-похідні. Було вперше отримано q-аналог класичних приєднаних гармонічних поліномів. Показано, що має місце розділення змінних у відповідності з різними ланцюжками вкладених підалгебр алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$.

16. Вивчено q-гармонічні поліноми на квантовому комплексному векторному просторі, породженому елементами $z_i, w_i = \bar{z}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, на якому діє квантова група $GL_q(n)$. Побудовано q-аналоги класичних зональних сферичних та приєднаних сферичних гармонік. Дано q-аналог розділення змінних для q-гармонічних поліномів.

17. Вивчено q-гармонічні поліноми на квантовому евклідовому просторі E_q^N, породженому елементами x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, на яких діє квантова група $SO_q(N)$. Побудовано q-аналог класичних зональних та приєднаних сферичних поліномів по відношенню до квантової підгрупи $SO_q(N-2)$. Показано, що приєднані сферичні поліноми представляються як добутки поліномів залежних від q-радіусів та від x_j, $x_{j'}$, $j' = N - j + 1$. Це представлення є q-аналогом класичного розділення змінних.

Автор щиро вдячний своєму науковому консультанту Анатолію Уляновичу Клімику та співавторам робіт А.І.Бугрію, О.М.Гаврилику, Г. фон Гелену, С.З.Пакуляку, В.М.Рубцову, Ю.В.Тихому, В.М.Шадурі. Цікаві та плідні обговорення наукових проблем з О.Ісаєвим, О.Лісовим, О.Молєвим, П.Пятовим, В.Фоком, С.Харчевим, С.Хорошкіним, Л.Чеховим та зі співробітниками відділу математичних методів в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики НАН України без сумніву були важливими для отримання низки результатів дисертації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гаврилик А.М. Коэффициенты Клебша–Гордана для прямого произведения $[m_n] \otimes [1]$ представлений группы $\mathrm{SO}(n)$ / К.: Институт теоретической физики, 1973. – 27 с. – (Препринт ITP-73-155P/ АН Украины. Институт теоретической физики; 73).

2. Дринфельд В.Г. Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера / В.Г. Дринфельд // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 283. – С. 1060–1064.

3. Іоргов М.З. q-Осцилятор та нестандартна квантова деформація $U'_q(\mathrm{so}_n)$ / М.З. Іоргов, А.У. Клімик // Доповіді НАН України. – 2000. – № 8. – С. 73–76.

4. Климык А.У. Матричные элементы и коэффициенты Клебша–Гордана представлений групп: (Монография) / К.: Наукова Думка, 1979. – 457 с.

5. Решетихин Н.Ю. Квантование групп Ли и алгебр Ли / Н.Ю. Решетихин, Л.А. Тахтаджан, Л.Д. Фаддеев // *Алгебра и Анализ.* - 1989. - Т. **1**. - С. 178–206.

6. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства: (Монография) / М.: Мир, 1964. – 534 с.

7. Alcaraz F.C. Correspondence between the XXZ model in roots of unity and the one-dimensional quantum Ising chain with different boundary conditions/ F.C. Alcaraz, A.A. Belavin, R.A. Usmanov // // Preprint arXiv.org: hep-th/0007151. – 2000. – 23 p.

8. Altshuler B.L. Low temperature correlation functions in integrable models: Derivation of the large distance and time asymptotics from the form factor expansion / B.L. Altshuler, R.M. Konik R.M., A.M. Tsvelik // Nucl. Phys. – 2006. – Vol. B739. – P. 311–327.

9. Andrews G.E. Special Functions: (Monograph) / Andrews G.E., Askey R., Roy R. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 525 p.

10. Au-Yang H. Eigenvectors in the superintegrable model I: sl_2 generators / H. Au-Yang, J.H.H. Perk // Preprint arXiv.org: 0710.5257 [math-ph]. – 2007.

11. Au-Yang H. Eigenvectors in the superintegrable model II: ground state sector / H. Au-Yang, J.H.H. Perk // Preprint arXiv.org: 0803.3029 [math-ph]. – 2008.

12. Babelon O. Equations in dual variables for Whittaker functions / O. Babelon // Lett. Math. Phys. – 2003. – V. 65. – P. 229–240.

13. Baruch E. Zero-field susceptibility of the two-dimensional Ising model near T_c / E. Baruch, B.M. McCoy, T.T. Wu // Phys. Rev. Lett. – 1973. – Vol. 31. – P. 1409–1411.

14. Baxter R.J. 399th solution of the Ising model / R.J. Baxter, I.G. Enting // J. Phys. A. – 1978. – Vol. 11. – P. 2463–2478.

15. Baxter R.J. Exactly solved models in statistical mechanics / London: Academic Press, 1982. – 523 p.

16. Baxter R.J. New solutions of the star-triangle relations for the chiral potts model / R.J. Baxter, H. Au-Yang, J.H.H. Perk // Phys. Lett. – 1988. – Vol. A128. – P. 138–142.

17. Baxter R.J. Superintegrable chiral Potts model: Thermodynamic properties, an “Inverse” model, тa and a simple associated Hamiltonian / R.J. Baxter // J. Stat. Phys. – 1989. – Vol. 57. – P. 1–39.

18. Baxter R.J. Chiral Potts model: eigenvalues of the transfer matrix / R.J. Baxter // Physics Lett. – 1990. – Vol. A146. – P. 110–114.

19. Baxter R.J. Functional relations for the transfer matrices of the Chiral Potts model / R.J. Baxter, V.V. Bazhanov, J.H.H. Perk // Int. J. Mod. Phys. – 1990. – Vol. B4. – P. 803–869.

20. Baxter R.J. Transfer matrix functional relations for the generalized $\tau_2(t_q)$ model / R.J. Baxter // J. Stat. Phys. – 2004. – Vol. 117. – P. 1–25.

21. Baxter R.J. Algebraic reduction of the Ising model / R.J. Baxter // Preprint arXiv.org: 0803.4036. – 2008.

22. Bazhanov V.V. Critical RSOS models and conformal field theory / V.V. Bazhanov, N.Yu. Reshetikhin // Int. J. Mod. Phys. – 1989. – Vol. A4. – P. 115–145.

23. Bazhanov V.V., Chiral Potts model as a descendant of the six-vertex model / V.V. Bazhanov, Yu.G. Stroganov // J. Stat. Phys. – 1990. – Vol. 59. – P. 799–817.

24. Bazhanov V.V. New solvable lattice models in three dimensions / V.V. Bazhanov, R.J. Baxter // J. Stat. Phys. – 1992. – Vol. 69. – P. 453–485.

25. Belavin A.A. Minimal models of itegrable lattice theory and truncated functional equations / A.A. Belavin, Yu.G. Stroganov // Phys. Lett. B. – 1999. – Vol. 466. – P. 281–286.

26. Belavin A.A. Truncation of functional relations in the XXZ model / A.A. Belavin, S.Yu. Gubanov, B.L. Feigin // Preprint arXiv.org: hep-th/0008011. – 2000. – 16 p.

27. Belavin A.A. New relations in the algebra of the Baxter Q-operators / A.A. Belavin, A.V. Odesskii, R.A. Usmanov // Preprint arXiv.org: hep-th/0110126. – 2001. – 35 p.

28. Berg B. Construction of Green's functions from an exact S матриця matrix / B. Berg, M. Karowski, P. Weisz // Phys. Rev. – 1979. – Vol. D19. – P. 2477–2479.

29. Bugrij A. Spin matrix elements in 2D Ising model on the finite lattice / A. Bugrij, O. Lisovyy // Phys. Lett. A. – 2003. – Vol. 319. – P. 390–395.

30. Bugrij A. Correlation function of the two-dimensional Ising model on finite lattice: II / A. Bugrij, O. Lisovyy // Journ. Theor. Math. Phys. – 2003. – Vol. 140. – P. 987–1003.

31. Bugrij A.I. Alternative method of calculating the eigenvalues of the transfer matrix of the τ_2 model for $N = 2$ / A.I. Bugrij, N.Z. Iorgov, V.N. Shadura // JETP Lett. – 2005. – Vol. 82. – P. 311–315.

32. Bullock D., Przytycky J. H. Multiplicative structure of Kauffman bracket skein module quantization / D. Bullock, J. H. Przytycky // Proc. Amer. Math. Soc. – 2000. – Vol. 128. – P. 923–932.

33. Burban I.M. Representations of the quantum algebra $U_q(su_{1,1})$ / I.M. Burban, A.U. Klimyk // J. Phys. A. – 1993. – Vol. 26. – P. 2139–2151.

34. Carlip S. Lectures in (2+1)-Dimensional Gravity / S. Carlip // Preprint arXiv.org: gr-qc/9503024. – 1995.

35. Chalykh O. Macdonald polynomials and algebraic integrability / O. Chalykh // Adv. Math. – 2002. – V. 166. – P. 193–259.

36. Chekhov L.O. Observables in 3D gravity and geodesic algebras / L.O. Chekhov, V.V. Fock // Czech. J. Phys. — 2000. – Vol. 50. – P. 1201–1208.

37. Cherednik I. Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures / I. Cherednik // Ann. Math. – 1995. – V. 141. – P. 191–216.

38. Demazure M. Désingularisation des variétés de Schubert généralisées / M. Demazure // Ann. Sci. École Norm. Sup. – 1974. – V. 7. – P. 53–88.

39. Chu Ch.-S. Geometry of the Quantum Complex Projective Space $CP_q(N)$/ Ch.-S. Chu, P.-M. Ho, B. Zumino // Preprint arXiv.org: q-alg/9510021. – 1995. – 24 p.

40. Etingof P. Macdonald's polynomials and representations of quantum groups / P. Etingof, A. Kirillov Jr. // Preprint arXiv.org: hep-th/9312103. – 1993. – 19 p.

41. Faddeev L.D. Generalized Bethe ansatz equations for Hofstadter problem / L.D. Faddeev, R.M. Kashaev // Preprint arXiv.org: hep-th/9312133. – 1993.

42. Fairlie D.B. Quantum deformation of $SU_q(2)$ / D.B. Fairlie // J. Phys A. – 1990. – Vol. 23. – P. L183–L187.

43. Floris P.G.A. Addition formula for q-disk polynomials / P.G.A. Floris // Compositio Math. – 1997. – Vol. 108. – P. 123–149.

44. Floris P.G.A. On quantum groups, hypergroups and q-special functions (Ph. D. Thesis) / Leiden: Leiden University, 1995. – 150 p.

45. Fonseca P. Ising field theory in a magnetic field: analytic properties of the free energy / P. Fonseca, A.A. Zamolodchikov// J. Stat. Phys. – 2003. – Vol. 110. – P. 527–590.

46. Gasper G. Basic Hypergeometric Functions / Gasper G., Rahman M. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. – 385 p.

47. Gavrilik A.M. q-Deformed orthogonal and pseudo-orthogonal algebras and their representations / A.M. Gavrilik, A.U. Klimyk // Lett. Math. Phys. – 1991. – V. 21. – P. 215–220.

48. Gavrilik A.M. q-Deformed algebras $U_q(so_n)$ and their representations / A.M. Gavrilik, N.Z. Iorgov // Methods Funct. Anal. Topol. – 1997. – Vol. 3, № 4. – P. 51–63.

49. Gavrilik A.M. Representations of the nonstandard algebras $U_q(\mathrm{so}_n)$ and $U_q(\mathrm{so}_{n,1})$ in Gel'fand–Tsetlin basis / A.M. Gavrilik, N.Z. Iorgov // Ukr. J. Phys. – 1998. – Vol. 43. – P. 791–797.

50. Gavrilik A.M. Higher Casimir operators of the nonstandard q-deformed algebras $U_q(so_n)$ and their eigenvalues / A.M. Gavrilik, N.Z. Iorgov // Heavy Ion Physics. – 2000. – Vol. 11, № 1-2. – P. 33–38.

51. Gavrilik A.M. On the Casimir elements of q-algebras $U_q'(\mathrm{so}_n)$ and their eigenvalues in representations / A.M. Gavrilik, N.Z. Iorgov // Proc. of III Int. Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Kiev, July 3–7, 1999. – Kiev: Inst. of Math. of NAS of Ukraine, 2000. – Vol. 30, Part 2. – P. 310–314.

52. Gavrilik A.M. The use of quantum алгебра algebras in quantum gravity and their eigenvalues in representations / A.M. Gavrilik // Kiev: Inst. of Math. of NAS of Ukraine, 2000. – Vol. 30. – P. 304–309.

53. Gavrilik A.M. Applying the q-algebras $U_q'(\mathrm{so}_n)$ to quantum gravity: towards q-deformed analog of $SO(n)$ spin networks / A.M. Gavrilik // Ukr. J. Phys. – 2002. – Vol. 47. – P. 213–218.

54. von Gehlen G. The Baxter–Bazhanov–Stroganov model: separation of variables and the Baxter equation / G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak [та ін.] // J. Phys. A. – 2006. – Vol. 39. – P. 7257–7282.

55. von Gehlen G. Form-factors in the finite size Baxter–Bazhanov–Stroganov model I: norms and matrix елемент elements / G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak [та ін.] // J. Phys. A. – 2007. – Vol. 40. – P. 14117–14138.

56. von Gehlen G. Form-factors in the Baxter–Bazhanov–Stroganov model II: Ising model on the finite lattice / G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak [та ін.] // J. Phys. A. – 2008. – Vol. 41, № 095003. – 24 p.

57. von Gehlen G. Factorized finite-size Ising model spin matrix elements from separation of variables / G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak [та ін.] // J. Phys. A. – 2009. – Vol. 42, № 304026. – 28 p.

58. Gerasimov A. Representation theory and the quantum inverse scattering method: the open Toda chain and the hyperbolic Sutherland model / A. Gerasimov, S. Kharchev, D. Lebedev // Int. Math. Res. Not. – 2004. – Vol. 17. – P. 823–854.

59. Groza V.A. The q-deformed algebra $U_q(so_{r,s})$ and its representatives / V.A. Groza // Algebras, Groups and Geometries. – 1995. – Vol. 12. – P. 165–178.

60. Groza V.A. Representations of the quantum algebra $U_q(\mathrm{u}(n,1))$ / V.A. Groza, N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // Algebras and Repr. Theory. – 2000. – Vol. 3. – P. 105–130.

61. Gutzwiller M. The quantum mechanical Toda lattice II / M. Gutzwiller // Ann. of Phys. – 1981. – Vol. 133. – P. 304–331.

62. Harper P.G. Single band motion of conduction electrons in a uniform magnetic field / P.G. Harper // Proc. Phys. Soc. Lond. A. – 1955. – Vol. 68. – P. 874–878.

63. Hatsugai Y. Quantum group, Bethe ansatz and Bloch electrons in a magnetic field / Y. Hatsugai, M. Kohmoto, Y.-S. Wu // Preprint arXiv.org: cond-mat/9509062. – 1995. – 30 p.

64. Havlíček M. Representations of the cyclically symmetric q-deformed algebra $\mathrm{so}_q(3)$ / M. Havlíček, A.U. Klimyk, S. Pošta // J. Math. Phys. – 1999. – Vol. 40. – P. 2135–2161.

65. Havlíček M. Representations of the q-deformed algebra $U'_q(\mathrm{so}_4)$ / M. Havlíček, A.U. Klimyk, S. Pošta // J. Math. Phys. – 2001. – Vol. 42. – P. 5389–5416.

66. Havlíček M. On the classification of irreducible finite-dimensional representations of $U'_q(\mathrm{so}_3)$ algebra / M. Havlíček, S. Pošta // J. Math. Phys. – 2001. – Vol. 42. – P. 472–491.

67. Hofstadter D.R. Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields / D.R. Hofstadter // Phys. Rev B. – 1976. – Vol. 14. – P. 2239–2249.

68. Iorgov N.Z. Complete reducibility of representations of the algebra $U'_q(\mathrm{so}_3)$ / N.Z. Iorgov // Methods of Funct. Anal. Topology. – 1999. – Vol. 5, № 2. – P. 22–28.

69. Iorgov N.Z. Nonclassical type representations of the q-deformed algebra $U'_q(\mathrm{so}_n)$ / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // Czech. J. Phys. – 2000. – Vol. 50. – P. 85–90.

70. Iorgov N.Z. Nonstandard deformation $U'_q(\mathrm{so}_n)$ for q a root of unity / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // Methods Funct. Anal. Topol. – 2000. – Vol. 6, № 3. – P. 56–71.

71. Iorgov N.Z. Representations of the nonstandard (twisted) deformation $U'_q(\mathrm{so}_n)$ for q a root of unity / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // Czech. J. Phys. – 2000. – Vol. 50. – P. 1257–1263.

72. Iorgov N.Z. The q-Laplace operator and q-harmonic polynomials on the quantum vector space / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // J. Math. Phys. – 2001. – Vol. 42. – P. 1326–1345.

73. Iorgov N.Z. On tensor products of representations of the non-standard q-deformed gebra $U'_q(\mathrm{so}_n)$ / N.Z. Iorgov // J. Phys. A. – 2001. – Vol. 34. – P. 3095–3108.

74. Iorgov N.Z. Nonclassical type representations of nonstandard quantization of enveloping algebras $U(so(n)$, $U(so(n,1))$ and $U(iso(n))$ / / N.Z. Iorgov // Proc. of NATO ARW "Noncommutative Structures in Mathematics and Physics", Kiev, September 13–20, 2000. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. – P. 357–368.

75. Iorgov N.Z. On q-Laplace operator and q-harmonic polynomials / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // Phys. Atom. Nucl. – 2001. – Vol. 64, № 11. – P. 1973–1977.

76. Iorgov N.Z. Wigner–Eckart theorem for an algebra related to quantum gravity / N.Z. Iorgov // Ukr. J. Phys. – 2002. – Vol. 47. – P. 230–239.

77. Iorgov N.Z. On the center of q-deformed algebra $U'_q(\mathrm{so}_3)$ related to quantum gravity at q a root of 1 / N.Z. Iorgov // Kiev: Inst. of Math. of NAS of Ukraine, 2002. – Vol. 43, Part 2. – P. 449–455.

78. Iorgov N.Z. q-Laplace operator related to the quantum unitary group / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // Proc. 2-nd Int. Symp. "Quantum Theory and Symmetries", Krakow, July 3–8, 2001. – Singapore: World Scientific, 2002. – P. 383–388.

79. Iorgov N.Z. On symmetries in 2+1-dimensional quantum gravity / N.Z. Iorgov, I.I. Kachurik // Ukr. J. Phys. – 2002. – Vol. 47, № 6. – P. 519–524.

80. Iorgov N.Z. A Laplace operator and harmonics on the quantum complex vector space / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // J. Math. Phys. – 2003. – Vol. 44. – P. 823–848.

81. Iorgov N. On the quantum Ruijsenaars model and quantum homogeneous space $\mathcal{F}_q(\mathrm{GL}(n)/\mathrm{SO}(n))$ / N.Z. Iorgov // Non-Euclidean Geometry in Modern Physics: Bolyai–Gauss–Lobachevsky, III Int. Conf., Tirgu-Mures, Romania, July 2–7, 2002. – Tirgu-Mures: Tirgu-Mures University, 2003. – P. 63–72.

82. Iorgov N.Z. Harmonics on the quantum Euclidean space / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // J. Phys. A: Math. Gen. – 2003. – Vol. 36. – P. 7545–7558.

83. Iorgov N. On the wave functions of Ruijsenaars model related to q-analogue of symmetric space $GL(n)/SO(n)$ / N. Iorgov // Kiev: Inst. of Math. of NAS of Ukraine, 2004. – V. 50, Part 3. – P. 1094–1100.

84. Iorgov N. On the quantum Ruijsenaars model, some quantum homogeneous spaces and Hecke algebras / N. Iorgov// Int. J. Mod. Phys. A – 2004. – V. 19 Supplement. – P. 224–239.

85. Iorgov N. Quantum Toda chain with boundary interaction / N. Iorgov, V. Shadura // Non-Euclidean Geometry in Modern Physics: Bolyai–Gauss–Lobachevsky, IV Int. Conf., Nizhny Novgorod, Russia, September 7–11, 2004. – Nizhny Novgorod: University of N.N. – P. 116–126.

86. Iorgov N. Wave functions of the Toda chain with boundary interactions / N. Iorgov, V. Shadura // Theor. Math. Phys. – 2005. – V. 142. – P. 289–305.

87. Iorgov N.Z. Classification theorem on irreducible representations of the q-deformed algebra $U'_q(\mathrm{so}_n)$ / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // Int. J. Math. Math. Sci. – 2005. – Vol. 2. – P. 225–262.

88. Iorgov N. Eigenvectors of open Bazhanov–Stroganov quantum chain / N. Iorgov // SIGMA. – 2006. – Vol. 2, № 019. – 10 p.

89. Iorgov N. Relativistic Toda chain with boundary interaction at root of unity / N. Iorgov, V. Roubtsov, V. Shadura [та ін.] // SIGMA. – 2007. – V. 3, № 013. – 14 p.

90. Iorgov N. Eigenvectors of Baxter–Bazhanov–Stroganov $\tau^{(2)}(t_q)$ model with fixed-spin boundary conditions / N. Iorgov, V. Shadura, Yu. Tykhyy // Theor. Math. Phys. – 2008. – Vol. 155, № 1. – P. 585–597.

91. Isaev A. Q-multilinear algebra / A. Isaev, O. Ogievetsky, P. Pyatov // Preprint arXiv.org: q-alg/9912231. – 1999. – 12 p.

92. Jantzen J.C. Lectures on Quantum Groups (Monograph) / Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. – 530 p.

93. Jimbo M. A q-analogue of $U(g)$ and the Yang–Baxter equation / M. Jimbo // Lett. Math. Phys. – 1985. – V. 10. – P. 63–69.

94. Kashaev R. The quantum dilogarithm and Dehn twists in quantum Teichmüller theory. / R. Kashaev // Proc. NATO ARW "Integrable Structures of Exactly Solvable Two-Dimensional Models of Quantum Field Theory", Kiev, September 15–22, 2000. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. – P. 211 – 221.

95. Kaufman B. Crystal Statistics II. Partition function evaluated by spinor analysis / B. Kaufman // Phys. Rev. – 1949. – Vol. 76. – P. 1232–1269.

96. Kharchev S. Integral representations for the eigenfunctions of a quantum periodic Toda chain / S. Kharchev, D. Lebedev // Lett. Math. Phys. – 1999. – Vol. 50. – P. 53–77.

97. Kharchev S. Eigenfunctions of $GL(N,\mathbb{R})$ Toda chain: The Mellin-Barnes representation / S. Kharchev, D. Lebedev // JETP Lett. – 2000. – Vol. 71. – P. 235–238.

98. Kharchev S. Unitary representations of $U_q(sl(2,R))$, the modular double, and the multiparticle q-deformed Toda chains / S. Kharchev, D. Lebedev, M. Semenov-Tian-Shansky // Commun. Math. Phys. – 2002. – V. 225. – P. 573–609.

99. Kirillov A.N. Exact solution of the integrable XXZ Heisenberg model with arbitrary spin. I. The ground state and the excitation spectrum / A.N. Kirillov, N.Yu. Reshetikhin // J. Phys. A. – 1987. – Vol. 20. – P. 1565–1578.

100. Kirillov A. Affine Hecke algebras and raising operators for Macdonald polynomials / A. Kirillov, M. Noumi // Preprint arXiv.org: q-alg/9605004. – 1996. – 35 p.

101. Klimyk A.U. Spectra, eigenvectors and overlap functions for representation operators of q-deformed algebras / A.U. Klimyk, I.I. Kachurik// Commun. Math. Phys. – 1996. – Vol. 175. – P. 89–111.

102. Klimyk A. Quantum groups and their representations / Klimyk A., Schmüdgen K. (Monograph) – Berlin: Springer, 1997. – 570 p.

103. Klimyk A.U. Nonstandard q-deformation of the universal enveloping algebra $U(\mathrm{so}_n)$ / A.U. Klimyk // Quantum Theory and Symmetry. – Singapore: World Scientific, 2000. – P. 459–464.

104. Klimyk A.U. On classification of irreducible representations of q-deformed algebra related to quantum gravity / K.: Inst. Math. NAS Ukraine, 2002. – V. 43. – p. 407–418.

105. Kohmoto M. Hofstader problem on the honeycomb and triangular lattices: Bethe ansatz solution / M. Kohmoto, A. Sedrakyan // Preprint arXiv.org: cond-mat/0603285. – 2006. – 7 p.

106. Korepanov I.G. Hidden symmetries in the 6-vertex model of Statistical Physics / I.G. Korepanov// Zapiski Nauchn. Semin. POMI. – 1994. – Vol. 215. – P. 163–177.

107. Kostant B. Lie group representations on polynomial rings / B. Kostant// Amer. J. Math. – 1963. – V. 85. – P. 327–404.

108. Kulish P.P. Quantum spectral transform method. Recent developments / P.P. Kulish, E.K. Sklyanin // Lecture notes in Physics. – Springer, 1982. – Vol. 151. – P. 61–93.

109. Kuznetsov V. Separation of variables for the D_n type periodic Toda lattice / V. Kuznetsov // J. Phys. A. – 1997. – V. 30. – P. 2127–2138.

110. Kuznetsov V. Inverse problem for $sl(2)$ lattices / V. Kuznetsov // Symmetry and Perturbation Theory. – Cala Gonone, Sardinia: World Scientific, 2002. – P. 136–152.

111. Letzter G. Quantum symmetric pairs and their zonal spherical functions / G. Letzter // Transformation Groups. – 2003. – Vol. 8. – P. 261–292.

112. Lin S.-s. Algebraic geometry approach to the Bethe equation for Hofstadter type models / S.-s. Lin, S.-s. Roan // Preprint arXiv.org: cond-mat/9912473. – 1999. – 29 p.

113. Lin S.-s. Algebraic geometry and Hofstadter type models / S.-s. Lin, S.-s. Roan // Preprint arXiv.org: math-ph/0206014. – 2002. – 9 p.

114. Lisovyy O. Transfer matrix eigenvectors of the Baxter–Bazhanov–Stroganov τ_2-model for $N = 2$ / O. Lisovyy // J. Phys. A. – 2006. – Vol. 39. – P. 2265–2285.

115. Louck J.D. Canonical unit adjoint operators in $U(n)$ / J.D. Louck, L.C. Biedenharn // J. Math. Phys. – 1970. – Vol. 11. – P. 2368–2414.

116. Lusztig G. Equivariant K-theory and representations of Hecke algebras / G. Lusztig // Proc. AMS. – 1985. – V. 94, № 2. – P. 337–368.

117. Macdonald I.G. A new class of symmetric functions / I.G. Macdonald // Actes 20^e Séminaire Lotharingien. – Strasbourg: Publ. I.R.M.A., 1988. – V.3 72/S-20. – P. 131–171.

118. Maillet J.M. On the quantum inverse scattering problem / J.M. Maillet, V. Terras // Nucl. Phys. – 2000. – Vol. B575. – P. 627–644.

119. McCoy B.M. The two-dimensional Ising model: (Monograph) / McCoy B.M., Wu T.T. – Cambridge Mass.: Harward Univ.Press, 1972. – 430 p.

120. McCoy B.M. The connection between statistical mechanics та and квантовий quantum field theory / B.M. McCoy // Statistical Mechanics та and Field Theory, eds. V.V. Bazhanov and C.J. Burden. – Singapore : World Scientific, 1994. – P. 26–128.

121. Miller W. Symmetry and Separation of Variables: (Monograph) / Massachusetts: Addison-Wesley, 1978. – 470 p.

122. Molev A. Capelli identities for classical Lie algebras / A. Molev, M. Nazarov // Math. Ann. – 1999. – Vol. 313. – P. 315–357.

123. Molev A.I. Coideal subalgebras in quantum affine algebras / A.I. Molev, E. Ragoucy, P. Sorba// Rev. Math. Phys. – 2003. – Vol. 15. – P. 789–822.

124. Molev A.I. A new quantum analog of the Brauer algebra / A.I. Molev // Czech. J. Phys. – 2003. – Vol. 53. – P. 1073–1078.

125. Montroll E.W. Correlations та spontaneous magnetization of the two-dimensional Ising model / E.W. Montroll, R.B. Potts, J.C. Ward // J. Math. Phys. – 1963. – Vol. 4. – P. 308–322.

126. Nelson J. Homotopy groups and (2+1)-dimensional quantum de Sitter gravity / J. Nelson, T. Regge, F. Zertuche // Nucl. Phys. B. – 1990.– Vol. 339. – P. 516–532.

127. Nelson J. $2 + 1$ Quantum gravity / J. Nelson, T. Regge // Phys. Lett. – 1991. – Vol. B272. – P. 213–216.

128. den Nijs M. The domain wall theory of two-dimensional commensurate-incommesurate phase transitions / M. den Nijs // Phase Transitions. – 1988. – Vol. 12. – P. 219–333.

129. Noumi M. Finite dimensional representations of the quantum group $GL_q(n; C)$ and the zonal spherical functions on $U_q(n-1)/U_q(n)$ / M. Noumi, H. Yamada, K. Mimachi // Japan J. Math. – 1993. – Vol. 19. – P. 31–80.

130. Noumi M. Quantum symmetric spaces and related q-orthogonal polynomials / M. Noumi, T. Sugitani // Preprint arXiv.org: math.QA/9503225. – 1995. - 13 p.

131. Noumi M. Macdonald's symmetric polynomials as zonal spherical functions on quantum homogeneous spaces / M. Noumi // Adv. Math. – 1996. – V. 123. – P. 16–77.

132. Noumi M. Dual pairs, spherical harmonics and a Capelli identity in quantum group theory / M. Noumi, T. Umeda, M. Wakayama // Compos. Math. – 1996. – Vol. 104. – P. 227–277.

133. Odesskii A. An analogue of the Sklyanin algebra / A. Odesskii // Funct. Anal. Appl. – 1986. – Vol. 20. – P. 152–154.

134. Olshanetsky M. Quantum integrable systems related to Lie algebras / M. Olshanetsky, A. Perelomov // Phys. Rep. – 1983. – V.94. – P. 313–304.

135. Onsager L. Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order–disorder transition / L. Onsager // Phys. Rev. – 1944. – Vol. 65. – P. 117–149.

136. Pasquier V. The periodic Toda chain and a matrix generalization of the Bessel function recursion relations / V. Pasquier, M. Gaudin // J. Phys. A. – 1992. – V. 25. – P. 5243–5252.

137. Palmer J. Planar Ising correlations // Progress in Mathematics and Physics (Monograph). – Vol. 49. – Boston: Birkhauser, 2007. – 430 p.

138. Perk J.H.H. New results for the correlation functions of the Ising model and the transverse Ising chain / J.H.H. Perk, H. Au-Yang // Preprint arXiv.org:0901.1931. – 2009.

139. Roan S.S. Fusion operators in the generalized $\tau^{(2)}$-model and root-of-unity symmetry of the XXZ spin chain of higher spin / S.S. Roan // J. Phys. A. – 2007. – Vol. 40. – P. 1481–1512.

140. Roan S.S. On $\tau^{(2)}$-model in chiral Potts model and cyclic representation of quantum group $U_q(sl_2)$ / / S.S. Roan // Preprint arXiv.org: 0806.0216 [cond-mat.stat-mech]. – 2008.

141. Roan S.S. The transfer matrix of a superintegrable chiral Potts model as the Q operator of root-of-unity XXZ chain with cyclic representation of $U_q(sl_2)$ / S.S. Roan // J. Stat. Mech. – 2009. – № P09021.

142. Ruijsenaars S.N.M. Complete inetgrability of relativistic Calogero–Moser systems and elliptic function identities / S.N.M. Ruijsenaars // Commun. Math. Phys. – 1987. – V. 110. – P. 191–213.

143. Ruijsenaars S.N.M. Relativistic Toda systems / S.N.M. Ruijsenaars // Commun. Math. Phys. – 1990. – V. 133. – P. 217–247.

144. Samoilenko Yu.S. Semilinear relations and $*$-representations of deformations of $SO(3)$ / Yu.S. Samoilenko, L. Turowska // Quantum Groups and

Quantum Spaces. – Warsaw: Banach Center Publications, 1997. – Vol. 40. – P. 21–43.

145. Schuricht D. Dynamical response functions in the quantum Ising chain with a boundary / D. Schuricht, F.H.L. Essler // J. Stat. Mech.: Theor. Exp. – 2007. – P. 11004.

146. Sklyanin E. The quantum Toda chain / E. Sklyanin // Lect. Notes in Phys. – 1985. – V. 226. – P. 196–233.

147. Sklyanin E. Boundary conditions for integrable quantum systems / E. Sklyanin // J. Phys. A. – 1988. – V. 21. – P. 2375–2389.

148. Sklyanin E. Functional Bethe ansatz / E. Sklyanin // Integrable and Superintegrable Systems, ed. Kupershmidt B.A. – Singapore: World Scientific, 1990. – P. 8–33.

149. Sklyanin E. Quantum inverse scattering method. Selected topics / E. Sklyanin // Quantum Group and Quantum Integrable Systems, Nankai Lectures in Math. Phys., ed. Mo-Lin Ge. – Singapore: World Scientific, 1992. – P. 63–97.

150. Sklyanin E. Separation of variable. New trends / / E. Sklyanin // Prog. Theoret. Phys. Suppl. – 1995. – Vol. 118. – P. 35–60.

151. Tarasov V.O. Transfer matrix of the superintegrable chiral Potts model. Bethe ansatz spectrum / V.O. Tarasov // Phys. Lett. – 1990. – Vol. A147. – P. 487–490.

152. Tarasov V.O. Cyclic monodromy matrices для for the R-matrix of the six-vertex model and the chiral Potts model with fixed spin boundary conditions / V.O. Tarasov // Int. J. Mod. Phys. – 1992. – Vol. A7, Suppl. 1B. – P. 963–975.

153. Vilenkin N. Ja. Representation of Lie Groups and Special Functions: (Monograph) / Vilenkin N. Ja., Klimyk A. U. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – Vol. 2. – 612 p.

154. Vilenkin N. Ja. Representation of Lie Groups and Special Functions: (Monograph) / Vilenkin N. Ja., Klimyk A. U. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. – Vol. 3. – 637 p.

155. Wiegmann P.B. Quantum group and magnetic translations. Bethe-ansatz for Asbel-Hofstadter problem / P.B. Wiegmann, A.V. Zabrodin // Preprint arXiv.org: cond-mat/9312088. – 1993. – 20 p.

156. Witten E. 2+1 dimensional gravity as an exactly soluble system / E. Witten // Nucl. Phys. B. – 1988/89. – Vol. 311. – P. 46–78.

157. Wu T.T. Spin-spin correlation functions for the two-dimensional Ising model: Exact theory in the scaling region / T.T. Wu, B.M. McCoy, C.A. Tracy [та ін.] // Phys. Rev. – 1976. – Vol. B13. – P. 316–374.

158. Yang C. N. The spontaneous magnetization of a two-dimensional Ising model / C.N. Yang // Phys. Rev. – 1952. – Vol. 85. – P. 808–816.