НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ІМ. М.М. БОГОЛЮБОВА

На правах рукопису

Горбар Едуард Володимирович

УДК 530.145, 538.9

ДИНАМІЧНЕ ПОРУШЕННЯ СИМЕТРІЇ В ЗОВНІШНІХ ПОЛЯХ

01.04.02 – теоретична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора фізико - математичних наук

Київ - 2009

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

СПС	спонтанне порушення симетрії,
ДПС	динамічне порушення симетрії,
КТП	квантова теорія поля,
СМ	Стандартна Модель,
КЕД	квантова електродинаміка,
КХД	квантова хромодинаміка,
НЙЛ	Намбу–Йона-Лазініо,
КДТ	Корнуел–Джеків–Томбуліс,
ШД	Швінгер-Дайсон,
ГН	Грос-Невье,
БКШ	Бардін–Купер–Шріфер,
УФ/ІЧ	ультрафіолетово/інфрачервоне
КЕХ	квантовий ефект Хола,
НРЛ (LLL)	найнижчий рівень Ландау,
CFL	color-flavor-locked,
2SC	two-flavor superconductivity,
g2SC	gapless two-flavor superconductivity,
ЛОФФ	Ларкін–Овчініков–Фульде–Ферел

ВСТУП

Спонтанне порушення симетрії (СПС) є одним із фундаментальних явищ в фізиці елементарних частинок [1, 2, 3, 4] і теорії конденсованого стану [5, 6, 7, 9]. Це явище реалізується у випадку коли гамільтоніан системи має деяку симетрію, проте основний стан системи не є симетричним. Порушення симетрії в основному стані системи характеризується ненульовими середніми деяких параметрів порядку. Є дуже багато прикладів спонтанного порушення симетрії. Одними з найбільш відомих є феромагнетизм, теорія надпровідності, порушення кіральної симетрії в квантовій хромодинаміці (КХД), механізм Хігса [10, 11, 12, 13] порушення електрослабкої взаємодії в Стандартній Моделі [14, 15] фізики елементарних частинок. Важливо також, що крім великого історичного значення порушення симетрії є однією з найбільш актуальних тем в сучасній фізиці.

Так в фізиці високих енергій існує практично консенсус стосовно того, що порушення електрослабкої симетрії є зараз центральною проблемою в фізиці елементарних частинок. І справа тут не стільки в тому, що хігсівський бозон, який відповідальний за порушення електрослабкої взаємодії в Стандартній Моделі (СМ) є єдиною поки ще експериментально не спостереженою частинкою. Нагадаємо, що СМ є кірально симетричною теорією, а як добре відомо кіральна симетрія забороняє масові члени для відповідних частинок. Тому якби електрослабка симетрія не була спонтанно порушена, то кварки, лептони та інші частинки не мали б маси. Саме тому дослідження механізма порушення електрослабкої симетрії є дуже важливим та актуальним питанням і зрозуміло чому з таким нетерпінням очікуються результати прискорювача LHC, будівництво якого завершено в ЦЕРНі і чиї перші результати очікуються в 2010 році.

Дослідження порушення симетрії залишається також однією з центральних тем у фізиці конденсованого стану. Так проблема з'ясування механізму високотемпературної надпровідності спостерігаємої в купратах є фактично проблемою того, яким чином порушується електромагнітна $U(1)$ симетрія в високотемпературних надпровідниках з відповідним d-хвильовим параметром порядку [16]. Ця ж проблема стосується і нещодавно відкритої надпровідності в пніктідах заліза [17], де питання механізму генерації надпровідного параметра порядку є також відкритим. В графені у сильних зовнішніх магнітних полях спостерігаються нові плато в квантовому ефекті Хола, чия поява пов'язана з динамічним порушенням $U(4)$ симетрії.

Історично явище спонтанного порушення симетрії з'явилось в фізиці в дослідженнях феромагнетизму в моделі молекулярного поля Вейса [18]. Ландау в своїй роботі [19] присвяченої теорії фазових переходів другого роду використовуючи метод середнього поля показав, що такі переходи пов'язані з порушенням симетрії і можуть бути описані за допомогою ефективної дії для відповідних параметрів порядку. Величезним успіхом в рамках такого підходу стала ефективна дія Гінзбурга–Ландау [20] в теорії надпровідності. Ця дія дозволяє найбільш ефективно з практичної точки зору описати вплив магнітного поля і границь на надпровідник. Видатним досягненням отриманим за допомогою ефективної дії Гінзбурга–Ландау стало відкриття абрікосовських вихорів [21] в надпровідниках другого роду. Абрікосовські вихори є топологічними об'єктами. Згодом стало зрозуміло, що порушення симетрії і поява топологічних об'єктів є взагалі тісно пов'язаними. Дослідження Кібла і Зурека [22, 23] показали, що при фазовому переході з порушенням симетрії в системі утворюются різні топологічні об'єкти, чия природа пов'язана з групами симетрії гамільтоніану системи і стану, який порушує симетрію.

Мікроскопічна теорія надпровідності Бардіна–Купера–Шріфера (БКШ) [24] стала першим прикладом динамічного порушення симетрії (ДПС) в квантовій теорії поля взагалі. В цій теорії параметр порядку є складеним полем, яке описує конденсат куперівських пар. Взагалі про динамічне порушення симетрії говорять коли параметр порядку є складеним полем, а якщо параметр порядку є елементарним полем, яке міститься в гамільтоніані теорії, то відповідне порушення симетрії називається спонтанним. Горьков показав [25], що конденсат куперівських пар в теорії БКШ відповідає параметру порядку в ефективній дії Гінзбурга–Ландау і ця дія може бути отримана з теорії БКШ як ефективна низькоенергетична дія для параметра порядку. В теорії БКШ внаслідок ефективного притягування між електронами за рахунок обміну фононами нормальний стан металу є нестабільним відносно конденсації куперовських пар. При цьому в енергетичному спектрі електронів з'являється щілина. Це означає, що починає виконуватись крітерій надлинності Ландау і таким чином виникає надпровідність, яку можна розглядати як надлинність зарядженної рідини.

Слід також відзначити, що СПС є непертурбативним явищем, яке не можливо описати використовуючи теорію збурень по константі зв'язку. Так надпровідна щілина в теорії надпровідності неаналітичним чином залежить від константи зв'язку, що означає неможливість її генерації в рамках теорії збурень. Непертурбативний характер порушення симетрії вимагає використання непертурбативних методів дослідження. Рівняння Швінгера–Дайсона (ШД) [26, 27] є точними рівняннями для функцій Гріна в квантовій теорії поля і тому є одним із найбільш загальних і широко застосованих непертурбативних методів дослідження порушення симетрії.

Теорія БКШ була створена в 1957 році, а вже через декілька років ідея теорії БКШ щодо динамічної генерації щілини в спектрі елементарних збуджень булі використана в піонерських роботах Намбу [28], Намбу і Йона–Лазініо [29], Арбузова, Тавхелідзе і Фаустова [30], Вакса і Ларкіна [31] в фізиці елементарних частинок, де динамічне порушення кіральної симетрії генерує ненульові маси елементарних частинок. Після цього дослідження динамічного порушення симетрії почали активно розвиватися в фізиці елементарних частинок [32]-[36].

Дуже важливим результатом отриманим в ході цих досліджень є теорема Голдстоуна [37], яка з'ясувала відмінність порушення дискретної і неперервної симетрії і показала, що при спонтанному порушенні неперервної симетрії в спектрі з'являються безмасові збудження, які отримали назву намбу-голдстоунівських бозонів. У випадку релятивістські інваріантних теорій ця теорема була доведена в роботі [38], а в роботі [39] була розглянута в нерелятивістських теоріях фізики конденсованого стану. Слід також зауважити, що дослідження Мерміна, Вагнера [40] і Хоенберга [41] в статистичній фізиці та Коулмена [42] в релятивістській квантовій теорії поля показали, що внаслідок сильних інфрачервоних флуктуацій спонтанне порушення дискретної в (1+1)-вимірному просторі-часі і неперервної в (2+1)-вимірному просторі-часі неможливо при ненульовій температурі.

Для фізики елементарних частинок дуже важливими виявилися роботи Броута і Енглерта [10], Хігса [11, 12] та Гуральніка, Хагена і Кібла [13], які стосуються порушення симетрії в калібрувальних теоріях. В цих роботах було показано, що безмасові намбу-голдстоунівські збудження не з'являються при спонтанному порушенню калібрувальної симетрії. Цей факт є дуже важливим, тому що в природі відомі тільки дві безмасові частинки, а саме фотон і гравітон, і тому до робіт [10, 11, 12, 13] здавалось, що теорема Голдстоуна перекреслює всі надії стосовно застосування ідеї спонтанного порушення неперервної симетрії в фізиці елементарних частинок.

Причина того, що спонтанне порушення калібрувальної симетрії не призводить до появи безмасових збуджень полягає у тому, що строго кажучи, калібрувальна симетрія не є симетрією. Скоріше це вимушенне збільшення числа змінних, які описують систему. Справа в тому, що всі фізичні стани системи є калібровочно інваріантними і тому фактично за визначенням калібрувальна симетрія не може бути порушена згідно з теоремою Елітзура [43]. Наприклад, не має ніяких заборон для того, щоб фізично еквівалентні теорії описувались теоріями з різними калібрувальними групами. Той факт, що фізичні спостережувані є калібровочно інваріантними величинами означає також, що різні фази калібрувальної теорії не можуть бути визначеними за допомогою локальних параметрів порядку. З іншого боку, для опису різних фаз калібрувальної теорії можуть бути використані нелокальні параметри порядку, такі, наприклад, як петля Вільсона [44] або Полякова [45]. Вважається, що такі нелокальні параметри порядку (дивись, наприклад [46]) повністю класифікують масивні фази калібрувальних теорій.

Дослідження Броута і Енглерта, Хігса та Гуральніка, Хагена і Кібла показали, що при спонтанному порушенні калібрувальної симетрії, збудження, які були б безмасовими в моделі з глобальною, але не калібрувальною симетрією, об'єднуються з векторним калібрувальним полем описуючи таким чином його повздовжню компоненту або, як іншими словами часто характеризують це явище, "з'їдаються" векторним полем. В результаті потенційні безмасові стани зникають із спектра збуджень системи, а натомість, векторні калібрувальні бозони отримують ненульову масу. Цей механізм, відомий як механізм Андерсона–Хігса, відіграє вирішальну роль в Стандартній Моделі елементарних частинок. Андерсон в свої роботі [47] присвяченій калібрувальній інваріантності в теорії надпровідності БКШ ще до робіт Броута і Енгельса, Хігса та Гуральніка, Хагена і Кібла в релятивістській квантовій теорії поля зрозумів сутність цього явища і показав, що саме завдяки ньому ефективний лагранжіан для електромагнітного поля в надпровіднику містить масовий член для електромагнітного поля. Наявність такого члена пояснює чому надпровідник є ідеальним діамагнетником, тобто чому магнітне поле не проникає вглиб надпровідника.

Вище ми відзначили важливу роль теорії Ландау фазових переходів другого роду, яка зв'язала ці переходи з порушенням симетрії. Однак теорія Ландау є теорією середнього поля і вона передбачає фіксовані значення критичних індексів, які описують як змінюються різні термодинамічні величини поблизу точки фазового перехода. Експериментально було відомо, що критичні індекси не є фіксованими і є різними для різних систем, тому було важливо пояснити їх значення. Каданофф [48] запропонував використати ідею скейлінгу і гіпотезу подібності для обчислення критичних індексів. Пізніше ці ідеї були розвинуті Вільсоном [49], який застосував метод ренормалізаційної групи відомий тепер як метод ренормгрупи Вільсона для опису поведінки статистичних систем в околі критичної точки. Використаний Вільсоном підхід пролив також нове світло на проблему ультрафіолетових розбіжностей присутніх в релятивістських квантових теоріях поля і призвів в теперішній час до практично універсального сприйняття сучасних квантовопольових теорій в фізиці елементарних частинок як деяких ефективних теорій.

Вище ми вже відзначали, що спонтанне порушення симетрії спостерігається в квантовопольових теоріях елементарних частинок і в квантовій фізиці конденсованого стану, тобто в квантових системах, які характеризуються нескінченним числом ступенів вільності. Математично можна показати, що у гільбертовому просторі таких теорії не існує унітарного перетворення, яке зв'язує стан із порушеною симетрією з симетричним станом [50, 51]. Для систем із скінченним числом частинок в квантовій механіці добре відома теорема Стоуна–фон Неймана [52, 53] згідно якої будь-які представлення канонічних комутаційних співвідношень є унітарно еквівалентними і тому будь-які стани в гільбертовому просторі теорії можуть бути зв'язані унітарними перетвореннями. Ця теорема не є справедливою для систем з нескінченним числом ступенів вільності, де можуть існувати унітарно нееквівалентні представлення канонічних комутаційних співвідношень, а тому можливе спонтанне порушення симетрії.

Існує досить простий аргумент який пояснює із фізичних міркувань необхідність нескінченного числа ступенів вільності для спонтанного порушення симетрії. Із квантової механіки ми знаємо, що якщо потенціал системи з деяким числом частинок має декілька вироджених мінімумів, а початковий стан системи відповідає положенню в деякому з цих мінімумів, то система може тунелювати в інший мінімум і ймовірність спостереження в ньому системи відмінна від нуля. Якщо ж число ступенів вільності (число частинок) і об'єм системи зростає, то, як легко бачити, ймовірність тунелювання системи із одного мінімуму в інший експоненційно зменшується. В системі з нескіченним числом ступенів вільності ймовірність переходу системи із стану локалізованому в одному з мінімумів в інший дорівнює нулю. Таким чином, хоча гамільтоніан системи є симетричним, основний стан може порушувати симетрію. Симетрія при цьому проявляється в наявності станів в інших виродженних мінімумах. Цей результат повністю узгоджується з теорією Янга і Лі [54] фазових переходів, яка також вказує на необхідність нескіченного числа частинок і нескінченного об'єму для того, щоб в системі мав місце деякий фазовий перехід. Нагадаємо, що згідно теорії Ландау фазові переходи другого роду пов'язані з порушенням симетрії. Таким чином, спонтанне або динамічне порушення симетрії можливе тільки в системах з нескінченним числом ступенів вільності.

Для того, щоб в більш фізичних термінах зрозуміти необхідність нескінченного числа ступенів вільності для спонтанного порушення симетрії ми розглянемо, як приклад, СПС в моделі Гайзенберга феромагнетика, відповідний гамільтоніан якої має наступний вигляд

$$H = -\sum_{i,j} J\vec{S}_i\vec{S}_j,$$

де $\vec{S}$ - оператор спіна, J - додатня константа взаємодії між спінами, а сумування відбувається по всім найближчим сусідам. Припустимо, що ми розглядаємо стан системи де всі спіни впорядковані в деякому напрямку. Зрозуміло, що цей напрямок є довільним, тому що енергія системи для стану із спінами впорядкованими в будь-якому іншому напрямку буде такою ж. Припустимо, що система знаходиться при деякій температурі. Тоді будь-який спін може за рахунок флуктуації перейти в стан з іншим напрямком спіна. Чому ж тоді система не переходить із стану з деяким фіксованим спіном в стан із спінами впорядкованими в іншому напрямку? Саме на цьому етапі вирішальну роль відіграє нескінченне число ступенів вільності в моделі, що розглядається.

Дійсно, для будь-якої області із скінченним числом спінів існує ненульова ймовірність того, що всі спіни в цій області за рахунок флуктуації перейдуть в стан із спінами впорядкованими в іншому напрямку. Очевидно, що такий стан системи є збудженим станом. Хоча всередині області спіни впорядковані в одному напрямку і густина енергії співпадає з густиною енергії основного стану за межами області, спіни не є впорядкованими на границі області і тому такий стан має більшу енергію ніж основний стан. Зрозуміло, що чим більша область такої флуктуації, тим вищою буде енергія і відповідно тим меншою буде ймовірність такої флуктуації. В границі коли об'єм області, що розглядається, прямує до нескінченності $V \to \infty$ ймовірність такої флуктуації прямує до нуля і таким чином ми робимо висновок, що система зі спінами впорядкованими в деякому напрямку не може перейти в стан з іншим напрямком спінів. Це означає, що симетрія гамільтоніану системи відносно поворотів спінів є спонтанно порушеною і зрозуміло також, що спонтанне порушення симетрії може мати місце тільки в системі із нескінченим числом ступенів вільності.

З математичної точки зору слід відзначити також, що оператор, який описує поворот спінів системи перестає бути унітарним оператором в границі нескінченного числа ступенів вільності [50, 51] у гільбертовому просторі всіх станів системи, тобто стани із спінами впорядкованими в різних напрямках реалізують унітарно нееквівалентні представлення канонічних комутаційних співвідношень теорії.

Для практичних цілей дуже важливо, що хоча з математичної точки зору спонтанне порушення симетрії можливе тільки в системах з нескінченним числом ступенів вільності, в фізиці і природі порушення симетрії експериментально спостерігається в системах із скінченним числом частинок. Наприклад, будь-який феромагнетик або надпровідник, який ми досліджуємо в лабораторії має скінченний об'єм і скінченне число частинок. Чому ж тоді спонтанне порушення симетрії спостерігається в цих системах? Відповідь полягає в тому, що такі системи мають дуже велике, макроскопічне, число частинок порядка 10^{23}. Припустимо, що феромагнетик є намагніченим в деякому напрямку. В силу макроскопічного числа спінів в цьому феромагнетику ймовірність переходів всіх спінів цього феромагнетика в стан з іншим напрямком спінів є надзвичайно малою. Це означає, що хоча стани конденсованих систем із скінченним числом частинок, які порушують симетрію, з математичної точки зору є метастабільними, для всіх практичних цілій вони описують реально спостережувані в експериментах стани системи. Внаслідок того, що час існування таких метастабільних станів є надзвичайно великим і зазвичай набагато перевищує час існування Всесвіту, ми можемо не звертати уваги на метастабільність цих станів.

Міркування вище і аналіз моделі Гайзенберга пояснюють головну ідею методу квазісередніх Боголюбова [55] і підказують як ми повинні математично досліджувати порушення симетрії. В методі квазісередніх Боголюбова до гамільтоніану системи додається доданок, який порушує симетрію і є добутком параметра порядку і джерела $h(x)$. Далі розглядається термодинамічна границя $V \to \infty$ і $N \to \infty$ так, що $\rho = N/V = const$. Якщо термодинамічна і $h \to 0$ границі не комутують, то тоді в системі має місце спонтанне порушення симетрії. В тій чи іншій формі ідея методу квазісередніх Боголюбова використовується в інших методах дослідження спонтанного і динамічного порушення симетрії, наприклад, в методі ефективної дії Корнуела–Джеківа–Томбуліса (КДТ) [56], де параметр порядку є складеним полем, а джерело білокальною функцією. В даній дисертаційній роботі метод КДТ буде одним з головних методів дослідження.

Відзначимо, що хоча це може здаватися на перший погляд дивним, спонтанне порушення симетрії є важливим також для космології. Сучасною космологічною моделлю є теорія Великого Вибуху згідно якій ранній Всесвіт перебував в дуже гарячому стані з температурами, які можливо досягали значень 10^{16} ГеВ характерних для теорій Великого Об'єднання. Всесвіт швидко розширювався і з часом охолоджувався. Внаслідок цього в ньому відбувалися фазові переходи пов'язані з порушенням електрослабкої (електрослабкий фазовий перехід) і кіральної (фазовий перехід в квантовій хромодинаміці) симетрій, які були непорушеними при достатньо великих температурах.

З точки зору фізики елементарних частинок дуже важливим і цікавим є питання баріогенезису, яке пов'язане з електрослабким фазовим переходом. Справа в тому, що в Стандартній Моделі при температурах вищих температури електрослабкого фазового переходу мають місце так звані сфалеронні процеси [57], які не зберігають баріонний заряд. Тому навіть якщо Всесвіт народився у стані з деяким ненульовим баріонним зарядом сфалеронні процеси знищать його. В Всесвіті, який ми спостерігаємо, частинки, які складають матерію мають тільки позитивний баріонний заряд, тому необхідно якось пояснити яким чином виник ненульовий баріонний заряд Всесвіта. Хоча в Стандартній Моделі присутні всі необхідні умови [58] для баріогенезису, однак маленька величина порушення CP симетрії в СМ не дозволяє [59] отримати спостережуване значення баріонного заряду. Зовнішнє магнітне поле має істотний вплив на електрослабкий фазовий перехід і баріогенезис, однак тим не менш дослідження в роботі [60] показали, що умова необхідна для баріогенезиса спостережуваної матерії не реалізується в Стандартній Моделі навіть в дуже сильних магнітних полях.

Взагалі слід зазначити, що питання впливу зовнішніх полів на спонтанне або динамічне порушення симетрії є одним із класичних питань в дослідженнях порушення симетрії. Достатньо лише згадати, що ідеальний діамагнетизм є однією з найважливіших характеристик надпровідника. Слід відзначити, що дослідження спонтанного або динамічного порушення симетрії в зовнішніх полях є частиною більш загальної проблеми вивчення квантових ефектів в класичних зовнішніх полях [61]. Знаменитий ефективний лагранжіан Гайзенберга–Ейлера в квантовій електродинаміці (КЕД) є прикладом важливості цієї проблеми. Процес Швінгера народження електрон-позітронних пар електричним полем є також іншим дуже цікавим квантовим ефектом в класичному зовнішньому полі. Електричне поле інтенсивно народжує пари, якщо робота електричного поля на відстані комптонівської довжини хвилі електрона є порядка $m_e c^2$, де m_e - маса електрона. Такі сильні електричні поля можуть виникати при зіткненнях важких іонів або при фокусіровці потужних імпульсних лазерних променів. Дуже сильні електромагнітні поля спостерігаються поблизу пульсарів і тому врахування квантових ефектів в зовнішньому класичному електромагнітному полі є суттєвим при дослідженні таких об'єктів. Слід відзначити також, що сильні магнітні і хромомагнітні поля можуть бути спонтанно згенеровані в Стандартній Моделі при високій температурі [62, 63].

Для астрофізики чорних дірок і космології раннього Всесвіту важливу роль мають дослідження квантових ефектів в гравітаційному полі. Як приклад, неможливо не згадати такі ефекти як народження пар частинок в процесі космологічного розширення [64, 65] та ефект Хокінга теплового випромінення чорних дірок [66, 67]. В сучасній фізиці відомо лише два класичних поля електромагнітне і гравітаційне. Тому в даній дисертаційній роботі ми будемо розглядати динамічне порушення симетрії в зовнішніх електромагнітному полі і у викривленому просторі-часі. Крім зовнішніх електромагнітного і гравітаційного полів в дисертації ми розглянемо також вплив ненульової густини матерії на порушення симетрії в теорії кольорової надпровідності.

Серед можливих зовнішніх полів та їх різних комбінації в дисертації головну увагу ми будемо приділяти зовнішньому постійному магнітному полі. Така увага до впливу зовнішнього магнітного поля на динамічне порушення симетрії пов'язана з явищем магнітного каталізу відкритого в роботах [68, 69, 70, 71, 72] згідно з яким критична константа зв'язку для ДПС в зовнішньому постійному магнітному полі дорівнює нулю.

Нагадаємо, що зазвичай динамічне порушення симетрії в (3+1)-вимірному просторі потребує для свого існування надкритичних значень константи зв'язку $g \geq 1$, що суттєво зменшує вибір можливих моделей порушення симетрії. Необхідність сильного зв'язку $g \geq 1$ легко зрозуміти з досить простих фізичних міркувань. Дійсно для того, щоб стан із конденсатом ферміон-антиферміонних пар мав енергію меншу ніж тривіальний вакуум необхідно, щоб енергія ферміон-антиферміонного зв'язаного стану була від'ємною. В КЕД, як легко можна показати, така умова означає, що константа зв'язку повинна перевищувати одиницю, тобто $\alpha \geq 1$. Схожа ситуація має місце в моделі Намбу–Йона-Лазініо (НЙЛ) [29] та інших моделях. Тому дуже цікаво коли ДПС відбувається в режимі слабкої взаємодії ($g_c \approx 0$).

Три приклади таких режимів відомі. Перший - це порушення симетрії в системах з ненульовою густиною ферміонів коли присутня поверхня Фермі. У цьому випадку, як відомо з теорії надпровідності БКШ [24], зв'язаний стан формується навіть у випадку як завгодно слабкого притягування між ферміонами. В роботі [73], де це питання розглядалось в рамках ренормгрупового підходу, було показано, що ренормгруповий скейлінг в імпульсному просторі має місце тільки в напрямку перпендикулярному до поверхні Фермі. Таким чином, з точки зору ренормгрупового скейлінгу ефективна розмірність простору-часу в моделях з поверхнею Фермі є $(1 + 1)$-вимірною. Як добре відомо, зв'язаний стан в $(1 + 1)$-вимірному просторі-часі утворюється для як завгодно слабко притягуючого потенціалу і тому не дивно, що $g_c = 0$ у цьому випадку. Відповідну динаміку для кваркової матерії у стані кольорової надпровідності ми розглянемо у Розділі 4.

Другий приклад ДПС в режимі слабкого зв'язку був відкритий в роботах [68, 69, 70, 71, 72] для теорій у зовнішньому постійному магнітному полі. В цих роботах було показано, що кіральна симетрія динамічно порушена в НЙЛ моделі і в КЕД у зовнішьому магнітному полі для як завгодно слабкої взаємодії (дивись також більш ранні роботи [74, 75]), тобто критичне значення константи зв'язку дорівнює нулю. Це явище відомо в літературі як магнітний каталіз. Було показано, що магнітний каталіз має універсальний характер пов'язаний з ефективною редукцією простору-часу для динаміки ферміонів в інфрачервоній області на 2 одиниці [68, 72] коли їх енергія менша за масштаб Ландау $\sqrt{|eB|}$.

Динаміка ферміонів в гіперболічних просторах H^n - це третій приклад ДПС в режимі слабкої взаємодії. Він буде розглянутий нами в Розділі 3.

Актуальність теми.

Актуальність теми даної дисертаційної роботи обумовлена тим, що вона присвячена дослідженню однієї з ключових тем сучасної фізики квантових систем із нескінченним числом ступенів вільності, якою є динамічне порушення симетрії. Дослідження порушення симетрії особливо активно ведуться останнім часом. Їх актуальність обумовлена двома факторами. По-перше, порушення електрослабкої симетрії, як це визнається практично одностайно всіма дослідниками, в даний час є центральною проблемою в фізиці елементарних частинок. Прискорювач LHC, де ця проблема буде ретельно досліджуватись експериментально, повинен вийти на проектні значення енергій зіткнень в наступному році. В передчутті цієї важливої події зростає увага теоретиків до проблеми порушення електрослабкої симетрії і їми було запропоновано багато різних моделей порушення електрослабкої симетрії. Чільне місце серед цих моделей займають моделі з динамічним порушенням симетрії, хоча безумовно найбільшу увагу привертають до себе суперсиметричні моделі порушення електрослабкої симетрії. Теоретики активно досліджують різні аспекти моделей з динамічним порушенням електрослабкої симетрії в передчутті можливих майбутніх подій пов'язаних із результатами експериментів на LHC. По-друге, продовжується бурхливий розвиток фізики конденсованого стану і експериментально відкриваються та досліджуються нові дуже цікаві системи, в яких динамічне порушення симетрії відіграє дуже суттєву роль.

Одним із таких яскравих прикладів є відкриття графена. Подібні важливі експериментальні відкриття дуже сприяють розвитку різних аспектів теорії ДПС.

Питання впливу класичних зовнішніх полів і кривизни простору-часу на динамічне порушення симетрії є одним із класичних питань в фізиці ДПС. Дуже істотні за величиною магнітні поля спостерігаються в нейтронних зірках, а вплив кривизни простору-часу був суттєвим у ранньому Всесвіті. Надзвичайно важливу роль зовнішні електромагнітні поля відіграють також в дослідженнях порушення симетрії в фізиці конденсованого стану, достатньо згадаємо лише надпровідність і квантовий ефект Хола (КЕХ). Явище магнітного каталізу динамічного порушення симетрії відкрите в роботах [68, 69, 70, 71, 72] є одним із найяскравіших прикладів впливу зовнішніх полів на ДПС. Явище магнітного каталізу знайшло дуже важливе застосування в дослідженнях КЕХ в графені, де воно використовується для пояснення експериментально спостережуваних $\nu = 0, \pm 1$ плато холівської провідності в сильних магнітних полях.

Нещодавно було з'ясовано, що в центральних областях нейтронних зірок може існувати кваркова матерія в стані кольорової надпровідності, яка характеризується динамічним порушенням кольорової $SU_c(3)$ симетрії з надпровідною щілиною порядку 25-100 МеВ. Наявність кольорової надпровідності може впливати на такі спостережувані властивості нейтронних зірок, як відношення маси зірки до її радіуса, швидкість обертання, еволюція в часі величини магнітного поля, швидкість охолодження та інші. Поряд із дослідженнями спостережуваних наслідків присутності кольорової надпровідності актуальними в теперішній час є також теоретичні дослідження проблеми хромомагнітної нестабільності кольорового надпровідника для реалістичних значень конституентної маси s-кварка. Питання того, яким є основний стан кольорового надпровідника є одним із найважливіших і найактуальніших в цій області.

Після експериментального відкриття в 2004 році графен швидко став одним з найбільш активно досліджуваних матеріалів в сучасній фізиці конденсованого стану. Квазічастинкові збудження в графені при низьких енергіях описуються безмасовим рівнянням Дірака в (2+1)-вимірному просторі-часі. Кулонівська взаємодія визначає їх взаємодію, а відповідний гамільтоніан має $U(4)$ симетрію пов'язану із спіновими і псевдоспіновими ступенями вільності. Динамічне порушення $U(4)$ симетрії в графені у зовнішньому магнітному полі було передбачено навіть до експериментального відкриття графена. Зараз різні аспекти цього явища активно досліджуються як експериментально, так і теоретично.

Наявність великої кількості різноманітних фізичних систем, де знаходить своє застосування динамічне порушення симетрії, ідей, теорій та методів дослідження є свідченням того, що роботи пов'язані із дослідженням ДПС є актуальними і важливими.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконувалась в Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України. До роботи також увійшли результати, одержані під час стажування в Інституті теоретичної фізики університету Сан-Паулу (м. Сан-Паулу, Бразилія), Інституті точних наук федерального університету Жуіс-ді-Фора (м. Жуіс-ді-Фора, Бразилія), на факультеті прикладної математики університету Західного Онтаріо (м. Лондон, Канада). Частину результатів було отримано в процесі виконання наступних проектів: тема НАН України "Дослідження структури і динаміки фізичного вакуума та частинкових і колективних збуджень в фізиці високих енергій, квантових макросистемах, космології та астрофізиці", номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ 0105У008402 (шифр 1.4.7); тема НАН України "Фундаментальні властивості фізичних систем в екстремальних умовах", номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ 0107У000396 (шифр 1.3.1); ДФФД Ф28.2/083 "Застосування методів теорії струн та теорії поля у вивченні нелінійних явищ в низьковимірних системах", номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ 0109U006861.

Мета і задачі дослідження.

Метою досліджень проведених у дисертації є вивчення впливу зовнішніх електромагнітних полів і кривизни простору-часу на динамічне порушення симетрії в релятивістських квантових теоріях поля і нерелятивістських квантових статистичних системах багатьох частинок. Для цього необхідно було розв'язати наступні задачі:

1. Дослідити чи присутня ефективна некомутативність в низькоенергетичній області в релятивістських квантових теоріях поля в зовнішніх сильних постійних магнітних полях, яка реалізується в наближенні найнижчого рівня Ландау (НРЛ) в нерелятивістських квантових статистичних системах багатьох частинок.

2. Вивчити особливості магнітного каталізу динамічного порушення симетрії у просторах вищої розмірності, а також при наявності електричного поля паралельного магнітному.

3. Розвинути деякі методи дослідження динамічного порушення симетрії, зокрема, метод ефективного потенціала для локальних складених полів і метод розкладу ефективної дії у викривленому просторі з врахуванням нескінченного числа похідних для масивних полів.

4. Дослідити причину нульового значення критичної константи зв'язку для динамічного порушення симетрії у просторах з постійною від'ємною кривизною. З'ясувати чи пов'язане це явище з ефективною редукцією простору-часу для ферміонів в інфрачервоній області, як це має місце у випадку зовнішнього постійного магнітного поля.

5. Проблема хромомагнітної нестабільності кольорового надпровідника з

однорідними кварковими конденсатами вказує на нестабільність таких станів кольорового надпровідника відносно спонтанного генерування ненульових середніх глюонних полів. Тому потрібно дослідити можливість існування фази кольорової надпровідності з конденсатами глюонних полів і якщо така фаза існує, з'ясувати чи відсутня в цій фазі хромомагнітна нестабільність.

6. Дослідити динамічне порушення симетрії в графені у зовнішньому постійному магнітному полі та розглянути зв'язок отриманих результатів з експериментальними даними по КЕХ в графені.

Об'єктом дослідження є динамічне порушення симетрії в релятивістських квантових теоріях поля і фізиці конденсованого стану в зовнішніх полях і викривленому просторі.

Предметом дослідження є релятивістські квантовопольові теорії і квантові статистичні системи багатьох частинок з діраківським енергетичним спектром, в яких має місце динамічне порушення симетрії.

В роботі було застосовано наступні **методи дослідження:** метод ефективної дії Корнуела–Джеківа–Томбуліса для складених операторів, непертурбативні рівняння Швінгера–Дайсона, метод допоміжних полів Хабарда–Стратоновича та метод ядра теплопровідності для обчислення функціональних детермінантів.

Наукова новизна одержаних результатів.

Основними науковими результатами, які виносяться на захист є такі:

1. Доведено, що параметри порядку, пов'язані з феромагнітними і екситонними конденсатами з необхідністю співіснують в графені у зовнішньому магнітному полі. Їх сумісний розгляд якісно правильно описує експериментально спостережувані холівські плато в графені в сильних магнітних полях.

2. В якості кандидата на основний стан кольорового надпровідника з двома ароматами кварків у підході Гінзбурга-Ландау запропоновано глюонну фазу з векторними конденсатами глюонів, яка розв'язує проблему хромомагнітної нестабільності 2SC (two-flavor superconductivity) фази кольорової надпровідності кваркової матерії з двома ароматами кварків.

3. Показано, що електрично і кольорово нейтральний стан Ларкіна- Овчінікова-Фульде-Ферела (ЛОФФ) кваркової матерії з двома ароматами кварків і однохвильовою неоднорідністю надпровідної щілини має хромомагнітну нестабільність в усій області, де він співіснує з 2SC та g2SC (gapless two-flavor superconductivity) фазами кольорової надпровідності.

4. З'ясовано, що нейтральні стани в релятивістських квантових теоріях поля у сильному зовнішньому магнітному полі в наближенні найнижчого рівня Ландау в низькоенергетичній області описуються ефективними некомутативними квантовими теоріями поля, в яких відсутнє ультрафіолетово/інфрачервоне (УФ/ІЧ) змішування, яке має місце в звичайних некомутативних квантових теоріях поля.

5. Показано, що ефективна редукція розмірності простору-часу для динаміки ферміонів в інфрачервоній області в просторах постійної від'ємної кривизни є причиною нульового значення критичної константи зв'язку для динамічного порушення кіральної симетрії в цих просторах.

6. Закон Апелквіста-Каразоне відщеплення масивних полів при низьких енергіях у плоскому просторі узагальнено для випадку відщеплення масивних полів у викривленому просторі в теоріях із спонтанним порушенням симетрії. Відщеплення масивних полів у секторі з вищими похідними гравітаційної дії має стандартний квадратичний характер.

7. З'ясовано, що явище магнітного каталізу динамічного порушення кіральної симетрії залишається справедливим в просторах вищої розмірності,

де має місце ефективна редукція розмірності простору-часу $D+1 \to 1+1$ та $D+1 \to 0+1$ для динаміки ферміонів в інфрачервоній області в $(D+1)$-вимірних просторах-часі парної і непарної розмірності відповідно. Присутність електричного поля паралельного магнітному протидіє динамічному порушенню кіральної симетрії.

Практичне значення одержаних результатів.

Отримані результати мають теоретичний характер. Робота [98] передбачила генерацію щілини в спектрі квазічастинок в графені у зовнішньому магнітному полі ще до її експериментального відкриття в роботах по квантовому ефекту Хола в графені. Ця робота на сучасний момент за даними ISI Thompson Scientific має 107 посилань. В роботах [100, 101, 102] було доведено, що параметри порядка пов'язані з квантовим холівським феромагнетизмом і магнітним каталізом в графені з необхідністю співіснують і їх сумісний розгляд пояснює експериментально спостережувані холівські плато в сильних магнітних полях.

Запропонована в роботі [93] глюонна фаза вирішує проблему хромомагнітної нестабільності кольорової надпровідності в теорії з двома ароматами кварків. Ця фаза є в даний час одним із головних кандидатів в якості основного стану кольорового надпровідника з двома ароматами кварків. Робота [93] є добре відомою серед відповідного кола спеціалістів і має на теперішній час 59 посилань. Фаза Ларкіна–Овчіннікова–Фульде–Ферела з неоднорідним кварковим конденсатом є одним із основних конкурентів глюонної фази в якості основного стану кольорового надпровідника. В роботі [95] було показано, що ЛОФФ фаза з найпростішою неоднорідністю кваркового конденсату у вигляді однієї плоскої хвилі не вирішує проблеми хромомагнітної нестабільності кольорового надпровідника на відміну від глюонної фази. Ця робота цитувалася 30 разів.

Отриманий в дисертаційній роботі результат, що релятивістські квантовопольові теорії в сильному зовнішньому магнітному полі при низьких енергіях описуються ефективними некомутативними квантовими теоріями, може бути використаний в практичному описі матерії поблизу нейтронних зірок і магнетарів (зірок з найвищими у спостережуваному Всесвіті значеннями магнітного поля), а також квантових статистичних систем фізики конденсованого стану з лінійним законом дисперсії квазічастинок, таких наприклад, як графен.

В роботі [97] було показано, що на відміну від стану звичайної надпровідності сильне зовнішне магнітне поле не знищує стан кольорової надпровідності. Цей результат є важливим з точки зору астрофізичних спостережень і фізичних властивостей нейтронних зірок, тому що нейтронні зірки, в центральних областях яких може існувати кваркова матерія в стані кольорової надпровідності, характеризуються дуже сильними магнітними полями. Вищезгадана робота має на даний час 25 посилань, що вказує на її важливість в дослідженнях кольорової надпровідності та фізичних і астрофізичних властивостей нейтронних зірок.

Дослідження явища магнітного каталізу і динамічного порушення симетрії у просторах-часі вищої розмірності можуть бути використані в теорії струн, де мають місце додаткові просторові виміри і моделі компактифікації вищих просторових вимірів в присутності ненульових магнітних потоків в цих додаткових вимірах є досить популярними.

Особистий внесок здобувача.

В основу дисертаційної роботи лягли результати робіт [76]-[102], з яких 7 виконано самостійно. Результати, включені до дисертації на основі робіт публікацій із співавторами, одержані автором самостійно, включаючи постановку і формулювання задач та аналітичні розрахунки. Зокрема, в роботах з динамічного порушення кіральної симетрії автор аналітично розв'язав рівняння Швінгера–Дайсона для масової функції в квантово-електродинамічних системах з ферміонами локалізованими в підпросторах нижчої розмірності [78], обчислив вакуумну енергію квантової хромодинаміки як функцію динамічних кваркового і глюонного пропагаторів [77]. Автору належить постановка задачі і отримання рівнянь для щілини в роботі з динамічного порушення кіральної симетрії в системі типу нанотрубки з магнітним полем паралельним вісі нанотрубки коли магнітне поле впливає на динаміку ферміонів тільки через фазу Аронова–Бома [81], а також в роботі з дослідження впливу другого релятивістського інваріанта постійного електромагнітного поля на динамічне порушення кіральної симетрії [80]. В роботі з кіральної асиметрії поверхні Фермі для релятивістської матерії в зовнішньому постійному магнітному полі автором було виконано обчислення пропагатора і аксіального струму використовуючи метод регуляризації Паулі–Віларса [82].

В роботах [83, 84] з ефективної некомутативної дінаміки на найнижчому рівні Ландау в релятивістських квантових теоріях поля в сильних магнітних полях автору належить безпосередня участь в постановці задачі, а також обчислення ефективної дії для електромагнітного поля в квантовій електродинаміці в сильному зовнішньому магнітному полі [85]. В роботі з генерації щілини для діраківських ферміонів на площині Лобачевського в зовнішньому коваріантно постійному магнітному полі автор знайшов і аналітично розв'язав рівняння для щілини в усіх розглянутих випадках [86].

В роботах з досліджень кольорової надпровідності кваркової матерії автор показав, що хромомагнітна нестабільність 2SC фази пов'язана з наявністю нестабільності тахіонного типу для плазмона з квантовими числами восьмого глюона [92]. Він обчислив всі вершини взаємодії масової розмірності до чотирьох включно в ефективній низькоенергетичній дії для глюонів та знайшов її мінімум, який відповідає глюонній фазі з векторними конденсатами глюонів [93, 94], а також отримав рівняння, які визначають вихорові розв'язки в моделі з конденсатами векторних полів [96].

В роботах з теорії фазового переходу метал-ізолятор індукованого зовнішним магнітним полем в двовимірних системах з лінійним законом дисперсії автор обчислив поляризаційну функцію та повздовжню і холівську провідності [98, 99]. В роботах з квантового ефекта Хола в сильних магнітних полях в графені [100, 101, 102] автор отримав самоузгоджені рівняння для параметрів порядка пов'язаних з квантовим холівським феромагнетизмом і магнітним каталізом, а також знайшов розв'язки цих рівнянь.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати дисертації доповідалися на семінарах відділу Астрофізики і елементарних частинок та наукових сесіях Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної Академії наук України, Інституту математики Національної Академії наук України, та на семінарах і колоквіумах інших установ за кордоном: Departamento de Fisica Teorica, Universidad de Zaragoza (Сарагоса, Іспанія), Departament de Estructura i Constituents de la Materia, Universitat de Barcelona (Барселона, Іспанія), Perimeter Institute for Theoretical Physics (Ватерлоу, Канада), Department of Applied Mathematics, University of Western Ontario (Лондон, Канада), Instituto de Fisica Teorica (Сан-Паулу, Бразилія), Instituto de Ciencias Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora (Жуіс-ді-Фора, Бразилія), Centro Brasileiro de Pesquisas Fisicas (Ріо де Жанейро, Бразилія).

Також результати отримані в дисертації доповідались на наступних міжнародних конференціях:

- "Quantum Fields and Gravity", Lodz, Poland, 18-23 квітня 1998р.
- "Hadrons", Caraguatatuba, Brazil, 17-23 квітня 2000р.
- "Renormalization Group and Anomalies", Ouro Preto, Brazil, 8-14 березня 2003р.
- "Cosmo-2004", Toronto, Canada, 11-16 вересня 2004р.

- "International Bogolyubov conference: Modern Problems of Mathematical and Theoretical Physics", Київ, Україна, 13-16 вересня 2004р.
- "New Trends in High-Energy Physics", INTAS Summer School and Conference, Ялта, Україна, 10-17 вересня 2005р.
- "Bogolyubov Kyiv conference: Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics", Київ, 15-18 вересня 2009 р.

Публікації.

За матеріалами дисертації опубліковано 27 робіт [76]-[102], з яких 7 є самостійними. Публікації, що виносяться на захист, включають 2 статті у провідних наукових фахових виданнях України [88, 100], 24 статті в провідних міжнародних дослідницьких журналах та 1 статтю в реферованому електронному журналі [91]. Статті опубліковані в таких журналах, як "Annals of Physics" (США) - 2 публікації, "Physical Review Letters" (США) - 1 публікація, "Physical Review" (США) - 12 публікацій, "Physics Letters" (Голандія) - 6 публікацій, "Nuclear Physics" (Голандія) - 1 публікація, "Journal of Mathematical Physics" (США) - 1 публікація, "Modern Physics Letters" (Сінгапур) - 1 публікація, "Journal of High Energy Physics" (Італія) - 1 публікація, "Физика Низких Температур" (Україна) - 1 публікація, "Український Фізичний Журнал" (Україна) - 1 публікація.

Структура дисертації.

Розділ 1 присвячений дослідженню динамічного порушення симетрії в релятивістських квантовопольових теоріях фізики елементарних частинок. Параграф 1.1 має вступний характер. В ньому описується метод ефективної дії Корнуела–Джеківа–Томбуліса, який є стандартним і одним із найбільш загальновживаних методів дослідження динамічного порушення симетрії. Цей метод широко застосовується в даній дисертації. Інший метод дослідження динамічного порушення симетрії, а саме метод ефективного потенціалу для локальних складених полів розглядається в параграфі 1.2. В параграфі 1.3 досліджується зв'язок між кварковим і глюонним конденсатами та енергією вакууму в квантовій хромодинаміці. Динамічне порушення кіральної симетрії в калібрувальних теоріях з ферміонами локалізованими в підпросторах меншої розмірності досліджується в параграфі 1.4. Магнітний каталіз у просторах вищої розмірності розглядається в параграфі 1.5. В заключному параграфі даного розділу досліджується динамічне порушення симетрії в постійних магнітному і електричному полях загального типу.

В Розділі 2 досліджується ефективна некомутативна динаміка на найнижчому рівні Ландау в релятивістських квантових теоріях поля (КТП). Параграф 2.1.1 має вступний характер, де розглядається ефективна некомутативність просторових координат на найнижчому рівні Ландау в нерелятивістський квантовій механіці. В параграфі 2.1.2 досліджується динаміка моделі Намбу–Йона-Лазініо в зовнішньому постійному магнітному полі і показується, що в наближенні найнижчого рівня Ландау вона призводить до деякої ефективної некомутативної квантової теорії поля. В параграфі 2.2 обчислюється ефективна дія для фотонів в КЕД у сильному постійному магнітному полі і доводиться, що вона відповідає ефективній некомутативній квантовій теорії поля. В заключному параграфі даного розділу досліджується кіральна динаміка в КЕД у сильному зовнішньому магнітному полі і показано, що вона описується ефективними некомутативними квантовими теоріями поля I і II типу.

Динаміка порушення симетрії у викривленому просторі досліджується в Розділі 3. В параграфі 3.1 вивчається сумісний вплив коваріантно постійного магнітного поля і від'ємної кривизни простору на динаміку порушення симетрії в моделі Намбу–Йона-Лазініо на площині Лобачевського. В другому параграфі даного розділу шляхом аналізується ядро теплопровідності для оператора Дірака і з'ясовуються фізичні причини нульового значення критичної константи зв'язку для динамічного порушення симетрії у просторах постійної від'ємної кривизни. В параграфі 3.3 обчислюється ефективна низькоенергетична дія в моделях із спонтанним порушенням симетрії у викривленому просторі.

Розділ 4 присвячено динамічному порушенню симетрії в квантовій хромодинаміці при великих густинах матерії. В параграфі 4.1 досліджуються колективні збудження пов'язані з хромомагнітною нестабільністю 2SC і g2SC фаз кольорової надпровідності в кварковій матерії з двома ароматами кварків. У другому параграфі даного розділу вивчається динаміка глюонів в підході Гінзбурга–Ландау і в якості основного стану кольорового надпровідника з двома ароматами кварків запропоновано глюонну фазу з конденсатами глюонів. В параграфі 4.3 показано, що хромомагнітна нестабільність має місце для ЛОФФ стану з неоднорідним кольоровим конденсатом у вигляді однієї плоскої хвилі на відміну від глюонної фази, де хромомагнітна нестабільність відсутня. В заключному параграфі даного розділу вивчається вплив сильного зовнішнього магнітного поля на стан кольорової надпровідності.

В Розділі 5 досліджується динамічне порушення $U(4)$ симетрії і генерація щілини в квазічастинковому спектрі в графені. В першому параграфі вивчається генерація щілини в графені у відсутності зовнішнього магнітного поля. Магнітний каталіз в графені досліджується в параграфі 5.2. Опір і провідність обчислюються в параграфі 5.3. Динамічне порушення $U(4)$ симетрії в низькоенергетичній моделі графена розглядається в параграфі 5.4, де аналізуються відповідні параметри порядка. В параграфі 5.5 знаходяться пропагатор для квазічастинок в графені і вільна енергія. Рівняння Швінгера–Дайсона розв'язується в параграфі 5.6 і там же описується квантовий ефект Хола в графені.

У Додатку А розглядаються фізичні причини ефективної редукції розмірності простору-часу для динаміки ферміонів в інфрачервоній області, яка була встановлена у Розділі 3 аналізуючи ядро теплопровідності для оператора Дірака в гіперболічних просторах. Однак ядро теплопровідності є інтегральною характеристикою і тому з фізичної і інтуїтивної точок зору незрозуміло чому така редукція відбувається і з чим вона пов‘язана. Це питання з'ясовується у цьому додатку аналізуючи класичний рух частинок, а також розв'язки рівняння Дірака в гіперболічних просторах. У Додатку Б досліджується закон відщеплення масивного скалярного поля при низьких енергіях у викривленому просторі-часі і розвивається метод обчислення низькоенергетичної ефективної гравітаційної дії по степеням тензора кривизни з урахуванням всіх похідних у випадку масивних теорій. У Додатку В використовуючи метод ефективної дії для складених полів Корнуела-Джеківа-Томбуліса обчислено вільну енергію як функцію феромагнітних і екситоноподібних параметрів порядку в графені у зовнішньому постійному магнітному полі. У Додатку Г аналізується кіральна асиметрія поверхні Фермі релятивістської матерії в постійному магнітному полі. Показано, що в нормальній фазі релятивістської матерії у зовнішньому постійному магнітному полі існує динамічний внесок в аксіальний струм пов'язаний з відносним зсувом імпульсів для ферміонів з протилежними кіральностями. Цей зсув має місце для ферміонів всіх рівнів Ландау включаючи також рівні поблизу поверхні Фермі, що, таким чином, призводить до кіральної асиметрії поверхні Фермі і може мати важливі наслідки для фізичних властивостей нейтронних зірок і відповідних астрофізичних спостережень.

РОЗДІЛ 1

ДИНАМІЧНЕ ПОРУШЕННЯ СИМЕТРІЇ В КАЛІБРУВАЛЬНИХ ТЕОРІЯХ

Як добре відомо, елементарні частинки є збудженнями квантових полів. Тому з точки зору структури матерії квантова теорія поля [1, 2, 3, 4] є найбільш фундаментальним об'єктом в сучасній фізиці. Такі елементарні частинки як протони, нейтрони і електрони утворюють атоми, які в свою чергу складають основу усієї спостережуваної матерії. Квантова теорія поля була створена в процесі синтезу квантової механіки і релятивістської теорії в кінці двадцятих років минулого століття. Такий синтез був необхідним, тому що квантова механіка є нерелятивістською теорію. Тому виникла потреба знайти її релятивістське узагальнення. В результаті виникла квантова електродинаміка, яка є квантовою релятивістські інваріантною теорією, що описує електромагнітні взаємодії електронів, позитронів, протонів, антипротонів і фотонів, а також інших заряджнених елементарних частинок, які були відкриті пізніше. До речі чей синтез квантової теорії з релятивістською теорією до сих пір залишається іще незавершеним. Справа в тому, що на даний час не існує загальноприйнятної квантової теорії гравітації. Безумовно створення такої теорії є одним з найважливиших питань в сучасній фізиці.

Ми вже відзначали в Вступі, що елементарні частинки та їх взаємодія описуються Стандартною Моделлю [14, 15]. СМ була створена в кінці 60-тих, на початку 70-тих років минулого століття і є одним з фундаментальніших досягнень сучасної науки. Калібрувальні симетрії відіграють виключно важливу роль в Стандартній Моделі. Ця теорія базується на локальній калібрувальній групі $SU_c(3) \times SU(2)_L \times U_Y(1)$ і описує сильні, слабкі і електромагнітні взаємодії елементарних частинок [2, 3]. Згідно Стандарній Моделі існує три покоління кварків і лептонів, які мають електрослабку і сильну взаємодію. Три векторних бозона $W^{\pm}_{\mu}$, Z_{μ} і електромагнітне поле A_{μ} є відповідальними за електрослабку взаємодію кварків і лептонів, а вісім глюонів $A^{a}_{\mu},\ a = (\overline{1,8})$ є посередниками сильної взаємодії кварків (лептони не мають кольорового заряда і таким чином не приймають участь в сильній взаємодії).

Теорія, яка описує взаємодію глюонів і кварків, є квантовою хромодинамікою. Квантова хромодинаміка є калібрувальною теорією з калібрувальною групою $SU_c(3)$. Електрослабка взаємодія також описується калібрувальною теорією з калібрувальною групою $SU_L(2) \times U_Y(1)$, де $SU_L(2)$ є кіральною групою яка діє тільки на ліві ферміони (звідси індекс L). Цей факт є дуже важливим, тому що він означає, що всі ферміони в СМ на рівні лагранжіана є безмасовими частинками. Дійсно, діраківські масові члени порушують кіральну симетрію і таким чином заборонені в теорії з кіральною групою симетрії. З іншого боку, з досвіду ми знаємо, що ферміони є масивними. Таким чином, єдиний вихід – це спонтанне порушення симетрії. В Стандартній Моделі таке порушення забезпечується конденсатом хігсівського поля. Хігсівський сектор в СМ є дублетом скалярних полів і, як ми вже відзначали у Вступі, хігсівський бозон є єдиною частинкою Стандартної Моделі, яка ще не спостерігалась експериментально.

З хігсівським бозоном пов'язана присутність квадратичних розбіжностей в СМ. Як наслідок, в кожному порядку теорії збурень контрчлени, які ренормують теорію, повинні з надзвичайною точністю скорочувати квадратично розбіжні внески. Ця проблема відома як проблема натуральності [103] або проблема ієрархій Стандартної Моделі. Ця проблема відсутня, якщо хігсівське поле є складеним, а не елементарним полем, тобто якщо електрослабка симетрія порушується динамічно, а не спонтанно. Моделі із динамічним порушенням електрослабкої симетрії відомі під загальною назвою, як моделі технікольора [104, 105, 106]. Інший популярний підхід до вирішення проблеми ієрархій це моделі з суперсиметрією [107]. Технікольорові моделі природньо пояснюють наявність маси для векторних бозонів, однак зазвичай мають проблеми при поясненні мас ферміонів. Також технікольорові моделі є як правило сильновзаємодіючими теоріями, тому в них досить складно дати достовірну відповідь на багато важливих запитань. Тому суперсиметричні моделі [107], які дуже елегантно вирішують проблему ієрархій Стандартної Моделі і для аналізу яких може бути використана теорія збурень, в даний час привертають увагу значно більшого числа дослідників. Є надія, що вже в наступному році після отримання перших експериментальних результатів на прискорювачі LHC в ЦЕРНі ми отримаємо інформацію стосовно того, яким чином електрослабка симетрія порушена в природі.

Крім порушення електрослабкої симетрії в СМ порушується також кіральна симетрія в секторі легких кварків. Внаслідок порушення електрослабкої симетрії u і d кварки мають ненульові так звані конституентні маси 3 МеВ і 5 МеВ відповідно. Ці маси є дуже малими порівняно з масами порядка 350 МеВ, які використовуються в кваркових моделях. Тому основна частина маси для цих легких кварків генерується за рахунок сильної взаємодії. Крім того, піони є відносно легкими частинками порівняно з іншими сильновзаємодіючими частинками і їх легкість природним чином пояснюється тим, що вони є псевдо-намбу-голдстоунівськими бозонами, тобто якби конституентні маси u і d кварків дорівнювали нулю, то піони були б безмасовими частинками. Цей факт є базовим для кіральної теорії збурень [108], яка дозволяє контрольованим чином описати взаємодію піонів і нуклонів при низьких енергіях за допомогою декількох феноменологічних членів в ефективному низькоенергетичному лагранжіані теорії. Цей приклад показує наскільки важливим є поняття симетрії і його порушення в фізиці елементарних частинок. Кіральна симетрія в КХД порушується динамічним чином. Параметрами порядка є кіральні конденсати кварків $\langle 0|\bar{\psi}_L\psi_R|0\rangle$ і $\langle 0|\bar{\psi}_R\psi_L 0\rangle$.

В цьому розділі ми розглянемо деякі проблеми динамічного порушення симетрії в фізиці елементарних частинок і взагалі в релятивістських квантовопольових теоріях. В першому параграфі ми опишемо метод ефективної дії Корнуела-Джеківа-Томбуліса (КДТ) [56]. В теорії конденсованих середовищ цей метод відомий як метод Баума–Каданоффа [109]. Цей метод є загальним і одним із найбільш широко застосовуваних в дослідженнях динамічного порушення симетрії. В цій дисертації ми також будемо широко його застосовувати поряд із методом допоміжного поля Хабарда–Стратоновича [110, 111], який в деяких моделях є технічно більш простим. В другому параграфі цього розділу ми дослідимо ДПС в моделі Гроса–Невье (ГН) [112] за допомогою метода ефективного потенціала для локальних складених потенціалів і покажемо корисність використання цього методу для дослідження динамічного порушення симетрії. В наступному параграфі ми дослідимо зв'язок між кварковими і глюонними конденсатами та енергією вакууму в квантовій хромодинаміці. В четвертому параграфі розглянемо як локалізація ферміонів в підпросторах нижчої розмірності впливає на динамічне порушення кіральної симетрії і генерацію маси. Відзначимо, що фактично графен є системою такого ж типу. Динамічне порушення симетрії в графені ми будемо розглядати в Розділі 5. В двох заключних параграфах даного розділу ми вивчемо як постійні магнітні і електричні поля впливають на динамічне порушення симетрії. Даний розділ дисертації ґрунтується на результатах отриманих в роботах [76, 77, 78, 79, 80, 81, 82].

1.1. Метод ефективної дії для складених операторів Корнуела–Джеківа–Томбуліса. Рівняння Швінгера–Дайсона

Ефективна дія для параметрів порядку є одним із найважливих об'єктів в КТП і квантовій фізиці конденсованого стану при дослідженні динамічного порушення симетрії [1, 2, 51]. Як приклад, достатньо лише згадати ефективну дію Гінзбурга–Ландау [20] в теорії надпровідності. Ефективна дія може бути обчислена як функціонал фонових полів і в принципі містить повну динамічну інформацію теорії. За допомогою ефективної дії ми можемо знайти основний стан системи, повний пропагатор, повні вершинні функції, тобто S-матрицю.

Вище ми зазначили, що принципово ДПС не відрізняється від СПС. Відмінність між динамічним і спонтанним порушеннями симетрії полягає лише в тому, що у випадку СПС параметри порядку є вакуумними середніми елементарних полів, які належать гамільтоніану системи. Відзначимо, що в літературі в переважній більшості робіт розглядаються вакуумні середні від скалярних полів, тому що інакше симетрія Лоренца або симетрія відносно просторових обертань буде спонтанно порушена. В Розділі 4 при дослідженні кольорової надпровідності в кварковій матерії при великій густині баріонного заряду ми розглянемо вакуумні середні від векторних глюонних полів, однак, слід зазначити, що в цій системі симетрія Лоренца вже явним чином порушена за рахунок присутності матерії. У випадку ДПС параметри порядку є складеними (майже завжди біферміонними) операторами. Наприклад, в теорії БКШ надпровідності параметр порядку є вакуумне середнє добутку двох електронних полів в різних точках простору-часу $F_{\alpha\beta} = -i\langle 0|T\psi_\alpha(x)\psi_\beta(0)|0\rangle$ (α і β - спінові індекси, T - хронологічний добуток), яке описує динамічне порушення електромагнітної $U(1)$ симетрії в надпровіднику. Тому зрозуміло, що при дослідженні ДПС потрібні методи, які дозволяють обчислити ефективну дію для складених білокальних операторів. Відповідні методи обчислення ефективної дії були вперше знайдені в теорії конденсованого стану [116, 117, 118], а потім узагальнені на випадок релятивістських КТП [119, 120]. Особливо зручний підхід для знаходження ефективної дії для складених білокальних операторів був запропонований Корнуелом, Джеківом і Томбулісом [56]. Формалізм КДТ є зараз стандартним методом дослідження ДПС, тому нижче ми детально розглянемо цей формалізм для білокальних складених ферміонних операторів і в подальшому будемо широко його застосувати при дослідженні ДПС. Зауважимо також, що в моделях з локальною чотирьохферміонною взаємодією в наближенні середнього поля метод допоміжного поля Хабарда–Стратоновича [110, 111] є більш простим з технічної точки зору і ми будемо його також досить часто використовувати у відповідних моделях.

В формалізмі КДТ ефективна дія є фунціоналом від ферміонного пропагатора $G(x, y) = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle$. Рівняння

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta G(x, y)} = 0 \tag{1.1}$$

визначає пропагатор G і, як ми побачимо в подальшому, співпадає із рівняннями Швінгера–Дайсона [26, 27]. Для того, щоб визначити ефективну дію розглянемо спочатку генеруючий функціонал $Z(K)$ з білокальним джерелом $K(x, y)$

$$Z(K) = e^{iW(K)} = N \int D\bar{\psi}D\psi \exp\left\{iS(\psi) + i\int d^4xd^4y\bar{\psi}(x)K(x, y)\psi(y)\right\}, \tag{1.2}$$

де N - нормуючий множник, а дія має вигляд

$$S(\psi) = \int d^4x\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi + S_{int}\,, \tag{1.3}$$

де S_{int} описує взаємодію. Підкреслимо, що присутність джерела $K(x, y)$ в рівнянні (1.2) є дуже важливим моментом. Справа в тому, що саме його присутність дозволяє вивчати порушення симетрії. Річ у тім, що джерело $K(x, y)$ є довільним і тому доданок $\int d^4xd^4y\,\bar{\psi}(x)K(x, y)\psi(y)$ не обов'язково має симетрію моделі. Це дозволяє нам розглядати стани, які порушують симетрію, обчислити їх енергію і таким чином досліджувати динамічне порушення симетрії. Звісно джерело $K(x, y)$ є допоміжним об'єктом і в кінці обчислень ми повинні покласти його рівним нулю, щоб отримані стани мали відношення до початкової системи. Відзначимо, що ідеологічно цей підхід повністю співпадає з методом квазісередніх Боголюбова [55].

З'ясувавши необхідність присутності в лагранжіані теорії порушуючого симетрію доданка $\bar{\psi}(x)K(x, y)\psi(y)$, ми повернемось тепер до рівняння (1.3).

Подальші математичні кроки знаходження ефективної дії КДТ є досить прямими. Хоча метод ефективної дії КДТ може бути використаний для будь-якої взаємодії, ми розглянемо випадок калібрувальної взаємодії коли дія для ферміонних і калібрувальних полів має наступний вигляд

$$S_{int} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu - igA_\mu)\psi \right) , \tag{1.4}$$

де A_μ - деяке калібрувальне поле, а $F_{\mu\nu}$ - тензор напруженості поля.

Варіаційна похідна генеруючого функціонала $W(K)$ по джерелу K

$$\frac{\delta W}{\delta K(y,x)} = \hbar G(x,y) = \frac{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{iS/\hbar} \psi(x)\bar{\psi}(y)}{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{iS/\hbar}} = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle \tag{1.5}$$

визначає точний пропагатор. Ефективна дія $\Gamma(G)$ є перетворенням Лежандра функціонала $W(K)$

$$\Gamma(G) = W(K) - \hbar \int d^4x d^4y \ \mathrm{tr}\left[G(x,y) K(x,y) \right]. \tag{1.6}$$

Ріняння (1.5) можна розглядати як рівняння, яке визначає заміну змінних $K = K(G)$. Легко бачити, що

$$\frac{\delta \Gamma(G)}{\delta G(x,y)} = -\hbar K(y,x) \,. \tag{1.7}$$

Якщо джерело відсутнє $K = 0$, тоді $\Gamma = W$, а рівняння (1.7) співпадає з рівнянням Швінгера–Дайсона (1.1). Більш того, внаслідок того, що $\Gamma(G)$ є перетворенням Лежандра, розклад $\Gamma(G)$ в ряд теорії збурень генерує двохчастинковонезвідні вакуумні діаграми (зауважимо, що у випадку, що розглядається, незвідність відноситься тільки до ферміонів). Термін n-частинково-незвідна означає, що відповідна діаграма не може бути розбита на дві (і більше) незв'язані частини при розрізі n ліній на діаграмі. З рівнянь (1.2),(1.5) і (1.7) випливає, що $\Gamma(G)$ задовольняє наступному інтегро-диференційному рівнянню

$$\Gamma(G) - \mathrm{Tr} G \frac{\delta \Gamma}{\delta G} = -i\hbar \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu \exp \frac{i}{\hbar} \left[S + \frac{1}{\hbar} \int d^4x d^4y \, \bar{\psi}(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta G(y,x)} \psi(y) \right] , \tag{1.8}$$

де Tr є слідом як по внутрішних, так і по часово-просторових змінних.

Неважко обчислити $\Gamma(G)$ у відсутності взаємодії ($g = 0$). Дійсно, в цьому випадку ми маємо

$$W(K) = -\hbar \mathrm{Tr} \mathrm{Ln}(i\hat{\partial} - K) + i\hbar \mathrm{Tr} \mathrm{Ln} i\hat{\partial}\,, \tag{1.9}$$

звідки

$$\hbar G = \frac{\delta W}{\delta K} = i\hbar (i\hat{\partial} - K)^{-1} \tag{1.10}$$

і

$$K = i(S^{-1} - G^{-1})\,, \qquad\qquad S^{-1} \equiv \hat{\partial}\,. \tag{1.11}$$

Із рівняння (1.6) ми маємо

$$\Gamma(G) = -i\hbar \mathrm{Tr} \left\{ \mathrm{Ln} G^{-1} S + G S^{-1} - 1 \right\} \equiv \Gamma_0(G) \tag{1.12}$$

(ефективна дія (1.12) нормована таким чином, що $\Gamma_0(G) = 0$ в невзаємодіючій теорії ($g = 0$)). Зручно виділити в повній дії $\Gamma(G)$ також явним чином доданок $\Gamma_0(G)$, тобто $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma'$. Тоді для $\Gamma'(G)$ ми отримуємо наступне рівняння

$$\Gamma'(G) - \mathrm{Tr} G \frac{\delta \Gamma'}{\delta G} = -i\hbar$$

$$\times \ln \left\{ \frac{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}(iG^{-1} + \hat{A})\psi \right) + \frac{1}{\hbar} \mathrm{Tr} \bar{\psi} \frac{\delta \Gamma'}{\delta G} \psi \right\}}{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi} i G^{-1} \psi \right) \right\}} \right\}. \tag{1.13}$$

Можна показати [56], що якщо шукати розв'язок рівняння (1.13) у вигляді формального ряду $\Gamma' = \sum_{n=2}^{\infty} \hbar^n \Gamma_n$ по константі Планка $\hbar$, то цей розклад буде відповідати добре відомому розкладу по петльовим діаграмам, де Γ_n є сумою двохчастинково-незвідних n-петльових вакуумних діаграм. Важливо відмітити, що як випливає з (1.13), в такому розкладі для ферміонного пропагатора ми повинні використовувати повний пропагатор G, а не S. Наприклад, в двохпетльовому наближенні для $\Gamma(G)$ (яке відповідає планарному драбинному наближенню в калібрувальних теоріях) ми маємо

$$\Gamma_2 = -\frac{ig^2}{2} \int d^4x d^4y \, \mathrm{tr} \left[G(y,x) \gamma^\mu D_{\mu\nu}^{(0)}(x,y) G(x,y) \gamma^\nu \right]\,, \tag{1.14}$$

де $D_{\mu\nu}^{(0)}$ - вільний пропагатор калібрувального поля A_μ.

Факт двохчастинкової незвідності Γ' легко зрозуміти, якщо прийняти до уваги, що з рівняння (1.7) при $K = 0$ випливає, що

$$G^{-1} = S^{-1} + \frac{i\delta\Gamma'}{\delta G}\,, \qquad \Sigma \equiv \frac{\delta\Gamma'}{\delta G}\,, \tag{1.15}$$

де Σ є власною енергетичною частиною або масовим оператором. В силу того, що Σ є одночастинково-незвідною, то Γ' є відповідно двохчастинково-незвідною. Таким чином, двохчастинкова незвідність Γ' є наслідком того факта, що пропагатор G не має радіаційних поправок і є точним зв'язаним пропагатором.

Рівняння (1.13) може бути використано для знаходження різних наближень при обчисленні ефективної дії КДТ. Визначимо позначення

$$\langle f(A)\rangle = \frac{\int \mathcal{D}A_\mu e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2\right)} f(A)}{\int \mathcal{D}A_\mu e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2\right)}} \tag{1.16}$$

для усереднення по калібрувальному полю A_μ. Тоді інтегруючи в рівнянні (1.13) по ферміонам, ми маємо

$$\Gamma' - \mathrm{Tr}\, G\frac{\delta\Gamma'}{\delta G} = -i\hbar\,\ln\langle \exp \mathrm{Tr}\,\mathrm{Ln}\,\left[-iG(\frac{1}{\hbar}\frac{\delta\Gamma'}{\delta G} + gA)\right]\rangle\,, \tag{1.17}$$

де ми використали формулу

$$\det H = \exp \mathrm{Tr}\,\mathrm{Ln}\, H$$

для оператора H. Неважко бачити, що розклад експоненти в ряд Тейлора відповідає на мові фейнмановських діаграм розкладу по числу ферміонних петель. Якщо знехтувати кореляціями між різними доданками

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{Ln}\,\left[-iG(\frac{1}{\hbar}\frac{\delta\Gamma'}{\delta G} + gA)\,\right]$$

в розкладі експоненти, то це означає, що ми нехтуємо всіма діаграмами, в яких пропагатори калібрувального поля з'єднують різні ферміонні петлі. Очевидно, це призводить до об'єднання всіх діаграм з однією ферміонною петльою в експоненту. В цьому випадку рівняння (1.17) набуває наступний вигляд

$$\Gamma' - \mathrm{Tr}\, G \frac{\delta\Gamma'}{\delta G} = -i\hbar \,\langle\, \mathrm{Tr}\,\mathrm{Ln}\, \left[-iG(\frac{1}{\hbar}\frac{\delta\Gamma'}{\delta G} + gA) \right] \rangle\,. \tag{1.18}$$

З точки зору рівняння Швінгера–Дайсона для ферміонного пропагатора таке наближення відповідає наближенню з замороженими ферміонами (quenched approximation), яке відоме також як райдужне наближення.

Наостанок відзначимо, що для трансляційно-інваріантних розв'язків $G(x, y) = G(x - y)$ ефективна дія $\Gamma(G)$ зводиться до ефективного потенціала

$$\Gamma(G) = -V(G) \int d^4x\,, \tag{1.19}$$

який визначає густину енергії вакуума, яка відповідає розв'язку рівняння Швінгера–Дайсона (1.1).

1.2. Ефективний потенціал для локальних складених полів

Динамічне порушення симетрії є складною проблемою, яка зазвичай потребує використання непертурбативних методів дослідження. ДПС описується ненульовими вакуумними середніми локальних складених полів, які порушують симетрію гамільтоніана. Тому на перший погляд здається, що саме ефективний потенціал для локальних складених полів є найбільш природнім методом для дослідження ДПС, так само як звичайний ефективний потенціал для елементарних скалярних полів є найбільш природним і найбільш широковживаним методом дослідження СПС. Однак ефективний потенціал для локальних складених операторів не є методом яким часто користуються в літературі при дослідженні ДПС. Одна із причин цього полягає в тому [126, 127], що на відміну від ефективного потенціалу для елементарних скалярних полів ефективний потенціал для локальних складених полів страждає від ультрафіолетових розбіжностей. Натомість ефективний потенціал для елементарних скалярних полів не має розбіжностей, якщо звичайне перенормування полів, констант взаємодії і мас було виконано. Тому замість ефективного потенціалу для локальних складених полів для опису ДПС в літературі широко застосовується метод білокальних складених операторів (метод КДТ), розглянутий в розділі 1.1.1.

Між тим, нещодавно корисність метода ефективного потенціалу для локальних складених полів була підкреслена в роботі [128], де цей метод був застосований в моделі НЙЛ і було показано, що він працює навіть у випадках коли метод допоміжного поля не може бути використаним. Після цього метод був успішно застосований для опису конформних фазових переходів в калібрувальних теоріях [129] [130]. У цьому розділі ми застосуємо метод ефективного потенціалу для локальних складених полів для дослідження динамічного порушення симетрії в моделі Гроса-Невьє [112]. Модель ГН є точно розв'язаною моделлю, для якої точна S-матриця була знайдена в роботі [131]. В фізиці конденсованого стану вона використовується для опису пайерлсовського діелектрика [113, 114, 115]. Модель Гроса–Невьє є асимптотично вільною і характеризується динамічним порушенням кіральної симетрії. Ці явища властиві також КХД. Тому точно розв'язувана модель ГН є корисною при дослідженні динамічного порушення кіральної симетрії. Деякі питання пов'язані з динамічним порушенням кіральної симетрії власне в КХД ми розглянемо в наступному параграфі.

Ми покажемо в цьому параграфі, що ефективний потенціал для локальних складених операторів може бути знайдений за допомогою методу КДТ обчисленного в точках екстремуму в теорії з додатковими джерелами для відповідних локальних складених полів. Цей факт означає, що розбіжності ефективного потенціала для локальних складених полів співпадають з розбіжностями для ефективного потенціалу КДТ в точках екстремуму. Це свідчить про те, що негативне відношення до ефективного потенціалу для локальних складених полів повинно бути переглянутим і цей потенціал може цілком успішно використовуватись в дослідження ДПС. Крім того, в повній відповідності з результатами роботи [128] ми покажемо, що метод ефективного потенціалу для складених локальних полів успішно працює в моделі ГН навіть у випадках коли метод допоміжного поля не може бути застосований.

Лагранжіан моделі ГН має наступний вигляд

$$L = i \sum_{k=1}^{N} \bar{\psi}_k \gamma^\mu \partial_\mu \psi_k + \frac{g}{4N} (\sum_{k=1}^{N} \bar{\psi}_k \psi_k)^2, \tag{1.20}$$

де N - число ароматів і розмірність простору-часу є $1 + 1$. Лагранжіан (1.20) інваріантний відносно дискретного кірального перетворення ($\psi \to \gamma_5 \psi$). Застосовуючи метод роботи [128], ефективний потенціл в моделі ГН знаходимо наступним чином. Перш за все в лагранжіан моделі додамо джерело $J(x)\bar{\psi}(x)\psi(x)$ і проінтегруємо по ферміонним полям. Ми отримуємо генеруючий функціонал

$$e^{iW(J)} = \int D\bar{\psi} D\psi \, e^{i \int (L + J\bar{\psi}\psi)} \, d^2x. \tag{1.21}$$

Класичне поле σ_c є вакуумне середнє

$$\sigma_c =< 0|\bar{\psi}\psi|0 >= \frac{\delta W(J)}{\delta J}. \tag{1.22}$$

Ефективна дія для поля σ_c знаходиться як перетворення Лежандра для $W(J)$

$$\Gamma(\sigma_c) = W(J) - \int J \sigma_c \, d^2x. \tag{1.23}$$

Для того, щоб знайти ефективний потенціал, достатньо припустити, що джерело є константа $J = const$. Тоді співвідношення $\Gamma(\sigma_c) = -\int d^2x V(\sigma_c)$ визначає ефективний потенціал $V(\sigma_c)$. Ми обчислимо ефективний потенціал $V(\sigma_c)$ інтегруючи очевидну рівність $\frac{dV(\sigma_c)}{d\sigma_c} = J(\sigma_c)$. Очевидно для цього нам потрібно виразити J через σ_c. На жаль, це дуже складно зробити. Тому згідно з [128] ми використаємо ферміонну масу m як змінну в ефективному потенціалі замість змінної σ_c

$$\sigma_c =< 0|\bar{\psi}\psi|0 >= -N \frac{m}{2\pi} \ln(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1). \tag{1.24}$$

Таким чином, ми маємо

$$V(\sigma_c) = \int J(\sigma_c) d\sigma_c = \int J(m) \frac{d\sigma_c}{dm} dm. \tag{1.25}$$

Для того, щоб знайти генеруючий функціонал $W(J)$ ми використаємо, як було запропоновано в [128], метод Корнуела–Джеківа–Томбуліса. Нагадаємо, що $W(J)$ для $J = const$ має фізичний зміст густини енергії вакуума проінтегрованої по часу і простору в моделі з затравочним масовим членом $J\bar{\psi}\psi$. За визначенням ця густина енергії співпадає із значенням ефективного потенціалу КДТ в системі з затравочною масою в точці екстремума. Як показано в попередньому розділі 1.1.1, рівняння ШД визначає екстремум ефективного потенціала КДТ. Це дозволяє нам знайти шукане співвідношення між J і m в першому порядку по константі зв'язку g в моделі (1.20)

$$J = \frac{gm}{4\pi} \ln(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1) - m\,. \tag{1.26}$$

Таким чином, використовуючи (1.24)-(1.26), ми знаходимо $V(m)$

$$V(m) = \frac{N}{4\pi} \int (1 + \frac{g}{4\pi} \ln(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1))(\ln(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1) - \frac{2}{1 + \frac{m^2}{\Lambda^2}}) dm^2. \tag{1.27}$$

Інтегруючи (1.27) ми маємо наступний ефективний потенціал

$$V(m^2) = \frac{Nm^2}{4\pi} (-\frac{g}{4\pi} \ln^2(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1) + \ln(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1) - \frac{\Lambda^2}{m^2} \ln(\frac{m^2}{\Lambda^2} + 1)). \tag{1.28}$$

Перед тим як проаналізувати знайдений ефективний потенціал (1.28) ми обчислимо ефективний потенціал в методі допоміжного поля і порівняємо ці два ефективні потенціали. Використовуючи метод допоміжного поля Хабарда-Стратоновича [110, 111] ми представляємо лагранжіан (1.20) в еквівалентній формі

$$L = \sum_{k=1}^{N} (i\bar{\psi}_k \gamma^\mu \partial_\mu \psi_k + \sigma \bar{\psi}_k \psi_k) - N \frac{\sigma^2}{g} \tag{1.29}$$

(використовуючи рівняння руху для поля σ легко показати, що лагранжіан (1.29) еквівалентний (1.20)). Інтегруючи по ферміонним полям для $\sigma = \mathrm{const}$, ми знаходимо ефективний потенціал для поля σ

$$\frac{V_{af}(\sigma)}{N} = \frac{\sigma^2}{g} - \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\ln(1+\frac{\sigma^2}{p^2})$$
$$= \frac{\sigma^2}{g} - \frac{1}{4\pi}\left[\Lambda^2\ln(\frac{\sigma^2}{\Lambda^2}+1) + \sigma^2\ln(\frac{\Lambda^2}{\sigma^2}+1)\right]. \quad (1.30)$$

Легко бачити, що $V_{af}(\sigma)$ має нетрівіальний мінімум в точці $\sigma^2 = \Lambda^2 e^{-\frac{4\pi}{g}}$ для $g > 0$. З іншого боку для $g < 0$ ефективний потенціал $V_{af}(\sigma)$ є монотонно спадаючою функцією, яка не має мімімуму. Відсутність стабільного вакуума означає, що в цьому випадку поле σ не є "добре визначенною" змінною і не описує нетрівіальну динаміку деяких фізичних станів системи. В іншому випадку $g > 0$ ефективний потенціал $V_{af}(\sigma)$ має нетрівіальний мінімум і поле σ описує динаміку зв'язаного стану частинка-античастинка. Для $g > 0$ в каналі частинка-античастинка має місце притягування, яке для простору-часу розмірності 1+1 призводить до безпорогового утворення зв'язаного стану. З іншого боку, для $g < 0$ має місце відштовхування в каналі частинка-античастинка і відповідний зв'язаний стан відсутній. Тому в цьому випадку поле σ не описує динаміку ніякого фізичного стану системи і його введення є лише чисто технічним трюком.

Розглянемо тепер поведінку ефективного потенціала (1.28) як функцію m^2 для малих m^2 ($m^2 \ll \Lambda^2$). Для $g > 0$ ефективний потенціал має нетривіальний мінімум в точці $m^2 = \Lambda^2 e^{-\frac{4\pi}{g}}$. Цей мінімум співпадає з мінімумом ефективного потенціалу для допоміжного поля (1.30) і з відповідним результатом отриманим в оригінальній роботі [112]. Грос і Невье аргументували, що в границі $\Lambda^2 \to \infty$ ефективний потенціал для складеного поля співпадає з ефективним потенціалом для допоміжного поля для $g > 0$ коли модель є асимптотично вільною. Грос і Невье відмітили також, що в теоріях, в яких асимптотична свобода відсутня, два ефективних потенціала не співпадають у загальному випадку. Це заключення дійсно підтверджується порівнянням ефективних потенціалів (1.28) і (1.30) для $g < 0$ коли ГН модель не є асимптотично вільною. Ефективний потенціал (1.28) зростає із збільшенням m^2

принаймі при малих m^2, що є природним результатом у випадку відштовхування. Далі, для $m^2 \gg \Lambda^2$ ефективний потенціал (1.28) прямує до нескінченності для будь-якого значення g. Така поведінка пов'язана з добре відомим фактом, що густина енергії для ферміонів є необмеженою знизу для $m^2 \to \infty$ навіть у вільній теорії (дивись наприклад [3]). З іншого боку, ефективний потенціал для допоміжного поля (1.30) монотонно зменшується з ростом σ. Це не є та поведінка, яку ми можемо очікувати у випадку відштовхування в відповідному каналі. Тим не менш, ефективна дія для допоміжного поля може бути використана для опису процесів розсіяння, а тому ми повинні розглядати ефективні дії для локальних складених полів і допоміжних полів не як альтернативні або конкуруючі, а скоріше як доповнюючі одна одну.

Проаналізуємо тепер фізичний зміст ефективних потенціалів для локальних складених полів і нелокальних складених операторів (КДТ ефективний потенціал). КДТ ефективний потенціал має, згідно з результатами робіт [132, 133, 134], фізичний зміст тільки в точках екстремуму. Дійсно, поза межами точок екстремуму КДТ ефективний потенціал відповідає теорії з ненульовим нелокальним складеним оператором $J\bar{\psi}(x)\psi(y)$, де $J = const$, і таким чином містить нелокальну залежніть від часу. В цій ситуації КДТ ефективний потенціал, очевидно, не може бути інтерпретований як густина енергії. З іншого боку, ефективний потенціал для локальних складених полів очевидно не має такої проблеми тому, що оператор $J\bar{\psi}(x)\psi(x)$ локальним чином залежить від часу.

Вище ми зазначили, що метод ефективного потенціала для локальних складених полів практично не використовувався внаслідок присутності ультрафіолетових розбіжностей, а КДТ метод навпаки був широко застосований. Однак, як ми бачили вище, ефективний потенціал для локальних складених полів може бути обчислений за допомогою КДТ ефективного потенціалу в точках екстремуму в теорії з додатковими джерелами. Це означає, що фактично розбіжності ефективного потенціалу для локальних складених полів і КДТ ефективного потенціалу співпадають. Одна з причин того, що цей факт був не помічений набагато раніше пов'язан з вибором змінної. Зазвичай саме масова функція $B(p^2)$ використовується як змінна в методі КДТ, в той час як вакуумне середне $< 0|\bar{\psi}\psi|0 >$ є змінною для ефективного потенціалу для локальних складених полів. Це середне може бути розбіжним навіть якщо $B(p^2)$ є скінченною. Таким чином, наше дослідження підтверджує заключення роботи [128] про те, що ефективний потенціал для локальних складених полів є досить корисним об'єктом для дослідження ДПС і працює навіть у випадках коли метод допоміжного поля не може бути використаним. Крім того, ефективний потенціал для локальних складених полів має фізичний зміст навіть поза межами точок екстремуму на відміну від ефективного потенціалу КДТ, який визначає густину енергії системи тільки в точках екстремуму.

1.3. Кварковий і глюонний конденсати та енергія вакууму в квантовій хромодинаміці

Динамічне порушення симетрії, яке ми розглядали вище на прикладі моделі ГН, є дуже важливим явищем, тому що маси нуклонів на 99 процентів зобов'язані динамічному порушенню кіральної симетрії в КХД. Велика кількість експериментальних фактів вказує на спонтанне порушення кіральної симетрії в фізиці адронів. Про це свідчать різноманітні правила сум отримані в рамках алгебри струмів, а також низькоенергетичні співвідношення в фізиці піонів такі, як співвідношення Голдбергера–Треймана, теореми про м'які піони [135]. В безмасовій границі для трьох легких кварків лагранжіан КХД є інваріантним відносно глобальної групи симетрії $SU_L(3) \times SU_R(3) \times U_B(1)$, де $U_B(1)$ відповідає за збереження баріонного заряда (нагадаємо, що кіральна $U_A(1)$ симетрія порушується внаслідок аксіальної аномалії Адлера–Бела–Джеківа [136, 137]). Динамічне порушення кіральної $SU_L(3) \times SU_R(3)$ симетрії до діагональної векторної підгрупи $SU_V(3)$ призводить до появи восьми намбу-голдстоунівських бозонів, які відповідають π, K та η мезонам. Кількісною характеристикою динамічного порушення кіральної симетрії є кіральний конденсат $\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle$, який виражається через динамічну масову функцію кварків. Ненульові струмові маси u, d і s кварків явним чином порушують $SU_V(3)$ симетрію і призводять до появи ненульових мас π, K і η мезонів.

КХД є сильновзаємодіючою теорією і отримати в ній аналітично якісь фізичні результати дуже складно. Тому крім чисельних розрахунків в практичній роботі часто використовуються або феноменологічні підходи, або підходи, які базуються на симетрії, наприклад, такі як кіральна теорія збурень (дивись наприклад [108]). В цьому розділі ми використаємо феноменологічний підхід для розгляду зв'язку між кварковим і глюонним конденсатами в КХД разом з деякими точними співвідношеннями, які ґрунтуються на симетрії. Застосовуючи метод КДТ ми обчислимо вакуумну енергію КХД як функцію кваркового і глюонного пропагаторів. Прирівнюючи її до вакуумної енергії, яка знаходиться як слід тензора енергії-імпульса і виражається через кварковий і глюонний конденсати, ми отримаємо рівняння, яке у випадку важких кварків зв'язує ці конденсати.

КДТ ефективний потенціал в КХД є функціоналом від кваркового і глюонного пропагаторів. Масова функція, яка міститься в кварковому пропагаторі є сумою динамічної і затравочної мас. Динамічна маса є функцією кваркового конденсата, тому вакуумна енергія є також функцією кваркового конденсата. Поняття динамічної глюонної маси [138] є вирішальним при обчисленні вакуумної енергії КХД. Ми хотіли би зауважити, що наявність динамічно згенерованих мас не означає, що кварки і глюони можуть бути спостережені як масивні асимптотично вільні стани. Проблема того, чому кварки і глюони не спостерігаються як вільні частинки відома як проблема конфайнмента і є однією із найважливіших в сучасній фізиці елементарних частинок. Безумовно ефекти конфайнмента суттєво впливають на енергію вакуума. Тому, звичайно, результати, які ми отримаємо в рамках використаного нами підхо-

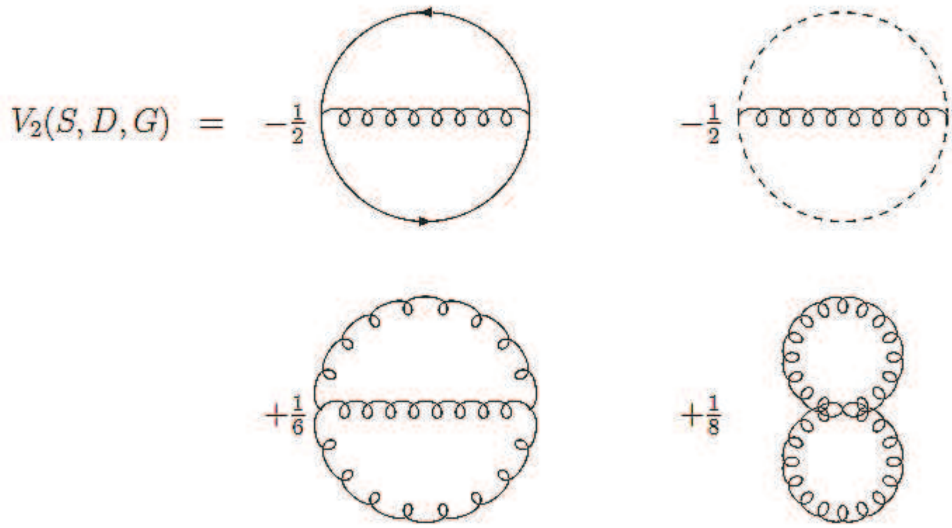


Рис. 1.1. Двохчастинково незвідні двохпетльові діаграми вакуумної енергії КХД.

ду є наближенними і повинні розглядатися як феноменологічні.

Для КХД згідно з методом КДТ ефективний потенціал має вигляд

$$V(S,D,G) = -i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr(\ln S_0^{-1}S - S_0^{-1}S + 1) - i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr(\ln G_0^{-1}G - G_0^{-1}G + 1)$$

$$+\frac{i}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr(\ln D_0^{-1}D - D_0^{-1}D + 1) + V_2(S,D,G), \tag{1.31}$$

де S, D і G - пропагатори кварків, глюонів і духів Фадеева-Попова, а S_0, D_0, і G_0 - відповідно затравочні пропагатори. $V_2(S,D,G)$ є сумою всіх двохчастинково незвідних вакуумних діаграм, яка у двохпетльовому наближенні має вигляд (дивись Рис.1.1)

$$V_2 = \frac{i}{2}Tr(GSGSD) + \frac{i}{2}Tr(FGFGD) - \frac{i}{6}Tr(G^{(3)}DG^{(3)}DD) - \frac{i}{8}Tr(G^{(4)}DD), \tag{1.32}$$

де G, F, $G^{(3)}$ і $G^{(4)}$ - вершини взаємодії кварків, глюонів і духів і для економії місця ми не виписували калібрувальні і лоренцевські індекси в (1.32).

Екстремум ефективного потенціалу

$$\frac{\delta V}{\delta S} = \frac{\delta V}{\delta D} = \frac{\delta V}{\delta G} = 0 \tag{1.33}$$

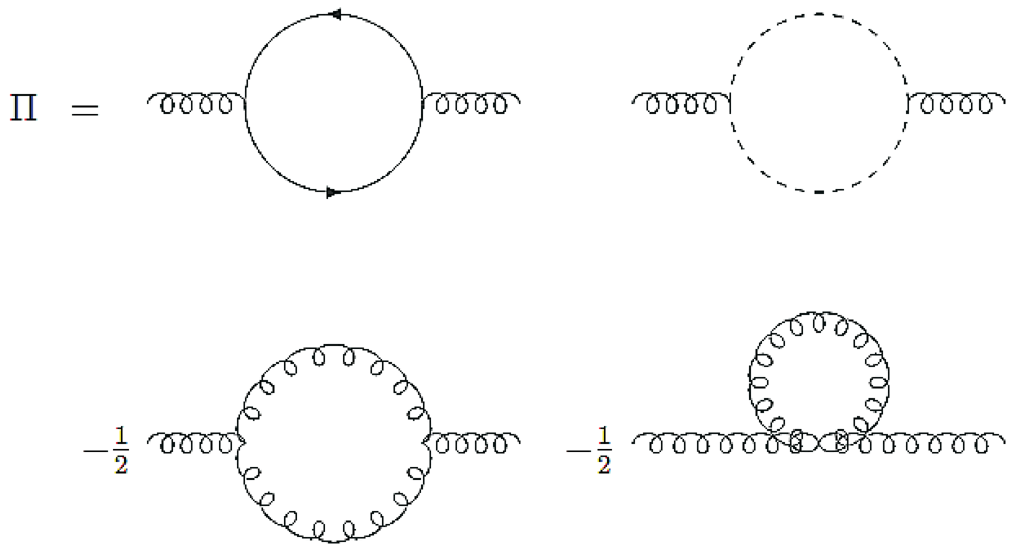


Рис. 1.2. Однопетльові діаграми поляризаційного тензора глюонів.

визначає рівняння Швінгера–Дайсона для кварків, глюонів і духів. В калібровці Ландау глюонний пропагатор має вигляд

$$D^{\mu\nu}(p^2) = -\frac{i}{p^2 - \Pi(p^2)}\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right). \tag{1.34}$$

Діаграми, які визначають поляризаційний тензор в однопетльовому наближенні, зображені на Рис. 1.2. Відзначимо також, що присутність хромомагнітних полів суттєво впливає на глюонний поляризаційний тензор, який може бути в цьому випадку навіть не поперечним [139, 140, 141, 142, 143].

Кварковий пропагатор дорівнює

$$S^{-1} = S_0^{-1} - \Sigma, \tag{1.35}$$

де $S_0 = i/(\hat{p} - m_0)$, m_0 - затравочна кваркова маса і Σ - власна енергія. Браун і Пенінгтон показали [144], що наближення Мандельштама [145], в якому нехтуються внесок духів і діаграма з чотирьохвершинною взаємодією, досить задовільно працює в калібровці Ландау при врахуванні динамічно згенерованої глюонної маси.

Для того, щоб обчислити вакуумну енергію ми використаємо наступний анзатц для кваркової власної функції і поляризаційної функції. Кваркову власну енергію ми апроксимуємо як суму так званої струмової маси $m_f(p^2)$, яка описує явне порушення кіральної симетрії в КХД за рахунок затравочних кваркових мас і динамічної маси $m_{dyn}(p^2)$

$$\Sigma(p^2) = m_f(p^2) + m_{dyn}(p^2). \tag{1.36}$$

Глюонну поляризаційну функцію $\Pi(p^2)$ ми апроксимуємо наступним чином

$$\Pi(p^2) = \mu_g^2 \theta(\chi\mu_g^2 - p^2) + \frac{\mu_g^4}{p^2}\theta(p^2 - \chi\mu_g^2), \tag{1.37}$$

де

$$\mu_g^2 = \left(\frac{34N\pi^2}{9(N^2-1)} < \frac{\alpha_s}{\pi} G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} >\right)^{1/2} \tag{1.38}$$

і χ є варіаційний параметр, який ми визначимо пізніше. Цей параметр визначає масштаб, який відділяє пертурбативну і непертурбативну області [146]. В ультрафіолетовій області, де в силу асимптотичної свободи може бути застосована звичайна теорія збурень, глюонна поляризаційна функція (1.37) дорівнює поляризаційної функції, яка знаходиться в методі OPE [147]

$$\Pi_{OPE}(p^2) \sim -\frac{\mu_g^2}{p^2}, \tag{1.39}$$

а в інфрачервоній області поляризаційна функція визначається глюонною масою згідно з [138].

Густина вакуумної енергії визначається ефективним потенціалом обчисленим в точці мінімума з динамічно згенерованими кварковою і глюонною масами. В результаті ми маємо

$$< \Omega \ =< \Omega_f > + < \Omega_g >, \tag{1.40}$$

де

$$\begin{aligned} < \Omega_f > &= 2N \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[-\ln\left(\frac{p^2+\Sigma^2}{p^2+m_0^2}\right) + \frac{\Sigma^2 - \Sigma m_0}{p^2+\Sigma^2}\right] \\ &- 2N \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[-\ln\left(\frac{p^2+m_f^2}{p^2+m_0^2}\right) + \frac{m_f^2 - m_f m_0}{p^2+m_f^2}\right] \end{aligned} \tag{1.41}$$

визначає внесок кварків в вакуумну енергію, m_0 - затравочна кваркова маса, а

$$< \Omega_g >= -\frac{3(N^2-1)}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[\frac{\Pi}{p^2+\Pi} - \ln\left(1+\frac{\Pi}{p^2}\right) + \frac{2}{3}\frac{\Pi^2}{p^2(p^2+\Pi)}\right] \tag{1.42}$$

описує глюонний внесок.

Таким чином, якщо ми знаємо кваркову власну енергію і глюонну поляризаційну функцію, то рівняння (1.40),(1.41),(1.42) дозволяють обчислити вакуумну енергію в КХД. З іншого боку, вакуумна енергія дорівнює одній четвертій сліду тензора енергії-імпульса КХД

$$< \Omega^{(tr)} >= \frac{1}{4} < \Theta^{\mu}_{\mu} >, \tag{1.43}$$

де згідно з [148, 149, 150]

$$< \Theta^{\mu}_{\mu} >= \frac{\beta(g)}{2g} < G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \sum_f m_f < \bar{\psi}\psi > (1+\gamma_m), \tag{1.44}$$

де γ_m є ренормгрупова аномальна розмірність масового оператора, а пертурбативна двохпетльова бета-функція $\beta(g)$ дорівнює

$$\frac{\beta(g)}{2g} = -\frac{1}{24}\frac{\alpha_s}{\pi}\left[(11N_c - 2n_f) + \frac{1}{4}\frac{\alpha_s}{\pi}\left(34N_c^2 - 10N_c n_f - 3n_f\frac{N_c^2-1}{N_c}\right)\right], \tag{1.45}$$

$\alpha_s = g^2(\mu)/4\pi$ і N_c - число кольорів (в КХД $N_c = 3$).

Для глюонної поляризаційної функції (1.37) ми маємо

$$< \Omega_g >= -\frac{3(N^2-1)\mu_g^4}{32\pi^2}\Bigg(\frac{\chi-1}{2} - \frac{1}{3}\ln(\chi+1)$$

$$-\left(\frac{1}{6}+\chi^2\right)\ln\chi + \left(\frac{3\chi^2+2}{6}\right)\ln(\chi^2+1)\Bigg)\mu_g^4. \tag{1.46}$$

Зафіксуємо параметр χ розглядаючи теорію без ферміонів. Ми маємо

$$\frac{\beta(g)}{8g} < G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} >= -\frac{3(N_c^2-1)\mu_g^4}{32\pi^2}\Bigg(\frac{\chi-1}{2} - \frac{1}{3}\ln(\chi+1)$$

$$
-\left(\frac{1}{6}+\chi^2\right)\ln\chi+\left(\frac{3\chi^2+2}{6}\right)\ln\left(\chi^2+1\right)\Bigg). \tag{1.47}
$$

Використовуючи глюонну масу μ_g визначенною рівнянням (1.38) і бета-функцію (1.45) ми отримуємо рівняння

$$
\left(\frac{\chi-1}{2}-\frac{1}{3}\ln\left(\chi+1\right)-\left(\frac{1}{6}+\chi^2\right)\ln\chi+\left(\frac{3\chi^2+2}{6}\right)\ln\left(\chi^2+1\right)\right)=\frac{11}{34}, \tag{1.48}
$$

звідки знаходимо

$$
\chi \approx 0.966797.
$$

Це значення є досить близьким до 1. Таким чином, глюонна маса є близькою до масштабу, який відокремлює пертурбативну і непертурбативну поведінку глюонного пропагатора.

Що стосується кваркової масової функції, то ми розглянемо два випадки. Першим є випадок кіральної границі коли масова функція повністю визначається динамічною масою. У випадку важких кварків $m_f(\eta^2) > \eta$, де

$$
\eta =< -\bar{\psi}\psi >_{\eta}^{1/3} \tag{1.49}
$$

характеризує масштаб всіх кіральних спостережуваних. Для динамічної масової функції ми використовуємо анзатц запропонований в роботах [151, 152]

$$
m_{dyn}(p^2)=\eta^3\left[\frac{1}{\eta^2}\theta(\eta^2-p^2)+\frac{1}{p^2}\left(\frac{\ln p^2/\Lambda_Q^2}{\ln \eta^2/\Lambda_Q^2}\right)^{\gamma_m-1}\theta(p^2-\eta^2)\right], \tag{1.50}
$$

де Λ_Q - масштаб КХД. Використовуючи (1.40),(1.41),(1.42),(1.43), (1.46),(1.50), ми отримуємо наступне співвідношення між кварковим і глюонним конденсатами для безмасових кварків

$$
-\frac{1}{96}<\frac{\alpha_s}{\pi}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}>\left(-2n_f+\frac{\alpha_s}{4\pi}\left(34N_c^2-10N_cn_f-3n_f\frac{N_c^2-1}{N_c}\right)\right)=
$$

$$
-\frac{3(N_c^2-1)}{32\pi^2}\left(\frac{\chi-1}{2}-\frac{1}{3}\ln\left(\chi+1\right)-\left(\frac{1}{6}-\chi^2\right)\ln\chi\right.
$$

$$+\left(\frac{3\chi^2+2}{6}\right)\ln\left(\chi^2+1\right)\Big)\,\mu_g^4-\frac{N_c\eta^4(2\ln 2-1)}{16\pi^2}\,. \qquad (1.51)$$

Якщо вибрати $n_f = 3$ і підставити значення фізичних кваркового і глюонного конденсатів, то це співвідношення є досить задовільним. Зважаючи на те, яким простим є наш анзатц, цей факт показує, що запропонований підхід може бути використаним для отримання інших цікавих з фізичної точки зору результатів. Найпростішим було б обчислення динамічної глюонної маси включаючи внесок ферміонів в наступному порядку теорії збурень в методі OPE з подальшим порівнянням з нашим результатом.

Для важких кварків $\Sigma(p^2) \approx m_f(p^2)$ і ми знаходимо, що

$$<\Omega_f>_{hf} \simeq -\frac{N_c<-\bar{\psi}\psi>_\eta m_f(\eta)}{8\pi^2\gamma_m}. \qquad (1.52)$$

Використовуючи тоді рівняння (1.40),(1.42),(1.43) і (1.46), ми отримуємо наступне співвідношення між кварковим і глюонним конденсатами для важких кварків

$$m_f<-\bar{\psi}\psi>_\eta \approx \frac{1}{\kappa}<\frac{\alpha_s}{\pi}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}>, \qquad (1.53)$$

де

$$\kappa = 12\left(1+\gamma_m-\frac{N_c}{2\pi^2\gamma_m}\right),$$

яке дорівнює $\kappa \approx 11.9,\ 12.6,\ 13.2$ для одного, двох і трьох кварків відповідно. Відзначимо, що результат (1.53), який ми отримали обчислюючи вакуумну енергію як функцію кваркового і глюонного конденсатів є добре відомим і був раніше отриманий в методі так званих правил сум [153, 154].

1.4. Динамічне порушення кіральної симетрії в квантово-електродинамічних системах з ферміонами локалізованими в підпросторах нижчої розмірності

Як ми відзначали у Вступі не тільки взаємодія є важливою для динамічного порушення симетрії. Зовнішні умови такі як присутність класичних зовнішніх полів, кривизна простору, його геометрія і топологія також в загальному випадку сильно впливають на ДПС і ця дисертація якраз і присвячена дослідженню цих питань. В перших двох параграфах цього розділу ми розглянули загальні методи дослідження ДПС. В третьому параграфі на прикладі КХД ми бачили як ці методи працюють. В цьому ж параграфі ми вперше розглянемо як зовнішні умови, а саме геометричні фактори впливає на ДПС. Ми розглянемо динамічне порушення кіральної симетрії в так званій редукованій КЕД. Ця модель відповідає системі, в якій в той час як електромагнітне поле може вільно розповсюджуватися в D-вимірному просторові, заряджені ферміонні поля є локалізованими в підпросторах нижчої розмірності. В фізиці елементарних частинок і астрофізиці моделі такого типу можуть бути суттєвими для опису динаміки так званих космічних струн [155]. Також нещодавно в роботі [156] моделі подібного типу були використані для квазілокалізації абелевих калібрувальних полів на 3-брані. Слід відзначити, що моделі з ферміонами локалізованими в підпросторах нижчої розмірності мають важливе фізичне застосування в фізиці конденсованого стану. Так графен, який ми будемо розглядати в Розділі 5 є системою, яка описується дуже подібною моделлю, в якій ферміони локалізовані в площині графену, а електромагнітне поле розповсюджується у всьому тривимірному просторі. В цьому параграфі ми розглянемо загальний формалізм редукованих теорій, а потім, як приклад, вивчимо динаміку порушення кіральної симетрії в редукованій КЕД на площині.

Дія КЕД після повороту Віка в евклідовому (D+1)-вимірному просторі має наступний вигляд ($X = (x_0, x_1, ..., x_D)$)

$$S = \int d^{D+1}X(\frac{1}{4e^2}F^2_{ab} + \delta(x_1)...\delta(x_d)\bar{\psi}\hat{\partial}\psi + A_a J^a - \frac{1}{2e^2\xi}(\partial_a A^a)^2), \qquad (1.54)$$

де ξ - калібрувальний параметр, а J^a - густина ферміонного струму. Обчислюючи функціональний інтеграл по полю A_a, ми знаходимо

$$S = \frac{1}{2}\int d^{D+1}X d^{D+1}Y J^a(X)\tilde{D}^{(0)}_{ab}(X-Y)J^b(Y), \qquad (1.55)$$

де

$$\tilde{D}^{(0)}_{ab}(X-Y) = e^2 \int \frac{d^{D+1}K}{(2\pi)^{D+1}} \exp\left(iK(X-Y)\right) \left(\delta_{ab} - (1-\xi)\frac{K_a K_b}{K^2}\right) \frac{1}{K^2} \tag{1.56}$$

і $K = (k_0, k_1, ..., k_D)$. В редукованій КЕД з ферміонами локалізованими в d-вимірному підпросторі густина струму має наступну форму

$$J^a(X) = 0 \ \text{ для } \ a = d+1, d+2, ..., D,$$

$$J^a(X) = j^a(x_1, ..., x_d)\delta^{D-d}(\bar{x}) \ \text{ для } \ a = 0, 1, ..., d, \tag{1.57}$$

де $\bar{x} \equiv (x_{d+1}, ..., x_D)$. Інтегруючи по $\bar{x}$ і $\bar{y}$ в рівнянні (1.55), ми отримуємо наступну редуковану (d+1)-вимірну дію

$$\tilde{S}_{[D+1,d]eff} = \frac{1}{2} \int d^{d+1}x d^{d+1}y \, j^{\mu}(x) D^{(0)}_{[D+1,d]\mu\nu}(x-y) j^{\nu}(y), \tag{1.58}$$

де

$$D^{(0)}_{[D+1,d]\mu\nu}(x-y) = e^2 \int \frac{d^{d+1}k d^{D-d}\bar{k}}{(2\pi)^{D+1}} e^{ik(x-y)} \left(\delta_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{\bar{k}^2 + k^2}\right) \frac{1}{\bar{k}^2 + k^2} \tag{1.59}$$

і $\mu, \nu = 0, 1, ..., d$.

Інтегруючи по $\bar{k}$ ми знаходимо ефективну дію для ферміонів в (d+1)-вимірному підпросторі. Використовуючи допоміжне поле $\tilde{A}_\mu$ легко показати, що ефективна дія ферміонів в (d+1)-вимірному підпросторі може бути представлена в наступному вигляді

$$S_{[D+1,d]eff} = \int d^{d+1}x \left[\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} I(-\partial^2) F^{\mu\nu} + \tilde{A}_\mu j^\mu + \bar{\psi}\hat{\partial}\psi\right], \tag{1.60}$$

де ∂^2 є оператором Лапласа в (d+1)-вимірному просторі, а $I(-\partial^2)$ в загальному випадку є нелокальним (інтегральним) оператором. Відзначимо, що взаємодія $\tilde{A}_\mu j^\mu$ конформно інваріантна для всіх $D+1$ і d. Цей факт є важливим з точки зору динаміки порушення кіральної симетрії редукованої КЕД.

Розглянемо тепер динамічне порушення кіральної симетрії для редукованої КЕД в (3+1)-вимірному просторі-часі із зарядженими частинками локалізованими на двовимірній площині. В цьому випадку $D = 3$, $d = 2$ і $\bar{k} = k_3$.

Інтегруючи по k_3 в рівнянні (1.59), ми знаходимо пропагатор калібрувального поля ефективної (2+1)-вимірної теорії

$$D^{(0)}_{[4,2]\mu\nu}(x-y) = \frac{e^2}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\exp\left(ik(x-y)\right)\left(\delta_{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{\sqrt{k^2}}, \quad (1.61)$$

де $\mu,\nu = 0,1,2$ і для зручності ми зробили заміну $\xi \to 2\xi - 1$, тобто $(1-\xi) \to 2(1-\xi)$. В термінах (2+1)-вимірного векторного поля $\tilde{A}_\mu(x)$ ефективна дія (1.58) має вигляд (корисно порівняти цей вираз з рівнянням (1.60))

$$S_{[4,2]eff} = \int d^3x \left[\frac{1}{2e^2}F_{\mu\nu}\frac{1}{\sqrt{-\partial^2}}F^{\mu\nu} + \tilde{A}_\mu j^\mu + \frac{1}{e^2\xi}\partial_\mu\tilde{A}^\mu\frac{1}{\sqrt{-\partial^2}}\partial_\nu\tilde{A}^\nu + \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu\right)\psi\right]. \quad (1.62)$$

Як добре відомо, в (2+1)-вимірному просторі існують два двовимірні незвідні представлення алгебри Дірака. Згідно з роботами [157, 158, 159], ми розглянемо чотирьохкомпонентні ферміонні поля, які містять ці два нееквівалентні представлення. У цьому випадку існує масовий член, який зберігає парність. Якщо теорія має N_f ароматів ферміонів, то її дія має $U(2N_f)$ симетрію [158, 159]. Генерація ферміонної маси призводить до динамічного порушення цієї симетрії до $U(N_f)\times U(N_f)$.

Ефективна теорія (1.62) не має розмірних параметрів і є конформно інваріантною. Тому ферміонна маса m_d може бути індукована тільки шляхом динамічної трансмутації. В нашому випадку це означає, що динамічна маса, якщо вона з'являється, буде пропорційна параметру ультрафіолетового обрізання Λ порушуючи таким чином конформну симетрію. Рівняння ШД для ферміонного пропагатора в драбинному наближенні з урахуванням поляризації вакуума для калібрувального пропагатора має вигляд

$$G^{-1}(p) = G^{(0)^{-1}}(p) + i\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\gamma^\mu G(q)\gamma^\nu D_{[4,2]\mu\nu}(p-q), \quad (1.63)$$

де $G^{(0)}(p)$ - затравочний ферміонний пропагатор, а

$$D_{[4,2]\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu} - (1-\xi(k^2))\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)D(k^2) \quad (1.64)$$

є повним пропагатором калібрувального поля, який враховує ефекти поляризації вакуума. Затравочний пропагатор калібрувального поля дорівнює

$$D^{(0)}_{[4,2]\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi(k^2)) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{e^2}{2\sqrt{-k^2}}\,, \tag{1.65}$$

а повний пропагатор виражається через поляризаційний тензор $\Pi_{\mu\nu}(k)$ наступним чином

$$D^{-1}_{[4,2]\mu\nu}(k) = D^{(0)^{-1}}_{[4,2]\mu\nu}(k) + \Pi_{\mu\nu}(k), \quad \Pi_{\mu\nu}(k) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \Pi(k^2). \tag{1.66}$$

Ферміонний пропагатор має вигляд $G(p^2) = (A(p^2)\hat{p} - B(p^2))^{-1}$, $\hat{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$ і з рівняннь (1.63) і (1.64) ми отримуємо наступні рівняння для функцій $A(p^2)$ і $B(p^2)$ в евклідовому просторі ($p_0 = ip_4$):

$$A(p^2) = 1 + \frac{1}{p^2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{A(q^2)}{q^2 A^2(q^2) + B^2(q^2)} D[(p-q)^2]$$

$$\times \left(pq + (1 - \xi((p-q)^2))(pq - \frac{2(p^2q^2 - (pq)^2)}{(p-q)^2}) \right), \tag{1.67}$$

$$B(p^2) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{B(q^2)}{q^2 A^2(q^2) + B^2(q^2)} D[(p-q)^2] \left(2 + \xi((p-q)^2) \right)\,, \tag{1.68}$$

де функція $D(k^2)$ дорівнює

$$D(k^2) = \frac{1}{\frac{2k}{e^2} + \Pi(k^2)}. \tag{1.69}$$

Ми покажемо нижче, що можливо вибрати нелокальну калібровку так, що функція $A(p^2)$ тотожно дорівнює одиниці. Тоді поляризаційна функція в однопетльовому наближенні відповідає поляризації вакууму вільними ферміонами в (2+1)-вимірному просторі-часі

$$\Pi(k^2) = \frac{N_f}{4\pi} [2m_d + \frac{k^2 - 4m_d^2}{k} \arctan \frac{k}{2m_d}]. \tag{1.70}$$

Відзначимо, що

$$\Pi(k^2) \to \frac{N_f k}{8} \tag{1.71}$$

для $k \gg m_d$ і

$$\Pi(k^2) \to \frac{N_f k^2}{6\pi m_d} \tag{1.72}$$

для $k \ll m_d$.

Вимога, що $A(p^2) = 1$ є важливою з точки зору рівнянь Уорда [160, 161]. В роботі [201] було показано, що функція $A(P^2)$ дорівнює одиниці, якщо використовується наступна нелокальна (в загальному випадку) калібровка $\xi(k^2)$

$$\xi(z) = d - \frac{d(d-1)}{z^d D(z)} \int_0^z dt t^{d-1} D(t). \tag{1.73}$$

Ми побачимо, що для $m_d^2 \ll \Lambda^2$ головним чином область імпульсів $k \gg m_d$ є відповідальною за генерацію маси. Згідно (1.71) в цій області $\Pi(k^2) = \frac{N_f k}{8}$, тобто функція $D(k^2)$ (1.69) пропорційна k^{-1}. Для такої функції $D(k^2)$ і $d = 2$, ми знаходимо $\xi(k^2) = 2/3$ (така калібровка відома як калібровка Неша [163]) і рівняння для щілини приймає наступний вигляд

$$B(p^2) = 4\pi^2 \lambda \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{B(q^2)}{q^2 + B^2(q^2)} \frac{1}{\sqrt{(p-q)^2}}, \quad \lambda = \frac{e^2}{3\pi^2 (1 + \frac{N_f e^2}{16})}. \tag{1.74}$$

Інтегруючи по кутах в (1.74), ми отримуємо

$$B(p^2) = \lambda \int_0^{\Lambda^2} \frac{dq^2 \sqrt{q^2} B(q^2)}{q^2 + B^2(q^2)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + |p^2 - q^2|}}, \tag{1.75}$$

де ми ввели ультрафіолетовий параметр обрізання Λ. Зауважимо, що для імпульсів $q^2 \gg m_d^2 \equiv B^2(m_d^2)$, член $B^2(q^2)$ в знаменику підінтегрального виразу в рівнянні (1.75) є несуттєвим. Єдина роль цього члена полягає в забезпеченні параметра обрізання в інфрачервоній області. Тому ми можем знехтувати цим членом, а використовувати натомість інфрачервоний параметр обрізання в інтегралі. Тоді ми маємо наступне рівняння для щілини ($x = p^2, y = q^2$)

$$B(x) = \lambda \int_{m_d^2}^{\Lambda^2} \frac{dy}{y^{1/2}} B(y) [\frac{\theta(x-y)}{\sqrt{x}} + \frac{\theta(y-x)}{\sqrt{y}}]. \tag{1.76}$$

Перехід від рівняння (1.75) до рівняння (1.76) відповідає так званому біфуркаційному методу. В проблемі ДПС цей метод був вперше застосований в роботі [164], а потім широко використовувався в літературі (дивись [51]). Легко перевірити, що інтегральне рівняння (1.76) еквівалентне диференційному рівнянню

$$x^2 B'' + \frac{3x}{2} B' + \frac{\lambda}{2} B = 0 \tag{1.77}$$

з граничними умовами

$$B'(m_d^2) = 0, \tag{1.78}$$

$$(2xB' + B)|_{x=\Lambda^2} = 0. \tag{1.79}$$

Розв'язком рівняння (1.77), який задовольняє граничній умові (1.78) є

$$B(x) = \frac{m_d^{3/2}}{x^{1/4}\sinh\delta}\sinh\left(\frac{\omega}{4}\log\frac{x}{m_d^2} + \delta\right), \tag{1.80}$$

де $\omega = \sqrt{1-8\lambda}$, $\delta = \frac{1}{2}\log\frac{1+\omega}{1-\omega}$ і ми використали також умову нормування $B(m_d^2) = m_d$. Далі із ультрафіолетової граничної умови (1.79) випливає наступне рівняння для динамічної маси

$$\mathrm{th}(\frac{\omega}{2}\log\frac{\Lambda}{m_d} + \delta) = -\omega. \tag{1.81}$$

Очевидно, що не існує розв'язок з $m_d \ll \Lambda$ для $\lambda < \lambda_{cr} = 1/8$. Для надкритичних значень λ ($\lambda > \lambda_{cr}$) рівняння (1.81) приймає форму

$$\mathrm{tg}(\frac{\nu}{2}\log\frac{\Lambda}{m_d} + \mathrm{arctg}\nu) = -\nu, \tag{1.82}$$

де $\nu = \sqrt{8\lambda - 1}$. Тому для малих ν маса дорівнює

$$m_d \simeq \Lambda\exp[-\frac{2\pi}{\nu} + 4]. \tag{1.83}$$

Критична лінія в площині $(N_f,\ e^2)$ визначається рівнянням

$$e_{cr}^2 = \frac{16}{N_{max} - N_f}, \tag{1.84}$$

де $N_{max} = \frac{128}{3\pi^2}$. Динамічне порушення кіральної симетрії має місце для $e > e_{cr}$, а N_{max} визначає верхню границю для числа ароматів ферміонів N_f коли порушення симетрії можливе (якщо $N_f \to N_{max}$ знизу, то критичне значення $e_{cr}^2 \to \infty$). У випадку $N_f = 1$ критична константа зв'язку дорівнює $e_{cr}^2 \simeq 4.81$ і $\alpha_{cr} \equiv e_{cr}^2/4\pi \simeq 0.38$.

Перевіримо тепер, що дійсно область імпульсів $q \gg m_d$ є головним чином відповідальною за генерацію маси у випадку $m_d \ll \Lambda$. Перш за все, в цьому випадку логарифм $\ln \Lambda/m_d \sim 2\pi/\nu$ є великим. Далі підінтегральний вираз в правій частині рівняння (1.75) є гладким для $q^2 \to 0$. Це означає, що область імпульсів $0 \leq q \leq m_d$ є надто малою щоб згенерувати великий логаріфм $\ln \Lambda/m_d$. Цей логаріфм, а тому і суттєва сингулярність в (1.83) генеруються в області $m_d \ll q \ll \Lambda$. Відзначимо, що критична лінія (1.84) відповідає так званому конформному фазовому переходу (дивись [129]). В моделі, що розглядається, параметром порядку, який контролює фазовий перехід є константа зв'язку e, яка пов'язана з оператором $j_\mu \tilde{A}^\mu$. Конформний фазовий перехід характеризується різкою зміною в спектрі низьноенергетичних збуджень, яка відбувається в точці фазового переходу. Ця характеристика є справедливою також в досліджуваній моделі. Дійсно в докритичній області реалізується кулонівська конформно інваріантна фаза із взаємодіючими безмасовими ферміонами і калібрувальними бозонами. В надкритичній же області існує велика кількість зв'язаних станів включаючи $2N_f^2$ намбу-голдстоунівських бозонів, які з'являються внаслідок динамічного порушення $U(2N_f)$ симетрії до $U(N_f) \times U(N_f)$.

1.5. Магнітний каталіз у просторах вищої розмірності

Дана дисертаційна робота присвячена дослідженню впливу зовнішніх полів на динаміку порушення симетрії. У Вступі ми відзначили, що серед усіх можливих зовнішніх полів головну увагу ми будемо приділяти впливу зовнішнього магнітного поля. Слід також додати, що ми будемо розглядати заряджені поля тільки із спіном $1/2$ внаслідок присутності добре відомої проблеми нульової моди для заряджених полів із спіном 1 у зовнішньому магнітному полі для полів Янга–Мілса [165, 166], для $W_\mu^\pm$ бозонів в електрослабкій теорії [167, 168, 169, 170] і навіть для полів з вищими спінами в контексті теорії струн [171, 172].

Згідно з результатами отриманими в роботах [68, 72] постійне магнітне поле каталізує динамічне порушення симетрії і суть цього явища полягає в ефективній редукції розмірності простору для ферміонів в інфрачервоній області. В моделях розглянутих в роботах [68, 69, 70, 71, 72] ефективна редукція розмірності має вигляд $3+1 \to 1+1$ для моделей в $(3+1)$-вимірному просторі-часі і $2+1 \to 0+1$ для моделей в (2+1)-вимірному просторі-часі. Зрозуміти причину такої редукції можливо наступним чином. Як добре відомо, магнітне поле не впливає на рух заряджених частинок в напрямі вздовж магнітного поля, а тому вони вільно рухаються в цьому напрямі і в відповідній квантовій задачі енергетичний спектр є неперервним відносно імпульсу, який характеризує цей рух. З іншого боку, рух заряджених частинок в площині перпендикулярній магнітному полю має обмежений характер, тому що в класичній фізиці частинки рухаються по круговим ларморівським орбітам, а в квантовій задачі енергетичний спектр є дискретним (рівні Ландау). Якщо енергії частинок є достатньо низькими, так що переходами між дискретними рівнями можна знехтувати, то з точки зору динаміки важливою залишається лише неперервна частина спектра найнижчого дискретного рівня, яка очевидно відповідає ефективним $(1+1)$- і $(1+0)$-вимірним теоріям у випадках (3+1)- і (2+1)-вимірних моделей відповідно. Таким чином, в цих моделях в інфрачервоній області має місце відповідна ефективна редукція розмірності простору для ферміонів.

В роботі [79] було розглянуто ДПС в зовнішньому постійному магнітному полі у просторах вищої розмірності $D+1>4$. Поряд із чисто академічним питанням стосовно того, чи має місце магнітний каталіз у просторах вищої розмірності і якщо так, то яким чином він реалізується, інтерес до цієї проблеми був обумовлений активністю пов'язаною з феноменологічними, а також інспірованими теорією струн, квантовопольовими моделями з додатковими просторовими вимірами і з магнітними полями визначеними в цих додаткових вимірах [173].

Перед тим як вивчати ДПС у зовнішньому магнітному полі в просторах вищої розмірності, перш за все нагадаємо як визначається постійне магнітне у просторах-часі вищої розмірності $D+1>4$ (дивись, наприклад, [174]). Як добре відомо, проблема формулюється наступним чином. Постійне електромагнітне поле повністю характеризується антисиметричним тензором електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$. Елементи $F_{0\nu}$ цього тензора визначають електричне поле. Натомість елементи F_{ij}, де i,j приймають значення 1,..., D визначають магнітне поле. Використовуючи ортогональні перетворення деякі елементи антисиметричної матриці F_{ij} ми можемо занулити. З лінійної алгебри відомо, що число незалежних параметрів, які визначають антисиметричну матрицю F_{ij} з точністю до ортогональних перетворень дорівнює $[\frac{D}{2}]$, де $[x]$ означає цілу частину від x.

Таким чином, з точністю до ортогональних перетворень магнітна частина тензора електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$ має вигляд

$$F_{ij}=\sum_{k=1}^{[\frac{D}{2}]}H_k(\delta_i^k\delta_j^{D+1-k}-\delta_j^k\delta_i^{D+1-k}), \tag{1.85}$$

а відповідний вектор-потенціал, який визначає цей тензор, дорівнює

$$A_i=-H_i x_{D+1-i}. \tag{1.86}$$

Розглянемо тепер динамічне порушення кіральної симетрії в моделях типу Намбу–Йона-Лазініо у зовнішньому постійному магнітному полі у просторах-часі вищої розмірності $D+1>4$. По-перше, визначимо, що ми розуміємо під кіральною симетрією в таких просторах. Як добре відомо, кіральна симетрія пов‘язана із властивостями представлень алгебри Кліфорда. Алгебра Кліфорда в (D+1)-вимірному просторі-часі парної розмірності має тільки одне комплексне незвідне $2^{(D+1)/2}$- вимірне спінорне представлення. Однак відповідні спінори є звідними відносно парної підалгебри (яка генерується добутками парної кількості матриц Дірака) і розщеплюються у пару $2^{(D+1)/2-1}$-компонентних вейлівських спінорів. При цьому матриця $\gamma_{D+2}=\gamma_0...\gamma_D$ є аналогом γ_5 матриці в (D+1)-вимірному просторі-часі, а матриці $\frac{1\pm\gamma_{D+2}}{2}$ є відповідними кіральними проекторами. В просторах-часі непарної розмірності існує два різних незвідних представлення алгебри Кліфорда (вони відрізняються знаками γ-матриць) і кіральна симетрія не є визначеною тому, що матриця γ_{D+2} пропорційна одиниці. Для того, щоб визначити кіральну симетрію в просторах-часі непарної розмірності, зазвичай припускають, що ферміонні поля належать до звідного представлення алгебри Кліфорда. Зауважимо, що саме такі звідні представлення реалізуються, як правило, в ефективних теоріях в фізиці конденсованого стану в (2+1)- вимірних моделях, наприклад, в графені, який ми розглядаємо в Розділі 5. В теоріях із звідним представленням алгебри Кліфорда можлна визначити аналог кіральної симетрії (як приклад, дивись випадок (2+1)-вимірної теорії розглянутий в роботі [159]). В подальшому, кіральну симетрію у просторах-часі непарної розмірності ми будемо розуміти визначеною саме таким чином.

Для того щоб дослідити магнітний каталіз динамічного порушення симетрії у просторах вищої розмірності ми розглянемо наступну модель НЙЛ з кіральною симетрією $U_{\rm L}(1)\times U_{\rm R}(1)$ в просторі-часі $D+1>4$:

$$\mathcal{L}=\bar\psi i\gamma^\mu D_\mu\psi+\frac{G}{2}\left[(\bar\psi\psi)^2+(\bar\psi i\gamma_{D+2}\psi)^2\right] , \qquad (1.87)$$

де $D_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu$ - коваріантна похідна, а ферміонні поля мають додатковий індекс "аромату" $i=1,\dots,N$.

Застосовуючи метод Хабарда–Стратоновича [110, 111] і вводячи допоміжні поля ми можемо переписати лагранжіан (1.87) в еквівалентній формі

$$\mathcal{L}=\bar\psi i\gamma^\mu D_\mu\psi-\bar\psi(\sigma+i\gamma_{D+2}\pi)\psi-\frac{1}{2G}(\sigma^2+\pi^2) . \qquad (1.88)$$

Інтегруючи по ферміонним полям, ми отримуємо ефективну дію для полів σ і π

$$\Gamma(\sigma,\pi)=-i{\rm Tr\,Ln}\left[i\hat D-(\sigma+i\gamma_{D+1}\pi)\right]-\frac{1}{2G}\int d^Dx(\sigma^2+\pi^2) , \qquad (1.89)$$

де $\hat D=\gamma^\mu D_\mu$. Для обчислення ефективного потенціалу достатньо розглянути постійні $\sigma=const$ і $\pi=const$. Не втрачаючи загальності, ми можемо покласти $\pi = 0$ тому, що залежність від π ми завжди можемо відновити із вимоги кіральної симетрії ефективної дії. Далі

$$\mathrm{Det}(i\hat{D} - \sigma) = \frac{i}{2}\int d^D x \int_0^\infty \frac{ds}{s}\mathrm{tr}\langle x|e^{-is(\hat{D}^2+\sigma^2)}|x\rangle \tag{1.90}$$

і

$$\hat{D}^2 = D_\mu D^\mu - \frac{ie}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}. \tag{1.91}$$

Для A_μ визначенного в рівнянні (1.86) очевидно, що проблема обчислення матричного елемента $\langle x|e^{-is(\hat{D}^2+\sigma^2)}|x\rangle$ зводиться до знаходження відповідних матричних елементів для кожного H_k, тобто для пар x_k і x_{D+1-k} компонент. Таким чином, використовуючи [176], ми отримуємо наступний ефективний потенціал

$$V(\rho) = \frac{\rho^2}{2G} + \frac{2^{[\frac{D+2}{2}]}N}{2(4\pi)^{(D+1)/2}}\int_{1/\Lambda^2}^\infty \frac{ds\, e^{-s\rho^2}}{s^{(D+1)/2-[D/2]+1}}\prod_{k=1}^{[D/2]} eH_k \coth(eH_k s)\ , \tag{1.92}$$

де $\rho^2 = \sigma^2 + \pi^2$, а Λ - параметр обрізання. Рівняння для щілини $\frac{dV}{d\rho} = 0$ має вигляд

$$\frac{1}{G} = \frac{2^{[\frac{D+2}{2}]}N}{(4\pi)^{(D+1)/2}}\int_{1/\Lambda^2}^\infty \frac{ds}{s^{(D+1)/2-[D/2]}}e^{-s\rho^2}\prod_{k=1}^{[D/2]} eH_k \coth(eH_k s)\,. \tag{1.93}$$

Якщо магнітне поле відсутнє, тоді права частина рівняння для щілини має наступний вигляд

$$\frac{2^{[\frac{D+2}{2}]}N}{(4\pi)^{(D+1)/2}}\int_{1/\Lambda^2}^\infty \frac{ds}{s^{(D+1)/2}}e^{-s\rho^2}\ , \tag{1.94}$$

де підінтегральний вираз є ядром теплопровідності для оператора Дірака в (D+1)-вимірному просторі-часі. В силу того, що $\coth x \to 1$ для $x \to \infty$, то як випливає із (1.93) кожен незалежний відмінний від нуля параметр H_k, який характеризує магнітне поле, ефективно зменшує розмірність простору-часу в інфрачервоній області для ферміонів на 2 одиниці (поведінка ядра теплопровідності при $s \to \infty$ обумовлена низькоенергетичною частиною спектра оператора Дірака).

Таким чином, ми знаходимо, що для максимального числа $[\frac{D}{2}]$ параметрів, які характеризують постійне магнітне поле, для ферміонів в інфрачервоній області має місце ефективна редукція розмірності $D+1 \to 1+1$ для просторів-часу парної розмірності і $D+1 \to 0+1$ для просторів-часу непарної розмірності. Для якісного аналізу рівняння для щілини достатньо розглянути випадок коли всі можливі незалежні параметри, які характеризують магнітне поле є рівними і відмінними від нуля $H_1 = H_2 = \ldots = H_{[D/2]} = H$. Для непарного D ми маємо наступне рівняння для щілини

$$\frac{(2\pi)^{(D+1)/2}}{GN\Lambda^{D-1}} = \frac{1-(eH/\Lambda^2)^{(D+1)/2-1}}{(D+1)/2-1} + (eH/\Lambda^2)^{(D+1)/2-1}\int_{\rho^2/eH}^{\infty}\frac{ds}{s}e^{-s}, \quad (1.95)$$

чий розв'язок має вигляд

$$\rho^2 = eH\, exp\left[-\frac{(2\pi)^{\frac{(D+1)}{2}}(1-g)}{GN(eH)^{\frac{(D+1)}{2}-1}}\right], \quad (1.96)$$

де $g = \frac{GN\Lambda^{D-1}}{((D+1)/2-1)(2\pi)^{\frac{D+1}{2}}}$. Рівняння для щілини для парного D має наступний вигляд

$$\frac{(2\pi)^{(D+1)/2}}{GN\sqrt{2}} = \frac{\Lambda^{D-1}(1-(eH/\Lambda^2)^{(D+1)/2-1})}{(D+1)/2-1} + \frac{(eH)^{D/2}}{\rho}\int_{\rho^2/eH}^{\infty}\frac{ds}{s^{1/2}}e^{-s} \quad (1.97)$$

і його розв'язок є

$$\rho = \frac{(eH)^{\frac{D}{2}}GN}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}}. \quad (1.98)$$

Таким чином, для максимального числа незалежних параметрів критична константа зв'язку дорівнює нулю, а щілина має суттєву сингулярність коли константа зв'язку прямує до нуля в просторах-часі парної розмірності і аналітично залежить від константи зв'язку в просторах-часі непарної розмірності. Ці результати повністю підтримують наш висновок про ефективну редукцію розмірності простору-часу $D+1 \to 1+1$ та $D+1 \to 0+1$ для просторів парної і непарної розмірності відповідно, тому що знайдені нами розв'язки рівняння для щілини мають форму типову для розв'язків в (1+1)- і (0+1)-вимірних теоріях [72].

Наостанок, розглянемо коротко випадок коли тільки частина $p < [\frac{D}{2}]$ параметрів відмінна від нуля. Як випливає із рівняння (1.93) в цьому випадку критична константа зв'язку g_{cr} відмінна від нуля. Для того, щоб не ускладнювати не дуже важливими деталями задачу ми знов покладемо всі H_k рівними, тобто $H_1 = H_2 = \ldots = H_p = H$. Тоді ми маємо

$$g_{cr} = \frac{1}{1 + 2(\frac{eH}{\Lambda^2})^{\frac{3}{2}}} \tag{1.99}$$

для D=4,

$$g_{cr} = \frac{1}{1 + (\frac{eH}{\Lambda^2})^2 + \frac{2}{3}(\frac{eH}{\Lambda^2})^2 \ln\frac{\Lambda^2}{eH}} \tag{1.100}$$

для D=5 і

$$g_{cr} = \frac{1}{1 + \frac{p(\frac{D+1}{2}-1)}{3(\frac{D+1}{2}-3)}(\frac{eH}{\Lambda^2})^2} \tag{1.101}$$

для $D > 5$. Для D = 4 і D = 5 постійне магнітне поле характеризується тільки двома незалежними параметрами, тому p дорівнює одиниці в цьому випадку. Як випливає з рівняння (1.101) для $D > 5$, чим більше p, тим менше значення критичної константи зв'язку у відповідності з нашими очікуваннями.

1.6. Динамічне порушення кіральної симетрії в постійному електромагнітному полі

В попередніх параграфах цього розділу ми розглянули методи дослідження динамічного порушення симетрії і дослідили деякі моделі, в яких має місце ДПС. Як ми відзначали у Вступі дуже важливу роль в системах з ДПС відіграє вплив зовнішніх полів. В попередньому параграфі ми досліджували динамічне порушення симетрії у зовнішньому постійному магнітному полі в теоріях у просторах вищої розмірності. На відміну від постійного магнітного поля, яке сприяє динамічному порушенню симетрії, в роботі [175] було показано, що постійне електричне поле натомість протидіє ДПС. Зрозуміло, що представляє інтерес дослідження того, яким чином присутність обох постійного магнітного і постійного електричного полів впливає на динамічне порушення симетрії. В цьому параграфі ми розглянемо це питання в (3+1)-вимірній моделі НЙЛ в постійному електромагнітному полі.

Добре відомо, що постійне електромагнітне поле в (3+1)-вимірному просторі-часі характеризується значеннями двох інваріантів відносно перетворень із групи Лоренца $f_1 = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \vec{B}^2 - \vec{E}^2$ і $f_2 = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} = \vec{E} \cdot \vec{B}$. Як ми зазначили вище, динамічне порушення симетрії було досліджено в літературі для випадків постійних магнітного або елекричного полів коли тільки перший інваріант f_1 відмінний від нуля. Тому виникає природне питання як наявність другого інваріанта впливає на ДПС? Цю проблему ми розглянемо в цьому параграфі досліджуючи динамічне порушення кіральної симетрії в моделі Намбу–Йона-Лазініо.

Модель НЙЛ з кіральною симетрією $U_{\mathrm{L}}(1) \times U_{\mathrm{R}}(1)$ характеризується наступним лагранжіаном

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i\gamma^\mu D_\mu \psi + \frac{G}{2}\left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi} i\gamma_5 \psi)^2\right] , \tag{1.102}$$

де $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ - коваріантна похідна і ферміонні поля мають додатковий індекс "аромату" $i = 1, \ldots, N$.

Застосовуючи, як і в попередньому параграфі, метод Хабарда–Стратоновича [110, 111] і вводячи допоміжні поля ми можемо переписати лагранжіан (1.102) в наступному вигляді

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i\gamma^\mu D_\mu \psi - \bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\pi)\psi - \frac{1}{2G}(\sigma^2 + \pi^2) . \tag{1.103}$$

Дійсно, використовуючи рівняння Ейлера–Лагранжа для допоміжних полів σ і π ми знаходимо

$$\sigma = -G(\bar{\psi}\psi) , \quad \pi = -G(\bar{\psi} i\gamma_5 \psi) \tag{1.104}$$

і тому лагранжіан (1.103) переходить в лагранжіан (1.102).

Інтегруючи по ферміонним полям, ми отримуємо ефективну дію для складених полів σ і π

$$\Gamma(\sigma,\pi) = -i\mathrm{Tr}\,\mathrm{Ln}\big[i\hat{D} - (\sigma + i\gamma_5\pi)\big] - \frac{1}{2G}\int d^Dx(\sigma^2+\pi^2)\;, \tag{1.105}$$

де $\hat{D} = \gamma^\mu D_\mu$. Для обчислення ефективного потенціала достатньо розглянути випадок постійних $\sigma = const$ і $\pi = const$. Не втрачаючи загальності, ми можемо покласти $\pi = 0$ тому, що завжди можливо відновити залежність від π із вимоги кіральної симетрії ефективної дії. Далі

$$\mathrm{Det}(i\hat{D} - \sigma) = \mathrm{Det}(\gamma_5(i\hat{D}-\sigma)\gamma_5) = \mathrm{Det}(-i\hat{D}-\sigma) \tag{1.106}$$

і ми знаходимо

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{Ln}(i\hat{D}-\sigma) = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\,\mathrm{Ln}(\hat{D}^2+\sigma^2)\,. \tag{1.107}$$

Використовуючи метод власного часу Фока-Швінгера, ми маємо

$$-\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\,\mathrm{Ln}(\hat{D}^2+\sigma^2) = \frac{i}{2}\int d^Dx\int_0^\infty \frac{ds}{s}\mathrm{tr}\langle x|e^{-is(\hat{D}^2+\sigma^2)}|x\rangle. \tag{1.108}$$

Добре відомо [176], що вакуум КЕД є нестабільним в зовнішньому електричному полі і ефективна дія має уявну частину, яка описує процеси народження ферміон-антиферміонних пар з вакууму. Ми досліджуємо проблему динамічного порушення кіральної симетрії і тому для наших цілей достатньо розглянути тільки дійсну частину ефективного потенціала, яка дорівнює

$$V(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2G} + \frac{N}{8\pi^2}v.p.\int_{1/\Lambda^2}^\infty ds\frac{1}{s}e^{-s\sigma^2}M\coth(Ms)L\cot(Ls), \tag{1.109}$$

де $L^2 = e^2\frac{\sqrt{f_1^2+4f_2^2}-f_1}{2}$, $M^2 = e^2\frac{\sqrt{f_1^2+4f_2^2}+f_1}{2}$, Λ^2 - параметр обрізання і v.p. від інтеграла по s присутнє тому, що, як зазначено вище, ми розглядаємо тільки дійсну частину ефективного потенціала (уявна частина ефективного потенціала пов'язана з лишками полюсів $\cot(Ls)$). Рівняння для щілини $\delta V/\delta\sigma|_{\sigma=m} = 0$ має вигляд

$$\frac{1}{G} - \frac{N}{4\pi^2}v.p.\int_{1/\Lambda^2}^\infty dse^{-sm^2}M\coth(Ms)L\cot(Ls) = 0. \tag{1.110}$$

Це рівняння було раніше досліджено тільки у випадку коли перший інваріант електромагнітного поля відмінний від нуля $f_1 \neq 0$. Ми чисельно розв'яжемо рівняння (1.110) у випадку коли два інваріанти відмінні від нуля, але спершу ми аналітично отримаємо оцінку знизу для критичної константи зв'язку g_{cr} як функції f_1 і f_2.

Додаючи і віднімаючи $1/s$ до $M\coth(Ms)$ ми маємо

$$v.p. \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} dse^{-sm^2} M\coth(Ms) L\cot(Ls) = \Lambda^2 - \frac{\pi}{2}L +$$
$$v.p. \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} dse^{-sm^2} (M\coth(Ms) - 1/s) L\cot(Ls), \tag{1.111}$$

де ми використали [175]

$$v.p. \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} dse^{-sm^2} L\frac{\cot(Ls)}{s} = \Lambda^2 - \frac{\pi}{2}L.$$

Далі ми представимо інтеграл в (1.111) у вигляді суми двох інтегралів $\int_{1/\Lambda^2}^{\infty} = \int_{1/\Lambda^2}^{\frac{\pi}{2L}} + \int_{\frac{\pi}{2L}}^{\infty}$ (зауважимо, що $\frac{\pi}{2L}$ є перший нуль $\cot(Ls)$). Розглянемо тепер інтеграл від $\frac{\pi}{2L}$ до нескінченності. Використовуючи нерівність $coth\, x \leq 1/x + 1$ для $x > 0$, ми маємо

$$v.p. \int_{\frac{\pi}{2L}}^{\infty} dse^{-sm^2} (M\coth(Ms) - 1/s) L\cot(Ls) \leq v.p. \int_{\frac{\pi}{2L}}^{\infty} dse^{-sm^2} ML\cot(Ls). \tag{1.112}$$

Інтегруючи по частинам, знаходимо

$$v.p. \int_{\frac{\pi}{2L}}^{\infty} dse^{-sm^2} ML\cot(Ls) = M \int_{\frac{\pi}{2L}}^{\infty} e^{-m^2 s} d(\ln(2|\mathrm{sin} Ls|)) =$$
$$-M\ln(2|\sin\frac{\pi}{2}|) + m^2 M \int_{\frac{\pi}{2L}}^{\infty} e^{-m^2 s}\ln(2|\mathrm{sin} Ls|)ds. \tag{1.113}$$

Формула [177]

$$\int_0^{\infty} e^{-qx}\ln(2|\mathrm{sin} ax|)dx = -q\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(q^2 + 4k^2a^2)}, \quad Re\, q > 0,$$

і факт, що інтеграл $M\int_{1/\Lambda^2}^{\frac{\pi}{2L}} \ln(2|\mathrm{sin} Ls|)ds$ є скінченним свідчать про те, що інтеграл $m^2 M\int_{\frac{\pi}{2L}}^{\infty} e^{-m^2 s}\ln(2|\mathrm{sin} Ls|)ds$ прямує до нуля на критичній лінії (де

$m^2 \to 0$). Таким чином, $v.p. \int_{\frac{\pi}{2L}}^{\infty} dse^{-sm^2} ML\cot(Ls) = -M\ln 2$. Тому, в силу (1.112), ми знаходимо

$$v.p. \int_{\frac{\pi}{2L}}^{\infty} dse^{-sm^2}(M\coth(Ms) - 1/s)L\cot(Ls) \leq -M\ln 2. \tag{1.114}$$

Нам залишається тепер тільки зробити оцінку знизу для інтеграла $\int_{1/\Lambda^2}^{\frac{\pi}{2L}} ds(-1/s + M\coth(Ms))L\cot(Ls)$. Ми маємо $\int_{1/\Lambda^2}^{\frac{\pi}{2L}} ds(M\coth(Ms) - 1/s)L\cot(Ls) \leq \int_{1/\Lambda^2}^{\frac{\pi}{2L}}(M\coth(Ms) - 1/s)\frac{ds}{s}$ в силу того, що cot $x \leq 1/x$ для x в інтервалі від 0 до $\frac{\pi}{2}$. Якщо $M \gg L$, тоді ми можем використати нерівність coth $x \leq 1/x + 1$ тому, що $\coth(Ms)$ дорівнює наближенно 1 біля верхньої границі інтегрування. Тому в цьому випадку

$$\int_{1/\Lambda^2}^{\frac{\pi}{2L}} ds(M\coth(Ms) - 1/s)L\cot(Ls) \leq M\ln\frac{\pi\Lambda^2}{2L}. \tag{1.115}$$

Якщо $M \ll L$, тоді $\coth(Ms) \ll 1$ в області інтегрування. Використовуючи нерівність coth $x \leq \frac{1}{x} + x/3$ ($\frac{1}{x}$ і $x/3$ є два перших члена ряду Тейлора для coth x, ми знаходимо

$$\int_{1/\Lambda^2}^{\frac{\pi}{2L}} ds(M\coth(Ms) - 1/s)L\cot(Ls) \leq \frac{M^2}{3}(\frac{\pi}{2L} - 1/\Lambda^2). \tag{1.116}$$

Тепер ми можем проаналізувати отримані результати. Припустимо, що $|f_1| \gg |f_2|$. В магнітному випадку коли $f_1 > 0$, тобто $\vec{B}^2 > \vec{E}^2$, ми маємо $L \approx |e|(\frac{f_2^2}{f_1})^{1/2}$ і $M \approx |e|f_1^{1/2}$. Використовуючи рівняння (1.112),(1.114) і (1.115), ми знаходимо наступну оцінку знизу для критичної константи зв'язку в цьому випадку

$$g_{cr} \geq \frac{1}{1 - \frac{L\pi}{2\Lambda^2} + \frac{M}{\Lambda^2}\ln\frac{\Lambda^2}{2L} - \frac{M}{\Lambda^2}\ln 2} \approx \frac{1}{1 + |e|\frac{f_1^{1/2}}{\Lambda^2}\ln\frac{\Lambda^2 f_1^{1/2}}{4|ef_2|}}, \tag{1.117}$$

де $g_{cr} = \frac{4\pi^2 G\Lambda^2}{N}$ є безрозмірна критична константа зв'язку. Із рівняння (1.117) випливає, що присутність другого інваріанта коли скалярний добуток електричного і магнітного полів відмінний від нуля є дуже важливим. Дійсно, якщо $f_2 \neq 0$, тоді g_{cr} вже не дорівнює нулю (навіть у випадку дуже сильного магнітного поля $|\vec{B}| \sim \Lambda^2$) на відміну від випадку чисто магнітного поля коли $g_{cr} = 0$. Із збільшенням f_2 критична константа зв'язку g_{cr} зростає, а при $f_2 \to 0$, як і належить, константа зв'язку прямує до нуля $g_{cr} \to 0$.

В електричному випадку коли $f_1 < 0$, тобто $\vec{E}^2 > \vec{B}^2$, ми маємо $L \approx |e||f_1|^{1/2}$ і $M \approx |e|(\frac{f_2^2}{|f_1|})^{1/2}$. Використовуючи рівняння (1.112,(1.114) і (1.116), знаходимо

$$g_{cr} \geq \frac{1}{1 - \frac{L\pi}{2\Lambda^2} + \frac{M^2}{3\Lambda^2}(\frac{\pi}{2L} - 1/\Lambda^2) - \frac{M}{\Lambda^2}\ln 2} \approx \frac{1}{1 - \frac{\pi|e||f_1|^{1/2}}{2\Lambda^2} - \frac{|e|}{\Lambda^2}(\frac{f_2^2}{|f_1|})^{1/2}\ln 2}. \tag{1.118}$$

Очевидно, що критична константа зв'язку (1.118) для $f_2 \neq 0$ є більшою від

$$g_{cr}^{(0)} = \frac{1}{1 - \frac{\pi|e||f_1|^{1/2}}{2\Lambda^2}}$$

у випадку нульового значення другого інваріанта постійного електромагнітного поля $f_2 = 0$. Якщо f_2 прямує до нуля, наша оцінка співпадає з результатом [175] у випадку чисто електричного поля.

Таким чином, в усіх розглянутих нами випадках наявність другого інваріанта електромагнітного поля $\vec{E} \cdot \vec{B}$ протидіє динамічному порушенню кіральної симетрії. В магнітному випадку цей результат виглядає цілком природним. Очевидно, якщо $f_2 \neq 0$, тоді електричне поле відмінне від нуля $\vec{E} \neq 0$ і ми знаємо, що електричне поле протидіє динамічному порушенню кіральної симетрії. Однак в електричному випадку отриманий нами результат здається неприродним. Дійсно припустимо, що $\vec{E} \neq 0, \vec{B} = 0$ (тоді $f_2 = 0$). Тепер здається цілком природньо вважати, що g_{cr} повинна зменшуватися для $f_2 \neq 0$ тому, що відмінність f_2 від нуля означає, що $\vec{B} \neq 0$, а ми знаємо, що магнітне поле сприяє динамічному порушенню кіральної симетрії. Зрозуміти отриманий нами результат можливо наступним чином. Ми досліджуємо залежність критичної константи зв'язку від другого інваріанта і тому залишаємо значення першого інваріанту $\vec{B}^2 - \vec{E}^2$ незмінним. Без втрати загальності, припустимо, що $\vec{E} \parallel \vec{B}$ (якщо це не так, то ми завжди можемо зробити необхідне

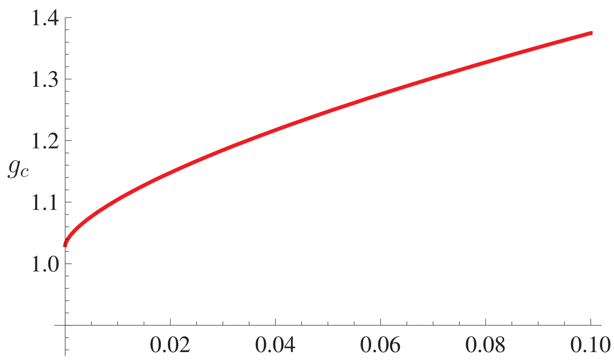


Рис. 1.3. Критична константа зв'язку як функція другого інваріанта постійного електромагнітного поля в електричному випадку $\vec{E}^2 > \vec{B}^2$.

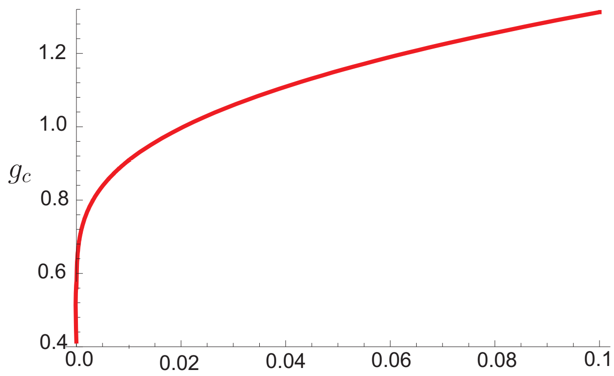


Рис. 1.4. Критична константа зв'язку як функція другого інваріанта постійного електромагнітного поля в магнітному випадку $\vec{B}^2 > \vec{E}^2$.

перетворення Лоренца). Тепер, якщо ми збільшуємо f_2, тоді для того, щоб залишити незмінним перший інваріант ми повинні збільшити як магнітне $\vec{B}$, так і електричне $\vec{E}$ поля. Як випливає з отриманих нами формул, збільшення значення електричного поля має більший вплив на динамічне порушення кіральної симетрії.

Ми знайшли досить грубу аналітичну оцінку для критичної константи зв'язку. Для того, щоб знайти більш точну залежність g_{cr} від f_2, ми чисельно обчислимо інтеграл в рівнянні (1.110) і зображемо графічну залежність g_{cr} від f_2 в електричному випадку на Рис. 1.3 (цей рисунок відповідає $\frac{f_1}{\Lambda^4} = -10^{-4}$) та Рис. 1.4 ($\frac{f_1}{\Lambda^4} = 10^{-4}$) в магнітному випадку. Ми бачимо з цих рисунків, що критична константа зв'язку зростає із збільшенням f_2 для будь-якого f_1. В електричному випадку g_{cr} завжди більше від одиниці. В магнітному випадку g_{cr} прямує до нуля для $f_2 \to 0$. Ми також чисельно знайшли g_{cr} у випадку коли перший інваріант дорівнює нулю $f_1 = 0$ ($|\vec{E}| = |\vec{B}|$) і отримали залежність яка подібна до залежності в електричному випадку, тобто g_{cr} зростає із збільшенням f_2. Таким чином, чисельний аналіз підтверджує, що другий інваріант електромагнітного поля протидіє динамічному порушенню кіральної симетрії.

РОЗДІЛ 2

ЕФЕКТИВНА НЕКОМУТАТИВНА ДИНАМІКА НА НАЙНИЖЧОМУ РІВНІ ЛАНДАУ В РЕЛЯТИВІСТСЬКИХ КВАНТОВИХ ТЕОРІЯХ ПОЛЯ

У Вступі і в попередньому розділі ми розглянули вплив зовнішнього постійного магнітного поля на динамічне порушення симетрії пов'язане з явищем магнітного каталізу. Між тим існує іще один дуже цікавий аспект пов'язаний з динамікою квантових теорій у сильному постійному магнітному полі, який стосується ефективної некомутативності таких теорій на найнижчому рівні Ландау. В квантово-механічних системах в постійному магнітному полі некомутативність просторових координат в площині перпендикулярній до напрямку магнітного поля виникає ефективно при низьких енергіях для динаміки ферміонів на найнижчому рівні Ландау (вона з'являється коли ми нехтуємо переходами на вищі рівні Ландау). Між тим в квантовій теорії поля цілком можливо використати некомутативність координат як фундаментальний постулат. Ця ідея вперше була запропонована Гайзенбергом з метою звільнення квантовопольових теорії від присутніх в них ультрафіолетових розбіжностей. Суть ідеї дуже проста. Нагадаємо, що квантова механіка вирішила проблему стабільності атомів постулюючи некомутативність координат та імпульсів частинок. В квантовій електродинаміці та інших релятивістських квантових теоріях поля існують розбіжності пов'язані з динамікою теорії на малих відстанях. Таким чином, пропонуючи некомутативність координат як засіб регуляризації розбіжностей КТП на малих відстаннях Гайзенберг використав гіпотезу, яка ґрунтується на історичному досвіді квантової механіки.

Першою публікацією в якій некомутативна квантова теорія поля розглядалась як теорія з ефективним ультрафіолетовим параметром обрізання була стаття Снайдера [178], в якій для координат теорії були постульовані наступні комутаційні співвідношення $[x_i, x_j] = i\theta_{ij}$, де θ_{ij} - деяка постійна антисиметрична матриця. Зрозуміло, що в такій теорії для процеса вимірювання координат мають місце співвідношення невизначенностей $\Delta x_i \Delta x_j = |\theta_{ij}|/2$, які подібні знаменитим співвідношенням Гайзенберга для імпульсів і координат в квантовій механіці. Таким чином, в таких некомутативних теоріях звичні нам уявлення про простір і час справедливі лише на масштабах, які перевищують $\Lambda \sim \sqrt{\theta}$. В результаті природньо очікувати, що масштаб Λ буде ефективним параметром обрізання в некомутативній теорії і ультрафіолетові розбіжності будуть відсутними в таких теоріях. Стаття Снайдера була опублікована в 1947 році, але незабаром була розроблена теорія перенормувань і створена КЕД в її сучасній формі, в результаті чого інтерес до некомутативних теорій обумовлений можливістю регуляризації ультрафіолетових розбіжностей звичайних комутативних теоріях поля згас.

Слід зазначити, що інтерес до некомутативних теорій пов'язан також з розвитком теорій квантової гравітації [179, 180]. В таких теоріях природньо очікувати, що сильні квантові флуктуації метрики на планківських масштабах змінюють наші звичні представлення про простір і час, які базуються на класичних уявленнях. Натомість вважається, що простір-час на таких масштабах скоріше потрібно уявляти в формі просторово-часової піни, а тому виміряти якимось чином відстані менші ніж планківський масштаб неможливо. Звичайно достеменно невідомо, що відбувається на таких масштабах, але ідея некомутативності координат певним чином моделює неможливість вимірювання масштабів менших від деякого. Із зростанням в останні десятиліття минулого століття інтересу до створення теорії квантової гравітації увага до некомутативних квантових теорій поля збільшилась і розвиток цих теорій значно пришвидшився.

В 80-тих і 90-тих роках минулого століття теорія струн [181, 182, 183], як теорія квантової гравітації і взагалі як теорія усіх спостережуваних взаємодій і частинок, набула дуже широкого розвитку. Теорія струн на фундаментальному рівні є нелокальною теорію і в цьому аспекті нагадує некомутативні КТП. Більш того, в літературі було прямо показано, що теорія струн в деякій границі відповідає некомутативним калібрувальним квантовим теоріям поля [184, 185].

Однією з головних відмінностей між звичайними комутативними і некомутативними квантовими теоріями поля виявилася проблема так званого УФ/ІЧ змішування [186]. Ця проблема пов'язана з тим, що ультрафіолетові розбіжності у відповідній комутативній теорії трансформуються в некомутативній теорії в інфрачервоні розбіжності. Тому, як наслідок УФ/ІЧ змішування, динаміка некомутативних теорій суттєво відрізняється від динаміки комутативних теорій.

В першому параграфі цього розділу ми нагадаємо яким чином виникає ефективна некомутативність координат на найнижчому рівні Ландау в квантовій механіці і опишемо пов'язану з цією некомутативністю так звану підстановку Пайерлса. Також ми покажемо, що низькоенергетична динаміка нейтральних намбу-голдстоунівських збуджень в моделі Намбу–Йона-Лазініо у зовнішньому постійному магнітному полі описується деякою ефективною некомутативною квантовою теорією поля. У другому параграфі ми обчислимо ефективну дію для фотонів в квантовій електродинаміці в сильному магнітному полі і покажемо, що в наближенні найнижчого рівня Ландау така теорія є також деякою ефективною некомутативною квантовою теорією. В третьому параграфі ми дослідимо динаміку намбу-голдстоунівських бозонів в КЕД у сильному магнітному полі і покажемо, що вона описується некомутативними теоріями досить складного типу з вершинами взаємодії, які містять нелокальні форм-фактори.

2.1. Зовнішне магнітне поле і ефективні некомутативні квантові теорії поля

В попередньому параграфі ми розглянули ДПС в зовнішньому магнітному полі. В цьому параграфі ми спершу розглянемо нерелятивістську задачу Ландау для руху зарядженої частинки у зовнішньому постійному магнітному полі, нагадаємо яким чином виникає в ній ефективна некомутативність координат центра ларморівських орбіт, а також розглянемо пов'язану з цією некомутативністю підстановку Пайерлса. Потім використовуючи модель Намбу–Йона-Лазініо в зовнішньому постійному магнітному полі ми покажемо, що ефективна некомутативна динаміка виникає також і в релятивістських квантовопольових теорій в сильному магнітному полі.

2.1.1. Ефективна некомутативність на найнижчому рівні Ландау в квантовій механіці. Добре відомо, що координати центра орбіти для руху заряджених частинок в постійному магнітному полі не комутують в квантовій механіці [190]. Доведемо цей факт досліджуючи рівняння Шредінгера для електрона в постійному магнітному полі. В калібровці $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ згідно [190] рівняння Шредінгера має наступний вигляд

$$\frac{1}{2m}\left[(-i\hbar\partial_x + \frac{eB}{c}y)^2 - \hbar^2\partial_y^2 - \hbar^2\partial_z^2\right]\psi = E\psi\,. \tag{2.1}$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_z z)}\chi(y)\,.$$

Для $\chi(y)$ маємо наступне рівняння

$$\chi'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left[\left(E - \frac{p_z^2}{2m}\right) - \frac{m\omega_c^2(y-y_0)^2}{2}\right]\chi = 0\,, \tag{2.2}$$

де $y_0 = -cp_x/eB$ і

$$\omega_c = \frac{eB}{mc} \tag{2.3}$$

є циклотронною частотою. Рівняння (2.2) по формі співпадає з рівнянням Шредінгера для гармонічного осцилятора, тому ми можемо відразу знайти відповідний спектр, який відомий як спектр Ландау

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c + \frac{p_z^2}{2m}\,, \qquad n = 0, 1, ... \tag{2.4}$$

Власні функції, які відповідають рівням Ландау (2.4) мають наступний вигляд

$$\chi_n(y) = \frac{1}{n^{1/4}\sqrt{2^n l\, n!}} e^{-(y-y_0)^2/2l^2}\, H_n(\frac{y-y_0}{l})\,, \tag{2.5}$$

де $H_n(x)$ - поліноми Ерміта, а $l = \sqrt{\hbar c/eB}$ - магнітна довжина.

В класичній фізиці рух заряджених частинок в площині перпендикулярній магнітному полю (площина xy) відбувається по колу з нерухомим центром (відповідні орбіти відомі як ларморівські). Величина $y_0 = -cp_x/eB$, яка зберігається в квантовій задачі, відповідає класичній y-координаті центра окружності. Зберігається також величина $x_0 = cp_y/eB + x$ (легко перевірити, що ця відповідний оператор комутує з гамільтоніаном). Ця величина відповідає класичній x-координаті окружності. Легко пересвідчитись, що в квантовій теорії оператори $\hat{y}_0$ і $\hat{x}_0$ не комутують і, як наслідок, не можуть мати одночасно власних значень. Таким чином, ми довели, що оператори, які відповідають координатам центра орбіти для класичного руху заряджених частинок в постійному магнітному полі є некомутуючими операторами в квантовій механіці.

Некомутативність координат центра орбіти призводить до відомої підстановки Пайерлса в нерелятивістській квантовій механіці (дивись, наприклад, [191]). Ця підстановка стосується обчислення поправки до енергії зарядженої частинки маси m, яка рухається в площині xy в сильному магнітному полі B в потенціалі $V(x,y)$. При цьому рух вздовж вісі z (вздовж напрямку магнітного поля) ігнорується і потенціал V вважається достатньо слабким, так що можна знехтувати переходами між найнижчим і вищими рівнями Ландау. На перший погляд подальші дії в такій ситуації є досить прямими, а саме для того, щоб знайти рівні енергії в такій задачі необхідно використати квантовомеханічну теорію збурень для вироджених станів. Однак найнижчий рівень Ландау є не просто виродженим, а нескінченнократно вироджений [190]. Це означає, що відповідний детермінант квантовомеханічної теорії збурень для станів з виродженим спектром в загальному випадку є детермінантом нескінченного порядка, а тому незрозуміло, як його обчислити.

Підстановка Пайерлса дозволяє обчислити поправку до енергії частинки на найнижчому рівні Ландау

$$E = \frac{\hbar|eB|}{2mc} + \epsilon_n,$$

де ϵ_n знаходиться з рівняння

$$V(x, y)|n >= \epsilon_n|n >, \tag{2.6}$$

в якому координати x і y не комутують (!)

$$[x, y] = -i\frac{\hbar c}{eB}. \tag{2.7}$$

Довгий час підстановка Пайерлса залишалась чисто феноменологічним прийомом і було незрозуміло чому потрібно вважати координати x і y некомутуючими. В роботі [192] було показано, що підстановка Пайерлса пов'язана з появою ефективної некомутативності на НРЛ. Покажемо яким чином вона виникає. Для цього розглянемо заряджену частинку в площині xy в постійному магнітному полі перпендикулярному до цієї площини і яка знаходиться в потенціалі $V(x, y)$, який залежить від x і y координат. Лагранжіан цієї задачі має вигляд

$$L_m = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{eB\vec{r} \times \dot{r}}{2} - V(\vec{r}), \tag{2.8}$$

де $\vec{r} = (x, y)$. Якщо потенціал $V(\vec{r})$ відсутній, то спектр відповідної квантової задачі добре відомий і визначається рівнями Ландау. Найнижчий рівень має енергію $|eB|/2m$, а вищі рівні відділені щілиною $|eB|/m$. Тому, якщо магнітне поле $B \to \infty$, то тільки найнижчий рівень Ландау є важливим для динаміки системи. Очевидно, що ми можемо еквівалентно вважати, що маса частинки $m \to 0$. В цій границі перший член в лагранжіані (2.8) зникає і редукований лагранжіан приймає вигляд

$$L_0 = \frac{eB\vec{r} \times \dot{r}}{2} - V(\vec{r}). \tag{2.9}$$

Тоді, як легко пересвідчитись використовуючи лагранжіан (2.9) канонічні комутаційні співвідношення $[p_i, r_j] = -i\hbar\delta^{ij}$ зводяться до

$$[r_i, r_j] = i\frac{\hbar c}{eB}\epsilon_{ij}, \tag{2.10}$$

де ϵ_{ij} - повністю антисиметричний тензор. Рівняння (2.10) означають, що координати x і y ефективно стають некомутативними якщо при обчисленні енергії збурення обумовленої потенціалом $V(x, y)$ ми знехтуємо вкладом вищих рівнів Ландау. Цей результат пояснює чому підстановка Пайерлса дає правильну відповідь.

Таким чином, ми бачимо, що некомутативність в квантомеханічних задачах в сильному зовнішньому магнітному полі виникає ефективно при низьких енергіях і зникає при високих енергіях. З іншого боку можливо розглядати некомутативність координат як фундаментальний постулат. Такі теорії відомі як некомутативні КТП (дивись обзорні роботи [193, 194]).

2.1.2. Ефективна некомутативність в моделі Намбу–Йона-Лазініо у зовнішньому постійному магнітному полі.

В цьому параграфі ми розглянемо динаміку (3+1)-вимірної моделі НЙЛ в сильному зовнішньому магнітному полі в наближенні НРЛ і покажемо, що вона визначає деяку ефективну некомутативну квантову теорію поля. В роботі [83] ми показали, що цей результат узагальнюється також на випадок просторів-часі довільної розмірності $D+1$ для $D \geq 2$. Лагражіан моделі НЙЛ в (3+1)-вимірному просторі-часі визначається рівнянням (1.87) для $D = 3$. Векторний потенціал A_μ описує постійне магнітне поле B направлене вздовж вісі $+x^3$.

Ми розглянемо динаміку нейтральних зв‘язаних станів в цій моделі в $1/N$ наближенні. Головне динамічне явище в цій моделі пов‘язано з магнітним каталізом і генерацією щілини [68, 69]. Нейтральні ступені вільності описуються складеними полями $\sigma \sim \bar{\psi}\psi$ і $\pi \sim \bar{\psi}i\gamma_5\psi$. Останнє поле є безмасовим намбу-голдстоунівським бозоном пов'язаним з динамічним порушенням кіральної $U_L(1) \times U_R(1)$ симетрії теорії. Відповідна ефективна дія для цих нейтральних полів має вигляд

$$\Gamma(\sigma, \pi) = -iTr\mathrm{Ln}\left(i\gamma^\mu D_\mu - (\sigma + i\gamma^5\pi)\right) - \frac{N}{2G}\int d^4x(\sigma^2 + \pi^2). \qquad (2.11)$$

Згідно з [69] рівняння для щілини $< 0|\sigma|0 >= m$ має нетрівіальний розв'язок для довільного позитивного значення константи зв‘язку G. В режимі слабкої взаємодії коли $g \equiv G\Lambda^2/4\pi^2 \ll 1$ динамічна маса дорівнює $m^2 = \Lambda^2 e^{-\frac{\Lambda^2}{|eB|g}}$, де Λ - ультрафіолетовий параметр обрізання пов‘язаний з імпульсами $k_\parallel = (k^0, k^3)$ (ми вважаємо, що $\Lambda^2 \gg |eB|$).

Некомутативність координат проявляється в присутності в ефективній дії експоненційних по похідних операторів [193, 194]. При знаходженні динамічної маси нам достатньо вважати, що поле $\sigma = const$. Однак, для того, щоб з‘ясувати чи має місце в квантовій теорії поля в сильному зовнішньому магнітному полі ефективна некомутативність як це відбувається в квантовомеханічній задачі ми повинні обчислити вершини взаємодії полів враховуючи всі степені похідних, тому що саме присутність експоненційних по похідним операторів в ефективній дії свідчить про некомутативність координат в теорії. В досліджуємій теорії це зробити нескладно. Наприклад, трьохточкова вершина взаємодії полів $\tilde{\sigma} = \sigma - m$ і π визначається наступним рівнянням

$$\Gamma_{\tilde{\sigma}\pi\pi} = \int d^4xd^4yd^4ztr[S(x,y)\gamma^5\pi(y)S(y,z)\gamma^5\pi(z)S(z,x)\tilde{\sigma}(x)], \qquad (2.12)$$

де $S(x, y)$ є пропагатор найнижчого рівня Ландау [69]

$$S(x, y) = e^{\frac{i}{2}(x-y)^\mu A_\mu^{ext}(x+y)}\tilde{S}(x - y) \qquad (2.13)$$

і перетворення Фур'є трансляційно інваріантної частини пропагатора $\tilde{S}$ дорівнює

$$\tilde{S}(k) = i\, e^{-\frac{k_\perp^2}{|eB|}}\, \frac{k^0\gamma^0 - k^3\gamma^3 + m}{k_0^2 - k_3^2 - m^2}\, (1 - i\gamma^1\gamma^2 \mathrm{sign}(eB))\,, \tag{2.14}$$

де $k_\perp = (k^1, k^2)$. Перший множник в (2.13) відомий як швінгерівська фаза [176]. Цей множник порушує просторову трансляційну симетрію теорії в постійному магнітному полі, але, як показано в роботі [195], в цій задачі існує група магнітних трансляцій чиї генератори на відміну від генераторів звичайних трансляцій не комутують. Як ми побачимо пізніше саме швінгерівська фаза є відповідальною за появу некомутативності в ефективній дії. Значення фази $\phi = \frac{i}{2}(x-y)^\mu A_\mu^{ext}(x+y)$ залежить від вибору калібровки для векторного потенціалу зовнішнього магнітного поля. В симетричній калібровці вона дорівнює

$$\phi_{sym} = \frac{ieB}{2}\epsilon^{ab}x^a y^b, \qquad a, b = 1, 2 \tag{2.15}$$

де ϵ^{ab} - повністю антисиметричний тензор. Хоча швінгерівська фаза залежить від калібровки, як легко переконатись, повна фаза вздовж замкнутої ферміонної петлі в (2.12) є калібровочно інваріантною, тобто не залежить від калібровки.

Покажемо тепер, що в режимі домінування найнижчого рівня Ландау ефективна дія (2.11) описує деяку некомутативну квантову теорію поля з некомутативними координатами $\hat{x^a}$

$$[\hat{x^a}, \hat{x^b}] = i\frac{1}{eB}\epsilon^{ab} \equiv i\theta^{ab}. \tag{2.16}$$

Розпочнемо наш аналіз із спостереження, що пропагатор для найнижчого рівня Ландау (2.13) факторизується на дві частини, а саме частину, яка залежить від поперечних координат $x_\perp = (x^1, x^2)$ і частину, яка залежить від повздовжних координат $x_\parallel = (x^0, x^3)$

$$S(x, y) = P(x_\perp, y_\perp)\, S_\parallel(x_\parallel - y_\parallel). \tag{2.17}$$

Приймаючи до уваги рівняння (2.13), (2.14) і (2.15), в симетричній калібровці ми маємо

$$P(x_\perp, y_\perp) = \frac{|eB|}{2\pi}\, e^{\frac{ieB}{2}\epsilon^{ab}x^a y^b}\, e^{-\frac{|eB|}{4}(\vec{x}_\perp - \vec{y}_\perp)^2} \tag{2.18}$$

і

$$S_\parallel(x_\parallel - y_\parallel) = \int \frac{d^2k_\parallel}{(2\pi)^2} e^{ik_\parallel(x^\parallel - y^\parallel)} \frac{i}{k_\parallel\gamma^\parallel - m}\, \frac{1 - i\gamma^1\gamma^2 \mathrm{sign}(eB)}{2}. \tag{2.19}$$

Далі $S_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)$ є не що інше як ферміонний пропагатор (1+1)-вимірної вільної теорії. Зокрема, матриця $(1 - i\gamma^1\gamma^2\mathrm{sign}(eB))/2$ є проектором на ферміонні (антиферміонні) стани із спіном поляризованим вздовж (проти) магнітного поля. Оператор $P(x_\perp, y_\perp)$, як легко перевірити, задовольняє рівнянню

$$\int d^2y^\perp P(x^\perp, y^\perp)\, P(y^\perp, z^\perp) = P(x^\perp, z^\perp) \tag{2.20}$$

і тому є проектором.

Факторизація пропагатора на НРЛ призводить до доволі простої структури вершин взаємодії для полів π і $\tilde{\sigma}$. Дійсно, як випливає з рівняння (2.12) для трьохчастинкової функції перехід до Фур'є перетворень для полів робить інтегрування по повздовжним і поперечним змінним повністю незалежними. В силу того, що $S_\parallel(x_\parallel - y_\parallel)$ є $(1+1)$-вимірним пропагатором, інтегрування по $x_\parallel$ координатам зводиться до ферміонної петлі в (1+1)-вимірному просторі. Очевидно, що теж саме справедливо для вершин взаємодії вищого порядку, які випливають з дії (2.11). Таким чином, залежність вершин взаємодії від $k_\parallel$ імпульсів є стандартною і тому для того щоб уникнути непотрібних ускладнень ми покладемо усі зовнішні продольні імпульси рівними нулю, тобто будемо вважати, що поля π і $\tilde{\sigma}$ не залежать від координат $x_\parallel$. Більш загальний випадок полів, які залежать від $x_\parallel$ координат був розглянутий нами в роботі [83].

Підставляючи Фур'є образи полів $\pi(x_\perp)$ і $\tilde{\sigma}(x_\perp)$ в (2.12) і використовуючи рівняння (2.17), (2.18) і (2.19), ми знаходимо трьохчастинкову вершину взаємодії $\Gamma_{\tilde{\sigma}\pi\pi}$ в імпульсному просторі

$$\Gamma_{\tilde{\sigma}\pi\pi} = -\frac{N|eB|}{m} \int d^2x_\parallel \int \frac{d^2k_1 d^2k_2 d^2k_3}{(2\pi)^6} \pi(k_1)\pi(k_2)\tilde{\sigma}(k_3)\, \delta^2(k_1 + k_2 + k_3)$$

$$\times\ e^{-\frac{k_1^2+k_2^2+k_3^2}{4|eB|}} \exp[-\frac{i}{2}(k_1\times k_2+k_1\times k_3+k_2\times k_3)], \tag{2.21}$$

де $k_i\times k_j = k_i^a\theta^{ab}k_j^b \equiv k_i\theta k_j$, $\theta^{ab} = \frac{1}{eB}\epsilon^{ab}$ (ми також опустили індекс $\perp$ для поперечних координат). Зауважимо, що завдяки присутності експоненційних факторів ультрафіолетові розбіжності відсутні.

Згідно з [193, 194] n-частинкова вершина взаємодії в некомутативній теорії в імпульсному просторі має наступний вигляд

$$\int \frac{d^Dk_1}{(2\pi)^D}...\frac{d^Dk_n}{(2\pi)^D}\phi(k_1)...\phi(k_n)\delta^D(\sum_i k_i)e^{-\frac{i}{2}\sum_{i<j}k_i\times k_j}, \tag{2.22}$$

де ϕ є деяке поле, а експонента $e^{-\frac{i}{2}\sum_{i<j}k_i\times k_j} \equiv e^{-\frac{i}{2}\sum_{i<j}k_i\theta k_j}$ є так званим мойялівським фактором. Порівнюючи (2.21) і (2.22) ми бачимо, що за винятком множника $e^{-\frac{k_1^2+k_2^2+k_3^2}{4|eB|}}$ вершина взаємодії $\Gamma_{\tilde{\sigma}\pi\pi}$ співпадає із стандартною вершиною взаємодії некомутативної теорії з комутатором $[\hat{x^a},\hat{x^b}] = i\theta^{ab} = \frac{i}{eB}\epsilon^{ab}$. Для того, щоб врахувати вищезгаданий додатковий множник в вершині, ми визначимо нові поля

$$\Pi(x) = e^{\frac{\nabla_\perp^2}{4|eB|}}\pi(x),\ \Sigma(x) = e^{\frac{\nabla_\perp^2}{4|eB|}}\sigma(x), \tag{2.23}$$

де $\nabla_\perp^2$ - оператор Лапласа. В термінах цих нових полів вершина взаємодії може бути переписана в стандартній формі з мойялівським фактором

$$\Gamma_{\tilde{\Sigma}\Pi\Pi} = -\frac{N|eB|}{m}\int d^2x_{||}\int\frac{d^2k_1d^2k_2d^2k_3}{(2\pi)^6}\Pi(k_1)\Pi(k_2)\tilde{\Sigma}(k_3)\,\delta^2(\sum_i k_i)\,e^{-\frac{i}{2}\sum_{i<j}k_i\times k_j}. \tag{2.24}$$

Для чотирьохчастинкової вершини взаємодії $\Gamma_{4\Pi}$ ми маємо

$$\Gamma_{4\Pi} = -\frac{N|eB|}{4m^2}\int d^2x_{||}\int\frac{d^2k_1d^2k_2d^2k_3d^2k_4}{(2\pi)^8}\Pi(k_1)\Pi(k_2)\Pi(k_3)\Pi(k_4)$$
$$\times\delta^2(\sum_i k_i)\,\exp[-\frac{i}{2}\sum_{i<j}k_i\times k_j]. \tag{2.25}$$

Як добре відомо [193, 194], наявність мойялівського фактора для добутку полів в імпульсному просторі відповідає в координатному просторі так званому стар добутку

$$(\Phi * \Phi)(x) = e^{\frac{i}{2}\theta^{ab}\frac{\partial}{\partial y^a}\frac{\partial}{\partial z^b}}\Phi(y)\Phi(z)|_{y=z=x}, \tag{2.26}$$

де Φ представляє поля Π і Σ. Використовуючи стар добуток ми можемо переписати вершини взаємодії $\Gamma_{\tilde{\Sigma}\Pi\Pi}$ і $\Gamma_{4\Pi}$ в наступній формі в координатному просторі

$$\Gamma_{\tilde{\Sigma}\Pi\Pi} = -\frac{N|eB|}{4\pi^2 m}\int d^2x_{||}d^2x_{\perp}\ \tilde{\Sigma} * \Pi * \Pi\,,$$
$$\Gamma_{4\Pi} = -\frac{N|eB|}{16\pi^2 m^2}\int d^2x_{||}d^2x_{\perp}\ \Pi * \Pi * \Pi * \Pi. \tag{2.27}$$

Вершини взаємодії можна також переписати в просторі з некомутуючими координатами $\hat{x^a}$ використовуючи вейлівські символи поля Φ [193, 194]

$$\hat{\Phi}(\hat{x}) \equiv \hat{W}[\Phi] = \int d^Dx\, \Phi(x)\, \hat{\Delta}(x), \qquad \hat{\Delta}(x) \equiv \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} e^{ik_a\hat{x}^a}\, e^{-ik_a x^a}. \tag{2.28}$$

Найбільш важлива властивість вейлівського символу є те, що добуток вейлівських символів двох функцій дорівнює вейлівському символу їх стар добутку

$$\hat{W}[\Phi_1]\,\hat{W}[\Phi_2] = \hat{W}[\Phi_1 * \Phi_2]. \tag{2.29}$$

В нашому випадку вейлівський символ $\hat{\Phi}$ представляє $\hat{\Pi}$ і $\hat{\tilde{\Sigma}}$. Відзначимо, що має місце наступне співвідношення між вейлівськими символами нових і початкових полів

$$\hat{\Phi}(\hat{x}) = e^{\frac{\hat{\nabla}_\perp^2}{4|eB|}}\,\hat{\phi}(\hat{x}), \tag{2.30}$$

де дія оператора $\hat{\nabla}_\perp^2$ в некомутативному просторі визначена наступним чином

$$\hat{\nabla}_\perp^2\,\hat{\phi}(\hat{x}) = -(eB)^2\sum_{a=1}^{2}[\hat{x}^a, [\hat{x}^a, \hat{\phi}(\hat{x})]]\,. \tag{2.31}$$

В термінах $\hat{\Phi}$, трьох- і чотирьохчастинкові вершини взаємодії в некомутативній КТП мають наступну форму

$$\Gamma_{\tilde{\Sigma}\Pi\Pi} = -\frac{N|eB|}{4\pi^2 m}\int d^2x_{||}\mathbf{Tr}\,\hat{\tilde{\Sigma}}\hat{\Pi}^2\,,$$

$$\Gamma_{4\Pi} = -\frac{N|eB|}{16\pi^2 m^2} \int d^2x_{||} \mathbf{Tr}\, \hat{\Pi}^4\,, \tag{2.32}$$

де операція **Tr** визначена як в [193, 194]. Ми показали в роботі [83], що всі вершини взаємодії $\Gamma_{n\Phi}$ $(n \geq 3)$, які випливають з (2.11), мають подібну структуру і ефективна дія дорівнює

$$\Gamma = -\frac{N|eB|}{8\pi^2} \int d^4x \left([\Sigma^2 + \Pi^2]\, [\ln(\frac{\Sigma^2 + \Pi^2}{\Lambda^2}) - 1] + \frac{4\pi^2}{G|eB|}(\sigma^2 + \pi^2) \right)_* , \tag{2.33}$$

де ми використали той факт, що стар добуток зводиться до звичайного добутку для квадратичної частини дії. Зауважимо, що початкові поля σ і π пов'язані з новими полями за допомогою нелокального перетворення (2.23). Ми покажемо нижче, що це призводить до появи експоненційно ріжучих факторів $\exp(-k_\perp^2/2|eB|)$ в пропагаторах і саме присутність цих факторів вирішує проблему так званого УФ/ІЧ змішування, яке присутне в звичайних некомутативних теоріях [193, 194]. Використовуючи рівняння (2.29) ми переписуємо ефективну дію в термінах вейлівських символів

$$\Gamma = -\frac{N|eB|}{8\pi^2} \int d^2x_{||} \mathbf{Tr} \left([\hat{\Sigma}^2 + \hat{\Pi}^2]\, [\ln(\frac{\hat{\Sigma}^2 + \hat{\Pi}^2}{\Lambda^2}) - 1] + \frac{4\pi^2}{G|eB|}(\hat{\sigma}^2 + \hat{\pi}^2) \right). \tag{2.34}$$

Нескладно знайти аналоги виразів (2.33) і (2.34) у випадку коли поля π і $\tilde{\sigma}$ залежать також від продольних координат. По-перше, як випливає з розкладу першого члену в дії (2.11) в ряд по π і $\tilde{\sigma}$, n-частинкова вершина дорівнює

$$\Gamma_{n\phi} = -\frac{(-i)^{n+1}N}{n} \int d^2x_1^\perp ... d^2x_n^\perp\, d^2x_1^{||} ... d^2x_n^{||} P(x_1^\perp, x_2^\perp) ... P(x_n^\perp, x_1^\perp)$$

$$\times \mathrm{tr} \left[S_{||}(x_1 - x_2)(\tilde{\sigma}(x_2) + i\gamma^5\pi(x_2)) ... S_{||}(x_n - x_1)(\tilde{\sigma}(x_1) + i\gamma^5\pi(x_1)) \right]. \tag{2.35}$$

Далі легко бачити, що ефективна дія в формі стар добутку дорівнює

$$\Gamma = \frac{N|eB|}{2\pi} \int d^2x_\perp \left[-iTr_{||} \left[\mathcal{P}\, \mathrm{Ln} \left(i\gamma^{||}\partial_{||} - (\Sigma + i\gamma^5\Pi) \right) \right] \right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{G|eB|} \int d^2x_{||} (\sigma^2 + \pi^2) \right]_* , \tag{2.36}$$

а в некомутативному просторі має наступний вигляд

$$\Gamma = \frac{N|eB|}{2\pi}\mathbf{Tr}\left[-iTr_{||}\left[\mathcal{P}\,\mathrm{Ln}\left(i\gamma^{||}\partial_{||} - (\hat{\Sigma} + i\gamma^5\hat{\Pi})\right)\right] - \frac{\pi}{G|eB|}\int d^2x_{||}(\hat{\sigma}^2 + \hat{\pi}^2)\right] \tag{2.37}$$

(порівняй з рівняннями (2.33) і (2.34) відповідно), а $\mathcal{P}$ є проектор

$$\mathcal{P} \equiv \frac{1 - i\gamma^1\gamma^2\mathrm{sign}(eB)}{2}. \tag{2.38}$$

Покажемо тепер, що ефективна некомутативна теорія, яка виникає для нейтральних збуджень НЙЛ моделі в сильному магнітному полі не має проблем пов‘язаних з УФ/ІЧ змішуванням, яке присутне в звичайних некомутативних теоріях [193, 194]. Найпростіший приклад УФ/ІЧ змішування пов‘язан з однопетльовою поправкою до пропагатора в некомутативній ϕ^4 моделі чия дія має наступний вигляд

$$S = \int d^4x\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2\phi^2}{2} - \frac{g^2}{4!}\phi*\phi*\phi*\phi\right). \tag{2.39}$$

Однопетльова поправка до пропагатора поля ϕ в цій моделі має планарну і непланарну частини [186]

$$\Gamma^{(2)}_{nc} = \Gamma^{(2)}_{pl} + \Gamma^{(2)}_{npl} = \frac{g^2}{3(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2+m^2} + \frac{g^2}{6(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2+m^2}e^{ik\times p}. \tag{2.40}$$

Непланарний вклад є специфічним для некомутативної теорії і призводить до УФ/ІЧ змішування. Непланарний вклад дорівнює

$$\Gamma^{(2)}_{npl} = \frac{g^2}{96\pi^2}(\Lambda^2_{eff} - m^2\ln(\frac{\Lambda^2_{eff}}{m^2}))\,, \tag{2.41}$$

де

$$\Lambda^2_{eff} = \frac{1}{1/\Lambda^2 - p^i\theta^2_{ij}p^j}$$

і Λ є параметр ультрафіолетового обрізання. Очевидно, що якщо зовнішній імпульс прямує до нуля $p \to 0$, то непланарний вклад (2.41) квадратично розбігається. З іншого боку, для ненульового p, цей вклад є скінченним завдяки присутності мойялівського фазового фактора $e^{ik\times p}$ в другому доданку рівняння (2.40), який швидко осцилює при великих k. Таким чином, хоча мойялівський фактор регуляризує УФ розбіжність, він призводить до появи ІЧ розбіжності інтеграла. В такій ситуації говорять про УФ/ІЧ змішування.

Покажемо, що присутність експоненційно ріжучих факторів в вершинах взаємодії (для полів $\tilde{\sigma}$ і π) або еквівалентно в пропагаторах (для полів Σ і Π) ліквідує УФ/ІЧ змішування. Розглянемо, наприклад, однопетльову поправку до пропагатора поля π, яка генерується чотирьохчастинковою вершиною взаємодії $\Gamma_{4\pi}$. Використовуючи дію (2.11) спочатку знаходимо пропагатор в деревинному наближенні

$$D_{\pi}^{(tree)}(p) \simeq \frac{4\pi^2}{N|eB|[(1-e^{-\frac{p_\perp^2}{2|eB|}})\ln\frac{|eB|}{m^2} + e^{-\frac{p_\perp^2}{2|eB|}}\int_0^1 du \frac{p_\parallel^2 u}{p_\parallel^2 u(1-u)+m^2}]}. \tag{2.42}$$

Далі, використовуючи ефективну дію (2.36), для вершини взаємодії $\Gamma_{4\pi}$ ми отримуємо наступну однопетльову непланарну поправку до пропагатора

$$\frac{N|eB|}{4\pi^3}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-\frac{p_\perp^2+k_\perp^2}{2|eB|}} e^{\frac{i}{eB}(p^1k^2-p^2k^1)} I(p_\parallel,k_\parallel) D_{\pi}^{(tree)}(k), \tag{2.43}$$

де

$$I(p_\parallel,k_\parallel) = \int d^2 l_\parallel \frac{(l_\parallel^2+m^2+l_\parallel\cdot p_\parallel)[(p_\parallel-k_\parallel+l_\parallel)^2+m^2-(p_\parallel-k_\parallel+l_\parallel)\cdot p_\parallel]+p_\parallel^2 m^2}{(l_\parallel^2+m^2)[(p_\parallel+l_\parallel)^2+m^2][(p_\parallel-k_\parallel+l_\parallel)^2+m^2][(l_\parallel-k_\parallel)^2+m^2)]}.$$

Таким чином, має маємо наступний інтеграл по поперечним імпульсам $k_\perp$

$$\int \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} e^{-\frac{p_\perp^2+k_\perp^2}{2|eB|}} e^{\frac{i}{eB}(p^1k^2-p^2k^1)} D_{\pi}^{(tree)}(k). \tag{2.44}$$

Зрозуміло, що завдяки фактору $e^{-k_\perp^2/2|eB|}$ і враховуючи, що $D_\pi^{(tree)}(k)$ прямує до константи для $k_\perp^2 \to \infty$, цей інтеграл збігається для всіх значень $p_\perp$ включаючи $p_\perp = 0$ і тому УФ/ІЧ змішування відсутнє. З іншого боку, якби фактор $e^{-\frac{p_\perp^2+k_\perp^2}{2|eB|}}$ був відсутній в (2.44), ми б отримали інтеграл

$$\int \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} e^{\frac{i}{eB}(p^1k^2-p^2k^1)} D_{\pi}^{(tree)}(k)\,, \tag{2.45}$$

який квадратично розбігається при $p_\perp = 0$, тобто мало б місце УФ/ІЧ змішування. Співвідношення (2.23) між полями π і Π означає, що пропагатори відповідних полів пов‘язані наступним чином

$$D_\Pi(p) = e^{\frac{-p_\perp^2}{2|eB|}} D_\pi(p).$$

Зрозуміло, що хоча в цьому випадку вершини взаємодії для полів Π не містять експоненційно ріжучий фактор $e^{\frac{-p_\perp^2}{2|eB|}}$, цей фактор є присутнім в пропагаторі $D_\Pi^{(tree)}(p)$ і тому знову УФ/ІЧ змішування відсутне.

2.2. Некомутативність і ефективна дія КЕД у зовнішньому магнітному полі

Починаючи з класичних робіт [196, 176], КЕД в сильному магнітному полі була ретельно досліджена. В цьому параграфі ми розглянемо один аспект КЕД в сильному магнітному полі, а саме зв‘язок з некомутативною КЕД. В попередньому параграфі ми показали, що динаміка нейтральних збуджень в моделі НЙЛ в сильному магнітному полі описується ефективною некомутативною теорією. Природньо очікувати, що також існує зв‘язок між КЕД в сильному магнітному полі і некомутативною КЕД. Ми покажемо, що в наближенні найнижчого рівня Ландау електромагнітна $U(1)$ калібрувальна симетрія ферміонного пропагатора трансформується в некомутативну $U(1)_{nc}$ калібрувальну симетрію. В цьому режимі ефективна дія тісно пов‘язана з некомутативною КЕД і тотожності Уорда електромагнітної $U(1)$ калібрувальної симетрії порушені (ми називаємо це явище LLL аномалією). Ми покажемо також, що ефективна дія КЕД в сильному магнітному полі відповідає некомутативній модифікованій КЕД, в якій УФ/ІЧ змішування є відсутнім, так само, як це має місце для НЙЛ моделі в сильному магнітному полі. Ми покажемо також, що LLL аномалія зникає при врахуванні внесків всіх вищих рівнів Ландау і відповідно відновлюється електромагнітна $U(1)$ калібрувальна симетрія. Слід зазначити, що це відновлення відбувається в досить витонченній манері. Хоча внесок кожного окремого вищого рівня Ландау є подавленим в інфрачервоній області, їх сукупний внесок не є подавленим. Це явище, як ми обґрунтуємо нижче, пов'язано з важливою роллю просторової границі на нескінченності. Ми знайдемо також кінематичну область для якої наближення найнижчого рівня Ландау є надійним.

Для того, щоб динаміка КЕД в сильному магнітному полі була під контролем, ми розглянемо теорію з великою кількістю N ароматів ферміонів для якої ми можемо використовувати розклад по $1/N$. Ми також будемо вважати, що m задовольняє умові $m_{dyn} \ll m \ll \sqrt{|eB|}$, де m_{dyn} - динамічна маса ферміонів, яка генерується в кірально симетричній КЕД в постійному магнітному полі [71, 72]. Умова $m_{dyn} \ll m$ гарантує, що легкі псевдо-намбу-голдстоунівські бозони відсутні і єдиними частинками в низькоенергетичній теорії є фотони. Інша умова $m \ll \sqrt{|eB|}$ означає, що магнітне поле є дуже сильним.

Інтегруючи по ферміонам ми знаходимо ефективну дію для фотонів в лідируючому по $1/N$ порядку

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} + \Gamma^{(1)}, \quad \Gamma^{(0)} = -\frac{1}{4}\int d^4x\, f_{\mu\nu}^2, \quad \Gamma^{(1)} = -iN\mathrm{TrLn}\left[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m\right], \tag{2.46}$$

де $f^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $A_\mu = A_\mu^{cl} + \tilde{A}_\mu$, а класична частина електромагнітного поля дорівнює

$$A_\mu^{cl} = (0, \frac{Bx^2}{2}, -\frac{Bx^1}{2}, 0) \tag{2.47}$$

і, очевидно, описує постійне магнітне поле направлене вздовж третьої осі $+x^3$.

Розглянемо спочатку ефективну дію (2.46) в наближенні найнижчого рівня Ландау. Для НЙЛ моделі ця проблема розглядалась в попередньому параграфі. Відповідне узагальнення на випадок КЕД є прямим. Ефективна дія (2.46) в наближенні НРЛ дорівнює

$$\Gamma_{LLL} = \Gamma^{(0)} + \Gamma^{(1)}_{LLL}, \quad \Gamma^{(1)}_{LLL} = -\frac{iN|eB|}{2\pi} \int d^2x_\perp \, \mathrm{Tr}_{||} \Big[\mathcal{P} \, \mathrm{Ln}[i\gamma^{||}(\partial_{||} - ie\mathcal{A}_{||}) - m]\Big]_*, \tag{2.48}$$

де $*$ є мойялівським стар добутком, проектор $\mathcal{P}$ визначений в рівнянні (2.38), а поля $\mathcal{A}_{||}$ дорівнюють $\mathcal{A}_{||} = e^{\frac{\nabla^2_\perp}{4|eB|}} A_{||}$, де $A_{||} = (A_0, A_3)$ і $\nabla^2_\perp$ є оператором Лапласа відносно поперечних координат. Завдяки тому, що $\mathcal{P}$ є проектором на ферміонні (антиферміонні) стани зі спіном поляризованим вздовж (проти) магнітного поля, а однопетльовий член $\Gamma^{(1)}_{LLL}$ в (2.48) включає тільки поля $\mathcal{A}_{||} = (\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_3)$, тому що ферміони на найнижчому рівні Ландау взаємодіють тільки з цими компонентами електромагнітного поля [71, 72].

Таким чином, ми бачимо, що ефективна дія (2.48) визначає некомутативну квантову теорію поля з некомутуючими координатами $\hat{x}^a_\perp$, $a = 1, 2$

$$[\hat{x}^a_\perp, \hat{x}^b_\perp] = i\frac{1}{eB}\epsilon^{ab} \equiv i\theta^{ab}. \tag{2.49}$$

Присутність моялівського стар добутку в $\Gamma^{(1)}_{LLL}$ свідчить про те, що $\Gamma^{(1)}_{LLL}$ не є інваріантною відносно звичайної електромагнітної $U(1)$ калібрувальної симетрії, а інваріантна відносно некомутативної $U(1)_{nc}$ симетрії [193, 194] (в подальшому ми опустимо індекс $||$ в калібрувальних полях), яка визначається наступним чином

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu \;&\to\; U(x) * \mathcal{A}_\mu * U^{-1}(x) + \frac{i}{e} U(x) * \partial_\mu U^{-1}(x)\,, \;\; (\mu = 0, 3) \\ \mathcal{F}_{\mu\nu} \;&\to\; U(x) * \mathcal{F}_{\mu\nu} * U^{-1}(x)\,, \;\; (\mu, \nu = 0, 3) \end{aligned} \tag{2.50}$$

де $U(x) = (e^{i\lambda(x)})_*$ і $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ дорівнює

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - ie[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]_{\mathrm{MB}}\,, \tag{2.51}$$

де

$$[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]_{\mathrm{MB}} \equiv \mathcal{A}_\mu * \mathcal{A}_\nu - \mathcal{A}_\nu * \mathcal{A}_\mu \tag{2.52}$$

є так звана мойялівська дужка.

Зрозуміло, що розклад по степеням похідних для $\Gamma^{(1)}_{LLL}$ повинен виражатися через стар добутки $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ враховуючи також коваріантні похідні

$$\Gamma^{(1)}_{LLL} = a_0 S_{\mathcal{F}^2} + a_1 S_{\mathcal{F}^3} + a_2 S_{(\mathcal{D}\mathcal{F})^2} + a_3 S_{\mathcal{D}^2\mathcal{F}^2} + \cdots \quad , \tag{2.53}$$

де

$$S_{\mathcal{F}^2} \equiv -\frac{1}{4}\int d^2x_\perp d^2x_\parallel\, \mathcal{F}_{\mu\nu} * \mathcal{F}^{\mu\nu}, \qquad S_{\mathcal{F}^3} \equiv ie\int d^2x_\perp d^2x_\parallel\, \mathcal{F}_{\mu\nu} * \mathcal{F}^{\nu\lambda} * \mathcal{F}_\lambda{}^\mu, \tag{2.54}$$

$$S_{(\mathcal{D}\mathcal{F})^2} \equiv \int d^2x_\perp d^2x_\parallel\, \mathcal{D}_\lambda \mathcal{F}^{\lambda\mu} * \mathcal{D}^\rho \mathcal{F}_{\rho\mu}, \qquad S_{\mathcal{D}^2\mathcal{F}^2} \equiv \int d^2x_\perp d^2x_\parallel\, \mathcal{D}_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} * \mathcal{D}^\lambda \mathcal{F}^{\mu\nu}, \tag{2.55}$$

а коваріантна похідна від $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ дорівнює $\mathcal{D}_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} - ie[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{F}_{\mu\nu}]_{\mathrm{MB}}$. Коефіцієнти a_i, $(i = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ в рівнянні (2.53) знаходяться з n-частинкових фотонних вершинних функцій

$$T^{(n)}_{LLL} = i\frac{(ie)^n N|eB|}{2\pi n}\int d^2x^\perp\, d^2x^{||}_1 \cdots d^2x^{||}_n \;\mathrm{tr}\left[S_{||}(x^{||}_1 - x^{||}_2)\hat{\mathcal{A}}(x^\perp, x^{||}_2)\ldots \right.$$
$$\left. \times S_{||}(x^{||}_n - x^{||}_1)\hat{\mathcal{A}}(x^\perp, x^{||}_1)\right]_* \tag{2.56}$$

шляхом розкладу по степеням зовнішніх імпульсів і $\hat{\mathcal{A}} \equiv \gamma^{||}\mathcal{A}_{||}$. Зокрема, вершини $T^{(2)}_{LLL}$ і $T^{(3)}_{LLL}$ (магнітне поле явним чином порушує симетрію відносно зарядового спряження, тому трьохчастинкова вершинна функція відмінна від нуля) визначають коефіцієнти a_0, a_1, a_2 і a_3 в (2.53)

$$a_0 = \frac{\tilde{\alpha}}{3\pi}\frac{|eB|}{m^2}, \quad a_1 = \frac{1}{60m^2}a_0, \quad a_2 = -\frac{1}{10m^2}a_0, \quad a_3 = 0, \tag{2.57}$$

де $\tilde{\alpha} \equiv N\alpha = Ne^2/(4\pi)$.

Тотожності Уорда для калібрувальної електромагнітної $U(1)$ симетрії вимагають поперечності n-частинкової фотонної амплітуди $T^{\mu_1\cdots\mu_i\cdots\mu_n}(x_1, ..., x_n)$ по будь-якому індексу μ_i, тобто $\partial_{\mu_i} T^{\mu_1\cdots\mu_i\cdots\mu_n}(x_1, ..., x_n) = 0$. Легко перевірити, що двохчастинкова вершинна функція $T^{\mu_1\mu_2}_{LLL}$, яка визначає поляризаційну функцію, є дійсно поперечною. Покажемо тепер, що трьохчастинкова функція не є поперечною. Це означає, що тотожності Уорда пов'язані з електромагнітною $U(1)$ калібрувальною симетрією порушені в наближенні найнижчого рівня Ландау. В імпульсному просторі ми маємо

$$T^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{LLL}(k_1,k_2,k_3) = Ne^3\frac{|eB|}{2\pi}\sin\left(\frac{1}{2}\theta_{ab}k^a_{1\perp}k^b_{2\perp}\right)\Delta^{\mu_{1\|}\mu_{2\|}\mu_{3\|}}_{LLL}(k_{1\|},k_{2\|},k_{3\|}), \tag{2.58}$$

де

$$\Delta^{\mu_{1\|}\mu_{2\|}\mu_{3\|}}_{LLL}(k_{1\|},k_{2\|},k_{3\|})$$
$$\equiv \int\frac{d^2l_\|}{i(2\pi)^2}\frac{\mathrm{tr}\left[\gamma^{\mu_1}_\|\,[(\hat{l}-\hat{k}_1)_\|+m]\,\gamma^{\mu_2}_\|\,[(\hat{l}+\hat{k}_3)_\|+m]\,\gamma^{\mu_3}_\|\,(\hat{\ell}_\|+m)\right]}{(l^2_\|-m^2)[(l-k_1)^2_\|-m^2][(l+k_3)^2_\|-m^2]}. \tag{2.59}$$

і $\theta_{ab}=\epsilon^{ab}/eB$. Поперечна частина вершинної функції (2.58) відмінна від нуля і дорівнює

$$k_{1\mu_1}T^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{LLL}(k_1,k_2,k_3) = -\frac{2e}{i}\sin\left(\frac{1}{2}\theta_{ab}k^a_{1\perp}k^b_{2\perp}\right)\left[\Pi^{\mu_2\mu_3}_\|(k_{2\|})-\Pi^{\mu_2\mu_3}_\|(k_{3\|})\right], \tag{2.60}$$

де

$$\Pi^{\mu\nu}_\|(k_\|) = i\frac{2\tilde{\alpha}|eB|}{\pi}\left(g^{\mu\nu}_\| - \frac{k^\mu_\| k^\nu_\|}{k^2_\|}\right)\Pi(k^2_\|),$$

$$\Pi(k^2_\|)\equiv 1+\frac{2m^2}{k^2_\|\sqrt{1-\frac{4m^2}{k^2_\|}}}\ln\frac{1+\sqrt{1-\dfrac{4m^2}{k^2_\|}}}{-1+\sqrt{1-\dfrac{4m^2}{k^2_\|}}}\,, \tag{2.61}$$

а $g_\| = \mathrm{diag}(1,-1)$ (зауважимо, що $\Pi^{\mu\nu}_\|$ співпадає з поляризаційним тензором (1+1)-вимірної КЕД, якщо параметр $2\tilde{\alpha}|eB|$ замінити константою зв‘язку e_1^2 КЕД$_{1+1}$). Таким чином, тотожності Уорда електромагнітної калібрувальної $U(1)$ симетрії порушені в наближенні найнижчого рівня Ландау. Причина цього цілком зрозуміла. Дійсно вершинні функції $T^{(n)}_{LLL}$ визначаються $\Gamma^{(1)}_{LLL}$ частиною ефективної дії, яка неінваріантна відносно електромагнітної $U(1)$ калібрувальної симетрії. Нагадаємо, що $T^{(n)}_{LLL}$ є інваріантною відносно некомутативної $U(1)_{nc}$ групи симетрії. Тому тотожності Уорда для вершинних функцій $T^{(n)}_{LLL}$ відображають не $U(1)$ калібрувальну симетрію, а некомутативну $U(1)_{nc}$ симетрію.

Відзначимо, що хоча дія (2.48) і визначає деяку некомутативну теорію, вона істотно відрізняється від некомутативної КЕД, яка розглядається в літературі. Так само як і попередньому параграфі ми знаходимо, що пропагатор для полів $\mathcal{A}_\mu = e^{\frac{\nabla_\perp^2}{4|eB|}} A_\mu$ має експоненційно ріжучий фактор $e^{\frac{-p_\perp^2}{2|eB|}}$ і швидко прямує до нуля для великих значень поперечних імпульсів. Нагадаємо, що згідно з аналізом в попередньому параграфі цей фактор є відповідальним за відсутність УФ/ІЧ змішування в теорії.

Покажемо тепер, що врахування внесків всіх вищих рівнів Ландау відновлює електромагнітну $U(1)$ калібрувальну симетрію, яка порушується в наближенні найнижчого рівня Ландау. Для цього ми розглянемо трьохчастинкову вершинну функцію замінюючи один з трьох пропагаторів найнижчого рівня Ландау повним пропагатором. Тоді для кожного вищого $n \geq 1$ рівня Ландау внески в трьохчастинкову функцію першого, другого і третього членів дорівнюють відповідно

$$\Delta_{HLL}^{\mu_\parallel \nu_\parallel \lambda_\parallel}(p,q,k) \sim \frac{(-1)^n}{n|eB|}\, f_\parallel^{\mu\nu\lambda}(p_\parallel, q_\parallel, k_\parallel), \tag{2.62}$$

$$\Delta_{HLL}^{\mu_\perp \nu_\perp \lambda_\parallel}(p,q,k) \sim \frac{(-1)^n}{n|eB|}\Big[\, g_\perp^{\mu\nu} h_1(p_\perp, q_\perp, k_\perp) + \epsilon_\perp^{\mu\nu} h_2(p_\perp, q_\perp, k_\perp)\mathrm{sign}(eB)\,\Big]$$
$$\times \left(q_\parallel^\lambda - \frac{(q\cdot k)_\parallel}{k_\parallel^2}\, k_\parallel^\lambda \right) \Pi(k_\parallel^2), \tag{2.63}$$

$$\Delta_{HLL}^{\mu_\perp \nu_\parallel \lambda_\parallel}(p,q,k) \sim \frac{(-1)^n}{n|eB|}\, h_3^{\mu_\perp}(p_\perp, q_\perp, k_\perp)\left(g_\parallel^{\nu\lambda} - \frac{k_\parallel^\nu k_\parallel^\lambda}{k_\parallel^2} \right) \Pi(k_\parallel^2), \tag{2.64}$$

де $g_\perp = \mathrm{diag}(-1,-1)$, $(p\cdot q)_\parallel = p^0 q^0 - p^3 q^3$, а $f_\parallel^{\mu\nu\lambda}$, $h_{1,2}$ і $h_3^{\mu_\perp}$ є гладкими функціями імпульсів. Як і очікувалось, внесок кожного окремого вищого рівня Ландау є подавленим як $1/|eB|$ в інфрачервоній області, однак їх загальний внесок не є подавленим. Дійсно, використовуючи співвідношення [197]

$$(1-z)^{-(\alpha+1)} \exp\left(\frac{xz}{z-1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) z^n \tag{2.65}$$

і інтегруючи його по z, ми обчислюємо суму по всіх рівнях Ландау і знаходимо наступну трьохчастинкову вершинну функцію, яка задовольняє тотожності Уорда для електромагнітної $U(1)$ калібрувальної симетрії

$$T^{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1,k_2,k_3)=T^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{LLL}(k_1,k_2,k_3)+T^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{HLL1}(k_1,k_2,k_3)+T^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{HLL2}(k_1,k_2,k_3), \tag{2.66}$$

де ми маємо

$$\begin{aligned}T^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{HLL1}(k_1,k_2,k_3)=\frac{2e}{i}\,\sin\left(\frac{1}{2}\theta_{ab}k^a_{1\perp}k^b_{2\perp}\right)\Bigg[\frac{-k^{\mu_1}_{1\perp}}{\vec{k}^2_{1\perp}}\,\Big(\,\Pi^{\mu_2\mu_3}_{\parallel}(k_{2\parallel})-\Pi^{\mu_2\mu_3}_{\parallel}(k_{3\parallel})\Big)\\+\frac{k^{\mu_1}_{1\perp}k^{\mu_2}_{2\perp}-k^{\mu_2}_{1\perp}k^{\mu_1}_{2\perp}-(\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2)_\perp g^{\mu_1\mu_2}_{\perp}}{\vec{k}^2_{1\perp}\,\vec{k}^2_{2\perp}}\;k_{2\parallel\,\nu}\Pi^{\mu_3\nu}_{\parallel}(k_{3\parallel})\\+\;\text{перестановки }(k_1,\mu_1),\,(k_2,\mu_2)\text{ і }(k_3,\mu_3)\Bigg],\end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned}T^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{HLL2}(k_1,k_2,k_3)=-\frac{2e}{i}\mathrm{sign}(eB)\Bigg[\Bigg\{\exp\left(-\frac{(\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2)_\perp}{2|eB|}\right)\\-\cos\left(\frac{1}{2}\theta_{ab}k^a_{1\perp}k^b_{2\perp}\right)\Bigg\}\Bigg(\frac{k^{\mu_2}_{1\perp}\epsilon^{ab}_{\perp}k^a_{1\perp}k^b_{2\perp}+(\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2)_\perp\epsilon^{\mu_2 b}_{\perp}k^b_{1\perp}}{\vec{k}^2_{1\perp}\,\vec{k}^2_{2\perp}}\;\Pi^{\mu_3\mu_1}_{\parallel}(k_{3\parallel})\\+\frac{k^{\mu_1}_{2\perp}\epsilon^{ab}_{\perp}k^a_{2\perp}k^b_{1\perp}+(\vec{k}_2\cdot\vec{k}_1)_\perp\epsilon^{\mu_1 b}_{\perp}k^b_{2\perp}}{\vec{k}^2_{1\perp}\,\vec{k}^2_{2\perp}}\;\Pi^{\mu_2\mu_3}_{\parallel}(k_{3\parallel})+\frac{g^{\mu_1\mu_2}_{\perp}\epsilon^{ab}_{\perp}k^a_{1\perp}k^b_{2\perp}+\epsilon^{\mu_1\mu_2}_{\perp}(\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2)_\perp}{\vec{k}^2_{1\perp}\,\vec{k}^2_{2\perp}}\\k_{2\parallel\nu}\Pi^{\mu_3\nu}_{\parallel}(k_{3\parallel})\Bigg)\;+\;\text{перестановки }(k_1,\mu_1),\,(k_2,\mu_2)\text{ і }(k_3,\mu_3)\Bigg]\end{aligned} \tag{2.68}$$

і $(\vec{p}\cdot\vec{q})_\perp=p^1q^1+p^2q^2$. Ці внески обумовлені членами з одним повним пропагатором, які визначені в рівняннях (2.63) і (2.64). Аналогічний внесок з $\Delta^{\mu_\parallel\nu_\parallel\lambda_\parallel}_{HLL}$ в рівнянні (2.62) виявився вищого порядку по $1/|eB|$ і тому ми знехтували ним. Використовуючи рівняння (2.60), (2.67) і (2.68), легко перевірити, що трьохчастинкова вершинна функція $T^{\mu_1\mu_2\mu_3}$ є поперечною. Скорочення відбувається між доданками $T^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{LLL}$ і $T^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{HLL1}$, а $T^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{HLL2}$ є поперечним сам по собі.

Чи існує область в якій внесок найнижчого рівня Ландау є домінуючим? Покажемо, що це область імпульсів $\vec{k}^2_{i\perp}\gg|k^2_{i\parallel}|$. В цьому випадку лідируючі члени в розкладі вершинних функцій відносно степені $k_{i\parallel}$ дорівнюють

$$T_{LLL}^{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1,k_2,k_3) = -\frac{2e\tilde{\alpha}}{3\pi}\frac{|eB|}{m^2}\sin\left(\frac{1}{2}\theta_{ab}k_{1\perp}^a k_{2\perp}^b\right)$$

$$\left[(k_2-k_3)_\parallel^{\mu_1}g_\parallel^{\mu_2\mu_3} + (k_3-k_1)_\parallel^{\mu_2}g_\parallel^{\mu_3\mu_1} + (k_1-k_2)_\parallel^{\mu_3}g_\parallel^{\mu_1\mu_2}\right], \qquad (2.69)$$

$$T_{HLL1}^{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1,k_2,k_3) = -\frac{2e\tilde{\alpha}}{3\pi}\frac{|eB|}{m^2}\sin\left(\frac{1}{2}\theta_{ab}k_{1\perp}^a k_{2\perp}^b\right)\left[\frac{-k_{1\perp}^{\mu_1}}{\vec{k}_{1\perp}^2}\left\{(k_{2\parallel}^2-k_{3\parallel}^2)g_\parallel^{\mu_2\mu_3}\right.\right.$$

$$\left.-k_{2\parallel}^{\mu_2}k_{2\parallel}^{\mu_3}+k_{3\parallel}^{\mu_2}k_{3\parallel}^{\mu_3}\right\}+\frac{k_{1\perp}^{\mu_1}k_{2\perp}^{\mu_2}-k_{1\perp}^{\mu_2}k_{2\perp}^{\mu_1}-(\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2)_\perp g_\perp^{\mu_1\mu_2}}{\vec{k}_{1\perp}^2\,\vec{k}_{2\perp}^2}\left\{k_{3\parallel}^2 k_{2\parallel}^{\mu_3}-(k_2\cdot k_3)_\parallel k_{3\parallel}^{\mu_3}\right\}$$

$$\left.+\text{ перестановки }(k_1,\mu_1),\ (k_2,\mu_2)\text{ і }(k_3,\mu_3)\right], \qquad (2.70)$$

$$T_{HLL2}^{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1,k_2,k_3) = \frac{2e\tilde{\alpha}}{3\pi}\frac{eB}{m^2}\left[\left\{\exp\left(-\frac{(\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2)_\perp}{2|eB|}\right)-\cos\left(\frac{1}{2}\theta_{ab}k_{1\perp}^a k_{2\perp}^b\right)\right\}\right.$$

$$\times\left(\frac{k_{1\perp}^{\mu_2}\epsilon_\perp^{ab}k_{1\perp}^a k_{2\perp}^b+(\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2)_\perp\epsilon_\perp^{\mu_2 b}k_{1\perp}^b}{\vec{k}_{1\perp}^2\,\vec{k}_{2\perp}^2}\left\{k_{3\parallel}^2 g_\parallel^{\mu_3\mu_1}-k_{3\parallel}^{\mu_3}k_{3\parallel}^{\mu_1}\right\}\right.$$

$$+\frac{k_{2\perp}^{\mu_1}\epsilon_\perp^{ab}k_{2\perp}^a k_{1\perp}^b+(\vec{k}_2\cdot\vec{k}_1)_\perp\epsilon_\perp^{\mu_1 b}k_{2\perp}^b}{\vec{k}_{1\perp}^2\,\vec{k}_{2\perp}^2}\left\{k_{3\parallel}^2 g_\parallel^{\mu_2\mu_3}-k_{3\parallel}^{\mu_2}k_{3\parallel}^{\mu_3}\right\}$$

$$\left.+\frac{g_\perp^{\mu_1\mu_2}\epsilon_\perp^{ab}k_{1\perp}^a k_{2\perp}^b+\epsilon_\perp^{\mu_1\mu_2}(\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2)_\perp}{\vec{k}_{1\perp}^2\,\vec{k}_{2\perp}^2}\left\{k_{3\parallel}^2 k_{2\parallel}^{\mu_3}-(k_2\cdot k_3)_\parallel k_{3\parallel}^{\mu_3}\right\}\right)$$

$$\left.+\text{ перестановки }(k_1,\mu_1),\ (k_2,\mu_2),\ \text{ і }(k_3,\mu_3)\right]. \qquad (2.71)$$

Із цих виразів випливає, що внесок обумовлений найнижчим рівнем Ландау дійсно є домінуючим в цій області. Відзначимо, що хоча вершинна функція $T_{HLL1}^{\mu_1\mu_2\mu_3}$ є подавленою в цій області, вона є вирішальною для відновлення тотожностей Уорда електромагнітної $U(1)$ калібрувальної симетрії. Це можливо тому, що в той час як в тотожностях Уорда вершинна функція $T_{HLL1}^{\mu_1\mu_2\mu_3}$ множиться на великий поперечний імпульс $k_\perp$, вершинна функція $T_{LLL}^{\mu_1\mu_2\mu_3}$ множиться тільки на малий імпульс $k_\parallel$. Цей результат є досить важливим тому, що як було відзначено в роботі [71] саме область імпульсів $\vec{k}^2_{i\perp} \gg |k^2_{i\parallel}|$ дає домінуючий внесок в рівняння Швінгера-Дайсона для динамічної ферміонної маси в КЕД в сильному магнітному полі.

Наостанок відзначимо також, що розмір області де локалізовані хвильові функції вищих рівнів Ландау росте без обмеження при $n \to \infty$. Ми бачили також, для калібрувальної інваріантності необхідно врахувати вклад усіх рівнів Ландау. Це означає, що динаміка теорії на границі є дуже важливою і це нагадує ситуацію з крайовими станами в квантовому ефекті Хола [198] і показує важливість динаміки біля границі в теоріях у сильному магнітному полі.

2.3. Кіральна динаміка в КЕД у зовнішньому магнітному полі

В попередньому параграфі ми розглянули ефективну теорію для фотонного поля в КЕД в сильному магнітному полі і показали, що вона визначається некомутативною моделлю. В другому параграфі цього розділу ми дослідили кіральну динаміку нейтральних станів в НЙЛ моделі, де має місце динамічне порушення кіральної симетрії в сильному магнітному полі. Модель НЙЛ є моделлю з локальною чотирьохферміонною взаємодією і нейтральні складені стани можуть бути описані допоміжними полями Хабарда-Стратоновича. Згідно з [71, 72] динамічне порушення кіральної симетрії відбувається також і в КЕД в сильному зовнішньому магнітному полі. Однак на відміну від моделі НЙЛ нейтральні намбу-голдстоунівські бозони в КЕД є складними нелокальними об‘єктами і тому виникає питання чи описується їх динаміка в сильному магнітному полі також деякою ефективною некомутативною теорією? Це питання ми розглянемо в цьому параграфі і покажемо, що кіральна динаміка нейтральних станів в КЕД у сильному магнітному полі описується складною нелокальною некомутативною теорією в якій структура вершин взаємодії суттєво відрізняється від вершин взаємодії звичайних некомутативних теорії розглянутих в літературі. Коротко ми відзначимо також зв'язок динаміки цих теорій з моделями в фізиці твердого тіла, які описують квантовий ефект Хола.

2.3.1. Ефективна дія для намбу-голдстоунівських бозонів в КЕД. Динамічне порушення кіральної симетрії в КЕД в сильному магнітному полі було розглянуто в роботах [71, 72]. Було показано, що існує спеціальна нелокальна калібровка, в якій теорія допускає самоузгоджений аналіз. Повний фотонний пропагатор в цій калібровці має вигляд

$$D_{\mu\nu}(k) = i\frac{g^{\parallel}_{\mu\nu}}{k^2 + k^2_{\parallel}\Pi(k^2_{\perp}, k^2_{\parallel})} + i\frac{g^{\perp}_{\mu\nu}k^2 - (k^{\perp}_{\mu}k^{\perp}_{\nu} + k^{\perp}_{\mu}k^{\parallel}_{\nu} + k^{\parallel}_{\mu}k^{\perp}_{\nu})}{(k^2)^2}, \tag{2.72}$$

де $\Pi(k^2_{\perp}, k^2_{\parallel})$ - поляризаційна функція, а символи $\perp$ і $\parallel$ в $g_{\mu\nu}$ та k_{μ} пов'язані з $(1, 2)$ і $(0, 3)$ координатами відповідно. Згідно [71, 72] поперечні ступені вільності неважливі в наближенні найнижчого рівня Ландау і тому тільки перший член в фотонному пропагаторі $D_{\mu\nu}$ (2.72), пропорційний $g^{\parallel}_{\mu\nu}$, є суттєвим. Тому в якості повного фотонного пропагатора в цій спеціальній калібровці ми можемо використовувати наступний пропагатор

$$D_{\mu\nu}(k) = i\frac{g^{\parallel}_{\mu\nu}}{k^2 + k^2_{\parallel}\Pi(k^2_{\perp}, k^2_{\parallel})}. \tag{2.73}$$

Як було показано в роботах [71, 72] область імпульсів $m^2_{dyn} \ll |k^2_{\parallel}|$, $k^2_{\perp} \ll |eB|$ є найбільш важливою для генерації маси. В цій області ферміони можуть розглядатися як безмасові і в цьому випадку поляризаційна функція дорівнює

$$\Pi(k^2_{\perp}, k^2_{\parallel}) \simeq -\frac{2\tilde{\alpha}_b|eB|}{\pi k^2_{\parallel}}, \tag{2.74}$$

де $\tilde{\alpha}_b \equiv N_f\alpha_b = \frac{N_f e_b^2}{4\pi}$, N_f - число ароматів ферміонів, а α_b - біжуча константа зв'язку КЕД обчислена в точці $\mu = \sqrt{|eB|}$. Таким чином, фотонний пропагатор (2.73) приймає вигляд

$$D_{\mu\nu}(x) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ikx}\,\frac{g^{\|}_{\mu\nu}}{k^2 - M_\gamma^2}, \tag{2.75}$$

де $M_\gamma^2 = 2\tilde{\alpha}_b|eB|/\pi$. В режимі слабкого зв‘язку з $\tilde{\alpha}_b = N_f\alpha_b \ll 1$ динамічно згенерована ферміонна маса дорівнює

$$m_{dyn} = C|eB|^{1/2}F(\tilde{\alpha}_b)\exp\left[-\frac{\pi N_f}{\tilde{\alpha}_b\ln(C_1/\tilde{\alpha}_b)}\right], \tag{2.76}$$

де $F(\tilde{\alpha}_b) \simeq (\tilde{\alpha}_b)^{1/3}$, $C_1 \simeq 1.82$ і C - чисельна константа порядку одиниці. В режимі сильного зв‘язку для $N_f \gg 1$ динамічна маса дорівнює

$$m_{dyn} \simeq \sqrt{|eB|}\exp(-N_f). \tag{2.77}$$

З необхідними модифікаціями ця теорія була узагальнена на випадок КХД в сильному магнітному полі в роботі [199]. Ця робота поряд із вищезгаданими роботами [69, 72] будуть суттєвими елементами в нашому аналізі в цьому параграфі.

КЕД з N_f безмасовими ароматами ферміонів має $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ кіральну симетрію. Генерація ферміонної маси порушує цю симетрію до $SU(N_f)_V$ і як результат призводить до появи N_f^2-1 нейтральних намбу-голдстоунівських бозонів π^A, $A = 1, 2, ..., N_f^2-1$ (ми не розглядаєм аномальну $U(1)_A$ симетрію). Наша ціль в цьому параграфі це знайти вершини взаємодії для безмасових намбу-голдстоунівських бозонів π^A в наближенні найнижчого рівня Ландау і з'ясувати чи відповідає їх структура деякій некомутативній квантовій теорії поля. Інтегруючи по полю A_μ ми знаходимо наступну нелокальну ефективну дію для ферміонів в КЕД в зовнішньому магнітному полі

$$S = \int d^4x\,\bar{\psi}i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - 2i\pi\alpha_b\int d^4xd^4y\,\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)D^{(0)}_{\mu\nu}(x-y)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y), \tag{2.78}$$

де затравочний пропагатор, який має структуру пропагатора (2.73), дорівнює

$$D^{(0)}_{\mu\nu}(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ik(x-y)}\,\frac{g^{\|}_{\mu\nu}}{k^2},$$

$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu^{ext}$ - коваріантна похідна, а $A_\mu^{ext} = (0, \frac{Bx^2}{2}, \frac{-Bx^1}{2}, 0)$ описує в симетричній калібровці постійне магнітне поле направлене вздовж вісі $+x^3$. Використовуючи метод допоміжних полів розвинутий для нелокальних взаємодій в роботах [200, 200], ми додаємо наступний член до дії (2.78)

$$\Delta S = -2i\pi\alpha_b \int d^4xd^4y\,\mathrm{tr}\left\{\gamma^\mu\left[\varphi_a^b(x,y) - \psi_a(x)\bar{\psi}^b(y)\right]\gamma^\nu \right.$$
$$\left. \times[\varphi_b^a(y,x) - \psi_b(y)\bar{\psi}^a(x)]\right\} D_{\mu\nu}^{(0)}(x-y), \tag{2.79}$$

де $\varphi_a^b(x,y)$ є допоміжне білокальне поле з індексами a і b фундаментального представлення $SU(N_f)$. Тоді ми знаходимо

$$S = \int d^4x\,\bar{\psi}i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - 4i\pi\alpha_b\int d^4xd^4y\,\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\varphi(x,y)\gamma^\nu\psi(y)D_{\mu\nu}^{(0)}(x-y)$$
$$-2i\pi\alpha_b\int d^4xd^4y\,\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu\,\varphi(x,y)\,\gamma^\nu\,\varphi(y,x)\right]D_{\mu\nu}^{(0)}(x-y). \tag{2.80}$$

Інтегруючи по ферміонам ми маємо

$$S(\varphi) = -i\mathrm{TrLn}\left[\gamma^\mu i\mathcal{D}_\mu\delta^4(x-y) - 4i\pi\alpha_b\gamma^\mu\varphi(x,y)\gamma^\nu D_{\mu\nu}^{(0)}(x-y)\right]$$
$$-2i\pi\alpha_b\int d^4xd^4y\,\mathrm{tr}[\gamma^\mu\varphi(x,y)\gamma^\nu\varphi(y,x)]D_{\mu\nu}^{(0)}(x-y), \tag{2.81}$$

де Tr і Ln є функціональними операціями.

Згідно [201], ми можемо розкласти $\varphi(x,y)$ наступним чином

$$\varphi(x,y) = \varphi_0(x,y) + \tilde{\varphi}(x,y), \tag{2.82}$$

$$\tilde{\varphi}(x,y) = \sum_n\int\frac{d^4P}{(2\pi)^4}\phi_n(P)\chi_n^{(l)}(x,y;P)\,, \tag{2.83}$$

де $\varphi_0(x,y)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi} = 0, \tag{2.84}$$

яке еквівалентне рівнянню Швінгера-Дайсона

$$S_{(l)}^{-1}(x,y) = S_0^{-1}(x,y) - 4\pi\alpha_b\gamma^\mu S_{(l)}(x,y)\gamma^\nu D_{\mu\nu}^{(0)}(x-y), \tag{2.85}$$

в якому S_0 є вільним ферміонним пропагатором, а $S_{(l)} \equiv \varphi_0$ - повний пропагатор в драбинному наближенні. В рівнянні (2.83) оператор $\phi_n(P)$ описує нейтральний складений стан $|n, P>$, а $\chi_n^{(l)}(x, y; P)$ є розв'язками поза масової оболонки наступного рівняння Бете-Солпітера в драбинному наближенні

$$\chi^{(l)}(x, y; P) = 4\pi\alpha_b\lambda(P) \int d^4x_1 d^4y_1\, S_{(l)}(x, x_1)\, \gamma^\mu \chi^{(l)}(x_1, y_1; P)\, \gamma^\nu \\ \times S_{(l)}(y_1, y)\, D^{(0)}_{\mu\nu}(x_1 - y_1). \tag{2.86}$$

Множник $\lambda(P) \neq 1$ в цьому рівнянні дозволяє розглядати стани поза масовою оболонкою з довільною масою $M^2 = P^2$. Стани на масовій оболонці відповідають $\lambda(P) = 1$.

Використовуючи рівняння (2.82) і (2.85), дія (2.81) може бути представлена наступним чином

$$S(\tilde{\varphi}) = -i\mathrm{TrLn}\left[S^{-1}_{(l)}(x, y) - 4\pi\alpha_b\gamma^\mu\tilde{\varphi}(x, y)\gamma^\nu D^{(0)}_{\mu\nu}(x - y)\right] \\ -2i\pi\alpha_b \int d^4x d^4y\, \mathrm{tr}[\gamma^\mu(\varphi_0(x, y) + \tilde{\varphi}(x, y))\gamma^\nu(\varphi_0(y, x) + \tilde{\varphi}(y, x))]D^{(0)}_{\mu\nu}(x - y). \tag{2.87}$$

Розкладаючи тепер дію $S(\tilde{\varphi})$ по ступеням $\tilde{\varphi}$ і нехтуючи частиною, яка не залежить від $\tilde{\varphi}$ ми отримуємо

$$S(\tilde{\varphi}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i}{n} \int d^4x_1 d^4y_1 \ldots d^4x_n d^4y_n\, \mathrm{tr}\,[S_{(l)}(x_1, y_1)\varphi_D(y_1, x_2)S_{(l)}(x_2, y_2) \\ \times\varphi_D(y_2, x_3) \ldots S_{(l)}(x_{n-1}, y_n)\varphi_D(y_n, x_1)\,] \\ -2i\pi\alpha_b \int d^4x d^4y \mathrm{tr}[\gamma^\mu\tilde{\varphi}(x, y)\gamma^\nu\tilde{\varphi}(y, x)]D^{(0)}_{\mu\nu}(x - y), \tag{2.88}$$

де

$$\varphi_D(x, y) = 4\pi\alpha_b\gamma^\mu\tilde{\varphi}(x, y)\gamma^\nu D^{(0)}_{\mu\nu}(x - y).$$

Завдяки тому, що φ_0 задовольняє рівняння ШД (2.84), член лінійний по $\tilde{\varphi}$ відсутній в (2.88).

Рівняння ШД в покращенному драбинному наближенні для ферміонного пропагатора має форму

$$S^{-1}(x,y) = S_0^{-1}(x,y) - 4\pi\alpha_b\gamma^\mu S(x,y)\gamma^\nu D_{\mu\nu}(x-y), \tag{2.89}$$

де фотонний пропагатор $D_{\mu\nu}(x)$ визначений в рівнянні (2.75). Рівняння Бете-Солпітера поза масовою оболонкою в покращенному драбинному наближенні має вигляд

$$\chi(x,y;P) = 4\pi\alpha_b\lambda(P)\int d^4x_1 d^4y_1\, S(x,x_1)\,\gamma^\mu\chi(x_1,y_1;P)\,\gamma^\nu S(y_1,y)\,D_{\mu\nu}(x_1-y_1). \tag{2.90}$$

Порівняння (2.89) і (2.90) з рівняннями (2.85) і (2.86) показує, що в покращенному драбинному наближенні ефективна дія (2.88) повинна бути замінена на наступну

$$\begin{aligned} S(\tilde{\varphi}) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{i}{n}\int d^4x_1 d^4y_1 \dots d^4x_n d^4y_n \,\mathrm{tr}\,[S(x_1,y_1)\varphi_D(y_1,x_2)S(x_2,y_2) \\ \times\varphi_D(y_2,x_3)\dots S(x_{n-1},y_n)\varphi_D(y_n,x_1)\,] \\ -2i\pi\alpha_b\int d^4x d^4y \mathrm{tr}[\gamma^\mu\tilde{\varphi}(x,y)\gamma^\nu\tilde{\varphi}(y,x)]D_{\mu\nu}(x-y), \end{aligned} \tag{2.91}$$

де

$$\begin{aligned} \varphi_D(x,y) &= 4\pi\alpha_b\gamma^\mu\tilde{\varphi}(x,y)\gamma^\nu D_{\mu\nu}(x-y)\,, \\ \tilde{\varphi}(x,y) &= \sum_n\int\frac{d^4P}{(2\pi)^4}\phi_n(P)\chi_n(x,y;P), \end{aligned} \tag{2.92}$$

а $\chi_n(x,y;P)$ є розв‘язками поза масовою оболонкою рівняння Бете-Солпітера (2.90).

Функції $\phi_n(P)$ в рівнянні (2.92) описують нейтральні ферміон-антиферміонні складені стани. Опис їх вершин взаємодії в КЕД є дуже складною проблемою. Ми розглянемо вершини взаємодії тільки для намбу-голдстоунівських бозонів $\phi^A(P)$. В магнітному полі бете-солпітеровська амплітуда стану $|A;P>$, яка задовольняє рівняння (2.90), має наступну форму [70]

$$\chi^A(x,y;P) \equiv <0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|A;P> = e^{-iPX}e^{ier^\mu A_\mu^{ext}(X)}\tilde{\chi}^A(r;P), \tag{2.93}$$

де $r = x - y$, $X = \frac{x+y}{2}$ і, що важливо, функція $\tilde{\chi}^A(r;P)$ не залежить від координат центра мас. Цей факт відображає присутність групи магнітних трансляцій в досліджуваній проблемі. Що ж стосується $SU(N_f)$ структури $\tilde{\chi}^A(r;P)$, вона є наступною

$$\tilde{\chi}^A(r;P) = \frac{\lambda^A}{2}\tilde{\chi}(r;P), \tag{2.94}$$

де λ^A є $N_f^2 - 1$ матрицями в фундаментальному представленні $SU(N_f)$.

Далі записуючи рівняння Бете-Солпітера (2.90) в імпульсному просторі ми отримуємо

$$\tilde{\chi}^A(p;P) = \frac{16\pi\alpha_b\lambda(P)}{|eB|^2}\int\frac{d^2q_\perp d^2A_\perp d^2k_\perp d^2k_{||}}{(2\pi)^6}e^{i(P_\perp - q_\perp)\times(A_\perp - p_\perp)}e^{-\frac{(\vec{p}_\perp+\vec{A}_\perp)^2}{2|eB|}}e^{-\frac{\vec{q}_\perp^2}{2|eB|}}$$

$$\times\, S_{||}(p_{||}+\frac{P_{||}}{2})\gamma^\mu\tilde{\chi}^A(k;P)\gamma^\nu S_{||}(p_{||}-\frac{P_{||}}{2})D_{\mu\nu}(k_{||}-p_{||},\vec{k}_\perp - \vec{A}_\perp), \tag{2.95}$$

де $p_\perp \times q_\perp \equiv \frac{\epsilon^{ab}p^a q^b}{eB}$. Використовуючи заміну змінної $\vec{u}_\perp = \vec{A}_\perp - \vec{k}_\perp$ і представляючи $\tilde{\chi}^A$ як

$$\tilde{\chi}^A(p;P) = e^{-\frac{\vec{p}_\perp^2}{|eB|}}e^{-iP_\perp\times p_\perp}f^A(p;P), \tag{2.96}$$

ми інтегруємо по $q_\perp$ в (2.95) і знаходимо наступне рівняння для $f^A(p;P)$

$$f^A(p;P) = \frac{8\alpha_b\lambda(P)}{|eB|}\int\frac{d^2u_\perp d^2k_\perp d^2k_{||}}{(2\pi)^4}\,e^{iP_\perp\times u_\perp}e^{-\frac{(\vec{u}_\perp+\vec{k}_\perp)^2}{|eB|}}e^{-\frac{\vec{k}_\perp^2}{|eB|}}$$

$$\times\, S_{||}(p_{||}+\frac{P_{||}}{2})\gamma^\mu f^A(k;P)\gamma^\nu S_{||}(p_{||}-\frac{P_{||}}{2})D_{\mu\nu}(k_{||}-p_{||},\vec{u}_\perp). \tag{2.97}$$

В силу того, що права частина (2.97) не містить $p_\perp$, ми робимо висновок, що $f^A(p;P)$ не залежить від $p_\perp$, тобто вона є функцією тільки від $p_{||}$ і P. Інтегруючи по $k_\perp$ ми маємо

$$f^A(p_{||};P) = 4\pi\alpha_b\lambda(P)\int\frac{d^2u_\perp d^2k_{||}}{(2\pi)^4}e^{iP_\perp\times u_\perp}e^{-\frac{\vec{u}_\perp^2}{2|eB|}}S_{||}(p_{||}+\frac{P_{||}}{2})\gamma^\mu f^A(k_{||};P)\gamma^\nu$$

$$\times S_{||}(p_{||}-\frac{P_{||}}{2})D_{\mu\nu}(k_{||}-p_{||},\vec{u}_\perp). \tag{2.98}$$

Ми розглянемо динаміку тільки у випадку нульового $P_{||} = 0$, тобто для $\phi^A(P) = (2\pi)^2\delta^2(P_{||})\phi^A(P_\perp)$ коли функція $\tilde{\varphi}(x,y)$ в рівнянні (2.92) є

$$\tilde{\varphi}(x,y) = \int \frac{d^2P_\perp}{(2\pi)^2}\phi^A(P_\perp)\chi^A(x,y;P_\perp) \tag{2.99}$$

і бете-солпітеровська амплітуда χ^A залежить тільки від $P_\perp$. Для $P_{||} = 0$ образ Фур'є ϕ^A в координатному просторі залежить тільки від координат $X_\perp$, а так як некомутативність зв'язана з поперечними координатами, то цього нам цілком достатньо (залежність від координат $P_{||}$ була розглянута нами в роботі [84]). Відзначимо, що у випадку нелокальної взаємодії проблема зв'язаного стану є дуже складною і лише факторизація залежності від повздовжних і поперечних координат дозволяє нам знайти в явному вигляді вершини взаємодії для намбу-голдстоунівських бозонів при ненулевих імпульсах.

Для $P_{||} = 0$ легко бачити, що за винятком множників $\lambda(P_\perp)$ і $e^{iP_\perp\times u_\perp}$, структура рівняння (2.98) є подібною до рівняння Бете-Солпітера для намбу-голдстоуніських бозонів з $P_\perp = P_{||} = 0$, яке було досліджено в роботі [70]. Використовуючи відповідні результати отримані в роботі [70], ми знаходимо

$$f^A(p_{||};P_\perp) = S_{||}(p_{||})F^A(p_{||};P_\perp)\gamma^5\frac{1-i\gamma^1\gamma^2}{2}S_{||}(p_{||}), \tag{2.100}$$

де $F^A(p_{||};P_\perp)$ є скалярною функцією, яка задовольняє наступному рівнянню в евклідовому просторі

$$F^A(p_{||};P_\perp) = 8\pi\alpha_b\lambda(P_\perp)\int\frac{d^2u_\perp d^2k_{||}}{(2\pi)^4}\frac{F^A(k_{||};P_\perp)}{k_{||}^2+m^2}\frac{e^{iP_\perp\times u_\perp}e^{-\frac{\vec{u}_\perp^2}{2|eB|}}}{(k_{||}-p_{||})^2+\vec{u}_\perp^2+M_\gamma^2}, \tag{2.101}$$

де було використано також рівняння (2.75).

Тепер приймаючи до уваги рівняння (2.93), (2.96) та (2.100) і інтегруючи по $p_\perp$ в образі Фур'є, ми знаходимо бете-солпітеровську амплітуду в координатному просторі

$$\chi^A(x,y;P_\perp) = P(x_\perp,y_\perp)\int\frac{d^2p_{||}}{2(2\pi)^2}e^{i\vec{P}_\perp\frac{\vec{x}_\perp+\vec{y}_\perp}{2}}e^{-ip_{||}(x^{||}-y^{||})}e^{-\frac{\vec{P}_\perp^2}{4|eB|}}e^{\frac{\epsilon^{ab}P_\perp^a(x_\perp^b-y_\perp^b)sign(eB)}{2}}$$

$$\times\, S_{||}(p_{||}) F^{A}(p_{||}; P_\perp)\gamma^5 \frac{1-i\gamma^1\gamma^2}{2} S_{||}(p_{||}). \tag{2.102}$$

Далі підставляючи білокальне поле $\tilde{\varphi}(x,y)$ з рівняння (2.99) в дію (2.91) і використовуючи рівняння Бете-Солпітера (2.90) ми отримуємо ефективну дію в наступній формі

$$\begin{aligned}
S(\tilde{\varphi}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i}{n} \int d^4x_1 d^4y_1 ... d^4x_n d^4y_n \int \frac{d^2P_\perp^1 ... d^2P_\perp^n}{(2\pi)^{2n}} \phi^{A_1}(P_1^\perp) ... \phi^{A_n}(P_n^\perp) \\
\times\ \frac{\mathrm{tr}\,[S^{-1}_{LLL}(x_1,y_1)\chi^{A_1}(y_1,x_2;P_1^\perp)\ldots S^{-1}_{LLL}(x_{n-1},y_n)\chi^{A_n}(y_n,x_1;P_n^\perp)]}{\Pi_{i=1}^n \lambda(P_i^\perp)} \\
-\frac{i}{2}\int d^4x_1 d^4y_1 d^4x_2 d^4y_2 \int \frac{d^2P_\perp^1 d^2P_\perp^2}{(2\pi)^4} \phi^{A_1}(P_1^\perp)\phi^{A_2}(P_2^\perp) \\
\times \frac{\mathrm{tr}[\chi^{A_1}(x_1,y_1;P_1^\perp)S^{-1}_{LLL}(y_1,y_2)\chi^{A_2}(y_2,x_2;P_2^\perp)S^{-1}_{LLL}(x_2,x_1)]}{\lambda(P_1^\perp)}.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Використовуючи рівняння (2.102), пропагатор $S_{LLL}(x,y)$ в наближенні найнижчого рівня Ландау (2.13) і той факт, що $P(x_\perp,y_\perp)$ є проекційним оператором, ми можемо проінтегрувати по всіх координатах в ефективній дії (2.103) так само як ми це зробили в параграфі 2.1.2 цього розділу коли ми розглядали модель НЙЛ. Тоді ми отримуємо ефективну дію

$$S(\phi) = \sum_{n=2}^{\infty} \Gamma_n,$$

де вершини взаємодії Γ_n для $n > 2$ є

$$\begin{aligned}
\Gamma_n = \frac{\pi i|eB|}{2^{n-1}n} \int d^2X_{||} \int \frac{d^2k_{||}}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2P_1^\perp}{(2\pi)^2} ... \frac{d^2P_n^\perp}{(2\pi)^2}\, \delta^2(\sum_{i=1}^n \vec{P}_i^\perp)\, \phi^{A_1}(P_1^\perp)\ldots\phi^{A_n}(P_n^\perp) \\
\times\ \mathrm{tr}\left[S_{||}(k_{||})F^{A_1}(k_{||};P_1^\perp)\gamma^5\frac{1-i\gamma^1\gamma^2}{2}\ldots S_{||}(k_{||})F^{A_n}(k_{||};P_n^\perp)\gamma^5\frac{1-i\gamma^1\gamma^2}{2}\right] \\
\times \frac{e^{-\frac{i}{2}\sum_{i<j}P_i^\perp\times P_j^\perp}}{\Pi_{i=1}^n\lambda(P_i^\perp)},
\end{aligned} \tag{2.104}$$

а квадратична частина ефективної дії визначається рівнянням

$$\Gamma_2 = -\frac{i|eB|}{16\pi}\int d^2X_{||}\int\frac{d^2k_{||}}{(2\pi)^2}\int\frac{d^2P_\perp}{(2\pi)^2}\,\frac{\lambda(P_\perp)-1}{\lambda^2(P_\perp)}\,\phi^{A_1}(P_\perp)$$

$$\times \ \mathrm{tr}\left[S_{||}(k_{||})F^{A_1}(k_{||};P_\perp)\gamma^5\frac{1-i\gamma^1\gamma^2}{2}S_{||}(k_{||})F^{A_2}(k_{||};-P_\perp)\gamma^5\frac{1-i\gamma^1\gamma^2}{2}\right]\ \phi^{A_2}(-P_\perp). \tag{2.105}$$

2.3.2. Нелокальні квантовопольові теорії I і II типу. З'ясуємо тепер коли вершини (2.104) можуть бути представлені в стандартній для некомутативних теорій формі?

Для того, щоб відповісти на це питання, зручно на деякий час проігнорувати той факт, що функція $F^A(p_{||};P_\perp)$ в (2.104) є розв'язком рівняння (2.101) і розглянути її як довільну функцію $p_{||}$ і $P_\perp$. Тоді порівнюючи рівняння (2.104) і (2.22) неважко побачити, що якщо функція $F(p_{||};P_\perp)$, яка визначена рівнянням

$$F^A(p_{||};P_\perp) = (\lambda^A/2)\,F(p_{||};P_\perp), \tag{2.106}$$

має факторизовану форму

$$F(p_{||};P_\perp) = F_{||}(p_{||})F_\perp(P_\perp), \tag{2.107}$$

тоді існує відображення полів $\phi^A(P_\perp)$ в нові поля в термінах яких вершинні функції Γ_n (2.104) приймають стандартну форму (2.22). Дійсно, якщо ми визначимо нові поля

$$\Phi^A(P_\perp) = \frac{F_\perp(P_\perp)}{\lambda(P_\perp)}\phi^A(P_\perp)\,, \tag{2.108}$$

проінтегруємо по $k_{||}$ і обчислимо слід по діраківським індексам, тоді ми отримаємо стандартну форму для Γ_n

$$\Gamma_n = C_n|eB|\int d^2X_{||}\int\frac{d^2P_1^\perp}{(2\pi)^2}\cdots\frac{d^2P_n^\perp}{(2\pi)^2}\,\delta^2(\sum_{i=1}^n\vec{P}_i^\perp)$$
$$\times\ \mathrm{tr}\left[\bar\Phi(P_1^\perp)\ldots\bar\Phi(P_n^\perp)\right]e^{-\frac{i}{2}\sum_{i<j}P_i^\perp\times P_j^\perp}\ ,\qquad \bar\Phi\equiv(\lambda^A/2)\Phi^A, \tag{2.109}$$

де C_n є деяка константа. Пропагатор цих полів визначається квадратичною частиною дії (2.105)

$$\Gamma_2 = C_2|eB|\int d^2X_{||}\int\frac{d^2P_\perp}{(2\pi)^2}\,(\lambda(P_\perp)-1)\,\mathrm{tr}\left[\bar\Phi(P_\perp)\,\bar\Phi(-P_\perp)\right]. \tag{2.110}$$

Таким чином, в термінах нових полів $\Phi^A(P_\perp)$, вершини (2.104) можуть бути переписані в стандартній формі.

В координатному просторі вершини взаємодії (2.109) дорівнюють

$$\Gamma_n = \frac{C_n}{4\pi^2}|eB| \int d^2X_{||} \int d^2X_\perp \,\mathrm{tr}\left[\bar{\Phi}(X_\perp) * ... * \bar{\Phi}(X_\perp)\right], \tag{2.111}$$

де $*$ є мойялівським стар добутком відносно поперечних координат. В просторі з некомутативними координатами $\hat{X}^a_\perp$, $a = 1, 2$ ці вершини можуть бути представлені наступним чином

$$\Gamma_n = \frac{C_n}{4\pi^2}|eB| \int d^2X_{||}\mathbf{Tr}\ [\hat{\bar{\Phi}}(\hat{X}_\perp)...\hat{\bar{\Phi}}(\hat{X}_\perp)], \tag{2.112}$$

де $\hat{\bar{\Phi}}(\hat{X})$ - символ Вейля поля $\bar{\Phi}(X)$, а операція $\mathbf{Tr}$ визначена як в роботах [193, 194]. Ми будемо називати теорії з факторизованою функцією $F(p_{||}; P_\perp)$ нелокальними некомутативними квантовими теоріями поля I типу.

Якщо функція $F(p_{||}; P_\perp)$ в рівнянні (2.106) не є факторизованою, тоді неможливо представити вершини взаємодії (2.104) в стандартній формі для вершин взаємодії звичайної некомутативної КТП. Наприклад, факторізація відсутня для $F(p_{||}; P_\perp)$ визначеної інтегральним рівнянням (2.101) з $M_\gamma^2 \ll |eB|$ (ми розглянемо цей випадок нижче в параграфі 2.3.3). Однак, виявляється, що навіть в цьому випадку все ще можливо представити вершини (2.104) як деякі нелокальні вершини в некомутативному просторі. Дійсно, ми можемо переписати (2.104) наступним чином

$$\Gamma_n = \frac{i|eB|}{2^{n+1}\pi n} \int d^4X \left[\, V_n^{A_1...A_n}(-i\nabla_1^\perp, ..., -i\nabla_n^\perp) \right.$$
$$\left. \times\, \phi^{A_1}(X_1^\perp) * ... * \phi^{A_n}(X_n^\perp)\, \right] |_{X_1^\perp = X_2^\perp = ... = X^\perp}, \tag{2.113}$$

де всі поперечні координати приймають одне і теж значення $X_1^\perp = X_2^\perp = ... = X^\perp$ після дії псевдодиференціального, в загальному випадку, оператора $V_n^{A_1...A_n}$ на поля ϕ^{A_i}. В імпульсному просторі оператор $V_n^{A_1...A_n}$ визначається наступним рівнянням

$$V_n^{A_1...A_n}(P_1^\perp, ..., P_n^\perp) = \int \frac{d^2k_{||}}{(2\pi)^2}\mathrm{tr}\left[S_{||}(k_{||})F^{A_1}(k_{||}; P_1^\perp)\gamma^5\frac{1 - i\gamma^1\gamma^2}{2} \ldots S_{||}(k_{||})\right.$$

$$\times F^{A_n}(k_{||}; P_n^{\perp})\gamma^5 \frac{1 - i\gamma^1\gamma^2}{2}\Bigg] \frac{1}{\Pi_{i=1}^n \lambda(P_i^{\perp})}. \tag{2.114}$$

Використовуючи той факт, що вейлівський символ похідної в некомутативному просторі визначається оператором $\hat{\nabla}_{\perp a}$ чия дія визначена рівнянням [193, 194]

$$\hat{\nabla}_{\perp a}\hat{\phi}(\hat{X}_{\perp}) = -i[(\theta^{-1})_{ab}\hat{X}_{\perp}^b, \hat{\phi}(\hat{X}_{\perp})], \tag{2.115}$$

ми маємо наступну форму для вершин взаємодії в некомутативному просторі

$$\Gamma_n = \frac{i|eB|}{2^{n+1}\pi n}\int d^2X_{||}\mathbf{Tr}\left[\{V_n^{A_1\ldots A_n}(-i\hat{\nabla}_1^{\perp}, \ldots, -i\hat{\nabla}_n^{\perp})\right.$$

$$\left. \times \hat{\phi}^{A_1}(\hat{X}_1^{\perp})\ldots\hat{\phi}^{A_n}(\hat{X}_n^{\perp})\}_{\hat{X}_1^{\perp}=\hat{X}_2^{\perp}=\ldots=\hat{X}^{\perp}}\right]. \tag{2.116}$$

Зрозуміло, що такі некомутативні квантовопольові теорії є більш складними ніж теорії типу I, які розглядались вище. Ми будемо називати такі теорії нелокальними некомутативними КТП II типу. Ми показали в роботі [85], що КЕД в режимі $N_f \gg 1$ дає приклад теорії I типу. В наступному параграфі ми розглянемо КЕД в режимі слабкого зв‘язку в сильному магнітному полі і покажемо, що така теорія дає приклад теорії II типу.

2.3.3. КЕД в режимі слабкого зв‘язку у сильному магнітному полі як нелокальна некомутативна КТП II типу.

Згідно з аналізом в параграфі 2.3.1 інтегральне рівняння для $F(p_{||}; P_{\perp})$ в режимі слабкого зв‘язку $\tilde{\alpha}_b$ має вигляд

$$F(p_{||}; P_{\perp}) = 8\pi\alpha_b\lambda(P_{\perp})\int \frac{d^2u_{\perp}d^2k_{||}}{(2\pi)^4}\frac{F(k_{||}; P_{\perp})}{k_{||}^2 + m_{dyn}^2}\frac{e^{iP_{\perp}\times u_{\perp}}e^{-\frac{\vec{u}_{\perp}^2}{2|eB|}}}{(k_{||} - p_{||})^2 + \vec{u}_{\perp}^2 + M_{\gamma}^2}, \tag{2.117}$$

де m_{dyn} визначена в рівнянні (2.76). Залежність від повздовжних і поперечних імпульсів в ядрі цього рівняння не є факторизованою і тому функція $F(p_{||}; P_{\perp})$ також не факторизується, що означає, що данна теорія визначає деяку нелокальну некомутативну квантову теорію поля II типу. Згідно з аналізом в попередньому параграфі відповідні вершинні функції можуть бути представлені у вигляді стар добутку в формі (2.113) в координатному просторі або в формі (2.116) в некомутативному просторі.

Для того, щоб підкреслити відмінність досліджуваної динаміки від динаміки теорій з локальною взаємодією, ми проаналізуємо спеціальний випадок $P_\perp^2 \gg |eB|$. Ми покажемо, що в цьому випадку функція $F(p_{||}; P_\perp)$ майже не залежить від $p_{||}$ і тому, здавалось би, КЕД у сильному зовнішньому магнітному полі в цьому випадку може бути розглянута в наближенні найнижчого рівня Ландау як деяка некомутативна квантова теорія теорія I типу. Однак, як ми покажемо пізніше, форм-фактор в цій теорії дуже сильно відрізняється від гаусового форм-фактора, який має місце в НЙЛ моделі. Цей факт пов'язан з далекодіючим характером КЕД взаємодії.

Перш ніж аналізувати інтегральне рівняння (2.117) для $P_\perp^2 \gg |eB|$ ми розглянемо інтеграл

$$I = \int \frac{d^2 u_\perp}{(2\pi)^2} \frac{e^{iP_\perp \times u_\perp} e^{-\frac{\vec{u}_\perp^2}{2|eB|}}}{q_{||}^2 + \vec{u}_\perp^2 + M_\gamma^2} = \int \frac{d^2 u_\perp}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\vec{\Delta}_\perp \vec{u}_\perp} e^{-\frac{\vec{u}_\perp^2}{2|eB|}}}{q_{||}^2 + \vec{u}_\perp^2 + M_\gamma^2}, \tag{2.118}$$

де $q_{||} = k_{||} - p_{||}$, $\vec{\Delta}_\perp = \frac{\vec{P}_\perp}{eB}$ і ми виконали заміну змінних $u_\perp^1 \to -u_\perp^2$, $u_\perp^2 \to u_\perp^1$ в останній нерівності. Представляючи $e^{-\vec{u}_\perp^2/2|eB|}$ і $(q_{||}^2 + \vec{u}_\perp^2 + M_\gamma^2)^{-1}$ через їх Фур'є образи, ми маємо

$$I = \int d^2 \Delta_{\perp 1} \, \frac{|eB| \, e^{-\frac{|eB| \vec{\Delta}_{\perp 1}^2}{2}}}{2\pi} \; \frac{K_0(|\vec{\Delta}_\perp - \vec{\Delta}_{\perp 1}| \sqrt{q_{||}^2 + M_\gamma^2})}{2\pi}, \tag{2.119}$$

де $K_0(z)$ - функція Беселя уявного аргумента [197]. Для $P_\perp^2 \gg |eB|$, коли $|\vec{\Delta}_\perp| \gg 1$, ми можем знехтувати залежністю K_0 від $\vec{\Delta}_{\perp 1}$. Тоді використовуючи асимптотики $K_0(z)$ для $z \to +\infty$ ми знаходимо, що

$$I \approx \frac{1}{2} \left(\frac{|eB|}{2\pi |P_\perp| (q_{||}^2 + M_\gamma^2)^{1/2}} \right)^{1/2} e^{-\frac{|P_\perp| (q_{||}^2 + M_\gamma^2)^{1/2}}{|eB|}}, \tag{2.120}$$

де $|P_\perp| \equiv \sqrt{\vec{P}_\perp^2}$. Очевидно, що інтеграл (2.120) як функція $q_{||}$ експоненційно зменшується починаючи з M_γ. Тому достатньо взяти до уваги тільки область

$q_{||} \leq M_\gamma$ і тоді наближенно I дорівнює

$$I \approx \frac{1}{2}\left(\frac{|eB|}{2\pi|P_\perp|M_\gamma}\right)^{1/2} e^{-\frac{|P_\perp|M_\gamma}{|eB|}}. \qquad (2.121)$$

Таким чином, для $P_\perp^2 \gg |eB|$ ми можем проінтегрувати в правій частині рівняння (2.117) по $k_{||}^2$ до M_γ^2 і використати рівняння (2.121) для I. Це означає, що для великих $P_\perp^2$ функція $F(p_{||}; P_\perp)$ не залежить від $p_{||}$. Тоді з рівняння (2.117) випливає, що

$$\lambda_W(P_\perp) \simeq \frac{1}{\alpha_b \ln \frac{M_\gamma^2}{m_{dyn}^2}}\left(\frac{2\pi|P_\perp|M_\gamma}{|eB|}\right)^{1/2} e^{\frac{|P_\perp|M_\gamma}{|eB|}}. \qquad (2.122)$$

Якщо ми покладемо $F(P_\perp) = 2\lambda_W^{1/2}(P_\perp)$, тоді з рівняння (2.105) ми знаходимо наступний піонний пропагатор

$$D^{AB}(P_\perp) = \frac{8\pi^2\delta_{AB}}{|eB| \ln \frac{M_\gamma^2}{m_{dyn}^2}(1 - \lambda_W^{-1}(P_\perp))}. \qquad (2.123)$$

Використовуючи (2.104) ми маємо наступні вершинні функції

$$\Gamma_n = \frac{2\pi i|eB|}{n}\int d^2X_{||}\int \frac{d^2k_{||}}{(2\pi)^2}\int \frac{d^2P_1^\perp}{(2\pi)^2}\cdots\frac{d^2P_n^\perp}{(2\pi)^2}\,\delta^2(\sum_{i=1}^n \vec{P}_i^\perp)$$
$$\times\ \mathrm{tr}\left[S_{||}(k_{||})\gamma^5\bar{\pi}(P_1^\perp)\frac{1-i\gamma^1\gamma^2}{2}\dots S_{||}(k_{||})\bar{\pi}(P_n^\perp)\gamma^5\frac{1-i\gamma^1\gamma^2}{2}\right]$$
$$\times\Pi_{i=1}^n\,\lambda_W^{-1/2}(P_i^\perp)\,e^{-\frac{i}{2}\sum_{i<j}P_i^\perp\times P_j^\perp}. \qquad (2.124)$$

Тепер ми можемо порівняти (2.123) і (2.124) з їх відповідними аналогами (2.42) і (2.25) у випадку локальної взаємодії. В той час, як поведінка пропагаторів (2.42) і (2.123) є подібною для $P_\perp^2 \gg |eB|$, поведінка вершинних функцій (2.25) і (2.124) сильно відрізняється. Форм-фактор в вершинах взаємодії (2.25) має гаусову форму $e^{-\frac{\sum_i P_{i\perp}^2}{4|eB|}}$. Форм-фактор (2.124) є пропорційним $e^{\frac{-|P_\perp|M_\gamma}{2|eB|}}$ і тому зменшується набагато слабкіше при великих $P_\perp^2$. Причина цього полягає в нелокальному характері КЕД взаємодії. Для того, щоб побачити це ще більш виразно ми порівняємо інтегральні рівняння в теоріях з локальною і нелокальною взаємодіями. Перехід до локальної взаємодії пов‘язан із заміною пропагатора $[(k_{||}-p_{||})^2+\vec{u}_\perp^2+M_\gamma^2)]^{-1}$ в рівнянні (2.117) на константу M_γ^{-2}. В свою чергу це призводить до заміни функції Беселя $K_0(|\vec{\Delta}_\perp-\vec{\Delta}_{\perp 1}|\sqrt{q_{||}^2+M_\gamma^2})$ в рівнянні (2.119) дельта-функцією $2\pi/M_\gamma^2\ \delta^2(\vec{\Delta}_\perp-\vec{\Delta}_{\perp 1})$. Підстановка дельта-функції в рівняння (2.119) дає гаусовий форм-фактор, який є характерним для теорії з локальною взаємодією.

Таким чином, кіральна динаміка в КЕД в сильному магнітному полі описується складною нелокальною некомутативною КТП. Структура нейтральних станів і прояв нелокальності в КЕД в сильному магнітному полі є більш багатими порівняно з випадком НЙЛ моделі, яка має локальну взаємодію. Слід відзначити, що нелокальні некомутативні теорії можуть знайти своє застосування не тільки в теоріях фізики елементарних частинок, але також і в квантових системах фізики конденсованого стану, наприклад такій важливий як графен, який ми будемо розглядати в Розділі 5.

РОЗДІЛ 3

ДИНАМІЧНЕ ПОРУШЕННЯ СИМЕТРІЇ І ГЕНЕРАЦІЯ МАСИ В КВАНТОВОПОЛЬОВИХ ТЕОРІЯХ У ВИКРИВЛЕНОМУ ПРОСТОРІ

Поряд із електромагнітним в природі існує інше поле, яке може бути класичним. Це гравітаційне поле. Зрозуміло, що як і зовнішне електромагнітне поле, гравітаційне поле може впливати на динаміку порушення симетрії. Для переважної більшості об'єктів і систем у Всесвіті гравітаційні поля є дуже слабкими. Наприклад, в межах Сонячної системи гравітаційний потенціал не перевищує значення 10^{-6}, на поверхні нейтронних зірок гравітаційний потенціал досягає значень 10^{-1} і тільки поблизу горизонту чорної дірки він є порядка одиниці. Слід зазначити також, що гравітаційні поля були дуже сильними також на ранніх стадіях еволюції Всесвіту одразу після Великого Вибуху.

Інтерес до теорії квантованних полів в зовнішньому гравітаційному полі (особливо сильному) обумовлений тим, що розгляд квантових ефектів навіть у класичному гравітаційному полі може пролити світло на деякі аспекти квантової гравітації. Згадаємо, що в перші роки створення квантової теорії в атомній фізиці електромагнітне поля розглядалось як класичне зовнішне поле, яке взаємодіє з квантованною матерією. Таке з точки зору квантової електродинаміки напівкласичне наближення дозволило отримати деякі результати, які повністю узгоджуються з точними квантово-електродинамічними розрахунками. Тому ми можемо сподіватися, що подібна ситуація буде справедливою і для тих задач квантової гравітації для яких достатньо розглядати гравітаційне поле як класичний фон, в той час як матеріальні поля є квантованними звичайним чином.

Квантова теорія поля у викривленому просторі-часі [202, 203, 204, 205] почала активно розвиватися в 60-их роках минулого століття. В той же час був розвинутий метод ядра теплопровідності для знаходження пропагаторів квантових полів у викривленому просторі-часі і коефіцієнтів ДеВітта–Сілі–Джілкі для розкладу ядра теплопровідності [202]. Говорячи про квантову теорію поля у викривленому просторі-часі не можна не згадати про процес народження частинок гравітаційним полем [64, 65] та ефект Унру [206], згідно якому детектор, який рухається з постійним прискоренням буде реєструвати частинки у просторі Мінковського. Безумовно, перлиною квантової теорії поля в зовнішньому гравітаційному полі є ефект Хокінга [66, 67] випромінювання частинок чорною діркою. Спектр випромінювання має тепловий характер, тобто чорна діра характеризується ефективною температурою підтверджуючи тим самим інтригуючий зв'язок між фізикою чорних дір і термодинамікою встановлений в роботах Бекенштейна [207, 208, 209].

У Вступі ми зазначали, що динаміка ферміонів в гіперболічних просторах H^n є третім відомим прикладом динамічного порушення симетрії в режимі слабкого зв'язку, крім випадків магнітного каталізу і динамічного порушення симетрії в присутності поверхні Фермі. В роботах [210, 211, 212, 213, 214] було досліджено динамічне порушення у просторах постійної від'ємної кривизни і показано, що від'ємна кривизна сприяє ДПС, більш того, критична константа зв'язку дорівнює нулю. Дуже корисною є також робота [215], де зроблено огляд динамічного порушення симетрії у викривленому просторі-часі. У Розділі 1 ми розглянули вплив постійного магнітного поля на ДПС, яке як і від'ємна кривизна сприяє порушенню симетрії. Слід очікувати, що комбінований вплив постійного магнітного поля і постійної від'ємної кривизни простору також сильно сприяє динамічному порушенню симетрії. Дослідження виконані в роботі [216] підтвердили ці очікування. Однак хоча в цій роботі постійне магнітне поле було враховано точно, гравітаційне поле було розглянуто тільки в наближенні слабкої кривизни.

В першому параграфі даного розділу ми проаналізуємо комбінований вплив магнітного поля і від‘ємної кривизни не використовуючи наближення слабкої кривизни, а причини нульового значення критичної константи зв‘язку для ДПС в гіперболічних просторах будуть з‘ясовані в другому параграфі. В останньому третьому параграфі цього розділу ми обчислимо ефективну гравітаційну дію в теоріях з порушенням симетрії і з'ясуємо закон відщеплення масивних частинок в таких теоріях при низьких енергіях. Слід також відзначити, що ефективна дія є важливим об'єктом в теорії гравітації і з нею пов'язані такі квантовогравітаційні явища, як конформні аномалії, фазові переходи, народження частинок зовнішніми полями та квантові поправки к класичним рівнянням Айнштайна.

3.1. Генерація маси для ферміонів на площині Лобачевського в зовнішньому магнітному полі

Для того, щоб дослідити комбінований вплив постійного магнітного поля і від‘ємної кривизни на динамічне порушення симетрії ми розглянемо порушення кіральної симетрії і генерацію маси для ферміонів у зовнішньому коваріантно постійному магнітному полі в $R \times H^2$ просторі-часі, де H^2 є двовимірний гіперболічний простір відомий як площина Лобачевського. Відзначимо також, що крім чисто академічного інтересу ця модель може бути цікавою з точки зору теорії деяких систем конденсованого стану [217, 218, 219]. Так зокрема квантовий ефект Хола для двовимірного електронного газу на поверхні постійної від‘ємної кривизни був досліджений в роботі [217]. Хоча глобальна поверхня Лобачевського не може бути експериментально реалізована, відзначимо, що квазічастинки, які взаємодіють з домішками або дефектами в графені в деяких випадках можуть бути описані ефективним рівнінням Дірака у викривленому просторі. Наприклад, заміна деяких шестикутників п‘ятикутниками (семикутниками) в гексагональній гратці графена призводить до викривлення листа графена і індукує позитивну (від‘ємну) кривизну [219]. Кривизна листа графена впливає на густину станів і транспортні властивості (в тому числі і квантовий ефект Хола), які можуть бути спостережені експериментально.

3.1.1. Модель Намбу-Йона-Лазініо на площині Лобачевського в постійному магнітному полі. Площина Лобачевського (двовимірний гіперболічний простір) є найпростішим прикладом простору з постійною від‘ємною кривизною. В координатах Пуанкаре інтервал для статичного простору-часу $R \times H^2$ визначається формулою

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a^2}{y^2}(dx^2 + dy^2), \tag{3.1}$$

де $y > 0$ і a - радіус кривизни площини Лобачевського. Вектор-потенціал $\vec{A} = (\frac{Ba^2}{y}, 0)$ визначає коваріантно постійне магнітне поле в площині Лобачевського. Ненульові компоненти електромагнітного тензора дорівнюють $F_{12} = -F_{21} = Ba^2/y^2$ (відзначимо, що на відміну від випадку плоского простору-часу компоненти $F_{12} = -F_{21}$ залежать від y) і, як легко, перевірити відповідний тензор $F_{\mu\nu}$ є коваріантно постійним, тобто $\nabla^\alpha F_{\mu\nu} = 0$.

Дія чотирьохферміонної моделі типу Грос-Невье з N_f ароматами ферміонів у (2+1)-вимірному просторі-часі визначається наступним рівнянням

$$S = \int d^3x\sqrt{-g}\left[\sum_{k=1}^{N_f}\bar{\psi}_k i\gamma^\mu\nabla_\mu\psi_k + \frac{G}{2N_f}(\sum_{k=1}^{N_f}\bar{\psi}_k\psi_k)^2\right], \tag{3.2}$$

де $g = \det(g_{\mu\nu})$ - детермінант метрики, $\nabla_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + i\omega_\mu^{ab}\sigma_{ab}$ - коваріантна похідна із спіновою зв‘язністю ω_μ^{ab}, γ^μ матриці у викривленому просторі-часі зв‘язані з матрицями Дірака у плоскому просторі-часі за допомогою тетрад $\gamma^\mu = e_a^\mu\gamma^a$ і ми також використовуємо звідне чотирьохвимірне представлення алгебри Дірака. Модель (3.2) (з $N_f = 2$) у плоскому просторі-часі була нещодавно запропонована [220] як низькоенергетична модель взаємодіючих електронів в графені. Дія (3.2) є інваріантною відносно $U(1) \times U(1)$ неперервних перетворень $\psi \to e^{i\alpha}\psi$, $\psi \to e^{i\theta\gamma_3\gamma_5}\psi$, а також дискретних кіральних перетворень $\psi \to -i\gamma_3\psi, \quad \psi \to \gamma_5\psi$. Масовий член $m\bar{\psi}\psi$ порушує кіральну симетрію і є інваріантним відносно вищезгаданих неперерних перетворень.

Для дослідження порушення симетрії в цій моделі зручно використати метод допоміжного поля Хабарда–Стратоновича [110, 111] і представити дію (3.2) в еквівалентній формі

$$S = \int d^3x\sqrt{-g}\left[\sum_{k=1}^{N_f}\left(i\bar{\psi}_k\gamma^\mu\nabla_\mu\psi_k - \sigma\bar{\psi}_k\psi_k\right) - \frac{N_f}{2G}\sigma^2\right], \tag{3.3}$$

де $\sigma(x)$ - допоміжне поле. Якщо σ має ненульове вакуумне середне, тоді ферміони отримують масу і симетрії пов‘язані з дискретними кіральними $-i\gamma_3$ і γ_5 перетвореннями є спонтанно порушеними. Інтегруючи по ферміонним полям, знаходимо ефективну дію для поля σ

$$\Gamma(\sigma) = -\int d^3x\sqrt{-g}\,\frac{N_f\sigma^2}{2G} - i\text{Ln Det}(i\gamma^\mu\nabla_\mu - \sigma(x)). \tag{3.4}$$

Ефективний потенціал $V(\sigma)$ обчислюється для постійного $\sigma(x) = \text{const}$ і дорівнює

$$V(\sigma) = -\frac{\Gamma(\sigma)}{\int d^3x\sqrt{-g}}.$$

Використовуючи формулу $\ln(H - i\epsilon) = -\int\limits_0^\infty \exp[-it(H - i\epsilon)]dt/t$ для логарифма H, ми маємо

$$\text{Ln Det}(i\gamma^\mu\nabla_\mu - \sigma) = \frac{1}{2}\text{Tr Ln}(\partial_0^2 + D^2 + \sigma^2) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{dt}{t}\,\text{Tr}\exp[-i(\partial_0^2 + D^2 + \sigma^2)t],$$

де $D = \vec{\gamma}\vec{\nabla}$ і Tr обчислюється як функціональний слід. Далі ми знаходимо

$$\text{Ln Det}(i\gamma^\mu\nabla_\mu - \sigma) = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dt}{t}\,e^{ik_0^2 t}\text{Tr}e^{-i(D^2+\sigma^2)t}$$

$$= \frac{-iN_f}{2(4\pi)^{1/2}} \int d^3x\sqrt{-g} \int\limits_0^\infty \frac{ds}{s^{3/2}} \mathrm{tr}\langle \mathbf{x}|e^{-s(D^2+\sigma^2)}|\mathbf{x}\rangle, \tag{3.5}$$

де tr є звичайний слід по діраківським індексам і в другому рівнянні ми деформували контур інтегрування $t \to -is$.

Рівняння для щілини $dV/d\sigma = 0$ визначає динамічно згенеровану масу для ферміонів, однак перш ніж аналізувати це рівняння ми розглянемо динаміку вільних електронів на площині Лобачевського у присутності постійного зовнішнього магнітного поля.

3.1.2. Вільні електрони на площині Лобачевського в постійному магнітному полі. Енергетичний спектр і власні функції оператора Дірака на площині Лобачевського у зовнішньому коваріантно постійному магнітному полі були знайдені в роботі [221]. Порівняно з задачею Ландау для плоского простору, ненульова кривизна площини Лобачевського якісно змінює енергетичний спектр, який складається із дискретної частини (ми вважаємо, що $eB > 0$)

$$E_n = \pm\sqrt{\sigma^2 + \frac{b^2 - (n-b)^2}{a^2}}, \tag{3.6}$$

де $n = 0, 1, ...,\ \ 0 \le n < b\,,\ b = eBa^2$ і неперервної частини

$$E_\nu = \pm\sqrt{\sigma^2 + \frac{b^2 + \nu^2}{a^2}}, \tag{3.7}$$

де $0 \le \nu < \infty$. В границі $a \to \infty$ неперервна частина спектру зникає (прямує до нескінченності), а $E_n \to \pm\sqrt{\sigma^2 + 2neB}$, тобто спектр (3.6), (3.7) переходить в спектр Ландау в плоскому просторі.

Власні функції дискретного спектра мають вигляд

$$\psi^{(d)}_{0,k}(x,y) = \frac{e_-}{a} f_0(k, b + \frac{1}{2}; x, y), \quad k < 0,$$
$$\psi^{(d)}_{\alpha,n,k}(x,y) = \frac{e_\alpha}{a} f_{n+\frac{\alpha-1}{2}}(k, b - \frac{\alpha}{2}; x, y), k < 0, n = 1, 2, ..., 1 \le n < b. \tag{3.8}$$

Величина α приймає значення +1 і -1, $\{e_+, e_-\}$ є ортонормованими власними векторами матриці $\gamma^1\gamma^2$: $\gamma^1\gamma^2 e_\pm = \pm i e_\pm$, а функції f_n визначаються формулою

$$f_n(k,\beta;x,y) = \sqrt{\frac{n!(2\beta-2n-1)}{4\pi|k|\Gamma(2\beta-n)}} e^{-ikx} e^{-|k|y} (2|k|y)^{\beta-n} L_n^{(2\beta-2n-1)}(2|k|y), \quad (3.9)$$

де $L_n^{(\alpha)}(z)$ є асоційованими поліномами Лагера [197]. Відзначимо, що для фіксованого k найнижчий рівень дискретного спектра є невиродженим на відміну від вищих рівнів $n \geq 1$, які є двократно виродженими, тобто ситуацію повністю подібна до спектра Ландау для плоского простору.

Власні функції неперервного спектра мають наступний вигляд

$$\psi^{(c)}_{\alpha,\nu,k}(x,y) = \frac{e_\alpha}{a} f(\nu,k,|b-\frac{\alpha}{2}|;x,y), \quad k(b-\frac{\alpha}{2}) > 0, \quad (3.10)$$

де

$$f(\nu,k,\beta;x,y) = \sqrt{\frac{\nu\sinh(2\pi\nu)}{4\pi^3|k|}} |\Gamma(i\nu-\beta+\frac{1}{2})| e^{-ikx} z^{1/2} e^{-z/2}$$
$$\times \left[\frac{\Gamma(i\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\nu-\beta)} z^{-i\nu} M(\frac{1}{2}-i\nu-\beta, 1-2i\nu; z) + h.c.\right], \quad z = 2|k|y, \quad (3.11)$$

а $M(a,b;z)$ - вироджена гіпергеометрична функція. Використовуючи приведені вище власні функції, знаходимо ядро теплопровідності для оператора $D^2+\sigma^2$ в (3.5) (дивись [221]),

$$\mathrm{tr} < \mathbf{x}|e^{-s(D^2+\sigma^2)}|\mathbf{x} >= \frac{1}{\pi a^2}\left\{ b e^{-s\sigma^2} + 2\sum_{n=1}^{[b]} (b-n) e^{-s(\sigma^2+\frac{2nb-n^2}{a^2})} \right.$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\nu\,\nu\, e^{-s(\sigma^2+\frac{b^2+\nu^2}{a^2})}\ \mathrm{Im}\,[\,\psi(i\nu-b)$$
$$\left. + \psi(i\nu-b+1) + \psi(i\nu+b+1) + \psi(i\nu+b)\,]\right\}, \quad (3.12)$$

де $[b]$ є найбільше ціле число таке, що $[b] \leq b$. Згідно [197],

$$\mathrm{Im}\,[\psi(i\nu-b) + \psi(i\nu-b+1) + \psi(i\nu+b+1) + \psi(i\nu+b)]$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\nu}{\nu^2+(k-b)^2} \quad (3.13)$$

і сума в рівнянні (3.13) дорівнює

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\nu}{\nu^2+(k-b)^2} = \frac{2\pi\sinh(2\pi\nu)}{\cosh(2\pi\nu)-\cos(2\pi b)}. \tag{3.14}$$

Остаточно ми маємо

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\langle\mathbf{x}|e^{-s(D^2+\sigma^2)}|\mathbf{x}\rangle = \frac{1}{\pi a^2}\Bigg[& be^{-s\sigma^2} + 2\sum_{n=1}^{[b]}(b-n)e^{-s(\sigma^2+\frac{2nb-n^2}{a^2})} \\ &+ 2\int_0^\infty d\nu\nu\, e^{-s(\sigma^2+\frac{b^2+\nu^2}{a^2})}\frac{\sinh(2\pi\nu)}{\cosh(2\pi\nu)-\cos(2\pi b)}\Bigg].\end{aligned} \tag{3.15}$$

3.1.3. Густина станів і холівська провідність. Використовуючи ферміонну функцію Гріна

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}';E+i\epsilon) = \langle\mathbf{x}|\frac{1}{\gamma^0(E+i\epsilon)-i\vec{\gamma}\vec{D}-\sigma}|\mathbf{x}'\rangle\,,$$

обчислимо густину станів для невзаємодіючої теорії яка визначається формулою

$$\begin{aligned}\rho(E) &= -\frac{N_f}{\pi V}\int d^2x\mathrm{tr}[\gamma^0\mathrm{Im}G(\mathbf{x},\mathbf{x};E+i\epsilon)] \\ &= \frac{N_f}{\pi}\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\langle\mathbf{x}|\frac{E}{D^2+\sigma^2-(E+i\epsilon)^2}|\mathbf{x}\rangle,\end{aligned} \tag{3.16}$$

де V є об‘єм простору який скорочується у другому рівнянніяі, тому що діагональні матричні елементи оператора D^2 не залежать від $\mathbf{x}$ (дивись рівняння (3.15)) в силу однорідності площини Лобачевського. Інтегруючи (3.15) по s від 0 до ∞, виконуючи заміну σ^2 на $\sigma^2-(E+i\epsilon)^2$, і знаходячи уявну частину, ми маємо

$$\begin{aligned}\rho(E) = \frac{N_f eB}{2\pi}[\delta(E-\sigma)+\delta(E+\sigma)] + \frac{N_f}{\pi a^2}\sum_{n=1}^{[b]}(b-n)[\delta(E-E_n)+\delta(E+E_n)] \\ +\frac{N_f|E|}{\pi}\,\theta\left(|E|-\sqrt{\sigma^2+\frac{b^2}{a^2}}\right)\frac{\sinh(2\pi\nu(E))}{\cosh(2\pi\nu(E))-\cos(2\pi b)},\end{aligned} \tag{3.17}$$

де

$$E_n = \sqrt{\sigma^2 + \frac{2nb - n^2}{a^2}}, \quad \nu(E) = \sqrt{a^2(E^2 - \sigma^2) - b^2}. \tag{3.18}$$

Перші два члена в рівнянні (3.17) відповідають дискретному спектру, а останній член пов‘язаний з неперервним спектром.

Легко перевірити, що в плоскому просторі ($a = \infty$) густина станів визначена (3.17) зводиться до густини станів в роботі [226]. З іншого боку, у відсутності магнітного поля ($B = 0$) ми маємо

$$\rho(E) = \frac{N_f|E|}{\pi}\theta(|E| - \sigma)\coth(\pi a\sqrt{E^2 - \sigma^2}). \tag{3.19}$$

Для безмасових ферміонів ($\sigma \to 0$) густина станів (3.19) залишається скінченною при $E = 0$,

$$\rho(0) = \frac{N_f}{\pi^2 a}, \tag{3.20}$$

на відміну від випадку плоского простору де вона зникає як $\rho(E) \sim |E|$ для $E \to 0$.

У випадках сильного магнітного поля або великого радіуса кривизни коли $e^2B^2a^2 > \mu^2 - \sigma^2$ енергетичний спектр для станів нижче рівня Фермі μ є тільки дискретним, тому останній член в (3.17) пов‘язаний з неперервним спектром є відсутнім. В цьому випадку число станів нижче рівня Фермі $N(\mu)$ може бути легко обчислено використовуючи відповідне рівняння в роботі [226],

$$N(\mu) = V\mathrm{sign}(\mu)\int\limits_0^{|\mu|} dE\rho(E) = \frac{N_f V}{2\pi a^2}\mathrm{sign}(\mu)\left[b + (2b - n_{max} - 1)n_{max}\right], \tag{3.21}$$

де n_{max} дорівнює числу максимально заповнених станів

$$n_{max} = \left[b - \sqrt{b^2 - a^2(\mu^2 - \sigma^2)}\right],$$

а $[x]$ означає цілу частину від x. Використовуючи рівняння (3.21) і формулу Стреда [227], ми знаходимо холівську провідність

$$\sigma_{xy}(\mu, B) = -\frac{e}{V}\frac{\partial N(\mu)}{\partial B}, \; e > 0, \tag{3.22}$$

яка справедлива коли рівень Фермі лежить в енергетичній щілині. В цьому випадку ціла частина від $b-\sqrt{b^2-a^2(\mu^2-\sigma^2)}$ є постійною і ми маємо

$$\sigma_{xy}(\mu,B) = -\mathrm{sign}(\mu)\frac{N_f e^2}{\pi}\left(\frac{1}{2}+[b-\sqrt{b^2-a^2(\mu^2-\sigma^2)}]\right). \tag{3.23}$$

Як випливає з рівняння (3.23), залежність холівської провідності від магнітного поля має добре знайомий шагоподібний характер. Для $a\to\infty$ ми знаходимо

$$\sigma_{xy}(\mu,B) = -\mathrm{sign}(\mu)\frac{N_f e^2}{\pi}\left(\frac{1}{2}+[\frac{\mu^2-\sigma^2}{2eB}]\right). \tag{3.24}$$

Для безмасових ферміонів коли $\sigma=0$, холівська провідність (3.24) співпадає з відповідним виразом в роботі [218], який описує аномальний КЕХ в графені. Напівціле квантування холівської провідності зв‘язано з тим, що найнижчий рівень Ландау є в два рази менше виродженним ніж інші рівні. Як ми бачимо, напівціле квантування холівської провідності залишається справедливим для ферміонів на площині Лобачевського в коваріантно постійному магнітному полі. Присутність ненульової від‘ємної кривизни зсуває переходи між плато (які пов‘язані з перетином хімічним потенціалом дискретних енергетичних рівнів) в холівській провідності до вищих значень магнітного поля

$$B_n = \frac{\mu^2-\sigma^2}{2en}+\frac{n}{2ea^2}, \tag{3.25}$$

а також зменшує ширину плато

$$\Delta B = \frac{\mu^2-\sigma^2}{2en(n+1)}-\frac{1}{2ea^2}, \tag{3.26}$$

що справедливо також у випадку нерелятивістських електронів [217].

3.1.4. Рівняння для щілини і розв‘язки.

Рівняння для щілини $dV/d\sigma=0$ має вигляд

$$\sigma = \frac{G\sigma}{\pi}(\Lambda-\sigma)+\frac{G\sigma}{\pi a}\left[\frac{b}{2\sigma a}+\sum_{n=1}^{[b]}\frac{b-n}{\sqrt{(\sigma a)^2+2bn-n^2}}\right.$$

$$+\int\limits_0^\infty \frac{d\nu\nu}{\sqrt{\nu^2+b^2+(\sigma a)^2}}\left(\frac{\sinh(2\pi\nu)}{\cosh(2\pi\nu)-\cos(2\pi b)}-1\right)\Bigg], \tag{3.27}$$

де Λ - ультрафіолетовий параметр обрізання. В загальному випадку розв'язки рівняння (3.27) можуть бути знайдені тільки чисельно, аналітично же ми знайдемо розв'язки у випадках слабкого $b \ll 1$ і сильного $b \gg 1$ магнітних полів.

У випадку слабкого магнітного поля ми можемо знехтувати b^2 і членами вищого порядку в рівнянні (3.27). В результаті рівняння для щілини приймає наступний вигляд

$$\pi\sigma a = \pi(\Lambda - \frac{\pi}{G})a + \frac{\pi b}{2\sigma a} + \int\limits_0^\infty \frac{d\nu\nu(\coth\nu - 1)}{\sqrt{\nu^2+(\pi\sigma a)^2}}. \tag{3.28}$$

Зрозуміло, що у випадку слабкого магнітного поля ми можемо шукати рішення у вигляді $\sigma = m_{dyn}^{(0)} + Cb$, де $m_{dyn}^{(0)}$ є розв'язок у випадку $B = 0$. В результаті знаходимо

$$m_{dyn} \equiv \bar{\sigma} = m_{dyn}^{(0)}\left(1 + \frac{eB}{2(m_{dyn}^{(0)})^2}\right), \tag{3.29}$$

тобто динамічна маса завжди збільшується з ростом B. Важливо зазначити, що рівняння для щілини (3.27) при $B \neq 0$ не має трівіального розв'язку $\bar{\sigma} = 0$. Це означає, що критичне значення константи зв'язку G дорівнює нулю якщо магнітне поле $B \neq 0$. Нагадаємо, що цей факт у випадку плоского простору був встановлений в роботах [68, 69].

Для сильного магнітного поля $b \gg 1$, перш за все потрібно визначити лідируючу асимптотику в сумі по n в рівнянні (3.27) для $b \to \infty$. Ми маємо

$$\sum_{n=1}^{b} \frac{b-n}{\sqrt{\sigma^2 a^2 + 2nb - n^2}} = b\sum_{n=1}^{b} \frac{1}{b}\frac{1-\frac{n}{b}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 a^2}{b^2} + \frac{2n}{b} - \frac{n^2}{b^2}}}. \tag{3.30}$$

Далі для $b \to \infty$ виконуючи заміну $\frac{1}{b} \to dx$ і заміняючи суму по n інтегралом відносно x сума (3.30) апроксимується наступним інтегралом

$$I = b\int_{\frac{1}{b}}^{1} dx \frac{1-x}{\sqrt{\frac{\sigma^2 a^2}{b^2} + 2x - x^2}} = \sqrt{b^2+\sigma^2 a^2} - \sqrt{2b-1+\sigma^2 a^2}.$$

Таким чином, ми отримуємо наступне рівняння для щілини

$$\sigma = \frac{G}{\pi a^2}\left[\frac{b}{2} + \sigma a I + \Lambda\sigma a^2 - \sigma a\sqrt{b^2+(\sigma a)^2}\right.$$

$$\left. + \sigma a \int\limits_0^\infty \frac{d\nu\nu}{\sqrt{\nu^2+b^2+(\sigma a)^2}}\left(\frac{\sinh(2\pi\nu)}{\cosh(2\pi\nu)-\cos(2\pi b)} - 1\right)\right]. \qquad (3.31)$$

Знайдемо розв‘язки цього рівняння у випадках $\sigma a \ll b$ і $\sigma a \gg b$. В першому випадку для $\sigma a \ll b$ інтеграл $I \simeq b - \sqrt{2b}$ і тому ми можемо знехтувати інтегралом в рівнянні (3.31), який дає внесок порядка $1/b$. В результаті ми знаходимо розв‘язок

$$m_{dyn} = \bar{\sigma} = \frac{Gb/(2\pi a^2)}{1 - \frac{G\Lambda}{\pi} + \frac{G\sqrt{2eB}}{\pi}} \approx \frac{Gb/(2\pi a^2)}{1 - \frac{G\Lambda}{\pi}}, \qquad (3.32)$$

який є справедливим при $G < \pi/\Lambda$, тобто цей розв‘язок відповідає режиму слабкого зв‘язку. Легко перевірити, що умова $\sigma a \ll b$ дійсно задовольняється, тому що

$$m_{dyn} = \bar{\sigma} \approx \frac{Gb}{2\pi a^2} = \frac{GeB}{2\pi} \qquad (3.33)$$

в режимі слабкого зв‘язку. Розв‘язок (3.33) не залежить від a і повністю еквівалентний розв‘язку для плоского простору у зовнішньому магнітному полі. Звичайно цей результат є цілком природнім, тому що у випадку сильного магнітного поля $eB \gg 1/a^2$ ми можемо знехтувати малими поправками пов‘язаними з кривизною простору. Далі легко перевірити, що розв‘язок (3.33) задовольняє умову $\bar{\sigma} a \ll b$, тому що $G \ll 2\pi a$.

В іншому випадку $\sigma a \gg b$ інтеграл $I \simeq b^2/(2\sigma a)$ і ми отримуємо

$$\sigma \approx \frac{G}{\pi a^2}(\frac{b^2}{2} + \sigma\Lambda a^2 - \sigma^2 a^2), \qquad (3.34)$$

що дає

$$m_{dyn} = \bar{\sigma} = \frac{m^* + \sqrt{m^{*2} + \frac{2b^2}{a^2}}}{2} \approx m^* + \frac{e^2B^2a^2}{2m^*}, \tag{3.35}$$

де $m^* = \Lambda - \frac{\pi}{G}$ є розв'язком в плоскому просторі ($a = \infty$). З умови $\sigma a \gg b$ випливає, що $m^{*2} = (\Lambda - \frac{\pi}{G})^2$ повинно бути набагато більшим від $2b^2/a^2$. Тому цей розв'язок існує для $G > \pi/\Lambda$, тобто є розв'язком в режимі сильного зв'язку. Таким чином, дискретні кіральні симетрії в цій моделі завжди порушені і критичне значення константи зв'язку дорівнює нулю.

3.2. Динамічне порушення симетрії у просторах з постійною від'ємною кривизною

3.2.1. Модель і рівняння для щілини. В цьому параграфі ми розглянемо динамічне порушення симетрії у просторах з постійною від'ємною кривизною. Ми вже відзначали у Вступі, динамічне порушення симетрії в гіперболічних просторах з постійною від'ємною кривизною є третім відомим прикладом ДПС в режимі слабкої взаємодії поряд із порушенням симетрії в надпровідних системах, де поверхня Фермі відіграє вирішальну роль (феномен Купера) і з ДПС у зовнішньому магнітному полі. В роботах [68, 69] було з'ясовано, що нульове значення критичної константи зв'язку для ДПС у зовнішньому постійному магнітному полі пов'язано з ефективною редукцією розмірності простору для динаміки ферміонів при низьких енергіях.

Хоча досліджуючи динамічне порушення симетрії в моделях типу Намбу–Йона-Лазініо в роботах [210, 212] було показано, що критичне значення константи зв'язку дорівнює нулю в просторах постійної від'ємної кривизни (відзначимо, що неможливість збереження кіральної симетрії для невзаємодіючих безмасових ферміонів в гіперболічних просторах була встановлена в роботі [222]), фізичні причини нульового значення критичної константи зв'язку залишались невідомими. Ці причини були з'ясовані в роботах [87, 88] і ми розглянемо їх в цьому параграфі і в Додатку А.

Динаміка квантових полів в гіперболічних просторах привернула до себе увагу багатьох дослідників. Перш за все, відзначимо, що у відкритих космологічних моделях Фрідмана–Робертса–Уолкера просторові перетини є гіперболічними просторами. Оптична метрика поблизу горизонта неекстремальних чорних дірок асимптотично є також гіперболічною. По-друге, гіперболічні простори є максимально симетричними просторами з постійною від‘ємною кривизною. Висока ступінь симетрії цих просторів дозволяє зробити точні аналітичні обчислення в багатьох задачах.

Для того, щоб дослідити динамічне порушення симетрії у просторах з постійною від'ємною кривизною ми розглянемо модель Намбу–Йона-Лазініо чий лагранжіан у викривленому (D+1)-вимірному просторі-часі має наступний вигляд

$$S = \int \sqrt{-g} d^{D+1}x \left[\sum_{k=1}^{N} \bar{\psi}_k i\gamma^\mu \nabla_\mu \psi_k + \frac{G}{2N} \left((\sum_{k=1}^{N} \bar{\psi}_k \psi_k)^2 - (\sum_{k=1}^{N} \bar{\psi}_k \gamma_{D+2} \psi_k)^2 \right) \right], \tag{3.36}$$

де N - число ароматів, $g = \det(g_{\mu\nu})$ - детермінант метрики, $\nabla_\mu = \partial_\mu + i\omega_\mu^{ab}\sigma_{ab}$ - коваріантна похідна із спіновою зв‘язністю ω_μ^{ab}, а γ^μ матриці у викривленому просторі виражаються через матриці Дірака γ^a за допомогою тетрад $\gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a$. Дія (3.36) інваріантна відносно кіральних перетворень $\psi \to e^{i\gamma_5\beta}\psi$. Ми визначаємо кіральну симетрію у просторах-часі непарної розмірності так само як в параграфі 1.5 Розділу I.

Використовуючи метод допоміжного поля Хабарда–Стратоновича [110, 111], представимо лагранжіан (3.36) в наступному вигляді

$$L = \sum_{k=1}^{N} \left(i\bar{\psi}_k \gamma^\mu \nabla_\mu \psi_k + \bar{\psi}_k (\sigma + i\gamma_{D+2}\pi) \psi_k \right) - \frac{N}{2G}\sigma^2, \tag{3.37}$$

де σ і π - допоміжні поля. Якщо стан з ненульовим середнім поля σ є енергетично вигідним, тоді кіральна симетрія порушена і ферміони отримають масу. Для того, щоб знайти ефективну дію для полів σ і π, ми обчислюємо фунціональний інтеграл відносно ферміонних полів. Ми знаходимо (не втрачаючи загальності, ми можемо покласти $\pi = 0$ тому, що завжди можливо відновити залежність від π із вимоги кіральної симетрії ефективної дії)

$$\Gamma(\sigma_c) = -N \int \sqrt{-g} d^{D+1} x \frac{\sigma_c^2}{2G} - i\mathrm{Ln}\ \mathrm{Det}(i\gamma^\mu \nabla_\mu - \sigma_c), \tag{3.38}$$

де $\sigma_c(x) =< 0|\sigma|0 >$. Ефективний потенціал $V(\sigma_c)$ (ми вважаєм $\sigma_c(x) = \mathrm{const}$) визначається рівнянням

$$V(\sigma_c) = -\frac{\Gamma(\sigma_c)}{\int \sqrt{-g} d^{D+1} x}. \tag{3.39}$$

Далі,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ln}\ \mathrm{Det}(i\gamma^\mu \nabla_\mu - \sigma_c) = \mathrm{TrLn}(i\gamma^\mu \nabla_\mu - \sigma_c) = \\
\frac{1}{2}\mathrm{TrLn}(i\gamma^\mu \nabla_\mu - \sigma_c) + \frac{1}{2}\mathrm{TrLn}(\gamma_{D+2}(i\gamma^\mu \nabla_\mu - \sigma_c)\gamma_{D+2}) = \\
\frac{1}{2}\mathrm{TrLn}\left((i\gamma^\mu \nabla_\mu - \sigma_c)(-i\gamma^\nu \nabla_\nu - \sigma_c)\right).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Використовуючи метод власного часу Швінгера [176], ми отримуємо ефективний потенціал (ми використовуємо також поворот Віка)

$$V(\sigma_c) = N\left(\frac{\sigma_c^2}{2G} + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} \frac{ds}{s}\,\mathrm{tr}\, < x|e^{-sH}|x >\right), \tag{3.41}$$

де $H = -(\gamma_E^\mu \nabla_\mu)^2 + \sigma_c^2$ (γ_E^μ евклідови γ-матриці). Таким чином, рівняння щілини ($\frac{dV}{d\sigma_c}|_{\sigma_c = m} = 0$) має наступний вигляд

$$1 \ = \ G \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} ds\, \mathrm{tr} < x|e^{-sH}|x > \tag{3.42}$$

і згідно з цим рівнянням нам потрібно обчислити діагональні елементи ядра теплопровідності $h_{R\times H^D} = \mathrm{tr} < x|e^{-sH}|x >$ в просторі-часі $R \times H^D$, де H^D є D-вимірним гіперболічним простором.

Нагадаємо, що метрика гіперболічного простора H^D в координатах Пуанкаре визначена наступним чином (детальну інформацію стосовно гіперболічних просторів можна знайти, наприклад, в роботі [223])

$$dl^2 = \frac{a^2}{x_1^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_D^2), \tag{3.43}$$

де $x_1 > 0$ і a - радіус кривизни. Згідно з [224]

$$h_{H^D} \;=\; \frac{2^{[\frac{D+1}{2}]}}{a^D}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a^2}(r^2+m^2a^2)}|A(r)|^2dr\,, \tag{3.44}$$

де $[\frac{D+1}{2}]$ визначає цілу частину $\frac{D+1}{2}$, яка з'являється внаслідок обчислення сліду відносно спінорних індексів і

$$|A(r)|^2 = \frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{\pi^{\frac{D}{2}+1}2^{D+1}}\frac{|\Gamma(D/2+ir)|^2|\Gamma(ir)|^2}{|\Gamma(2ir)|^2}\,. \tag{3.45}$$

3.2.2. Аналіз ядра теплопровідності. Для того, щоб зрозуміти отримані вище результати, згадаємо рівняння для щілини у плоскому просторі-часі, де це рівняння має наступний вигляд

$$1 \;=\; G\int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^\infty ds\; h_{flat}, \tag{3.46}$$

де $h_{flat} \;=\; tr < x|e^{-s(-(\gamma_E^\mu\nabla_\mu)^2+m^2)}|x >$ - ядро теплопровідності у плоскому просторі-часі. Власні функції оператора Дірака в плоскому просторі-часі є плоскі хвилі, тому ядро теплопровідності дорівнює (в евклідовому просторі після повороту Віка)

$$h_{flat} \;=\; 2^{\frac{n}{2}}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}e^{-s(k^2+m^2)}. \tag{3.47}$$

Інтегруючи по кутах, ми маємо

$$h_{flat} \;=\; 2^{\frac{n}{2}}\int_0^\infty\frac{2\,dkk^{n-1}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}e^{-s(k^2+m^2)} = \frac{2^{\frac{n}{2}}e^{-sm^2}}{(4\pi s)^{\frac{n}{2}}}\,. \tag{3.48}$$

Ми бачимо з цього рівняння, що функція k^{n-1} визначає міру і для $m = 0$ ця міра визначає асимптотичну поведінку ядра теплопровідності при великих s. Очевидно, що кожен новий вимір простору призводить до додаткового фактора $s^{-\frac{1}{2}}$ в асимптотичній поведінці ядра теплопровідності. Більш того, згідно рівняння (3.46) у двовимірному просторі-часі константа зв'язку $G \to 0$

при $m \to 0$, тому що інтеграл по s є розбіжним на верхній границі інтегрування. Тому у цьому випадку критичне значення константи зв'язку дорівнює нулю.

Повернемось тепер до динамічного порушення симетрії у просторах $R \times H^D$. Беручи до уваги рівняння (3.44), ми маємо наступне ядро теплопровідності

$$h_{R\times H^D} = \frac{2^{[\frac{D+1}{2}]}}{a^D}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{s}{a^2}(r^2+m^2a^2)}}{(4\pi s)^{\frac{1}{2}}}|A(r)|^2 dr\,, \tag{3.49}$$

де фактор $(4\pi s)^{\frac{1}{2}}$ описує внесок від часової координати, а решта є ядром теплопровідності для H^D. Далі обчислимо в явному вигляді $|A(r)|^2$ визначену в (3.45). Використовуючи формули [197]

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y\sinh(\pi y)},$$
$$|\Gamma(\frac{1}{2}+iy)|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)}, \tag{3.50}$$

ми отримуємо

$$|A(r)|^2 = \frac{r\coth(\pi r)\ \prod_{j=1}^{\frac{D-2}{2}}(r^2+j^2)}{\pi^{\frac{D}{2}}2^{D-1}\Gamma(\frac{D}{2})} \tag{3.51}$$

для парного D і

$$|A(r)|^2 = \frac{\prod_{j=\frac{1}{2}}^{\frac{D-2}{2}}(r^2+j^2)}{\pi^{\frac{D}{2}}2^{D-1}\Gamma(\frac{D}{2})} \tag{3.52}$$

для непарного D.

Асимптотична поведінка ядра теплопровідності при великих s для $m \to 0$ визначається поведінкою підінтегрального виразу при малих r. Як випливає з рівнянь (3.51) і (3.52), при малих r, $|A(r)|^2$ прямує до константи для будь-якого D. Тому $h_{R\times H^D} \sim \frac{1}{s}$ для великих s. Цей результат означає, що динаміка ферміонів в $R \times H^D$ в інфрачервоній області відповідає динаміці $(1+1)$-вимірної теорії. Зауважимо, що при малих s (що відповідає великим r) $|A(r)|^2$ прямує до $\frac{2r^{D-1}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}\Gamma(\frac{D}{2})}$. Тоді ядро теплопровідності прямує до $\frac{1}{(4\pi s)^{\frac{D+1}{2}}}$, що відповідає поведінці (D+1)-вимірної теорії, як очікувалось. Таким чином, має місце ефективна редукція розмірності $D+1 \to 1+1$ для динаміки ферміонів в інфрачервоній області в просторах-часі $R \times H^D$. Це пояснює чому $G_c = 0$ для ДПС в гіперболічних просторах (нульове значення критичної константи зв'язку миттєво випливає з рівняння для щілини якщо для ядра теплопровідності справедлива асимптотика $h \sim \frac{1}{s}$ при великих s).

Корисно згадати формули, які описують ефективну редукцію розмірності простору-часу у випадку магнітного каталізу [68, 69]. Ядро теплопровідності для оператора Дірака у зовнішньому магнітному полі в (3+1)-вимірному просторі-часі має вигляд

$$h_{magnetic} = \frac{e^{-sm^2} eB \coth(eBs)}{16\pi^2 s}\,, \tag{3.53}$$

де e - заряд електрона і B - магнітне поле. Очевидно, ядро теплопровідності (3.53) має асимптотику $1/s$ при великих s і відповідає $(1+1)$-вимірній теорії в інфрачервоній області тому, що $\coth(eBs)$ прямує до одиниці при $s \to \infty$. Зв'язок цієї асимптотики з рухом класичних частинок в гіперболічних просторах розглядається в Додатку А.

3.2.3. Намбу-голдстоунівські бозони і ефективна редукція розмірності простору. В попередньому параграфі ми показали, що динаміка ферміонів в інфрачервоній області є ефективно $(1+1)$-вимірною. Потенційно, цей факт може бути небезпечним для динамічного порушення симетрії з огляду на теорему Коулмена–Мерміна–Вагнера [40, 42] (дивись також [41]) згідно з якою спонтанне порушення неперервної симетрії неможливо в (1+1)-вимірному просторі-часі внаслідок сильних інфрачервоних розбіжностей пов'язаних з безмасовими намбу-голдстоунівськими бозонами (на існування цієї потенційної проблеми в теоріях з ефективною редукцією розмірності простору-часу було вказано в роботах [68, 69]). Наприклад, в моделі Намбу–Йона-Лазініо наступна двопетльова діаграма вакуумної енергії зображена на Рис. 3.1 є інфрачервоно розбіжною в (1+1)-вимірному просторі-часі

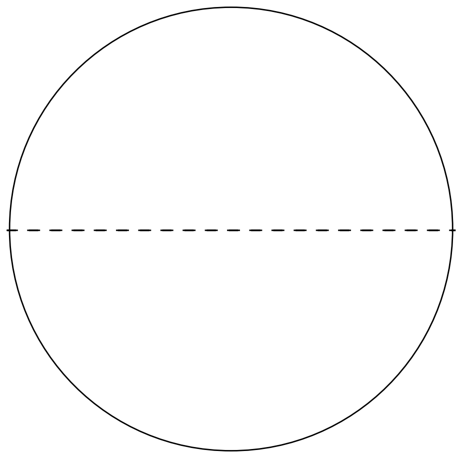


Рис. 3.1. Діаграма вакуумної енергії з обміном намбу-голдстоунівських бозонів. Суцільними лініями позначені ферміонні пропагатори, а пунктирні лінії позначають пропагатори σ і π полів.

У випадку динамічного порушення симетрії в зовнішньому постійному магнітному полі Гусинін, Міранський і Шовковий [68, 69] представили елегантне вирішення цієї потенційної проблеми. Завдяки тому, що кіральний конденсат $< 0|\bar{\psi}\psi|0 >$ є нейтральним і намбу-голдстоунівські бозони є нейтральними, ефективна редукція розмірності простору-часу (яка для заряджених частинок є наслідком того, що їх рух в постійному магнітному полі відбувається по ларморівським орбітам в площині перпендикулярній до магнітного поля) відсутня для нейтральних частинок. Більш того, явними обчисленнями в роботах [68, 69] було показано, що пропагатори намбу-голдстоунівських бозонів мають $(3+1)$-вимірну форму в інфрачервоній області, що вирішує потенційну проблему пов'язану з ефективною редукцією розмірності простору-часу для ферміонів в інфрачервоній області.

Очевидно, що у випадку гравітаційного поля таке вирішення проблеми не може бути застосованим, тому що гравітація має універсальний характер і всі частинки, включаючи намбу-голдстоунівські бозони, взаємодіють з гравітаційним полем. Тому таке рішення проблеми неможливе. Однак, оператор Лапласа–Бельтрамі в гіперболічних просторах має щілину в спектрі, тому пропагатор безмасового скалярного поля швидко прямує до нуля на великих відстанях і інфрачервоні розбіжності не виникають. Таким чином, ефективна редукція розмірності для ферміонів в інфрачервоній області не протирічить теоремі Мерміна–Колмена–Вагнера. Наостанок відзначимо також, що відсутність безщілинних скалярних збуджень в системі не протирічить також теоремі Голдстоуна згідно якій при спонтанному порушенню неперервної симетрії в системі повинні з'являтися безмасові збудження відомі як намбу-голдстоунівські бозони. Теорема Голдстоуна була доведена для простору Мінковського. У нашому випадку ми розглядаємо систему у викривленому просторі, тому теорема Голдстоуна як така не може бути застосована.

3.3. Ефективна низькоенергетична гравітаційна дія в моделях з порушенням симетрії у викривленому просторі

3.3.1. Кривизна простору і параметри порядку. У перших двох параграфах цього розділу ми розглянули як гравітаційне поле і ненульова кривизна простору впливає на динамічне порушення симетрії. З іншого боку зрозуміло, що порушення симетрії в свою чергу дуже істотно впливає на ефективну гравітаційну дію. Дійсно фазовий перехід із порушенням симетрії зв'язан з тим, що система переходить із стану з непорушенною симетрією в несиметричний стан, який при данних значеннях параметрів має меншу енергію. Добре відомо, що в гравітаційній дії енергія вакуума визначає космологічну сталу. Спостережуване сьогодні значення космологічної сталої приблизно дорівнює $\rho = (10^{-12}\,\text{ГеВ})^4$, а характерний внесок в космологічну сталу пов'язаний з електрослабким фазовим переходом є порядка $\rho_{ew} = (246\,\text{ГеВ})^4$ і на 55 порядків перевищує спостережуване значення. Подібна невідповідність характерна взагалі для внеска квантових флуктуацій квантованних полів в космологічну сталу. Ця невідповідність є однією із найважливих проблем у сучасній теоретичній фізиці і відома як проблема космологічної сталої [229].

В цій дисертації ми зосередили головну увагу на питанні динамічного порушення кіральної симетрії і генерації маси. Між тим існує багато ефектів, пов'язаних із самим фактом існування маси поля. Можливо найголовнішим серед них є звичайне порівняння маси поля з характерними для даної фізичної системи енергіями, що визначає чи буде це поле важливим для опису цієї системи чи ні. Якщо характерні енергії перевищують масу цього поля, то в загальному випадку будуть з'являтися відповідні частинки, які є збудженнями цього поля. Якщо ж енергії менші за масу, то частинки не будуть народжуватися. Однак це не означає, що при низьких енергіях масивне поле не буде мати ніякого фізичного значення. За рахунок радіаційних поправок частинки цього поля будуть віртуально збуджуватися і, таким чином впливати на різні процеси в досліджуваній системі. Звичайно чим енергія менша, тим меншим буду їх вплив. Теорема Апелквіста–Каразоне [230] кількісно характеризує процес відщеплення масивних частинок в низькоенергетичній теорії. Ця теорема була сформульована для плоского простору-часу. У викривленому просторі виникає природне питання чи справедлива в ньому ця теорема. Найбільш природним формалізмом для дослідження питання відщеплення масивних полів при низьких енергіях є метод ренормалізаційної групи. Слід відзначити, що взагалі ренормгруповий метод є одним із найбільш важливих і універсальних методів дослідження в КТП і статистичній фізиці систем багатьох частинок.

Ренормгруповий підхід у викривленому просторі-часі був вперше сформульований в роботах [231, 232] в рамках так званої $\overline{MS}$ ренормалізаційної схеми. В цій схемі перенормування квантовопольових теорій у викривленому просторі добре вивчено (дивись, наприклад, [233]). З іншого боку, відомо, що $\overline{MS}$ ренормалізаційна схема в масивних теоріях гарно працює лише в ультрафіолетовій області коли відповідні енергії перевищують маси частинок, а от при низьких енергіях ця схема дає неправильні результати. Корисно нагадати чому це відбувається на прикладі β-функції в квантовій електродинаміці.

Однопетльова поляризаційна функція в розмірній регуляризації в КЕД дорівнює

$$\frac{e^2}{2\pi^2}\left(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}\right)\left[\frac{1}{3\epsilon} - \frac{\gamma}{6} - \int_0^1 dx\, x(1-x)\ \ln\frac{m_e^2 + p^2 x(1-x)}{4\pi\mu^2}\right], \quad (3.54)$$

де p - зовнішний імпульс, m_e - ферміонна маса, γ - константа Ейлера, а μ -розмірний параметр розмірної регуляризації. В $\overline{MS}$ схемі ми віднімаємо сингулярний доданок $1/3\epsilon$ разом з $\gamma/6$. В результаті маємо

$$-\frac{e^2}{2\pi^2}\left(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}\right)\ \int_0^1 dx\, x(1-x)\ \ln\frac{m_e^2 + p^2 x(1-x)}{4\pi\mu^2}\,. \quad (3.55)$$

β-функція в $\overline{\mathrm{MS}}$ схемі знаходиться шляхом обчислення похідної $(e/2)\mu d/d\mu$, яка діє на коефіцієнт оператора $(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu})$. Результат добре відомий

$$\beta_e(\overline{\mathrm{MS}}) \ = \ \frac{e^3}{12\pi^2}. \quad (3.56)$$

Таким чином, ми бачимо, що β-функція в $\overline{MS}$ схемі в однопетльовому наближенні є константа, яка не залежить від ферміонної маси і μ.

В схемі ж, яка залежить від маси, ми спочатку віднімаємо значення поляризаційної функції (3.54) в деякій точці $p^2 = M^2$, а потім знаходимо похідну $(e/2)Md/dM$, яка діє на коефіцієнт оператора $(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu})$. В результаті ми маємо

$$\beta_e = \frac{e^3}{2\pi^2}\int_0^1 dx\, x(1-x)\,\frac{M^2 x(1-x)}{m_e^2 + M^2 x(1-x)}. \quad (3.57)$$

Легко перевірити, що якщо точка перенормування M набагато більша від ферміонної маси, тоді β-функція обчислена в схемі, яка залежить від маси співпадає з бета-функцією знайденною в $\overline{MS}$ схемі (3.56). По мірі того, як точка перенормування проходить через m_e, масивні ферміони відщеплюються і для $M \ll m_e$, їх вклад в β-функцію зникає як

$$\beta_e(M \ll \mu_e) \approx \frac{e^3}{60\pi^2}\frac{M^2}{m_e^2}. \quad (3.58)$$

Таким чином, ми бачимо, що $\overline{MS}$ β-функція дає неправильні результати при енергіях набагато менших m_e. Залежність типу (3.58) є типовий результат теореми Апелквіста-Каразоне [230], який описує відщеплення масивних полів при низьких енергіях.

Питання яким чином відбувається відщеплення масивних полів при низьких енергіях у викривленому просторі і чи працює в цьому випадку теорема Апелквіста-Каразоне є цікавим і важливим з точку зору наслідків для гравітації і космології [234, 235]. Теорема Апелквіста-Каразоне описує квантові віртуальні ефекти масивних частинок при низьких енергіях, тому нам потрібно обчислити низькоенергетичну ефективну дію у випадку викривленого простору. Проблема полягає в тому, що необхідно враховувати всі степені похідних в такій низькоенергетичній дії, тому що для того, щоб описати процес відщеплення масивних полів, нам необхідно знати як змінюється внесок квантових віртуальних флуктуацій масивних полів в низькоенергетичну дію в залежності від імпульса. Зрозуміло, що врахування всіх похідних є дуже непростою задачею. На щастя нескладне узагальнення на випадок масивних полів метода розвинутого Барвінським і Вілковиським [237] дозволяє обчислити таку ефективну дію. Ми розглядаємо таке узагальнення в Додатку Б, де ми досліджуємо відщеплення скалярного масивного поля в низькоенергетичній гравітаційній дії і обчислюємо ренормгрупові β-функції в фізичній ренормалізаційній схемі, яка залежить від маси.

В цьому ж параграфі, використовуючи як приклад $U(1)$ модель Хігса, ми розглянемо вплив порушення симетрії на ефективну гравітаційну дію і з'ясуємо також яким чином проявляється вклад масивних полів в ефективну низькоенергетичну дію, тобто вивчимо закон відщеплення масивних полів. Дія $U(1)$ моделі Хігса для зарядженого скалярного поля ϕ взаємодіючого з абелевим векторним полем A_μ визначається наступним чином

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\,\Big\{ -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\,(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^*\,(\partial_\nu + ieA_\mu)\phi$$
$$+\,\mu_0^2\,\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 + \xi\,R\,\phi^*\phi\Big\}\,. \tag{3.59}$$

Розглянемо спочатку порушення симетрії на класичному рівні. Вакуумне середне скалярного поля визначається як розв‘язок рівняння

$$- \Box v \,+\, \mu_0^2 v \,+\, \xi R\, v \,-\, 2\lambda v^3 \,=\, 0\,. \tag{3.60}$$

В плоскому просторі-часі де $R = 0$, розв‘язок рівняння (3.60) є добре відомим і дорівнює

$$v_0^2 \,=\, \frac{\mu_0^2}{2\,\lambda}\,. \tag{3.61}$$

У викривленому просторі розв‘язок рівняння (3.60) не є постійним $v(x) \neq$ const, тому що в загальному випадку цей простір є неоднорідним і кривизна, тензор Річі і так далі залежать від x. В силу того, що наш головний інтерес позв‘язаний з дослідженням відщеплення масивних полів з масою m при низьких енергіях ми будемо вважати, що $R/m^2 \ll 1$. Тоді розв‘язок рівняння (3.60) можна шукати у вигляді ряду по степеням кривизни

$$v(x) \,=\, v_0 \,+\, v_1(x) \,+\, v_2(x) \,+\, ...\,, \tag{3.62}$$

де для $v_1(x)$ ми маємо рівняння

$$- \Box v_1 \,+\, \mu^2 v_1 \,+\, \xi R\, v_0 \,-\, 6\lambda v_0^2\, v_1 \,=\, 0\,, \tag{3.63}$$

яке випливає з (3.60) і має наступний розв‘язок

$$v_1 \,=\, \frac{\xi\, v_0}{\Box - \mu^2 + 6\lambda v_0^2}\, R \,=\, \frac{\xi\, v_0}{\Box \,+\, 4\lambda v_0^2}\, R\,. \tag{3.64}$$

Аналогічним чином знаходимо

$$v_2 \,=\, \frac{\xi^2\, v_0}{\Box + 4\lambda v_0^2}\, R\, \frac{1}{\Box + 4\lambda v_0^2}\, R \,-\, \frac{6\,\lambda\,\xi^2\, v_0^3}{\Box + 4\lambda v_0^2} \Big(\frac{1}{\Box + 4\,\lambda v_0^2}\, R\Big)^2, \tag{3.65}$$

де оператор в дужках діє тільки на кривизну в дужках. Підставляючи тепер $v(x)$ в (3.59) отримуємо низькоенергетичну ефективну дію

$$S_{ind} \,=\, \int d^4x \sqrt{-g}\,\Big\{\, \lambda v_0^4 \,+\, \xi R v_0^2 \,+\, \xi^2\, v_0^2\, R\, \frac{1}{\Box + 4\,\lambda v_0^2}\, R \,+\, ...\Big\}\,. \tag{3.66}$$

Перший доданок в знайденій ефективній дії є космологічна стала, яка для того, щоб бути узгодженою із спостережуваним значенням, повинна практично повністю скорочуватися відповідним контрчленом (дивись, наприклад, дискусію в [234]). Другий доданок дає внесок в айнштайн-гільбертів член і тому фактично перенормує значення ньютонівської константи зв'язку. Крім цих членів ефективна дія (3.66) містить нескінченний ряд нелокальних членів пов‘язаних з тим, що вакуумне середне скалярного поля нелокальним чином залежить від кривизни. Хоча нелокальні члени є дуже малими порівняно з айнштан-гільбертовим членом вони не змішуються з локальними членами і тому можуть в принципі призвести до деяких нових фізичних ефектів. Відзначимо, що ці члени стають надзвичайно важливими якщо існує дуже легке скалярне поле чия маса є порядку хаблівського параметру.

3.3.2. Ефективна дія в однопетльовому квантовому наближенні. Вище ми розглянули порушення симетрії в $U(1)$ моделі Хігса на класичному рівні. В цьому параграфі ми знайдемо квантові поправки до ефективної дії (3.66). Для того, щоб знайти ці квантові поправки ми будемо використовувати метод фонового поля і техніку Швінгера–де Вітта [202]. Представимо хігсівське поле в фазі із спонтанно порушеною симетрією наступним чином

$$\phi \,=\, v \,+\, h + i\eta \,,$$

де h and η є дійсні скалярні хігсівське і голдстоунівське поля відповідно. Далі стандартні елементарні розрахунки дають наступний вираз для квадратичної частини дії

$$S^{(2)} \,+\, S_{GF} = \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\frac{1}{2}\,A_\mu\Box A^\mu \,+\, \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\nabla_\mu A^\mu)^2 \,-\, A^\mu A^\nu R_{\mu\nu}$$

$$+\frac{1}{2}\,M_A^2A^2 + (\partial_\mu h)^2 + (\partial_\mu\eta)^2 - M_H^2h^2 - M_\eta^2\eta^2 - 2\alpha e\eta\, A^\mu(\partial_\mu v)\Big\}\,, \qquad (3.67)$$

де другий доданок є членом, який фіксує калібровку і ми ввели нові позначення

$$M_A^2 = 2e^2v^2\,, \qquad M_h^2 = 6\lambda v^2 - \mu_0^2 - \xi R\,, \qquad M_\eta^2 = 2e^2v^2 + 2\lambda v^2 - \mu_0^2 - \xi R\,. \qquad (3.68)$$

Корисно ввести також позначення

$$\xi\mathcal{K} = 2\lambda\,\left(v^2 - v_0^2\right) = 2\lambda v^2 - \mu_0^2\,. \tag{3.69}$$

Використовуючи рівняння (3.62), (3.64) і (3.65) ми знаходимо

$$\xi\mathcal{K} \,=\, \frac{2\xi v_0^2}{\Box + 4\lambda v_0^2}\,R \,+\, \mathcal{O}(R^2)\,. \tag{3.70}$$

При низьких енергії похідні від кривизни по модулю є набагато меншими від v_0^2. Тоді ми можемо розкласти знаменник в рівнянні (3.70)

$$\frac{1}{\Box + 4\lambda v_0^2} \,=\, \frac{1}{4\lambda v_0^2}\left(1 - \frac{\Box}{4\lambda v_0^2} + \,...\right) \,+\, \mathcal{O}(\Box R) \tag{3.71}$$

і в результаті отримуємо

$$\xi\mathcal{K} \,=\, \xi R \,+\, \text{члени з вищими похідними}\,. \tag{3.72}$$

В термінах $\xi\,\mathcal{K}$ величини (3.68) можуть бути представлені наступним чином

$$\begin{aligned}
M_A^2 &= m^2 \,+\, \frac{e^2}{\lambda}\,\xi\mathcal{K}\,, & m^2 \,&=\, 2e^2 v_0^2\,; \\
M_h^2 &= m_h^2 \,-\, \xi\,R \,+\, 3\,\xi\,\mathcal{K}\,, & m_h^2 \,&=\, 4\lambda v_0^2\,; \\
M_\eta^2 &= m^2 \,-\, \xi\,R \,+\, \left(\frac{e^2}{\lambda} + 1\right)\xi\mathcal{K}\,,
\end{aligned} \tag{3.73}$$

де m і m_h є масами векторного і хігсівського полів після спонтанного порушення симетрії у плоскому просторі-часі.

Однопетльовий вклад в ефективну дію в евклідовому просторі в нашій задачі визначається сумою трьох доданків

$$\bar{\Gamma}^{(1)} \,=\, -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\ln\hat{\mathcal{H}}_h \,-\, \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\ln\hat{\mathcal{H}} \,+\, \mathrm{Tr}\ln\hat{\mathcal{H}}_{gh}\,, \tag{3.74}$$

де оператори $\hat{\mathcal{H}}_h$ і $\hat{\mathcal{H}}_{gh}$ є скалярними операторами стандартного типу

$$\hat{\mathcal{H}}_h \,=\, \Box + M_h^2\,, \qquad \hat{\mathcal{H}}_{gh} \,=\, \Box \,+\, m^2 \,+\, \frac{e^2}{\lambda}\,\xi\mathcal{K} \tag{3.75}$$

а $\hat{\mathcal{H}}$ - наступним матричнозначним оператором

$$\hat{\mathcal{H}} \,=\, \begin{pmatrix} \delta_\mu^\nu\Box - R_\mu^\nu + M_A^2\delta_\mu^\nu & -i\sqrt{2}\,e\,(\partial_\mu v) \\ -i\sqrt{2}\,e\,(\nabla^\nu v) & \Box + M_\eta^2 \end{pmatrix}. \tag{3.76}$$

Стандартна техніка для обчислення таких детермінантів є метод ядра теплопровідності (дивись, наприклад, [202]). Для знаходження ефективної низькоенергетичної дії, ядро теплопровідності, як правило, обчислюється у вигляді розкладу Швінгера–де Вітта по оберненим степеням маси. Однак такий розклад не підходить для наших цілей, тому що для опису відщеплення масивних полів і обчислення ренормгрупових β-функцій, які описують закон такого відщеплення, нам необхідно врахувати всі степені похідних в ефективній низькоенергетичній дії. В роботах [236, 237] був розроблений метод, який дозволяє знайти розклад ефективної дії, який враховує всі степені похідних. Результати отримані в цих роботах дозволяють знайти ефективну дію в необхідному нам другому порядку по кривизні.

Оператори $\hat{\mathcal{H}}_{gh}$ і $\hat{\mathcal{H}}$ відповідать полям з масою m, а оператор $\hat{\mathcal{H}}_h$ пов‘язаний з полем з масою m_h. Тому ми можемо використовути для кожного з цих операторів стандартне представлення Швінгера-ДеВітта

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\ln\hat{\mathcal{H}} \,=\, -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\,e^{-sm^2}\,\mathrm{tr}\,K(s)\,. \tag{3.77}$$

Ядро теплопровідності $K(s)$ для оператора $\hat{1}\Box + \hat{\Pi}$, де $\hat{\Pi}$ - деяка скалярна функція, було знайдено в роботах [236, 237]. Узагальнення на випадок масивного поля розглянуто в Додатку Б. Використовуючи відповідні результати ми отримуємо в досліджуємому випадку наступну ефективну дію враховуючи доданки порядка $\mathcal{O}(R^2)$

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}^{(1)} \,=\, \frac{1}{2(4\pi)^2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,\Big\{ &\frac{3m^4+m_h^4}{2}\cdot\Big(\frac{1}{2-w}+\frac{3}{2}\Big) \\
&+\frac{3m^4}{2}\ln\Big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\Big) \,+\, \frac{m_h^4}{2}\ln\Big(\frac{4\pi\mu^2}{m_h^2}\Big) \\
+\Big[\Big(\frac{3e^2}{\lambda}+1\Big)\xi\mathcal{K} \,-\, \Big(\xi+\frac{1}{2}\Big)R\Big]&\cdot m^2\Big[\frac{1}{2-w}+\ln\Big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\Big)+1\Big] \\
+\Big[3\xi\mathcal{K} \,-\, \Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)R\Big]&\cdot m_h^2\Big[\frac{1}{2-w}+\ln\Big(\frac{4\pi\mu^2}{m_h^2}\Big)+1\Big] \\
+\frac{1}{2}C_{\mu\nu\alpha\beta}\Big[\frac{7}{30(2-w)}+\frac{13}{60}\ln\Big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\Big)&+\frac{1}{60}\ln\Big(\frac{4\pi\mu^2}{m_h^2}\Big)+k_W^{total}(a,a_h)\Big]C^{\mu\nu\alpha\beta}
\end{aligned}$$

$$+R\Big[\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)^2\cdot\Big(\frac{1}{2-w}+\ln\big(\frac{16\pi^2\mu^4}{m^2m_h^2}\big)\Big)+k_R(a)+k_R(a_h)+k_R^{gv}(a)\Big]R$$

$$+R\Big[\Big(1+\frac{3e^2}{\lambda}\Big)\cdot\frac{3Aa^2-a^2-12A}{18\,a^2}\;+\;\frac{3A_ha_h^2-a_h^2-12A_h}{6\,a_h^2}$$

$$-3\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)\cdot\Big(\frac{1}{2-w}+\ln\big(\frac{4\pi\mu^2}{m_h^2}\big)+2A_h\Big)$$

$$-\Big(\big(1+\frac{e^2}{\lambda}\big)\big(\xi-\frac{1}{6}\big)\;+\;\frac{2e^2}{3\,\lambda}\Big)\cdot\Big(\frac{1}{2-w}+\ln\big(\frac{4\pi\mu^2}{m_h^2}\big)+2A\Big)\Big]\xi\mathcal{K}$$

$$+\xi\mathcal{K}\Big[\Big(\frac{3e^4}{2\lambda^2}+\frac{e^2}{\lambda}+\frac{1}{2}\Big)\cdot\Big(\frac{1}{2-w}+\ln\big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\big)+2A\Big)$$

$$+\frac{9}{2}\Big(\frac{1}{2-w}+\ln\big(\frac{4\pi\mu^2}{m_h^2}\big)+2A_h\Big)\Big]\xi\mathcal{K}$$

$$-2e^2\,(\nabla_\mu v)\Big[\frac{1}{2-w}+\ln\big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\big)+2A\Big](\nabla^\mu v)\Big\}\,, \tag{3.78}$$

де

$$A=A(a)=1-\frac{1}{a}\ln\frac{1+a/2}{1-a/2}\qquad \text{і}\qquad a^2=a^2(m)=\frac{4\Box}{\Box-4m^2}\,, \tag{3.79}$$

а також $A_h=A(a_h)$ і $a_h^2=a^2(m_h)$. Далі в рівнянні (3.78) ми використали наступні форм-фактори

$$k_W^{total}(a,a_h)\;=\;\frac{8A_h}{15a_h^4}+\frac{2}{45a_h^2}+A+\frac{8A}{5a^4}-\frac{8A}{3a^2}+\frac{2}{15a^2}-\frac{88}{450}\,, \tag{3.80}$$

$$k_R(a)\;=\;A\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)^2-\frac{A}{6}\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)+\frac{2A}{3a^2}\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)+\frac{A}{9a^4}-\frac{A}{18a^2}+\frac{A}{144}$$
$$+\frac{1}{108\,a^2}-\frac{7}{2160}+\frac{1}{18}\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)\,, \tag{3.81}$$

$$k_R^{gv}(a)\;=\frac{13}{1080}-\frac{A}{24}+\frac{1}{54a^2}+\frac{2A}{9a^4}+\frac{A}{9a^2}. \tag{3.82}$$

Розбіжна частина ефективної дії (3.78) є стандартною, а тому перенормування є також стандартним. В ефективній дії (3.78) присутні два типи нелокальностей. По-перше, мають місце нелокальності пов‘язані з $\xi\mathcal{K}$. По-друге, присутні нелокальності, які залежать від a і A.

3.3.3. Відщеплення масивних полів у викривленому просторі. Використовуючи ефективну дію (3.78) ми можемо обчислити ренормгрупові β-функції, які визначають закон відщеплення масивних полів, в фізичній ренормалізаційній схемі, яка залежить від маси. Для цього ми повинні зробити віднімання в точці $-\Box \to p^2 = M^2$, а тоді використати визначення β-функції

$$\beta_C = \lim_{n\to 4} M\,\frac{dC}{dM} \tag{3.83}$$

для ефективного заряду C.

Для ефективної дії (3.78) ми отримуємо наступні результати.

1) Фізичні β-функції для космологічної сталої і оберненої ньютонівської константи зв‘язку, а також β-функція пов'язана з коефіцієнтом при $\xi\mathcal{K}$ дорівнюють нулю в силу причин, які розглядаються в Додатку Б.

2) Для коефіцієнта при $C^2_{\mu\nu\alpha\beta}$ ми знаходимо

$$\beta_1 \,=\, -\,\frac{1}{(4\pi)^2}\,\Big[\,\frac{17}{90}-\frac{1}{6a^2}-\frac{a^2}{16}+\frac{(a^2-4)(a^4-8a^2+8)\,A}{16a^4}+\frac{3A_h(a_h^2-4)-a_h^2}{18\,a_h^4}\,\Big]\,. \tag{3.84}$$

В ультрафіолетовій границі $p^2 \gg m_h^2$ ми маємо

$$\beta_1^{UV} \;=\; \frac{7}{60\,(4\pi)^2}\;+\,\mathcal{O}\Big(\frac{m_h^2}{p^2}\Big)\,. \tag{3.85}$$

В інфрачервоній границі $p^2 \ll m^2$

$$\beta_1^{IR} \;=\; \frac{3}{112\,(4\pi)^2}\,\Big(\frac{2\lambda}{e^2}\,+\,\frac{1}{45}\Big)\,\cdot\,\frac{p^2}{m_h^2}\;+\;\mathcal{O}\Big(\frac{p^4}{m_h^4}\Big)\,. \tag{3.86}$$

Із формул (3.85) і (3.86) випливає, що β_1 -функція має поведінку, яка повністю узгоджується з теоремою Апелквіста–Каразоне [230].

3) Для β_2-функції пов'язаної з коефіцієнтом при R^2 ми знаходимо

$$\beta_2 = -\frac{1}{8\,(4\pi)^2}\,\Big[\,\frac{(4-a^2)}{144\,a^4}\,(5\,a^4\,A-20\,a^2-5\,a^4-240\,A-24\,a^2\,A)$$

$$+\frac{(4-a^2)\,(a^2\,A-a^2-12\,A)}{6\,a^2}\,\big(\xi-\frac{1}{6}\big)+\frac{\left(4-{a_h}^2\right)\,\left({a_h}^2\,A_h-a_h^2-12\,A_h\right)}{6\,{a_h}^2}\,\big(\xi-\frac{1}{6}\big)$$

$$+\big(a_h{}^2\,A_h - a_h{}^2 - 4\,A_h \;+\; a^2\,A - a^2 - 4\,A\big)\cdot\big(\xi - \frac{1}{6}\big)^2\Big]\,. \qquad (3.87)$$

В ультрафіолетовій границі $a \to 2,\; a_h \to 2$ і

$$\beta_2^{UV} \;=\; \frac{1}{(4\pi)^2}\Big(\xi - \frac{1}{6}\Big)^2\,. \qquad (3.88)$$

В інфрачервоній границі $a \to 0,\; a_h \to 0$ β_2-функція демонструє стандартний квадратичний закон відщеплення

$$\beta_2^{IR} \;=\; \frac{1}{(4\pi)^2}\Big[\frac{11\,\lambda}{3780\,e^2}+\frac{1}{180}\big(1+\frac{2\lambda}{e^2}\big)\cdot\big(\xi-\frac{1}{6}\big)-\frac{1}{12}\big(1+\frac{2\lambda}{e^2}\big)\cdot\big(\xi-\frac{1}{6}\big)^2\Big]\,\frac{p^2}{m_h^2}+\mathcal{O}\Big(\frac{p^4}{m_h^4}\Big)\,,$$

як і у випадку β_1 .

4) Розглянемо тепер β-функції для ефективних зарядів, які відповідають нелокальним доданкам ефективної дії

$$S_{vac,2} \;=\; -\int d^4x\sqrt{-g}\,\Big\{\,q_1\,\xi\mathcal{K} \;+\; q_2\,R\,\xi\mathcal{K} \;+\; q_3\,\Big(\xi\mathcal{K}\Big)^2\,\Big\}\,. \qquad (3.89)$$

Використовуючи (3.78) знаходимо β_{q2}-функцію

$$\beta_{q2} = \frac{1}{4\,(4\pi)^2}\Big[\,\Big(a^2A-a^2-4A+3a_h^2A_h-3a_h^2-16A_h\Big)\cdot\big(\xi-\frac{1}{6}\big)+\frac{a^2(A-1)(3e^2-\lambda)}{12\,\lambda}$$

$$-\frac{4A(3\,e^2+\lambda)}{a^2\lambda}+\frac{(2A-1)e^2}{\lambda}+\frac{(4A-1)}{3}+\frac{(a_h^2-4)(A_ha_h^2-a_h^2-12A_h)}{4a_h^2}\Big]\,. \quad (3.90)$$

В ультрафіолетовій границі

$$\beta_{q2}^{UV} \;=\; -\,\frac{1}{(4\pi)^2}\,\Big[\frac{e^2}{2\,\lambda}+4\,\big(\xi-\frac{1}{6}\big)\,\Big]\,, \qquad (3.91)$$

в той час, як в інфрачервоній границі, ми знов таки маємо стандартний закон відщеплення

$$\beta_{q2}^{IR} \;=\; -\,\frac{1}{(4\pi)^2}\,\Big[\,\frac{\lambda}{90\,e^2}\;-\;\frac{7}{60}\;-\;\Big(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{3e^2}\Big)\,\big(\xi-\frac{1}{6}\big)\,\Big]\,\frac{p^2}{m_h^2}+\mathcal{O}\Big(\frac{p^4}{m_h^4}\Big)\,. \quad (3.92)$$

5) Далі β_{q3}-функція дорівнює

$$\beta_{q3} = \frac{1}{8\,(4\pi)^2}\Big[\,9\,\big(a_h{}^2+4\,A_h-a_h{}^2\,A_h\big)\;+\;\Big(1+\frac{3\,e^4}{\lambda^2}\Big)\,\big(a^2+4\,A-a^2\,A\big)\Big]\,. \quad (3.93)$$

В ультрафіолетовій границі

$$\beta_{q3}^{UV} \; = \; \frac{1}{(4\pi)^2}\Big(5 + \frac{3\,e^4}{2\,\lambda^2}\Big)\,, \tag{3.94}$$

а в інфрачервоній ми, як у попередньому пункту, ми маємо стандартний закон відщеплення

$$\beta_{q3}^{IR} \; = \; \frac{1}{(4\pi)^2}\Big(\frac{\lambda}{6\,e^2} \; + \; \frac{3}{4} \; + \; \frac{e^2}{\lambda}\Big)\,\frac{p^2}{m_h^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{p^4}{m_h^4}\Big)\,. \tag{3.95}$$

Таким чином, у всіх випадках має місце стандартний квадратичний закон відщеплення масивних полів для імпульсів менших мас частинок, які виникають внаслідок спонтанного порушення симетрії.

РОЗДІЛ 4

КОЛЬОРОВА НАДПРОВІДНІСТЬ І ДИНАМІЧНЕ ПОРУШЕННЯ СИМЕТРІЇ

У Вступі ми відзначили, що в (3+1)-вимірних квантових теоріях поля три приклади динамічного порушення симетрії в режимі слабкого зв'язку відомі. Два з цих випадків, а саме магнітний каталіз (ДПС в зовнішньому постійному магнітному полі) і динамічне порушення симетрії у просторах постійної від'ємної кривизни були проаналізовані і розглянуті в Розділах 1 і 3 відповідно. В цьому розділі ми детально розглянемо динамічне порушення симетрії в режимі слабкого зв'язку в присутності поверхні Фермі в кварковій матерії при великій густині баріонного заряду.

Внаслідок того, що поверхня Фермі утворюється за рахунок ненульової густини ферміонної матерії в системі, ми можемо вважати, що зовнішним полем, яке каталізує динамічне порушення симетрії в теорії надпровідності в режимі слабкого зв'язку є саме поле матерії. Нагадаємо, що історично теорія надпровідності була першим прикладом динамічного порушення симетрії в режимі слабкого зв'язку. Купер [239] показав, що в (3+1)-вимірній задачі за рахунок присутності заповнених ферміонних станів і ненульової густини станів на поверхні Фермі зв'язаний стан двох ферміонів в системі утворюється для як завгодно слабкого притягування між ферміонами на відміну від відповідної проблеми при нульовій густині ферміонної матерії. Цей результат є дуже важливим і він пояснює чому критична константа зв'язку в теорії надпровідності дорівнює нулю, де надпровідний конденсат є фактично конденсатом куперівських пар, тобто зв'язаних куперівських станів. У цьому розділі ми розглянемо динамічне порушення симетрії також в моделі з

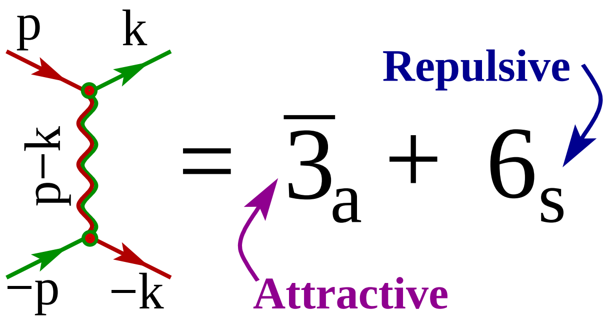


Рис. 4.1. Одноглюонний обмін між двома кварками. Кольорова структура відповідної амплітуди має антисиметричний антитриплетний і симетричний секстетний канали.

надпровідністю, але не звичайною надпровідністю, як для електронів в моделі БКШ [24], а кольоровою надпровідністю в кварковій матерії при великій густині баріонного заряда.

Ще в 70-их роках минулого століття було з‘ясовано, що матерія при великій густині баріонного заряда є кольоровим надпровідником [240]. При малих значеннях баріонного хімічного потенціала і температури має місце звичайна адронна фаза КХД. При збільшенні баріонного потенціалу густина адронного газу зростає і для деякого критичного значення коли густина стає настільки великою, що хвильові функції кварків, які утворюють баріони, починають перекриватись і нарешті звільняються, відбувається фазовий перехід в стан кваркової матерії відомий як деконфайнмент. За рахунок одноглюонного обміна кварки притягуються в антисиметричному антитриплетному каналі (дивись Рис. 4.1) і тому нормальний стан кваркової матерії є нестабільним внаслідок куперівської нестабільності і кваркова матерія переходить в стан кольорової надпровідності.

Дослідження кольорової надпровідності залишались довгий час в стороні від основних досліджень в КХД, аж поки в 1998 році в роботах [187, 188] не було з‘ясовано, що надпровідна щілина може досягати великих величин майже 100 МеВ. Така велика щілина може суттєво вплинути на фізичні властивості нейтронних зірок, якщо їх центральні області містять кваркову матерію в стані кольорової надпровідності. Астрофізичні спостереження можуть виявити наявність кольорової надпровідності досліджуючи відношення маси нейтронних зірок до їх радіусу і закон їх охолодження з часом [241, 242]. Крім того, існують інші потенційно спостережувані властивості присутності кольорової надпровідності в центральних областях нейтронних зірок [243, 244].

В квантовій хромодинаміці конституентні маси трьох u, d та s кварків є легкими відносно масштаба КХД. Лише ці кварки є важливими для кваркової матерії, яка може існувати в центральних областях нейтронних зірок. Якщо знехтувати цими конституентними масами, то згідно [187] так званий color-flavor-locked (CFL) стан є основним станом системи. Однак маса s кварка є набагато більшою від мас u та d кварків і тому імпульси на поверхні Фермі для s кварків значно відрізняються від відповідних імпульсів на поверхні Фермі для u і d кварків. В цій ситуації спарювання s кварка з іншими кварками повинно відбуватися інакше. Крім того, як показано в роботах [245, 246], дуже важливо враховувати умови електричної і кольорової нейтральності системи, які можуть суттєво вплинути на те яким буде основний стан системи.

Вважаючи, що конституентна маса s кварка є достатньо великою в кварковій матерії при реалістичних значеннях баріонного хімічного потенціалу в роботах [247, 248] була запропонована безщілинна надпровідна фаза (g2SC) для КХД з двома ароматами кварків. Більш того, в роботі [249] було показано, що безщілинна CFL фаза може бути реалізована в нейтральній странній кварковій матерії. Однак виявилося, що 2SC і g2SC фази кольорової надпровідності мають так звану хромомагнітну нестабільність, яка характеризується наявністю уявних значень мейснірівських мас для деяких глюонів [250]. Згодом з'ясувалося, що відповідна нестабільність присутня також і в gCFL фазі [251, 252].

В першому параграфі даного розділу ми дослідимо причину появи хромомагнітної нестабільності для кольорового надпровідника з двома ароматами кварків і покажемо, що ця нестабільність пов'язана з присутністю плазмонів з тахіонним характером спектру. В другому параграфі ми запропонуємо глюонну фазу кольорової надпровідності з двома ароматами кварків, в якій конденсати глюонних полів вирішують проблему хромомагнітної нестабільності. Фаза Ларкіна–Овчіннікова–Фульде–Ферела (ЛОФФ) [253, 254] з неоднорідним надпровідним параметром порядку (вперше така фаза була запропонована в дослідженнях надпровідності в теорії твердого тіла [255, 256]) є одним з основним конкурентів глюонної фази як кандидата на основний стан кольорового надпровідника з двома ароматами кварків. Ми покажемо в третьому параграфі, що ця фаза не розв'язує проблему хромомагнітної нестабільності кольорового надпровідника в 2SC або g2SC станах. Відомо, що нейтронні зірки характеризуються дуже великими значеннями магнітних полів, які можуть суттєво вплинути на фазу кольорової надпровідності. Питання як впливає магнітне поле на стан кольорової надпровідності ми розглянемо в останньому параграфі даного розділа.

4.1. Колективні збудження і хромомагнітна нестабільність кольорової надпровідності

В роботі [250] було показано, що 2SC і g2SC стани кольорової надпровідності кваркової матерії з двома ароматами кварків мають хромомагнітну нестабільность пов'язану з присутністю уявних (тахіонних) мейснерівських мас глюонів. Пізніше було показано, що хромомагнітна нестабільність присутня також в надпровідній кварковій матерії з трьома ароматами кварків [251, 252]. В роботі [92] ми дослідили причину виникнення хромомагнітної нестабільності і показали, що вона пов'язана з тахіонним спектром плазмонів. Основна ідея аналізу проста. Мейснерівські маси визначаються глюонною поляризаційною функцією при нульовій частоті в границі $\mathbf{p} \to 0$. Спектр же плазмонів знаходиться із тієї ж глюонної поляризаційної функції обчисленної при ненульових p_0 і $\mathbf{p}$.

Ми розглянемо кваркову матерію з двома ароматами кварків в стані кольорової надпровідності з щілиною Δ, баріонним хімічним потенціалом μ і параметром $\delta\mu$, який визначає різницю між хімічними потенціалами для u і d кварків. Згідно [250] в режимі $\Delta < \delta\mu$, який відповідає фазі безщілинної кольорової надпровідності з двома ароматами кварків відомої як g2SC фаза, 4-8-ий глюони мають тахіонні мейснерівські маси. В режимі $\delta\mu < \Delta < \sqrt{2}\delta\mu$, який відповідає фазі кольорової надпровідності з двома ароматами кварків відомої як 2SC фаза тільки мейснерівські маси 4-7-го глюонів є тахіонними.

Для того, щоб знайти поляризаційну функцію для 4-7-го глюонів зручно ввести наступні поля $\phi^+_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A^{(4)}_\mu + iA^{(5)}_\mu,\ A^{(6)}_\mu + iA^{(7)}_\mu)$ і $\phi^-_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A^{(4)}_\mu - iA^{(5)}_\mu,\ A^{(6)}_\mu - iA^{(7)}_\mu)$, які є кольоровими дублетами калібрувальної групи $SU(2)_c$ в 2SC і g2SC фазах і для яких поляризаційні тензори позначимо як $\Pi^{\mu\nu}_+(p_0,\vec{p})$ і $\Pi^{\mu\nu}_-(p_0,\vec{p})$ відповідно. Ці тензори поляризації можуть бути представлені як

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu}_\pm(p_0,\vec{p}) \equiv &\\ &(g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu + \frac{\mathbf{p}^\mu\mathbf{p}^\nu}{p^2})H_\pm + u^\mu u^\nu K_\pm\\ &-\frac{\mathbf{p}^\mu\mathbf{p}^\mu}{p^2}L_\pm + \left(u^\mu\frac{\mathbf{p}^\nu}{p} + u^\nu\frac{\mathbf{p}^\mu}{p}\right)M_\pm,\end{aligned} \tag{4.1}$$

де $p \equiv |\vec{p}|$, $\mathbf{p}^\mu \equiv (0,\vec{p})$ і $u^\mu \equiv (1,0,0,0)$. Закони дисперсії для плазмонів визначаються наступними рівняннями

$$\text{(магнітна мода):} \qquad p_0^2 - p^2 + H_\pm = 0, \tag{4.2}$$

(електрична мода):

$$p_0^2K_\pm - p^2L_\pm - 2p_0pM_\pm + K_\pm L_\pm + M_\pm^2 = 0. \tag{4.3}$$

Ми зацікавлені в знаходженні спектру легких плазмонів чия маса $\mathcal{M}_\pm$ є набагато меншою від баріонного хімічного потенціалу, тобто $|\mathcal{M}_\pm| \ll \mu$. Тоді ми можемо розглянути границю $|\vec{p}| \to 0$, яка дещо спрощує аналіз, зберігаючи в той же час скінченне p_0. Згідно [260] умова кольорової нейтральності призводить до появи невеликого хімічного потенціалу $\mu_8 \sim \mathcal{O}\left(\frac{\Delta^2}{\mu}\right)$, де μ_8 є кольоровий хімічний потенціал пов'язаний з восьмим генератором кольорової

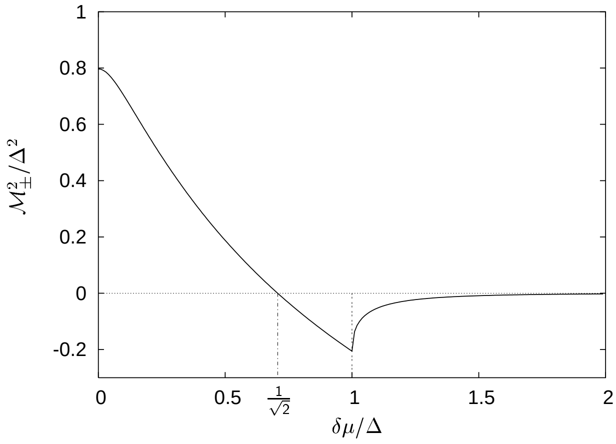


Рис. 4.2. Квадрат щілини для 4-7-го глюонів (суцільна лінія).

$SU(3)$ групи. Далі μ_8 є невеликим і тому наближення $\mu_8 = 0$ цілком може бути використано, що ми і зробимо в подальшому аналізі. Наші обчислення показали, що тоді справедливі наступні співвідношення $L_\pm(p_0, |\vec{p}| \to 0) = H_\pm(p_0, |\vec{p}| \to 0)$, $M_\pm(p_0, |\vec{p}| \to 0) = 0$ і $K_\pm(p_0, |\vec{p}| \to 0) \neq 0$. Крім того, функції $H_\pm$ і $K_\pm$ є порядку μ^2. Тому в лідируючому порядку по μ закони дисперсії (4.2) і (4.3) для $|\vec{p}| \to 0$ зводяться до рівняння $H_\pm(p_0, |\vec{p}| \to 0) = 0$ (ми нехтуємо внесками порядка p_0^2/μ^2). Крім того, очевидно, що розв'язки для магнітної і електричної мод співпадають.

Для $\mu_8 = 0$ ми знаходимо наступні функції $H_\pm(p_0, 0)$

$$
\begin{aligned}
H_+(p_0,0) = H_-(p_0,0) = \\
-\frac{g^2\bar{\mu}^2}{12\pi^2}\Bigg[4 + \frac{\Delta^2}{p_0^2}\ln\left(\left(1-\frac{p_0^2}{\Delta^2}\right)^2 - 4\frac{\delta\mu^2}{\Delta^2}\frac{p_0^2}{\Delta^2}\right) \\
+\theta(\delta\mu-\Delta)\frac{\Delta^2}{p_0^2}\ln\frac{\Delta^4 - p_0^2(\delta\mu - \sqrt{\delta\mu^2-\Delta^2})^2}{\Delta^4 - p_0^2(\delta\mu + \sqrt{\delta\mu^2-\Delta^2})^2}\Bigg],
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

де $\bar{\mu} \equiv \mu - \delta\mu/3$ і g є константою зв'язку КХД.

Для загального p_0 рівняння $H_\pm(p_0, 0) = 0$ може бути розв'язано тільки чисельно. Однак поблизу критичної точки $\delta\mu_{\rm cr} = \Delta/\sqrt{2}$, яка визначає точку появи хромомагнітної нестабільності, ми можемо розкласти рівняння (4.4) по

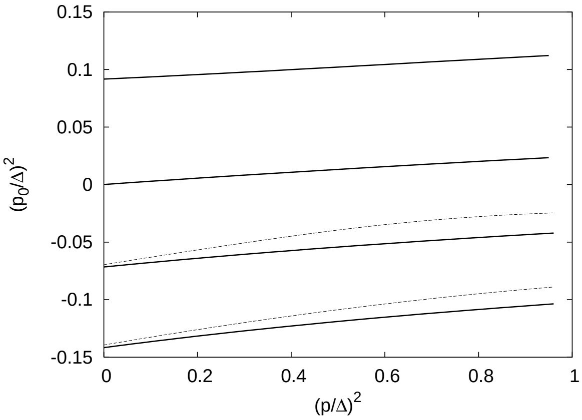


Рис. 4.3. Закон дисперсії для 4-7-го магнітних плазмонів в 2SC фазі (суцільні лінії для $\delta\mu/\Delta = 0.6, 0.71, 0.8, 0.9$ зверху вниз) і g2SC фазі (штрихові лінії для $\delta\mu/\Delta = 1.065, 1.009$ зверху вниз).

степенях p_0 і тоді ми знаходимо наступний аналітичний розв‘язок

$$\mathcal{M}_{\pm} \simeq \Delta \sqrt{\frac{2}{7}\left(1 - 2\frac{\delta\mu^2}{\Delta^2}\right)} \quad . \tag{4.5}$$

Як функції $\delta\mu/\Delta$ квадрати щілин для 4-7-го глюонних полів зображені на Рис. 4.2.

Як випливає з отриманого розв'язку (4.5), маса плазмона є дійсною тільки коли $\delta\mu$ є меншим від критичного значення $\delta\mu_{\rm cr} = \Delta/\sqrt{2}$. Для $\delta\mu > \delta\mu_{\rm cr}$ плазмонна щілина стає чисто уявною (тахіонною), що свідчить про бозе-айнштайнівську нестабільність. Таким чином, природньо виникає питання про можливість конденсації глюонів (плазмонів). Це питання ми будем розглядати в наступному параграфі. В роботі [92] ми також проаналізували випадок ненульового μ_8. Основний ефект пов‘язаний з цим хімічним потенціалом полягає в розщепленні $\mathcal{M}_+$ і $\mathcal{M}_-$ щілин.

Для ненульових імпульсів закони дисперсії для магнітної і електричної мод різні. Найбільш цікавим є закон дисперсії для магнітних мод, який ми знайшли чисельно і який зображено на Рис.4.3 у випадку $0 < p^2 \ll \mu^2$ для декількох фіксованих значень $\delta\mu/\Delta$ в 2SC і g2SC фазах.

Як ми бачимо, закон дисперсії в 2SC фазі (суцільні жирні лінії) має вигляд

$p_0^2 = m^2 + v^2p^2$ для $m^2 > 0$ при $\delta\mu/\Delta < 1/\sqrt{2}$, а також для $m^2 < 0$ при $\delta\mu/\Delta > 1/\sqrt{2}$. Швидкість v є дійсною і меншою від одиниці. Закон дисперсії для g2SC фази (штрихові лінії) незначним чином відрізняється від закону дисперсії для 2SC фази.

Розглянемо тепер спектр легких плазмонів для 8-го глюона. Поляризаційний тензор $\Pi_{88}^{\mu\nu}(p_0, \vec{p})$ також має форму (4.1), де функції $H_\pm, K_\pm, L_\pm$ і $M_\pm$ заміняються на H_{88}, K_{88}, L_{88} і M_{88}. Закон дисперсії для плазмонів ми отримали чисельно. Результати наступні. По-перше, легкі плазмони повністю відсутні в цьому каналі в 2SC фазі для $\delta\mu < \Delta$. З іншого боку, в g2SC фазі для $\delta\mu > \Delta$ мають місце магнітні і електричні тахіонні плазмони з законом дисперсії $p_0^2 = v^2p^2$ для $p \to 0$ з від'ємним квадратом швидкості v^2. Підкреслимо, що легкі плазмони з ненульовою щілиною (тобто ненульовим p_0 для $p \to 0$) відсутні в цій фазі. Залежність квадрату швидкості безщілинних магнітних і електричних мод тахіонних плазмонів як функція від $\delta\mu/\Delta$ зображена на Рис. 4.4. Біля критичної точки при $\delta\mu \to \Delta$ квадрати швидкості обох мод мають наступну залежність $v^2 \sim -\sqrt{1 - (\Delta/\delta\mu)^2}$.

Закон дисперсії для безщілинного магнітного плазмона з квантовими числами 8-го глюона ми відображаємо на Рис. 4.5 для різних значень $\delta\mu/\Delta$. Слід відзначити наявність максимуму на цих кривих при значеннях імпульса порядку $\delta\mu \sim \Delta$. Природньо інтерпретувати цей імпульс як значення характерного масштабу неоднорідного глюонного конденсату в справжньому основному стані системи.

Внаслідок того, що квадрат мейснерівських мас є від'ємним для 8-го глюона в g2SC фазі факт існування безщілинного тахіонного плазмона здається таким, що протирічить інтуїції. В чому ж полягає математична причина його появи? Відповідь на це питання пов'язана з особливою структурою функції

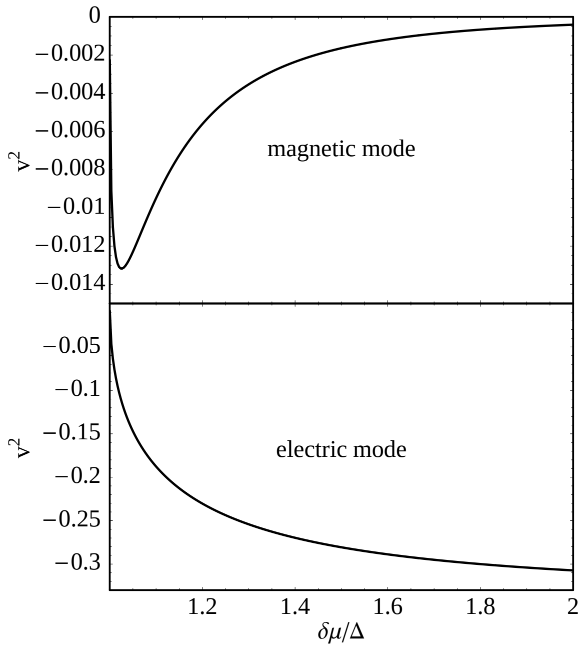


Рис. 4.4. Квадрат швидкості для безщілинних магнітного і електричного тахіонних плазмонів з квантовими числами 8-го глюона.

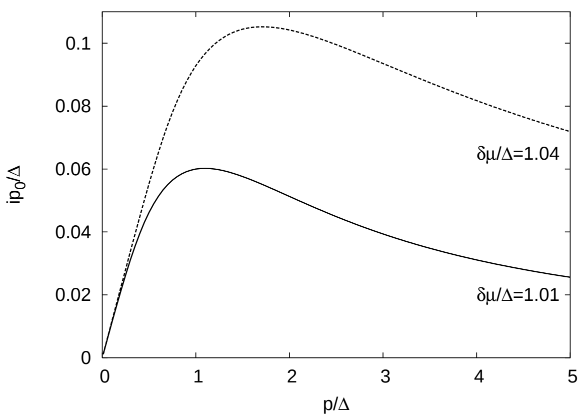


Рис. 4.5. Закон дисперсії магнітного тахіонного плазмона з квантовими числами 8-го глюона.

$H_{88}(p_0,p)$. Для $|p_0|, |p| \ll \Delta$ ця функція має вигляд

$$\begin{aligned} H_{88}(p_0,p) = -\frac{g^2}{3\pi^2}\bar{\mu}^2 \Bigg[\frac{4}{3} + \left(1-\frac{p_0^2}{p^2}\right) Q\left(\frac{p_0}{p}\right) \\ +\frac{1}{2}\theta(\delta\mu-\Delta)\frac{\delta\mu}{\sqrt{\delta\mu^2-\Delta^2}}\Bigg\{ \frac{1}{3} \\ + \left(1-\frac{p_0^2}{p^2(1-\frac{\Delta^2}{\delta\mu^2})}\right) Q\left(\frac{p_0}{p\sqrt{1-\frac{\Delta^2}{\delta\mu^2}}}\right)\Bigg\}\Bigg], \end{aligned} \tag{4.6}$$

де

$$\begin{aligned} Q(x) &\equiv -\frac{1}{2}\int_0^1 d\xi \left(\frac{\xi}{\xi+x-i\epsilon}+\frac{\xi}{\xi-x-i\epsilon}\right) \\ &= \frac{x}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 1 - i\frac{\pi}{2}|x|\theta(1-x^2) \ \text{(для дійсних } x), \\ &= y\arctan\frac{1}{y} - 1 \ \text{(для уявних } x\equiv iy)\,, \end{aligned} \tag{4.7}$$

де ми знехтували членами порядку $\bar{\mu}^2(p_0/\Delta)^2$ і $\bar{\mu}^2(p/\Delta)^2$. Зауважимо, що функція H_{88} залежить від p_0/p. Це означає, що точка $(p_0,p)=(0,0)$ є особливою і значення функції залежить від того яким чином p_0 і p прямують до нуля. Це призводить до різних можливих режимів.

Підсумуємо тепер отримані результати. Хромомагнітна нестабільність в каналі 4-7-го глюонів пов‘язана з неправильним знаком квадрата щілини $\mathcal{M}_\pm^2$, тобто з потенціалом ефективної дії. З іншого боку причина нестабільності в каналі 8-го глюона є іншою. Вона зв‘язана з неправильним знаком квадрата швидкості v^2 безщілинного тахіонного плазмона, тобто з неправильним знаком кінетичного члена $\partial_i\vec{A}^{(8)}\partial_i\vec{A}^{(8)}$ ефективної дії. Цей факт вказує на можливість існування просторово неоднорідного глюонного конденсату в g2SC фазі.

4.2. Глюонна фаза КХД при великій густині матерії

4.2.1. Ефективний потенціал для конденсатів векторних полів. Аналіз виконаний в попередньому параграфі вказує на можливість конденсації глюонів в 2SC і g2SC фазах. В цьому параграфі ми розглянемо цю можливість і покажемо, що дійсно існує глюонна фаза кваркової матерії, в якій крім конденсатів кваркових полів мають місце також векторні конденсати глюонних полів.

Ми розглянемо нейтральну кваркову матерію з двома ароматами кварків. Для її опису ми використаємо феноменологічну модель Намбу–Йона-Лазініо, точніше калібрувальну НЙЛ модель з урахуванням глюонів. Хоча зазвичай НЙЛ модель розглядається як ефективна низькоенергетична модель, в якій масивні глюони відінтегровані, ми явним чином враховуємо глюонні степені свободи тому, що, по-перше, глюони непорушенної $SU(2)_c$ підгрупи кольорової $SU(3)_c$ групи залишаються безмасовими в 2SC і g2SC фазах, а, по-друге, при деяких умовах, як ми побачимо далі, деякі інші глюони можуть бути дуже легкими. Наявність безмасових або легких глюонів вказує на те, що ці глюонні поля можуть відігравати важливу роль і їх слід враховувати в низькоенергетичній ефективній дії.

Лагранжіан моделі має наступний вигляд

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\hat{D} + \hat{\mu}\gamma^0)q + G_\Delta \left[(\bar{q}^C i\varepsilon\epsilon^a\gamma_5 q)(\bar{q}i\varepsilon\epsilon^a\gamma_5 q^C) \right] + \mathcal{L}_g, \tag{4.8}$$

де

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4}F^\alpha_{\mu\nu}F^{\alpha\,\mu\nu} \tag{4.9}$$

і

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - igA^\alpha_\mu T^\alpha, \quad F^\alpha_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^\alpha_\nu - \partial_\nu A^\alpha_\mu + gf^{\alpha\beta\gamma}A^\beta_\mu A^\gamma_\nu. \tag{4.10}$$

Далі A^α_μ є глюонні поля, T^α - генератори $SU(3)$ групи в фундаментальному представленні, ε^{ij} і ϵ^{acd} - антисиметричні тензори в просторах аромату і кольору відповідно. Діагональна матриця хімічних потенціалів $\hat{\mu}$ для u і d

кварків дорівнює

$$\mu_{ur} = \mu_{ug} = \tilde{\mu} - \delta\mu, \qquad \mu_{dr} = \mu_{dg} = \tilde{\mu} + \delta\mu, \tag{4.11a}$$

$$\mu_{ub} = \tilde{\mu} - \delta\mu - \mu_8, \qquad \mu_{db} = \tilde{\mu} + \delta\mu - \mu_8, \tag{4.11b}$$

де

$$\tilde{\mu} \equiv \mu - \frac{\delta\mu}{3} + \frac{\mu_8}{3}, \qquad \delta\mu \equiv \frac{\mu_e}{2}. \tag{4.12}$$

Індекси r, g і b відповідають червоному, зеленому і блакитному кольорам кварків, μ_e - хімічний потенціал для електричного заряду, а кольоровий хімічний потенціал μ_8 пов‘язаний з вакуумним середнім часової компоненти 8-го глюона

$$g < 0|A_0^8|0 >= \frac{2}{\sqrt{3}}\mu_8. \tag{4.13}$$

Використовуючи допоміжне поле $\Delta^a \sim i\bar{q}^C\varepsilon\epsilon^a\gamma_5 q$ лагранжіан (4.8) може бути представлений у вигляді

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\hat{D} + \hat{\mu}\gamma^0)q - \frac{1}{2}\Delta^a[i\bar{q}\varepsilon\epsilon^a\gamma_5 q^C] - \frac{1}{2}[i\bar{q}^C\varepsilon\epsilon^a\gamma_5 q]\Delta^{*a} - \frac{|\Delta^a|^2}{4G_\Delta} + \mathcal{L}_g. \tag{4.14}$$

Як завжди в дослідженнях надпровідності корисно визначити спінор Намбу-Горькова

$$\Psi = \begin{pmatrix} q \\ q^C \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Обернений пропагатор для Ψ включає глюонні поля і має вигляд

$$S_g^{-1} = \begin{pmatrix} [G_{0,g}^+]^{-1} & \Delta^- \\ \Delta^+ & [G_{0,g}^-]^{-1} \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

де

$$[G_{0,g}^+]^{-1} \equiv (p^0 + \tilde{\mu} - \delta\mu\tau^3 - \mu_8 \mathbf{1}_b)\gamma^0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{p} + g\hat{A}^\alpha T^\alpha, \tag{4.17}$$

$$[G_{0,g}^-]^{-1} \equiv (p^0 - \tilde{\mu} + \delta\mu\tau^3 + \mu_8 \mathbf{1}_b)\gamma^0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{p} - g\hat{A}^\alpha T^{\alpha T} \tag{4.18}$$

і

$$\Delta^- \equiv -i\epsilon^b\varepsilon\gamma_5\Delta, \qquad \Delta^+ \equiv -i\epsilon^b\varepsilon\gamma_5\Delta^*. \tag{4.19}$$

Ми вибрали надпровідний кварковий конденсат вздовж блакитного кольорового напрямку, постійні поля A_μ^α представляють можливі глюонні конденсати в моделі, а матриці $\tau^3 \equiv \mathrm{diag}(1,-1)$ і $\mathbf{1}_b \equiv \mathrm{diag}(0,0,1)$ діють в просторах аромату і кольору відповідно. Ефективний потенціал в моделі включає глюонні поля і скалярне поле Δ. Він дорівнює

$$V_{\mathrm{eff}} = \frac{|\Delta|^2}{4G_\Delta} + \frac{g^2}{4} f^{\alpha\beta\gamma} f^{\alpha\delta\sigma} A^\beta_\mu A^\gamma_\nu A^{\delta\,\mu} A^{\sigma\,\nu} - \frac{1}{2}\int \frac{d^4p}{i(2\pi)^4} \ln\det S_g^{-1}\,, \qquad (4.20)$$

де останній доданок описує внесок ферміонного детермінанту.

4.2.2. Динаміка глюонів в підході Гінзбурга–Ландау. Розглянемо тепер динаміку легких глюонів. В роботі [250] дебаївські і мейснерівські маси глюонів були обчислені в 2SC фазі. Ці маси дорівнюють нулю для глюонів $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ і $A^{(3)}$ непорушенної $SU_c(2)$ симетрії при $\delta\mu < \Delta$. Для глюонів $A^{(4)-(7)}$ мейснерівська маса приблизно дорівнює

$$m_M^2 = \frac{g^2\tilde{\mu}^2}{6\pi^2}\left(1 - \frac{2\delta\mu^2}{\Delta^2}\right), \quad \delta\mu < \Delta. \qquad (4.21)$$

Таким чином, біля критичної точки $\delta\mu = \Delta/\sqrt{2}$ мейснерівська маса для $A^{(4)-(7)}$ глюонів є дуже малою. Коли $\delta\mu$ перевищує значення $\Delta/\sqrt{2}$, маса m_M^2 стає від‘ємною, що свідчить про хромомагнітну нестабільність 2SC розв‘язку. Між тим, поблизу критичної точки $\delta\mu = \Delta/\sqrt{2}$, синглетне відносно $SU(2)_c$ поле $A^{(8)}$ має значну масу. Ці факти вказують на те, що ми повинні враховувати $A^{(1)-(7)}$ глюони як важливі ступені вільності в ефективній низькоенергетичній теорії поблизу критичної точки $\delta\mu = \Delta/\sqrt{2}$. Нашою ціллю є опис динаміки цих ступенів вільності поблизу критичної точки в підході Гінзбурга–Ландау.

Надпровідна щілина $\Delta \neq 0$ динамічно порушує $SU(3)_c$ симетрію до $SU(2)_c$ симетрії. Приєднане представлення $SU(3)_c$ відносно $SU(2)_c$ розкладається наступним чином

$$\mathbf{8} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{2} \oplus \bar{\mathbf{2}} \oplus \mathbf{1}, \qquad (4.22)$$

тобто

$$\{A^{(\alpha)}_\mu\} = (A^{(1)}_\mu, A^{(2)}_\mu, A^{(3)}_\mu) \oplus K_\mu \oplus K^\dagger_\mu \oplus A^{(8)}_\mu, \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,8). \qquad (4.23)$$

В наведеній вище формулі ми визначили комплексний дублет “матеріальних” полів, які описують кольорові векторні “каони"

$$K_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A_\mu^{(4)} - iA_\mu^{(5)} \\ A_\mu^{(6)} - iA_\mu^{(7)} \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Ми також позначили

$$f_{\mu\nu}^{(l)} \equiv \partial_\mu A_\nu^{(l)} - \partial_\nu A_\mu^{(l)} + g\epsilon^{lmn} A_\mu^{(m)} A_\nu^{(n)}, \qquad (l, m, n = 1, 2, 3) \tag{4.25}$$

і

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu - igA_\mu^{(l)} \frac{\sigma^l}{2}. \tag{4.26}$$

Тоді структурними елементами ефективної дії є наступні шість величин

$$K_0, \quad K_j, \quad \mathcal{D}_0, \quad \mathcal{D}_j, \quad f_{0j}, \quad f_{jk}. \tag{4.27}$$

Ефективна дія повинна бути інваріантною відносно всіх початкових симетрій, зокрема кольорової $SU(2)_c$ і симетрії відносно обертань $SO(3)_{\rm rot}$.

Внаслідок хромомагнітної нестабільності при $\delta\mu > \Delta/\sqrt{2}$ природньо очікувати спонтанне порушення $SU(2)_c$ симетрії шляхом утворення конденсату векторних полів $< 0|K_\mu|0 >\neq 0$ для однієї з просторових компонент K_μ. В силу симетрії відносно обертань $SO(3)_{\rm rot}$, не втрачаючи загальність, ми можемо вибрати $< 0|K_3|0 >\neq 0$. Далі внаслідок $SU(2)_c$ симетрії ми можемо вибрати $< 0|A_3^{(6)}|0 >\neq 0$. Таке ненульове середнє спонтанно порушує $SU(2)_c$ і $SO(3)_{\rm rot}$ симетрії.

В роботі [261] досліджувались конденсати векторних бозонів в калібрувальній σ-моделі із хімічним потенціалом для гіперзаряда, які порушують калібрувальну $SU(2)_L$ симетрію. Використовуючи досвід цієї роботи ми розглянемо наступний анзатц в моделі, яку ми досліджуємо,

$$B \equiv g < 0|A_3^{(6)}|0 >, \quad C \equiv g < 0|A_3^{(1)}|0 >, \quad D \equiv g < 0|A_0^{(3)}|0 > \tag{4.28}$$

(відзначимо, що середнє $g < 0|A_0^{(3)}|0 >$ може розглядатися як хімічний потенціал μ_3 пов‘язаний з третьою компонентою генератора кольорової калібрувальної групи).

Враховуючи $SU(2)_c$ і $SO(3)_{\rm rot}$ симетрії і використовуючи структурні величини (4.27) розглянемо тепер в рамках підходу Гінзбурга–Ландау який вигляд має ефективний потенціал поблизу критичної точки $\delta\mu \simeq \Delta/\sqrt{2}$ враховуючи доданки масової розмірності чотири включно. Ми маємо наступний вираз для ефективного потенціалу

$$V_{\rm eff} = V_\Delta + \frac{1}{2}M_B^2B^2 + TDB^2 + \frac{1}{2}\lambda_{BC}B^2C^2 + \frac{1}{2}\lambda_{BD}B^2D^2 + \frac{1}{2}\lambda_{CD}C^2D^2 + \frac{1}{4}\lambda_B B^4, \tag{4.29}$$

де V_Δ є 2SC частина ефективного потенціала. Коефіцієнти λ_B, λ_{BC}, λ_{BD} і λ_{CD} безрозмірні, а коефіцієнт T має масову розмірність один. Всі ці коефіцієнти ми можемо отримати розкладаючи потенціал (4.20) відносно B, C і D.

Перед тим як це зробити, ми проаналізуємо в загальних рисах поведінку ефективного потенціалу (4.29) поблизу критичної точки. Точка екстремуму ефективного потенціалу (4.29) визначається наступними рівняннями

$$\frac{\partial V_{\rm eff}}{\partial B} = B\left[\,M_B^2 + \lambda_B B^2 + 2TD + \lambda_{BC}C^2 + \lambda_{BD}D^2\,\right] = 0, \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial V_{\rm eff}}{\partial C} = C\left[\,\lambda_{BC}B^2 + \lambda_{CD}D^2\,\right] = 0, \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial V_{\rm eff}}{\partial D} = TB^2 + \lambda_{BD}DB^2 + \lambda_{CD}C^2D = 0 \tag{4.32}$$

і

$$\frac{\partial V_{\rm eff}}{\partial \mu_e} = 0, \qquad \frac{\partial V_{\rm eff}}{\partial \mu_8} = 0, \qquad \frac{\partial V_{\rm eff}}{\partial \Delta} = 0. \tag{4.33}$$

Припустимо, що точка біфуркації розв‘язку з ненульовими B, C і D відповідає фазовому переходу другого роду (ми покажемо нижче, що таке припущення є самоузгодженим). Тоді ми можемо представити μ_e, μ_8 і Δ наступним чином

$$\mu_e = \bar{\mu}_e + \xi_e, \tag{4.34}$$

$$\mu_8 = \bar{\mu}_8 + \xi_8, \tag{4.35}$$

$$\Delta = \bar{\Delta} + \xi_\Delta, \tag{4.36}$$

де величини з рисочкою зверху відповідають 2SC рішенню коли $B = C = D = 0$, а

$$\xi_e, \xi_8, \xi_\Delta \sim \mathcal{O}(B^2) \tag{4.37}$$

є величинами порядку B^2, тобто є інфінітезімально малими поблизу точки фазового переходу. Обчислюючи різницю енергій між V_Δ для нового і 2SC розв‘язків ми знаходимо, що вона є величиною порядка B^4.

$$V_\Delta(\Delta^{\mathrm{sol}}, \mu_e^{\mathrm{sol}}, \mu_8^{\mathrm{sol}}) - V_\Delta(\bar{\Delta}, \bar{\mu}_e, \bar{\mu}_8) \sim \mathcal{O}(B^4). \tag{4.38}$$

Цей факт ми використаємо в подальшому аналізі.

Як випливає з рівнянь (4.30)–(4.32), у випадку коли 2SC рішення стає нестабільним ($M_B^2 < 0$) з‘являється нове рішення якщо параметри λ_{BC} і λ_{CD} задовольняють умови

$$\lambda_{BC} > 0, \quad \lambda_{CD} < 0 \tag{4.39}$$

(в наступному параграфі ми покажемо, що ці умови дійсно задовольняються). Нове рішення є

$$B_{\mathrm{sol}} = \frac{-M_B^2}{3|T|}\sqrt{\frac{-\lambda_{CD}}{\lambda_{BC}}}, \quad C_{\mathrm{sol}} = \sqrt{\frac{-M_B^2}{3\lambda_{BC}}}, \quad D_{\mathrm{sol}} = \frac{-M_B^2}{3T}, \tag{4.40}$$

де ми знехтували членами вищого порядку по M_B^2.

Біля критичної точки $M_B^2 = 0$ нове рішення веде себе як

$$B_{\mathrm{sol}} \propto -M_B^2, \quad C_{\mathrm{sol}} \propto \sqrt{-M_B^2}, \quad D_{\mathrm{sol}} \propto -M_B^2. \tag{4.41}$$

Ці співвідношення мають важливе значення. Вони означають, що доданки B^4 і B^2D^2 в ефективному потенціалі не є суттєвими поблизу критичної точки $M_B^2 = 0$. Нехтуючи ними ми знаходимо редукований ефективний потенціал

$$\tilde{V}_{\mathrm{eff}} = V_\Delta + \frac{1}{2}M_B^2 B^2 + TDB^2 + \frac{1}{2}\lambda_{BC}B^2C^2 + \frac{1}{2}\lambda_{CD}C^2D^2. \tag{4.42}$$

Зауважимо, що $(\tilde{V}_{\mathrm{eff}} - V_\Delta) \sim \mathcal{O}(B^3)$. Цей факт і рівняння (4.38) означають, що в лідируючому наближенні ми можемо використовувати величини з рисочкою зверху визначені в рівняннях (4.34)-(4.36) при обчисленні V_Δ, M_B^2, T, λ_{BC} і λ_{CD} в редукованому потенціалі. Іншими словами, ефективний потенціал може бути представлений як сума 2SC частини V_Δ із 2SC ферміонними параметрами і динамічної глюонної частини

$$\tilde{V}_{\text{eff}} \to \tilde{V}_{\text{eff}}(\bar{\Delta}, \bar{\mu}_e, \bar{\mu}_8; B, C, D) = V_\Delta(\bar{\Delta}, \bar{\mu}_e, \bar{\mu}_8) + \frac{1}{2}M_B^2 B^2 + TDB^2$$
$$+\frac{1}{2}\lambda_{BC}B^2C^2 + \frac{1}{2}\lambda_{CD}C^2D^2. \tag{4.43}$$

Тоді (4.40) є точним екстремумом для потенціалу (4.43) і густина енергії в стаціонарній точці дорівнює

$$\tilde{V}_{\text{eff}}(\bar{\Delta}, \bar{\mu}_e, \bar{\mu}_8; B_{\text{sol}}, C_{\text{sol}}, D_{\text{sol}}) = V_\Delta + \frac{1}{6}M_B^2 B_{\text{sol}}^2 = V_\Delta - \frac{(-M_B^2)^3}{54T^2}\left(-\frac{\lambda_{CD}}{\lambda_{BC}}\right) < V_\Delta. \tag{4.44}$$

Таким чином, стан із конденсатами глюонних полів є більш стабільним ніж 2SC стан.

Використовуючи закон Гауса

$$TB^2 + \lambda_{CD}C^2D = 0, \tag{4.45}$$

ми знаходимо істинний ефективний потенціал без нединамічної ступені вільності $A_0^{(3)}$

$$\tilde{V}_{\text{eff}}^{\text{Gauss}} = V_\Delta + \frac{1}{2}M_B^2B^2 + \frac{1}{2}\lambda_{BC}B^2C^2 - \frac{T^2B^4}{2\lambda_{CD}C^2}. \tag{4.46}$$

Аналізуючи кривизну $\tilde{V}_{\text{eff}}^{\text{Gauss}}$ легко показати, що рішення (4.40) є мінімумом ефективного потенціалу (4.46).

4.2.3. Глюонна фаза. В цьому параграфі ми обчислимо коефіцієнти M_B^2, T, λ_{BC}, λ_{CD} і покажемо, що в моделі, яка розглядається, дійсно існує глюонна фаза з конденсатами глюонних полів. 2SC частина V_Δ ефективного потенціалу добре відома [262]

$$V_\Delta(\Delta, \mu_e, \mu_8) = \frac{\Delta^2}{4G_\Delta} - \frac{\mu_e^4}{12\pi^2} - \frac{\mu_{ub}^4}{12\pi^2} - \frac{\mu_{db}^4}{12\pi^2} - \frac{\tilde{\mu}^4}{3\pi^2}$$

$$-\frac{\Delta^2}{\pi^2}\left[\tilde{\mu}^2-\frac{1}{4}\Delta^2\right]\ln\frac{4\Lambda^2}{\Delta^2}-\frac{\Delta^2}{\pi^2}\left[\Lambda^2-2\tilde{\mu}^2+\frac{1}{8}\Delta^2\right], \quad (\delta\mu<\Delta)\,, \tag{4.47}$$

де Λ - ультрафіолетовий параметр обрізання в НЙЛ моделі, а μ_{ub}, μ_{db} і $\tilde{\mu}$ визначені в рівняннях (4.11) і (4.12). Для спрощення позначень ми вилучили рисочки зверху над величинами Δ, μ_e і μ_8 (ми знехтували також в цьому виразі величинами порядка $\mathcal{O}(\tilde{\mu}^2/\Lambda^2)$ і $\mathcal{O}(\Delta^2/\Lambda^2)$). Умови кольорової і електричної нейтральності 2SC рішення призводять до рівнянь

$$\delta\mu=\frac{3}{10}\mu-\frac{1}{5}\mu_8, \tag{4.48}$$

$$(\tilde{\mu}^2+\delta\mu^2)\mu_8=-\tilde{\mu}\Delta^2\left(\ln\frac{2\Lambda}{\Delta}-1\right)+\tilde{\mu}(\delta\mu^2+\mu_8^2)-\frac{1}{3}\mu_8^3. \tag{4.49}$$

Надпровідна щілина Δ визначається НЙЛ константою зв‘язку G_Δ і параметром обрізання Λ.

Обчислюючи відповідні діаграми, які генеруються ферміонним детермінантом в (4.20) ми знаходимо в області $\delta\mu<\Delta$

$$M_B^2=-\frac{\mu_8^2}{g^2}+\frac{\tilde{\mu}^2}{6\pi^2}\left(1-\frac{2\delta\mu^2}{\Delta^2}\right), \tag{4.50}$$

$$\lambda_{BC}=\frac{1}{80\pi^2}\frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta^2}\left[-1+8\frac{\delta\mu^2}{\Delta^2}\left(1-\frac{\delta\mu^2}{\Delta^2}\right)\right], \tag{4.51}$$

$$\lambda_{CD}=-\frac{1}{g^2}-\frac{1}{18\pi^2}\frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta^2}, \tag{4.52}$$

$$T=\frac{\mu_8}{2g^2}+\frac{\mu_8}{24\pi^2}\frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta^2}\left(-1+8\frac{\delta\mu^4}{\Delta^4}\right)+\frac{\tilde{\mu}}{48\pi^2}\left(-1+4\frac{\delta\mu^2}{\Delta^2}+8\frac{\delta\mu^4}{\Delta^4}\right). \tag{4.53}$$

В цих рівняннях ми врахували також глюонний вклад, який випливає із КХД лагранжіана для глюонів

$$V_g\equiv-\mathcal{L}_g=-\frac{1}{2}F_{0j}^{(\alpha)}F_{0j}^{(\alpha)}=-\frac{1}{2g^2}\mu_8^2B^2+\frac{1}{2g^2}\mu_8DB^2-\frac{1}{8g^2}B^2D^2-\frac{1}{2g^2}C^2D^2\,. \tag{4.54}$$

Ми бачимо, що коефіцієнт λ_{CD} дійсно є від‘ємним. Параметр M_B^2, який визначає мейснерівську масу, від‘ємний для

$$\delta\mu>\delta\mu_{\rm cr}, \qquad \delta\mu_{\rm cr}=\frac{\Delta}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{3\pi}{2\alpha_s}\frac{\mu_8^2}{\tilde{\mu}^2}}, \qquad \alpha_s\equiv\frac{g^2}{4\pi}. \tag{4.55}$$

Із рівнянь (4.48) і (4.12) випливає

$$\tilde{\mu} = \frac{9}{10}\mu + \frac{2}{5}\mu_8, \tag{4.56}$$

і в критичній точці ми знаходимо з рівнянь (4.48), (4.49) і (4.55), (4.56), що μ_8 приблизно дорівнює

$$\mu_8 = \frac{3 - \ln\frac{200\Lambda^2}{9\mu^2}}{12 + \frac{4}{9}\left(\ln\frac{200\Lambda^2}{9\mu^2} - 2\right)}\,\mu. \tag{4.57}$$

Для реалістичних значень $\Lambda = (1.5 - 2.0)\mu$ і $\alpha_s = 0.75 - 1.0$ чисельно ми маємо

$$\frac{3\pi}{2\alpha_s}\frac{\mu_8^2}{\tilde{\mu}^2} = 0.03\text{–}0.1\ . \tag{4.58}$$

Таким чином, врахування вкладу глюонів, який випливає з (4.54) зменшує значення $\delta\mu_{\rm cr}$ на 1.5%–5% порівнянно з відповідним значенням в (некалібрувальній) НЙЛ моделі.

Коефіцієнт λ_{BC} (4.51) в критичній точці $\delta\mu = \delta\mu_{\rm cr}$ дорівнює

$$\lambda_{BC} = \frac{1}{80\pi^2}\frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta^2}\left(1 - \frac{9\pi^2}{2\alpha_s^2}\frac{\mu_8^4}{\tilde{\mu}^4}\right). \tag{4.59}$$

Доданок $\mu_8^4/\tilde{\mu}^4$ є дуже малим і тому ми бачимо, що коефіцієнт λ_{BC} є додатнім поблизу критичної точки. Внаслідок цього умова (4.39) дійсно задовольняється.

Підставляючи (4.50)–(4.53) в рівняння (4.40) ми знаходимо шукані розв‘язки для B, C і D поблизу критичної точки. Нехтуючи членами вищого порядку в μ_8/μ в рівняннях (4.50)–(4.53) ми маємо

$$M_B^2 \simeq \frac{\tilde{\mu}^2}{6\pi^2}\left(1 - \frac{\delta\mu^2}{\delta\mu_{\rm cr}^2}\right), \qquad \lambda_{BC} \simeq \frac{9}{160\pi^2},$$

$$\lambda_{CD} \simeq -\frac{1}{4\pi\alpha_s} - \frac{1}{4\pi^2}, \qquad T \simeq \frac{\tilde{\mu}}{16\pi^2} + \frac{\mu_8}{16\pi^2}\left(3 + \frac{2\pi}{\alpha_s}\right), \tag{4.60}$$

звідки отримуємо шуканий розв'язок

$$B_{\rm sol} \;=\; \frac{\delta\mu^2-\delta\mu_{\rm cr}^2}{\delta\mu_{\rm cr}^2}\frac{16\,\tilde{\mu}\sqrt{10\left(1+\frac{\pi}{\alpha_s}\right)}}{27\left[1+\frac{\mu_8}{\tilde{\mu}}\left(3+\frac{2\pi}{\alpha_s}\right)\right]}, \tag{4.61}$$

$$C_{\rm sol} \;=\; \frac{\sqrt{\delta\mu^2-\delta\mu_{\rm cr}^2}}{\delta\mu_{\rm cr}}\frac{4\sqrt{5}\,\tilde{\mu}}{9}, \tag{4.62}$$

$$D_{\rm sol} \;=\; \frac{\delta\mu^2-\delta\mu_{\rm cr}^2}{\delta\mu_{\rm cr}^2}\frac{8\,\tilde{\mu}}{9\left[1+\frac{\mu_8}{\tilde{\mu}}\left(3+\frac{2\pi}{\alpha_s}\right)\right]}. \tag{4.63}$$

Важливо відзначити, що цей розв'язок відповідає ненульовому $F_{\mu\nu}^{(\alpha)}$, що свідчить про наявність неабельових постійних хромоелектричних конденсатів в основному стані системи

$$E_3^{(2)} \;=\; F_{03}^{(2)} = \frac{1}{g}\,C_{\rm sol}D_{\rm sol}\,, \tag{4.64}$$

$$E_3^{(7)} \;=\; F_{03}^{(7)} = \frac{1}{2g}\,B_{\rm sol}\,(\,2\mu_8 - D_{\rm sol}\,)\,. \tag{4.65}$$

Добре відомо, що постійне абелеве електричне поле в різних середовищах завжди призводить до нестабільності. Однак неабелеве електричне поле в багатьох випадках не призводить до відповідної нестабільності [263]. З технічної точки зору ця різниця в поведінці пов‘язана з тим, що в той час як векторний потенціал для абелевого електричного поля залежить від просторих або часової координат, постійне неабелеве хромоелектричне поле виражається через постійний векторний потенціал, як це має місце у нашому випадку і тому імпульс і енергія є гарними квантовими числами у цьому випадку. Для того, щоб дослідити питання стабільності глюонної фази ми знайшли в роботі [93] закони дисперсії для кварків в цій фазі і показали відсутність нестабільності в цьому секторі теорії.

Таким чином, досліджуючи динаміку глюонів ми показали, що звичайний хігсівський механізм реалізується в глюонній фазі. Присутність постійних хромоелектричних конденсатів робить глюонну фазу відмінною від всіх відомих фаз кваркової матерії, які обговорюються в літературі. Це робить динаміку цієї фази явним чином небелевою. Внаслідок того, що кольорова $SU_c(3)$ і електромагнітна $U(1)$ симетрії спонтанно порушені, спектр збуджень в глюонній фазі є дуже багатим. В роботі [96] була розглянута σ-модель з хімічним потенціалом для гіперзаряду, яка має такий самий характер порушення симетрії, як і розглянута в цьому параграфі модель з глюонною фазою, і було показано, що в σ-моделі з хімічним потенціалом для гіперзаряду існують три типи топологічно стабільних вихорових розв'язків пов'язаних з електромагнітним, гіперзарядовим, або з обома калібрувальними полями разом. Появи розв'язків подібного типу слід очікувати і в глюонній фазі. Якщо глюонна або подібна до неї фаза є основним станом кольорового надпровідника і ця фаза існує в центральних областях нейтронних зірок, тоді знайдені вихорові розв'язки можуть бути важливими для деяких спостережуваних властивостей нейтронних зірок.

Розв'язок (4.61)–(4.63) відповідає мінімуму ефективного потенціалу. Однак питання чи є це рішення глобальним мінімумом залишається відкритим. Відзначимо, що цілком ймовірно, що існує цілий клас розв‘язків з ненульовими векторними конденсатами. З цієї точки зору корисно згадати фазу Ларкіна–Овчінікова–Фульде–Ферела (ЛОФФ) з просторово неоднорідною надпровідною щілиною в кварковій матерії [253, 254]. Легко показати, що ЛОФФ розв‘язок з однією плоскою хвилею вздовж, наприклад, z координати за допомогою калібрувального перетворення може бути представлений як розв‘язок із однорідною надпровідною щілиною і векторним конденсатом $< 0|A_3^{(8)}|0 >$. (Відзначимо, що таке відображення неможливе у випадку ЛОФФ розв‘язку з двома або більшою кількістю плоских хвиль.) Нещодавно в роботах [257, 258] ЛОФФ розв'язок з однією плоскою хвилею було використано з ціллю розв‘язати проблему хромомагнітної нестабільності. Ми дослідимо це питання в наступному параграфі.

4.3. Нейтральний ЛОФФ стан і хромомагнітна нестабільність

В цьому параграфі ми покажемо, що хоча нейтральний ЛОФФ стан має меншу енергію ніж 2SC і g2SC стани, в ньому, як і в останніх, присутня хромомагнітна нестабільність. В літературі нейтральний ЛОФФ стан в кварковій матерії з двома ароматами кварків розглядався в роботі [258] в режимі слабкого зв‘язку. В роботі [95] ми розглянули ЛОФФ стан в режимах проміжного і сильного зв‘язку, де він співіснує з 2SC і g2SC станами.

Згідно з [253, 254] параметр порядку ЛОФФ стану з однією плоскою хвилею визначається постійною амплітудою Δ і постійним вектором $\vec{q}$ в показнику експоненти. Зручно зробити калібрувальне перетворення $\psi \to \psi' = exp(-2\sqrt{3}i\vec{q}{\cdot}\vec{x}T^8)\,\psi$, де $T^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{diag}(1, 1, -2)$ є восьмий генератор $SU_c(3)$ в фундаментальному представленні. В результаті такого перетворення залежна від x фаза ЛОФФ параметра порядку заміняється незалежним від x членом $-2\sqrt{3}\,\bar{\psi}\vec{\gamma}\vec{q}T^8\psi$ в кінетичний частині для кварків. Очевидно, має місце рівність

$$\vec{q} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,g < 0|\vec{A}^{(8)}|0 > , \tag{4.66}$$

тобто вектор $\vec{q}$ є пропорційним вакуумному середньому просторової частини 8-го глюона.

Для того, щоб знайти вільну енергію (ефективний потенціал) нам потрібно обчислити ферміонний детермінант. В термінах спінора Намбу–Горькова $\Psi^T \equiv (\psi_{ir}, \psi_{ir}^C, \psi_{ig}, \psi_{ig}^C, \psi_{ib}, \psi_{ib}^C)$ внесок безщілинних блакитних глюонів факторізується і використовуючи стандартні формули для матриць два на два в секторі червоних і зелених кварків ми знаходимо

$$\mathrm{det}S^{-1}(p_0, \vec{p}) = \prod_{\tau^3=\pm1}\left[(p^0 + \bar{\mu} - \delta\mu\tau^3 - \mu_8)^2 - (\vec{p} - 2\vec{q})^2\right]^2$$

$$\times \prod_{\tau^3=\pm1}\left[(p^0 - \bar{\mu} + \delta\mu\tau^3 + \mu_8)^2 - (\vec{p} + 2\vec{q})^2\right]^2$$

$$\times \prod_{\tau^3=\pm 1} \Bigg[\Big\{ \big(p^0 - \delta\mu\tau^3 - Q \big)^2 - (E^-_{\Delta,q})^2 \Big\}$$

$$\times \Big\{ \big(p^0 - \delta\mu\tau^3 + Q \big)^2 - (E^+_{\Delta,q})^2 \Big\} + 4\Delta^2 (Q^2 - q^2) \Bigg]^4 , \qquad (4.67)$$

де ми визначили

$$Q \;=\; \frac{1}{2}\Big(|\vec{p}+\vec{q}| - |\vec{p}-\vec{q}| \Big), \;\; q \equiv |\vec{q}| \,, \qquad (4.68)$$

$$E^{\pm}_{\Delta,q} \;\equiv\; \sqrt{\frac{1}{4}\big(E^{\pm}_{p+q} + E^{\pm}_{p-q} \big)^2 + \Delta^2}\,, \qquad (4.69)$$

$$E^{\pm}_{p+q} \;\equiv\; |\vec{p}+\vec{q}| \pm \bar{\mu} \,. \qquad (4.70)$$

Вільна енергія виражається через інтеграл від $\ln \det S^{-1}$. Внаслідок того, що надпровідна щілина дорівнює нулю для блакитних кварків їх внесок в вільну енергію співпадає з внеском безмасових вільних ферміонів. Для того, щоб знайти відповідний внесок в секторі червоних і зелених кварків ми зробимо звичайне припущення домінування внеску імпульсів в області поблизу поверхні Фермі з імпульсами $p \equiv |\vec{p}| \sim \bar{\mu}$. Тоді нехтуючи вкладами подавленими $1/\bar{\mu}^2$ ми можемо не враховувати останній доданок $4\Delta^2(Q^2 - q^2)$ в рівнянні (4.67) і використати наступні співвідношення

$$Q = q\cos\theta + \mathcal{O}\left(\frac{q^3}{p^2}\right), \qquad \cos\theta \equiv \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{p\,q}, \qquad (4.71)$$

$$E^{\pm}_{\Delta,q} = E^{\pm}_{\Delta} + \frac{q^2}{2p}\frac{p \pm \bar{\mu}}{E^{\pm}_{\Delta}}(1-\cos^2\theta) + \mathcal{O}\left(\frac{q^4}{p^2 E^{\pm}_{\Delta}}\right), \qquad (4.72)$$

де $E^{\pm}_{\Delta} \equiv \sqrt{(p \pm \bar{\mu})^2 + \Delta^2}$. Обчислюючи інтеграл і зберігаючи тільки лідируючий вклад ми знаходимо наступну вільну енергію ЛОФФ стану кваркової матерії з двома ароматами кварків

$$\Omega(\bar{\mu}, \delta\mu, \mu_8, \Delta, q) = \Omega_{2\mathrm{SC}} + \frac{2\bar{\mu}^2 q^2}{3\pi^2}$$

$$+\frac{\bar{\mu}^2}{\pi^2}\left[\frac{(q+\delta\mu)^3}{q}\left(\frac{1}{2}\,(1-x_1^2)\,\ln\frac{1+x_1}{1-x_1} - x_1 + \frac{2}{3}x_1^3 \right) + (q \to -q) \right], \qquad (4.73)$$

де $\Omega_{2\mathrm{SC}}$ дорівнює

$$\Omega_{2\mathrm{SC}} = -\frac{\mu_e^4}{12\pi^2} - \frac{\mu_{ub}^4}{12\pi^2} - \frac{\mu_{db}^4}{12\pi^2} - \frac{\bar{\mu}^4}{3\pi^2} + \frac{\Delta^2}{4G_\Delta} - \frac{\bar{\mu}^2\Delta^2}{\pi^2} \ln\frac{4(\Lambda^2-\bar{\mu}^2)}{\Delta^2} - \frac{\Delta^2}{\pi^2}\left(\Lambda^2 - 2\bar{\mu}^2\right), \tag{4.74}$$

Λ - ультрафіолетовий параметр обрізання в моделі Намбу–Йона-Лазініо, $x_1 \equiv \theta(1-\frac{\Delta^2}{(\delta\mu+q)^2})\sqrt{1-\frac{\Delta^2}{(\delta\mu+q)^2}}$ $\theta(x)$ - функція Хевісайда, а внесок електронів включений в $\Omega_{2\mathrm{SC}}$.

Рівняння, які визначають екстремум вільної енергії (4.73), утворюють систему чотирьох рівнянь. Це два рівняння для щілини Δ та вектора q і два рівняння для $\delta\mu$ та μ_8, які забезпечують нейтральність системи

$$\text{а)}\ \frac{\partial\Omega}{\partial\Delta} = 0\,, \qquad \text{б)}\ \frac{\partial\Omega}{\partial q} = 0\,, \qquad \text{в)}\ \frac{\partial\Omega}{\partial\delta\mu} = 0\,, \qquad \text{г)}\ \frac{\partial\Omega}{\partial\mu_8} = 0\,. \tag{4.75}$$

Ми проаналізували чисельно і в деяких граничних випадках аналітично ці рівняння. Аналіз рівняння (4.75 г) показує, що μ_8 подавлено як $\mu_8 \sim \mathcal{O}\left(\frac{\Delta^2}{\bar{\mu}}\right)$ або $\mu_8 \sim \mathcal{O}\left(\frac{q^2}{\bar{\mu}}\right)$, що дозволяє покласти $\mu_8 = 0$ в рівняннях (4.75 а), (4.75 б) і (4.75 в) і в вільній енергії (4.73).

Типові значення кваркового хімічного потенціалу μ в центральних областях нейтронних зірок знаходяться в інтервалі $300-500$ МеВ. В чисельних розрахунках ми використали значення μ=400 МеВ і $\Lambda = 653.3$ МеВ [250] (ми перевірили, що отримані результати не є чутливими до вибору значення μ в інтервалі $300-500$ МеВ). Константа зв'язку G_Δ визначає фізичні властивості моделі. На практиці зручно замість G_Δ використовувати значення 2SC щілини Δ_0 при $\delta\mu$=0 як параметр, який характеризує величину взаємодії. Кожне з рівнянь (4.75 а), (4.75 б) і (4.75 в) при $\mu_8 = 0$ визначає поверхню в тривимірному просторі з координатами Δ, q і $\mu_e = 2\delta\mu$. Переріз поверхні нейтральності, яка визначається рівнянням (4.75 в) і поверхні визначенної рівнянням для щілини (4.75 б) дозволяє знайти криву нейтральності. Її проекції на площини (μ_e, Δ) і (μ_e, q) зображені на Рис. 4.6 (а) і 4.6 (б) відповідно.

Для фіксованого Δ_0 розв'язок для нейтрального ЛОФФ стану зображено чорною жирною точкою в місці перетину кривої нейтральності і кривою

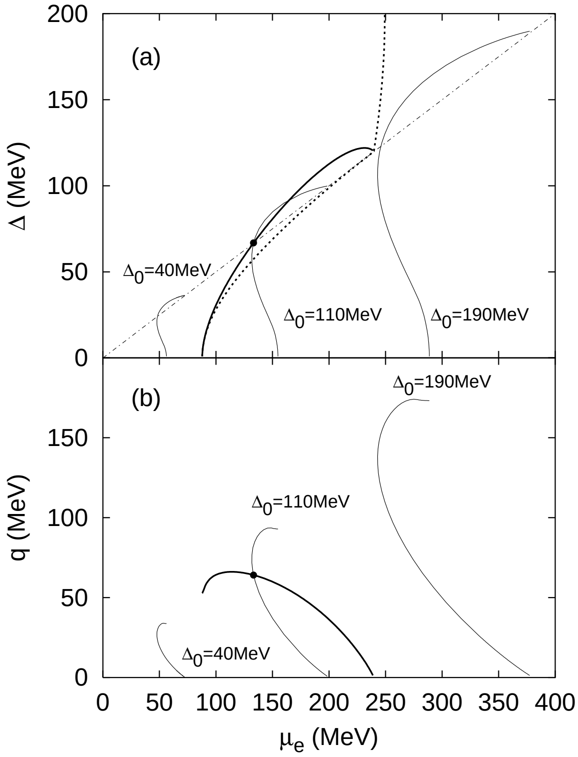


Рис. 4.6. Крива нейтральності для ЛОФФ стану (суцільна жирна лінія) і розв'язки рівняння для щілини (тонкі суцільні лінії) для трьох значень Δ_0. Штрихова лінія в (a) є лінією нейтральності для 2SC/g2SC стану. Штрих-пунктирна лінія в (a) є крива $\Delta = \delta\mu$.

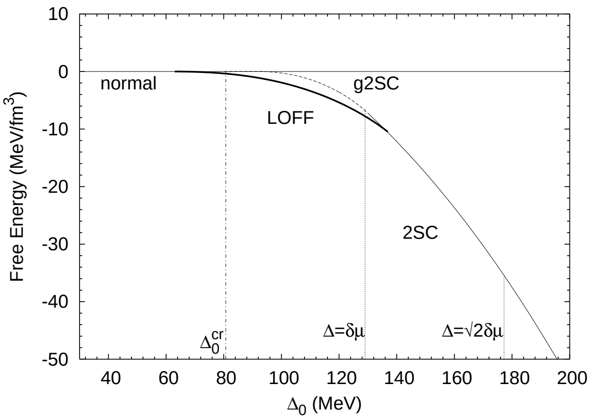


Рис. 4.7. Вільна енергія нейтрального ЛОФФ стану (суцільна жирна лінія) та нейтральних 2SC (тонка суцільна лінія) і g2SC станів (штрихова лінія). Вільна енергія нормального стану вибрана як лінія відліку.

“щілини”, яка визначається двома рівняннями для щілини (4.75 а) і (4.75 б). Крива нейтральності для ЛОФФ стану (жирна лінія) і три криві щілин (тонкі лінії) зображені на Рис. 4.6 для трьох характерних значень Δ_0: 40 МеВ (слабкий зв‘язок), 110 МеВ (проміжний зв‘язок) і 190 МеВ (сильний зв‘язок). Нейтральний ЛОФФ розв‘язок існує тільки у випадку проміжного зв‘язку, де має місце також безщілинний g2SC розв‘язок.

Аналіз рівнянь (4.75 а)-(4.75 в) показує, що нейтральний ЛОФФ розв’язок існує в інтервалі

$$63\ \text{MeV} < \Delta_0 < 137\ \text{MeV} \qquad (\text{ЛОФФ вікно})\,, \tag{4.76}$$

який можно порівняти з наступним інтервалом, де існує g2SC розв’язок

$$92\ \text{MeV} < \Delta_0 < 130\ \text{MeV} \qquad (\text{g2SC вікно})\,. \tag{4.77}$$

Зауважимо, що для однакових значень Δ_0 (тобто для однакових значень константи зв‘язку G_Δ) значення параметрів Δ і $\delta\mu$ є різними для нейтральних 2SC/g2SC і ЛОФФ фаз.

В інтервалі (4.76), де існує ЛОФФ розв’язок, ми знайшли, що $\Delta/\Delta_0 =$ 0–0.83. Вільні енергії різних фаз зображені на Рис. 4.7 (вільна енергія нормальної фази використана як точка відліку). З цього рисунку видно, що

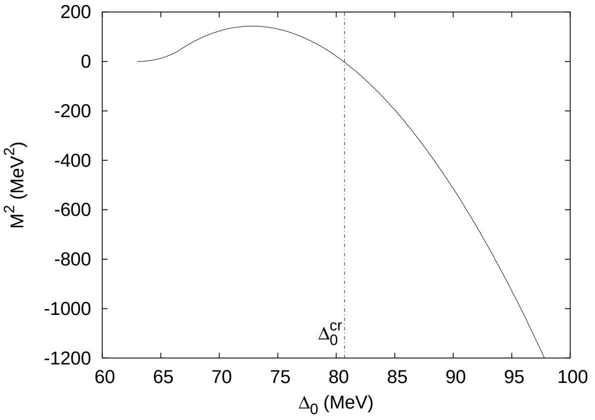


Рис. 4.8. Квадрат мейснірівської маси для 4-7-го глюонів для нейтрального ЛОФФ стану.

нейтральна ЛОФФ фаза є більш стабільною порівняно з нейтральною нормальною фазою у всьому інтервалі (4.76) де ці фази співіснують. Нейтральна ЛОФФ фаза має також меншу енергію ніж нейтральна g2SC/2SC фаза у всьому інтервалі, де існує g2SC фаза (4.77), а також у маленькій області 130 MeB $< \Delta_0 <$ 136 MeB поблизу точки де 2SC фаза переходить в g2SC фазу. Однак в силу того, що хромомагнітна нестабільність в 2SC фазі має місце при $\delta\mu = \Delta/\sqrt{2}$, що відповідає $\Delta_0 = 177$ MeB, нейтральне ЛОФФ рішення не вирішує проблему хромомагнітної нестабільності в широкому інтервалі 136 MeB $< \Delta_0 <$ 177 MeB.

Комбінуючи рівняння (4.75) з рівнянням (68) в роботі [264], яке визначає мейснерівські маси, ми знайшли, що для нейтрального ЛОФФ стану мейснерівські маси 4–7-го глюонів є уявними при всіх значеннях $\Delta_0 > \Delta_0^{\rm cr} = 81$ MeB (дивись Рис. 4.8). Це означає, що нейтральний ЛОФФ стан має хромомагнітну нестабільність. В силу того, що Δ_0 в 2SC фазі і в інтервалі де існує g2SC рішення (4.77) є більшою від критичного значення $\Delta_0^{\rm cr} = 81$ MeB (дивись Рис. 4.7) ми робимо висновок, що у всьому інтервалі де нейтральні 2SC/g2SC і ЛОФФ фази співіснують всі ці три фазі є нестабільними. Тому ЛОФФ стан з однією плоскою хвилею не вирішує проблему хромомагнітної нестабільності.

В силу зв'язку між ЛОФФ вектором $\vec{q}$ і вакуумним середнім поля $\vec{A}^{(8)}$, який визначений в рівнянні (4.66), хромомагнітна нестабільність нейтрального ЛОФФ стану з однією плоскою хвилею свідчить про те, що один векторний конденсат $< 0|\vec{A}^{(8)}|0 >$ не вирішує проблему хромомагнітної нестабільності. Ми розглядаємо цей результат як аргумент на користь глюонної фази [93]. Дійсно глюонна фаза має три додаткові векторні конденсати пов'язані з 4–7-ми глюонами і як показано в роботі [93] хромомагнітна нестабільність відсутня в цій фазі в режимі сильного зв'язку для $\Delta_0 = 177$ MeV, що відповідає кінцевій точці $\delta\mu = \Delta/\sqrt{2}$ хромомагнітної нестабільності 2SC розв'язку.

4.4. Кольоровий надпровідник у зовнішньому магнітному полі

Як ми відзначали вище, єдине місце у Всесвіті, де може існувати кольорова надпровідність є центральні області нейтронних зірок. Як добре відомо, нейтронні зірки можуть мати дуже сильні магнітні поля порядку $10^{13}G$, в окремих випадках досягаючи значень $10^{15}G$. Такі об'єкти відомі як магнетари. У звичайних надпровідниках достатньо сильне зовнішнє магнітне поле знищує надпровідність. З огляду на це важливою є задача дослідження впливу магнітного поля на стан кольорової надпровідності. Крім того, магнітне поле може суттєво впливати також і на нормальний стан ферміонної матерії. Це питання ми досліджуємо в Додатку Г, де показано, що магнітне поле призводить до кіральної асиметрії поверхні Фермі релятивістської ферміонної матерії.

В літературі проблема впливу зовнішнього магнітного поля на стан кольорової надпровідності досліджувалась в роботі [265], де розглядались CFL і 2SC фази кваркової матерії з трьома і двома ароматами кварків відповідно. Добре відомо, що в реальній КХД ми не можемо знехтувати масою s кварку. В роботі [266] було показано, що при реалістичних значеннях m_s реалізується CFL фаза з 5-ма незалежними параметрами порядку. Було з'ясовано також, що та ж сама лінійна комбінація електромагнітного і глюонного поля, яка є безмасовою в CFL фазі з $m_s = 0$, залишається безмасовою і в CFL фазі з $m_s \neq 0$. Тому кут змішування фотона з глюонами в CFL фазі з $m_s \neq 0$ співпадає з кутом змішування в CFL фазі з трьома безмасовими кварками. Однак одне питання залишається відкритим. Як відомо [266], щілина в CFL фазі з $m_s \neq 0$ для $m_s \to \infty$ прямує до щілини 2SC фази (важкий s кварк відщеплюється при низьких енергіях). В іншій границі $m_s \to 0$ щілина прямує до щілини CFL фази з трьома безмасовими кварками. Тому, наївно, ми могли б очікували, що кут змішування один і той же у всіх трьох фазах. Однак згідно з [265] кут змішування в 2SC фазі в два рази менший від кута змішування в CFL фазі. Отже виникає питання чому кути змішування різні в цих фазах?

Для того, щоб знайти відповідь на це питання ми спочатку розглянемо означення кута змішування. Перш за все нагадаємо, що кольорова надпровідна щілина є вакуумне середне двох кваркових полів $< \psi^i_\alpha \gamma_5 C \psi^i_\beta >$ і тому вона має два індекси кольорової групи α, β та два індекси групи ароматових перетворень i, j. Коваріантна похідна діє на щілину наступним чином

$$D_\mu \Delta = (\partial_\mu + ieA_\mu Q + igA^a_\mu T^a)\Delta, \tag{4.78}$$

де дія Q і T^a на надпровідну щілину визначена наступним чином $(Q\Delta)^{ij}_{\alpha\beta} = Q^{ii_1}\Delta^{i_1 j}_{\alpha\beta} + \Delta^{ii_1}_{\alpha\beta}(Q^T)^{i_1 j}$ і $(T^a\Delta)^{ij}_{\alpha\beta} = T^a_{\alpha\alpha_1}\Delta^{ij}_{\alpha_1\beta} + \Delta^{ij}_{\alpha\alpha_1}(T^a)^T_{\alpha_1\beta}$ (A^T означає траспоновану до A матрицю), Q=diag(2/3, -1/3, -1/3) - генератор електромагнітних перетворень, $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$ позначають генератори кольорових перетворень, а λ^a - матриці Гелл-Манна. В загальному випадку для того, щоб знайти оператор, який при дії на щілину дає нуль, розглянемо наступний оператор $\tilde{Q} = Q + a_1 T^1 + ... + a_8 T^8$. Тоді розв'язок рівняння $\tilde{Q}\Delta = 0$ визначить необхідний нам оператор $\tilde{Q}$. Легко перевірити, що $a_3 = -1$ і $a_8 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (всі інші $a_i = 0$) є шуканим розв'язком у випадку CFL фази, тобто оператор $\tilde{Q} = Q - (T^3 + \frac{T^8}{\sqrt{3}})$ дає нуль при дії на CFL щілину. Представляючи

$ieA_\mu Q + igA_\mu^a T^a$ як

$$i\begin{pmatrix} A_\mu & A_\mu^1 & \dots & A_\mu^8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} eQ \\ gT^1 \\ \vdots \\ gT^8 \end{pmatrix}$$

і вставляючи $O^T O$, де

$$O = \begin{pmatrix} n_0 & n_1 & \dots & n_8 \\ \vdots & & & \\ m_0 & m_1 & \dots & m_8 \end{pmatrix}$$

є ортогональною 9×9 матрицею, ми знаходимо коефіцієнти $n_0, n_1, ..., n_8$ з рівняння $en_0 Q + gn_1 T^1 + ... + gn_8 T^8 = a\tilde{Q} = a(Q + a_1 T^1 + ... + a_8 T^8)$. Коефіцієнт a визначається з умови $\sum_{i=0}^{8} n_i^2 = 1$, яка є наслідком того, що матриця O є ортогональною. Ми маємо

$$n_0 = a/e,\ n_1 = \frac{aa_1}{g}\ ...,\ n_8 = \frac{aa_8}{g} \tag{4.79}$$

і відповідна безмасова лінійна комбінація електромагнітного і глюонного полів є $\tilde{A}_\mu = n_0 A_\mu + n_1 A_\mu^1 + ... + n_8 A_\mu^8$. Узагальнений кут змішування визначається як arccos елемента O_{11} матриці O, тобто $\alpha = \arccos n_0$. Ми називаємо кут змішування узагальненим тому, що ортогональна матриця 9×9 не може бути параметризована одним незалежним параметром на відміну від добре відомого випадку змішування двох калібрувальних полів в Стандатній Моделі. Однак, в силу того, що тільки елемент O_{11} матриці O є важливим, для нас зручно визначити узагальнений кут змішування як arccos елемента O_{11}. Для ортогональної матриці $OO^T = 1$, тому $n_0^2 + n_1^2 + ... + n_8^2 = 1$, звідки випливає $a = \frac{eg}{\sqrt{g^2 + (a_1^2 + ... + a_8^2)e^2}}$. Таким чином, ми знаходимо, що кут змішування в CFL фазі дорівнює $\alpha_{CFL} = \arccos \frac{g}{\sqrt{g^2 + 4e^2/3}} \approx \frac{2e}{\sqrt{3}g} \approx 1/10$, де ми прийняли, що $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi} \approx 1$ для баріонних густин характерних для центральних областей нейтронних зірок, а калібрувальне поле $\tilde{A}_\mu = \frac{gA_\mu - eA_\mu^3 - \frac{e}{\sqrt{3}} A_\mu^8}{\sqrt{g^2 + \frac{4e^2}{3}}}$ є безмасовим в CFL фазі.

Кут змішування знайдений в роботі [265] $\alpha_{ABR} = \arccos \frac{g}{\sqrt{g^2+e^2/3}} \approx \frac{e}{\sqrt{3}g} \approx 1/20$ має вдвічі більше значення. Відмінність нашого результата від відповідного результата отриманого в роботі [265] зв'язана з тим, що автори [265] використовували кольорові генератори T^a нормовані на двійку, в той час як ми використовували стандартне визначення кольорових генераторів $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$. Хоча кут змішування отриманий нами є вдвічі більшим від відповідного результата отриманого в роботі [265], це не змінює якісних висновків роботи [265] тому, що кут змішування є досить малим числом і внаслідок цього тільки маленька частина потоку магнітного поля не проникає всередину кольорового надпровідника.

Тепер повернемось до питання чому кути змішування в CFL і 2SC фазах різні, хоча щілина в CFL фазі прямує до щілини в 2SC фазі при $m_s \to \infty$. Перш за все згадаємо, що в 2SC фазі $\Delta^{ij}_{\alpha\beta} = \Delta\epsilon^{ij}\epsilon_{\alpha\beta 3}$, де ароматові індекси приймають значення 1 і 2. Легко перевірити, що оператор $\tilde{Q} = Q - (T^3 + \frac{T^8}{\sqrt{3}})$, який дорівнює нулю при дії на щілину в CFL фазі, також дорівнює нулю при дії на щілину в 2SC фазі. Чому ж тоді згідно з [265] кути змішування в CFL і 2SC фазах відрізняються? Відповідь полягає у тому, що генератор T^3 дорівнює нулю при дії 2SC щілину на відміну від випадку CFL щілини. Тому ми можем додати цей генератор до $\tilde{Q}$ з будь-яким коефіцієнтом, тобто відповідне рівняння для $\tilde{Q}$ на відміну від випадку CFL фази не має єдиного розв'язку. Очевидно, що різний вибір коефіцієнтів кольорових генераторів дає різні значення кута змішування. Ми знайдемо коректний $\tilde{Q}$ із енергетичних міркувань. Ми знаємо, що чим менший кут змішування, тим більша частина потоку зовнішнього магнітного поля проникає в кольоровий надровідник. З виразу для кута змішування $\alpha = \arccos \frac{g}{\sqrt{g^2+\sum_{i=1}^{8} a_i^2 e^2}}$ випливає, що мінімум кута змішування відповідає мінімуму $\sum_{i=1}^{8} a_i^2$. Легко показати, що для 2SC фази мінімальному куту змішування відповідає $\tilde{Q} = Q - \frac{T^8}{\sqrt{3}}$. Таким чином, кут змішування в 2SC фазі дійсно в два рази менший від кута змішування $\alpha_{2SC} \approx \frac{e}{\sqrt{3}g} \approx \frac{1}{20}$ в CFL фазі.

РОЗДІЛ 5

МАГНІТНИЙ КАТАЛІЗ І КВАНТОВИЙ ЕФЕКТ ХОЛА В СИЛЬНИХ МАГНІТНИХ ПОЛЯХ В ГРАФЕНІ

В попередніх розділах ми досліджували динамічне порушення симетрії в релятивістських квантових теорях поля, які використовуються в фізиці елементарних частинок, де інваріантність лагранжіана теорії відносно перетворень із групи Лоренца є одним із найбільш загальних універсальних постулатів [1, 2, 3]. В фізиці конденсованого стану відомі також системи, які в низькоенергетичному наближенні характеризуються лінійним, як в релятивістських теоріях, енергетичним законом дисперсії. Серед цих систем присутні такі важливі як високотемпературні надпровідники і різні системи пов'язані з вуглецем, базовим серед яких є графен.

Графен, по суті, - це шар графіта товщиною один атом. Графен був відкритий в 2004 р. групою Гейма, Новоселова [267] в університеті Манчестера, Великобританія. Це відкриття створило справжню сенсацію в фізиці конденсованого стану. Графен привернув до себе увагу величезної кількості науковців [268, 269, 270]. Щомісяця дослідженню незвичних властивостей графену присвячується велика кількість наукових публікацій. Графен являє собою перший приклад справжнього двовимірного кристала і він є також базовим елементом для інших форм (алотропів) вуглецю. Так графіт є сукупністю шарів графена досить слабко зв'язаних між собою, нанотрубки - це згорнуті шари графену, а фулерен утворюється шляхом згортання графена, який має гексагональну гратку, в сферу включаючи при цьому декілька п'ятикутників необхідних з точки зору характеристики Ейлера–Пуанкаре.

Блискучим підтвердженням релятивістської природи носіїв заряду в графені [271, 272] стало спостереження квантового ефекта Хола (КЕХ) в цьому матеріалі [273, 274, 275] теоретично передбаченого в роботах [218, 276]. Для двовимірного електронного газу КЕХ був відкритий фон Клітцінгом [277] в 1980 році. Ефект полягає у тому, що провідність двовимірного електронного газу в зовнішньому магнітному полі є квантованою і приймає тільки діскретні значення $\nu e^2/h$, де ν - додатне ціле число, h - постійна Планка, а e - заряд електрона. Квантування є настільки точним, що зараз КЕХ використовується як стандарт опору в метрології. Квантовий ефект Хола виявився дуже важливим явищем, як для фізики конденсованого стану, так і для (2+1)-вимірних квантових теорій поля [278, 279, 280, 281].

Теоретично в моделі невзаємодіючих електронів в роботах [218, 276] (дивись також [282]) було показано, що релятивістський закон дисперсії квазічастинкових збуджень в графені призводить до незвичайної форми квантової холівської провідності $\sigma_{xy} = -(4e^2/h)(n+1/2)$, де $n = 0, 1\ldots$. Цей "аномальний" КЕХ в графені був експериментально підтверджений в 2005 році двома експериментальними групами, Гейма в Манчестері і Кіма в Нью Йорку [273, 274]. Плато в провідності, які спостерігаються в квантовому ефекті Хола, визначаються енергетичними рівнями системи. Для двовимірного нерелятивістського електронного газу рівні енергії в постійному магнітному полі згідно формули Ландау дорівнюють $E_n = \hbar\omega_c(n+1/2)$, де ω_c - циклотронна частота. Для релятивістського безмасового діраківського газу рівні енергії дорівнюють $E_n = \pm\sqrt{2n\hbar v_F^2 eB/c}$. В результаті в нерелятивістському випадку холівські плато еквідистантні, а в релятивістському відстань між плато пропорційна $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Важливо також, що $\omega_c = eB/(mc) \ll \sqrt{\hbar v_F^2 eB/c}$ для магнітних полів доступних в лабораторії, які є набагато меншими від швінгеровського значення 10^{13}G. В силу цієї нерівності на відміну від звичайного КЕХ, який потребує дуже низьких температур, аномальний КЕХ в графені спостерігається навіть при кімнатних температурах [275]. Слід також зазначити, що КЕХ є дуже чутливим до кількості шарів в графені. Наприклад, інші значення холівських плато спостерігаються в двохшаровому графені [283]. Таким чином, КЕХ може бути використаний, щоб визначити чи є досліджуваний зразок дійсно графеном.

Ще одна властивість графена має суттєве значення. В звичайних матеріалах домішки розсіюють електрони, що призводить до енергетичних втрат і збільшення опору. Виявляється, що у випадку рівняння Дірака розсіяння електронів назад на домішці дорівнює нулю. Це призводить до того, що електрони в графені можуть рухатись на відстані в багато мікронів без суттєвого розсіяння назад, що робить графен майже ідеальним матеріалом для створення так званого балістичного транзистора. І останне. Той факт, що рух електронів в графені описується рівнянням Дірака дозволяє експериментально спостерігати деякі квантовомеханічні явища, які ще ніколи не були спостережені в лабораторії, наприклад, такі як парадокс Клейна [284], "падіння" на центр [285, 286, 287, 288], відсутність локалізації та інші.

Графен є надзвичайно цікавим матеріалом стосовно порушення симетрії. Слід відзначити, що сам факт існування двовимірного кристала є викликом з точки зору теорії кристалів [270]. В континуальному наближенні гамільтоніан для квазічастинок в графені, які взаємодіють за рахунок кулонівської взаємодії, має $U(4)$ симетрію пов'язану із спіном і псевдоспіном. Генерація щілини порушує цю симетрію. В магнітних полях, які перевищують значення 17 Т, спостерігаються нові плато в холівській провідності. Ці плато відповідають генерації щілин, які повністю порушують $U(4)$ симетрію.

В першому параграфі даного розділу ми дослідимо динамічну генерацію щілини в графені. В другому параграфі розглянемо фазовий перехід металізолятор в графені індукований зовнішним магнітним полем. В третьому параграфі ми обчислимо провідність і опір. В четвертому параграфі аналізуються параметри порядка, які описують динамічне порушення $U(4)$ симетрії в графені у зовнішньому магнітному полі. В п'ятому параграфі ми обчислимо

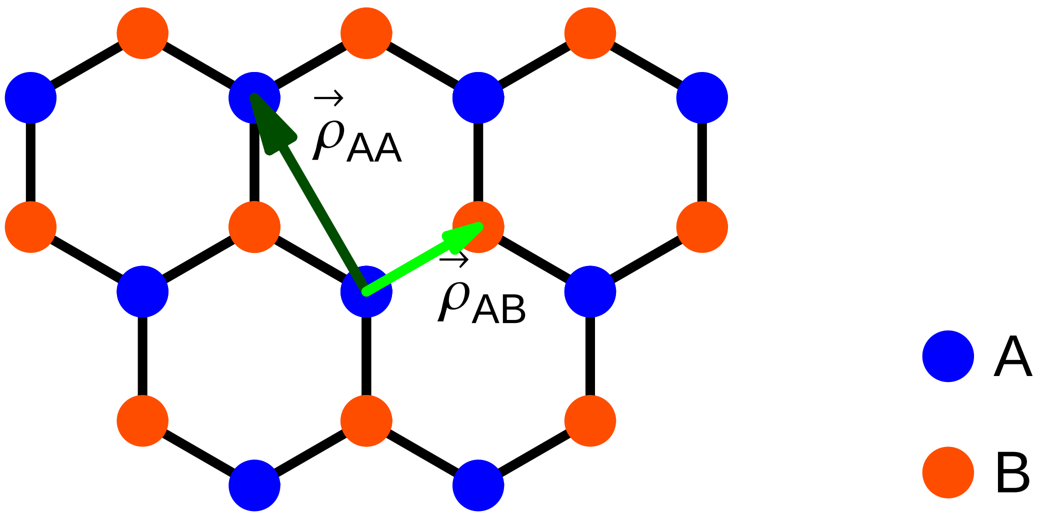


Рис. 5.1. Гексагональна гратка графена, яка формується суперпозицією двох трикутних підграток A і B.

квазічастинковий пропагатор і отримаємо рівняння для щілини. В шостому параграфі даного розділу досліджується динамічне порушення $U(4)$ симетрії в графені у зовнішньому постійному магнітному полі і розглядається квантовий ефект Хола.

5.1. Динамічне порушення симетрії і генерація щілини в графені у відсутності зовнішнього магнітного поля

В цьому параграфі ми розглянемо генерацію щілини в графені. Гратка графену має вигляд бджолинних сот (див. Рис. 5.1) і може розглядатися як складена з двох трикутних підграток A і B. Першим електронну структуру графену вивчав Уолес [271]. В наближенні сильного звязку Уолес розглядав графен як структурний блок графіту, беручи до уваги лише електронні переходи між найближчими атомами. На Рис. 5.1 вектор $\vec{\rho}_{AB}$ описує переходи між двома підгратками графену, а $\vec{\rho}_{AA}$ переходи між найближчими сусідами на одній і тій же підгратці.

Уолес продемонстрував, що двовимірність простору та особлива гратка призводять до того, що електрони в графені при низьких енергіях рухаються так, наче у них відсутня маса. Він отримав ефективний низькоенергетичний гамільтоніан біля K точки, який визначений на двокомпонентних спінорах, верхні та нижні компоненти яких пов'язані із станами на А та В підгратках відповідно

$$\hat{H}_{\mathbf{K}}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & -\hbar v_F(k_x + ik_y) \\ -\hbar v_F(k_x - ik_y) & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

де швидкість Фермі виражається через параметр t, який характеризує стрибки між найближчими сусідами, і відстань між атомами вуглецю в кристалічній гратці графену $a_{_{C-C}} = 1.42 \times 10^{-10}\, m$. Для швидкості Фермі ми маємо

$$v_F = \frac{3ta_{_{C-C}}}{2\hbar}. \tag{5.2}$$

Ефективний гамільтоніан біля K' точки відповідає заміні $k_y \to -k_y$.

Таким чином, при низьких енергіях зонна структура графену формується з $\pi-$електронних орбіт вуглецю та складається з валентної (заповненої) зони та зони провідності (порожньої). Обидві ці зони мають конічну форму з вершинами, що торкаються в так званих точках Дірака. Серед таких точок є лише дві нееквівалентні пари. Спектр $\pi-$електронів при низьких енергіях задається лінійним, подібним до релятивістського, співвідношенням $E = \pm\hbar v_F|k|$ для безмасових частинок, де швидкість Фермі v_F приблизно в 300 разів менша за швидкість світла, а k - хвильовий вектор квазічастинок. В роботі [272] було показано, що електронні стани поблизу K і K' точок можливо описати рівнянням Дірака в (2+1)-вимірній теорії для чотирьохвимірного спінора, який реалізує звідне представлення алгебри Дірака.

Слід відзначити, що графен є прикладом редукованої КЕД-подібної теорії розглянутої в Розділі 1. Дійсно в графені електромагнітне поле може вільно розповсюджуватися у всьому тривимірному просторі, а електрони є локалізованими на площині. Генерація щілини відповідає фазовому переходу напівметал-діелектрик. Як було показано в Розділі 1, внаслідок явища магнітного каталізу магнітне поле відіграє дуже важливу роль в динаміці цього переходу.

Головною мотивацією дослідження фазового переходу метал-діелектрик були експериментальні дані отримані в роботах [294, 295, 296] та їх інтерпретація запропонована в [299, 300]. В цих експериментах в зразках піролітичного графіту у зовнішньому магнітному полі спостерігалась якісна зміна опору, що було інтерпретовано як фазовий перехід напівметал-діелектрик. В роботі [299, 300] було відзначено, що ці експериментальні дані можуть бути пояснені за допомогою явища магнітного каталізу коли в спектрі квазічастинкових збуджень динамічно генерується щілина внаслідок спарування електронів і дірок.

В цьому параграфі ми детально вивчимо фазовий перехід напівметал-діелектрик індукований зовнішним магнітним полем в двовимірних системах з релятивістські-подібним спектром, отримаємо фазову діаграму системи, а також дослідимо її транспортні властивості. Одним із центральних отриманих результатів є пояснення існування порогового значення магнітного поля B_c. Згідно експериментальним даним, фазовий перехід напівметал-діелектрик спостерігається тільки в полях, які перевищують деяке критичне значення B_c. Ми покажемо, що присутність B_c пов'язана з ненульовою густиною носіїв заряду в системі.

Ми розглянемо модель із N_f ароматами ферміонів (у випадку графена $N_f = 2$) чий лагранжіан дорівнює

$$S_{qp} \simeq \int dt d^2\vec{r}\; v_F \bar{\Psi}(t,\vec{r}) \left(\frac{i\gamma^0(\partial_t + i\mu)}{v_F} - i\gamma^1\partial_x - i\gamma^2\partial_y \right) \Psi(t,\vec{r})$$
$$-\frac{1}{2}\int dt \int dt' \int d^2\vec{r} \int d^2\vec{r}'\; \bar{\Psi}(t,\vec{r})\gamma^0\Psi(t,\vec{r}) U_0(t-t',|\vec{r}-\vec{r}'|)\, \bar{\Psi}(t',\vec{r}')\gamma^0\Psi(t',\vec{r}'). \tag{5.3}$$

Ми враховуємо тільки кулонівську взаємодію, яка пов'язана із взаємодією густини заряда із часовою компонентою вектор-потенціала електромагнітного поля. Відзначимо, що в графені взаємодія густини струму з просторовими компонентами електромагнітного поля в $c/v_F \approx 300$ разів подавлена порівняно із (2+1)-вимірною квантовою електродинамікою, де вакуумні ферміонні флуктуації можуть призвести до генерації черн-саймонівського члена взаємодії, що має важливі наслідки для електрон-електронної взаємодії [297].

Кулонівська взаємодія в графені $U_0(t, |\vec{r}|)$ дорівнює

$$U_0(t, |\vec{r}|) = \frac{e^2\delta(t)}{\varepsilon_0} \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = \frac{e^2\delta(t)}{\varepsilon_0 |\vec{r}|}. \tag{5.4}$$

При ненульовій температурі і хімічному потенціалі ефекти поляризації суттєво модифікують кулонівську взаємодію, яка набуває наступного вигляду

$$U(t, |\vec{r}|) = \frac{e^2}{\varepsilon_0} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^2\vec{k}}{2\pi} \frac{\exp(-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r})}{|\vec{k}| + \Pi(\omega, |\vec{k}|)}, \tag{5.5}$$

де $\Pi(\omega, |\vec{k}|)$- поляризаційна функція. Масовий доданок $\Delta_0\bar{\psi}\psi$ в дії (5.3), якщо присутній, зменшує симетрію моделі з $U(2N_f)$ до $U(N_f)\times U(N_f)$. Ми розглянемо тепер динамічну генерацію маси в моделі.

Перш ніж ми це зробимо, наведемо вираз для поляризації вакууму в графені. Поляризація вакууму при ненульовій температурі і хімічному потенціалу визначається наступним інтегралом

$$\begin{aligned} \Pi(0, \vec{k}) \;&=\; \frac{2Te^2N_f}{\varepsilon_0 v_F^2} \int_0^1 dx \Bigg[\ln\left(2\cosh\frac{R_x+\mu}{T}\right) \\ &-\; \frac{\Delta_T^2(\mu)}{2TR_x} \tanh\frac{R_x+\mu}{2T} + (\mu \to -\mu) \Bigg], \end{aligned} \tag{5.6}$$

де $R_x = \sqrt{v_F^2\vec{k}^2 x(1-x) + \Delta_T^2(\mu)}$, $\Delta_T(\mu)$ - ферміонна щілина, а T - температура. Відзначимо, що щілина є динамічною величиною, яка визначається відповідним рівнянням для щілини і в загальному випадку залежить від темеператури і хімічного потенціала.

При $\mu = 0$ (нульова густина) і $T = 0$ поляризаційна функція дорівнює

$$\Pi(0, \vec{k}) \;=\; \frac{e^2N_f}{\varepsilon_0 v_F^2} \left(\Delta_0 + \frac{v_F^2\vec{k}^2 - 4\Delta_0^2}{2v_F|\vec{k}|} \arctan\frac{v_F|\vec{k}|}{2\Delta_0} \right). \tag{5.7}$$

У випадку ненульової густини і $T = 0$ поляризаційна функція в рівнянні (5.6) обчислюється аналітично

$$\Pi(0,\vec{k}) = \frac{2e^2N_f}{\varepsilon_0 v_F^2}|\mu|, \quad \text{для} \ |\vec{k}| \le k_*, \tag{5.8}$$

$$\Pi(0,\vec{k}) = \frac{2e^2N_f}{\varepsilon_0 v_F^2}|\mu| \left[1 - \frac{\sqrt{\vec{k}^2 - k_*^2}}{2|\vec{k}|} + \frac{v_F^2\vec{k}^2 - 4\Delta_0^2(\mu)}{4\mu v_F|\vec{k}|} \times \arctan\frac{v_F\sqrt{\vec{k}^2 - k_*^2}}{2\mu}\right], \quad \text{для} \ |\vec{k}| > k_*, \tag{5.9}$$

де $k_* \equiv 2\sqrt{\mu^2 - \Delta_0^2(\mu)}/v_F$. Як легко перевірити, поляризаційна функція сильно залежить від імпульсу. Дійсно в той час як $\Pi(0,\vec{k})$ є приблизно константою при малих імпульсах $|\vec{k}| \le k_*$, її значення суттєво зменшується для $|\vec{k}| \gtrsim k_*$. При малий густині носіїв заряда, тобто $n \sim k_*^2 \ll (\Delta_0/v_F)^2$, ця залежність від імпульсу є особливо сильною. Як випливає з рівняння (5.9), при малих імпульсах $\Pi(0,\vec{k})$ дорівнює дебаївській масі M_D і може бути досить великою. При проміжних значеннях імпульсів $|\vec{k}| \sim \sqrt{k_*\Delta_0(\mu)/v_F}$ функція $\Pi(0,\vec{k})$ є меншою ніж M_D в $\Delta_0(\mu)/\sqrt{\mu^2 - \Delta_0^2(\mu)}$ раз, тобто $\Pi(0,\vec{k}) \sim M_D\sqrt{\mu^2 - \Delta_0^2(\mu)}/\Delta_0(\mu)$. Для $|\vec{k}| \gg \Delta_0(\mu)/v_F$, поляризаційна функція має наступну асимптотику

$$\Pi(0,\vec{k}) \simeq \frac{\pi e^2 N_f}{4\varepsilon_0 v_F}|\vec{k}|. \tag{5.10}$$

Це спостереження є досить важливим для аналіза динаміки спарювання між електронами і дірками. Як ми побачимо нижче, саме область імпульсів $|\vec{k}| \gg \Delta_0(\mu)/v_F$ є домінуючою в такій динаміці. Зокрема це означає, що однопетльове наближення з вільними безщілинними ферміонами є надійним наближенням для поляризаційної функції в рівнянні для щілини, принаймі при великих N_f і в принципі може бути якісно справедливим навіть у випадку графена, де $N_f = 2$.

Рівняння ШД для квазічастинкового пропагатора має наступний вигляд

$$S^{-1}(\omega_m,\vec{p}) = S_0^{-1}(\omega_m,\vec{p}) - T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\times\gamma^0 S(\omega_n,\vec{k})\gamma^0 U(\vec{p}-\vec{k})\,, \quad (5.11)$$

звідки випливає рівняння для щілини

$$\Delta(p) = \frac{e^2T}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int\frac{\Delta(k)d^2k}{(\omega_n+i\mu)^2+v_F^2k^2+\Delta_T^2(\mu)}\times\frac{1}{|\vec{p}-\vec{k}|+\Pi(0,\vec{p}-\vec{k})}, \quad (5.12)$$

де $\Delta_T(\mu)\equiv\Delta(p)|_{p=0}$. Нехтуючи залежністю щілини від мацубарівської частоти ми можемо явним чином обчислити суму по n. Тоді ми маємо наступне інтегральне рівняння

$$\Delta(p) = \frac{\pi e^2}{\varepsilon_0}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\Delta(k)}{E_k}\frac{\sinh\frac{E_k}{T}}{\cosh\frac{E_k}{T}+\cosh\frac{\mu}{T}}\times\frac{1}{|\vec{p}-\vec{k}|+\Pi(0,\vec{p}-\vec{k})}, \quad (5.13)$$

де $E_k=\sqrt{v_F^2k^2+\Delta_T^2(\mu)}$. Використовуючи стандартне наближення для ядра інтегрального рівняння $f(|\vec{p}-\vec{k}|)\to f(p)\theta(p-k)+f(k)\theta(k-p)$, ми отримуємо наступне рівняння для щілини

$$\Delta(p) = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 v_F}\int_\epsilon^\Lambda dk\Delta(k)\frac{\sinh\frac{v_Fk}{T}}{\cosh\frac{v_Fk}{T}+\cosh\frac{\mu}{T}}\times\left[\frac{\theta(p-k)}{p+\Pi(0,\vec{p})}+\frac{\theta(k-p)}{k+\Pi(0,\vec{k})}\right], \quad (5.14)$$

де інфрачервоний параметр обрізання ϵ визначається більшим значенням величин $\Delta_T(\mu)/v_F$ і $\sqrt{\mu^2-\Delta_T^2(\mu)}/v_F$. Ми використали також метод біфуркацій, згідно з яким, нелінійне рівняння для щілини лініаризується. При цьому ми зануляємо щілину в E_k і використовуємо інфрачервоний параметр обрізання в інтегралі в правій частині рівняння (5.13).

Розглянемо спочатку рівняння для щілини у випадку нульової температури і нульового хімічного потенціалу. Ми маємо наступне рівняння

$$\Delta_p = \lambda\int\frac{qdq\Delta_q\mathcal{K}(p,q)}{\sqrt{q^2+(\Delta_q/v_F)^2}}, \quad (5.15)$$

де

$$\mathcal{K}(p,q) = \frac{\theta(p-q)}{p}+\frac{\theta(q-p)}{q} \quad (5.16)$$

і

$$\lambda = \frac{e^2}{2(\varepsilon_0 v_F + \pi e^2 N_f/4)}. \tag{5.17}$$

Область імпульсів $|\vec{k}| \gg \Delta(0)/v_F$ є домінуючою для генерації щілини. В цій області доданок $(\Delta_q/v_F)^2$ в знаменнику підінтегрального виразу фактично тільки регуляризує інтеграл в інфрачервоній області. Тому ми знехтуємо цим доданком і будемо використовувати його як інфрачервоний параметр обрізання, тобто ми будемо працювати в так званому біфуркаційному наближенні. Таким чином, ми маємо наступне рівняння для щілини

$$\Delta_p = \lambda \left(\int_{\Delta(0)/v_F}^{p} \frac{dq}{p} \Delta_q + \int_p^{\Lambda} \frac{dq}{q} \Delta_q \right), \tag{5.18}$$

де Λ - ультрафіолетовий параметр регуляризації, який приблизно дорівнює π/a, де a - період гратки. В графені $a = 2.46 \cdot 10^{-10} m$.

Інтегральне рівняння (5.18) еквівалентне наступному диференціальному рівнянню

$$p^2 \Delta_p'' + 2p\Delta_p' + \lambda \Delta_p = 0, \tag{5.19}$$

з граничними умовами

$$p^2 \Delta_p'|_{p=\Delta(0)/v_F} = 0, \tag{5.20}$$

$$\left(p\Delta_p' + \Delta_p \right)|_{p=\Lambda} = 0. \tag{5.21}$$

Розв'язок рівняння (5.19), який задовольняє інфрачервону граничну умову (5.20), дорівнює

$$\Delta_p = \frac{\Delta(0)^{3/2}}{\sin(\delta)\sqrt{p v_F}} \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2} \ln \frac{p v_F}{\Delta(0)} + \delta \right), \tag{5.22}$$

де $\delta = \arctan\sqrt{4\lambda - 1}$. Зауважимо, що $\Delta(0) = \Delta_{p=\Delta(0)/v_F}$. Ультрафіолетова гранична умова (5.21) призводить до рівняння

$$\frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2} \ln \frac{v_F \Lambda}{\Delta(0)} + 2\delta = \pi, \tag{5.23}$$

з якого випливає, що його розв'язок, який задовольняє умову $\Delta_0 \ll \Lambda v_F$ існує тільки для $\lambda > 1/4$. В режимі $\sqrt{4\lambda - 1} \ll 1$ щілина дорівнює

$$\Delta(0) \simeq \Lambda v_F \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{4\lambda - 1}} + 4\right). \tag{5.24}$$

Умова $\lambda > 1/4$ визначає критичну лінію в площині (g, N_f), де g є безрозмірною константою зв'язку $g \equiv e^2/\varepsilon_0 v_F$

$$g_{cr} = \frac{4}{8 - \pi N_f}. \tag{5.25}$$

Таким чином, динамічна щілина генерується тільки для $g > g_{cr}$. В графені $N_f = 2$ і критична константа зв'язку дорівнює $g_{cr} \approx 2.33$. Цей результат був отриманий в лідируючому по $1/N_f$ порядку і звичайно існують поправки вищого порядку до нього.

Експериментально відомо, що графен на підложці SiC коли присутність підложки зменшує константу зв'язку в $\kappa \approx 4,5$ разів (κ - діелектрична константа зв'язку), є напівметалом. Що ж стосується графену, який є підвішеним у повітрі між двома контактами, то в цьому випадку діелектрична константа $\kappa = 1$ і тому константа зв'язку є великою. Як наслідок, ми можемо очікувати, що в такому графені динамічно згенерується щілина і він буде ізолятором.

Вище ми розглянули випадок нульової густини заряду в графені і нульової температури. Зрозуміло, що при ненульовій густині заряду і ненульовій температурі критичне значення константи зв'язку повинно збільшитись, тому що температура і ненульова густина заряду збільшують ефекти екранування і в результаті зменшується взаємодія між квазічастинками.

5.2. Магнітний каталіз в графені

В зовнішньому постійному магнітному полі кінетична частина квазічастинкової дії модифікується за рахунок заміни похідних по просторових координатах відповідними коваріантними похідними

$$\partial_x \to \partial_x + i\frac{e}{c}A_x^{ext}(\vec{r}), \qquad \partial_y \to \partial_y + i\frac{e}{c}A_y^{ext}(\vec{r}), \tag{5.26}$$

де в симетричній калібровці $A_x^{ext}(\vec{r}) = -By/2$ і $A_y^{ext}(\vec{r}) = Bx/2$. В постійному магнітному полі пропагатор квазічастинок має наступну загальну форму [72]

$$G(t-t', \vec{r}, \vec{r}') = \exp\left[-i\frac{e}{c}\vec{r}\cdot\vec{A}^{ext}(\vec{r}')\right]\tilde{G}(t-t', \vec{r}-\vec{r}'). \tag{5.27}$$

Зауважимо, що замість символу S для ферміонного пропагатора у відсутності магнітного поля, який ми використовували у попередньому параграфі, в цьому параграфі ми використовуємо символ G для ферміонного пропагатора в магнітному полі. Згідно [72] трансляційно інваріантна частина пропагатора дорівнює $\tilde{G}(t-t', \vec{r}-\vec{r}')$

$$\tilde{G}(t, \vec{r}) = \int \frac{dt}{2\pi}\frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2}\exp(-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r})\tilde{G}(\omega, \vec{k}), \tag{5.28}$$

$$\tilde{G}(\omega, \vec{k}) = 2i\exp\left(-\frac{c|\vec{k}|^2}{|eB|}\right)\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left[(\omega\gamma^0+\Delta)f_1(\vec{k}) + f_2(\vec{k})\right]}{\omega^2-\Delta^2-2nv_F^2|eB|/c}, \tag{5.29}$$

де

$$f_1(\vec{k}) = \mathcal{P}_- L_n\left(\frac{2c\vec{k}^2}{|eB|}\right) - \mathcal{P}_+ L_{n-1}\left(\frac{2c\vec{k}^2}{|eB|}\right), \qquad f_2(\vec{k}) = 2v_F\vec{k}\vec{\gamma}L_{n-1}^1\left(\frac{2c\vec{k}^2}{|eB|}\right), \tag{5.30}$$

$$\mathcal{P}_\pm = \frac{1 \pm i\,\mathrm{sgn}\gamma^1\gamma^2}{2}.$$

Функції $L_n^\alpha(z)$ є узагальненими поліномами Лагера і за означенням $L_n(z) \equiv L_n^0(z)$ та $L_{-1}^\alpha(z) \equiv 0$.

Присутність зовнішнього магнітного поля змінює поляризаційну функцію і враховуючи результати отримані в [298] потенціал взаємодії приймає вигляд

$$U(t, \vec{r}) = \delta(t)\frac{e^2}{\varepsilon_0}\int\frac{d^2\vec{k}}{2\pi}\frac{\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})}{|\vec{k}|(1+a|\vec{k}|)} = \frac{e^2\pi\delta(t)}{2\varepsilon_0 a}\left[H_0\left(\frac{|\vec{r}|}{a}\right) - N_0\left(\frac{|\vec{r}|}{a}\right)\right], \tag{5.31}$$

де

$$a = 2\pi\nu_0 \frac{e^2 N_f}{\varepsilon_0 v_F}\sqrt{\frac{c}{|eB|}}, \tag{5.32}$$

а константа ν_0 дорівнює

$$\nu_0 \equiv \frac{1}{4\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{z}}\left(\frac{\coth(z)}{z} - \frac{1}{\sinh^2(z)}\right) = -\frac{3\zeta(-0.5)}{\sqrt{2}\pi} \approx 0.14. \tag{5.33}$$

Далі $\zeta(z)$ - дзета функція Рімана, $H_0(z)$ - функція Струве, а $N_0(z)$ є функцією Беселя другого роду. Рівняння ШД для квазічастинкового пропагатора має вигляд ($\tilde{G}_0(t,\vec{r})$ - трансляційно інваріантна частина вільного пропагатора)

$$\tilde{G}(t,\vec{r}) = \tilde{G}_0(t,\vec{r}) - i\int dt' d^2\vec{r}' \int dt'' d^2\vec{r}'' \times \exp\Big[-i\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{r}')$$

$$-i\vec{r}'\cdot\vec{A}(\vec{r}'')\Big] \times \tilde{G}_0(t-t',\vec{r}-\vec{r}')\gamma^0\tilde{G}(t'-t'',\vec{r}'-\vec{r}'')\gamma^0\tilde{G}(t'',\vec{r}'')U(\vec{r}'-\vec{r}'')\delta(t'-t''). \tag{5.34}$$

Згідно [70] у випадку докритичних значень константи зв'язку $g < g_c$ ми повинні відрізняти два режима. Перший - це режим слабкого зв'язку $g \ll g_c$. В цьому режимі найнижчий рівень Ландау домінує і значення динамічної щілини Δ є набагато меншим від щілини $\sqrt{2v_F^2|eB|/c}$ між найнижчим і першим рівнями Ландау. Це означає, що вищі рівні Ландау відщеплюються і НРЛ домінує в динаміці спарювання. У випадку $g \leq g_c$ всі рівні Ландау є важливими з точки зору динаміки спарювання і динамічна щілина Δ є порядку $\sqrt{2v_F^2|eB|/c}$. В подальшому ми розглянемо перший режим. Тоді найнижчий рівень Ландау домінує і квазічастинковий пропагатор може бути апроксимований відповідним пропагатором для найнижчого рівня Ландау

$$\tilde{G}(t,\vec{r}) = \frac{i|eB|}{4\pi c}\exp\left(-\frac{|\vec{r}|^2|eB|}{4c}\right)g(t)(1-i\gamma^1\gamma^2), \tag{5.35}$$

де $g(t)$ є невідома матричнозначна функція, яка визначається рівнянням ШД. Використовуючи анзатц (5.35) із рівняння (5.34) ми знаходимо наступне рівняння для Фур'є образу $g(t)$

$$g^{-1}(\omega) = g_0^{-1}(\omega) - ie^2\int\frac{d\omega'}{2\pi}\gamma^0 g(\omega-\omega')\gamma^0 \times \int\frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2}\exp\left[-\frac{c|\vec{k}|^2}{2|eB|}\right]U(\vec{k}). \tag{5.36}$$

Далі $g(\omega)$ має наступний загальний вигляд

$$g(\omega) = \frac{A(\omega)\gamma^0\omega + \Delta(\omega)}{A(\omega)^2\omega^2 - \Delta(\omega)^2}, \tag{5.37}$$

де $A(\omega)$ і $\Delta(\omega)$ є скалярними функціями. Легко бачити, що інтеграл в правій частині рівняння (5.36) не залежить від ω. Це означає, що функція $A(\omega) = 1$ і щілина $\Delta(\omega)$ також не залежить від ω. Тому ми легко знаходимо наступний розв'язок

$$\Delta_0 = \frac{g}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{v_F^2|eB|}{c}}\int_0^\infty \frac{dk\exp(-k^2)}{1+k\chi_0}, \tag{5.38}$$

де

$$\chi_0 = 2\sqrt{2}\pi\nu_0 g N_f$$

і ми пишемо індекс нуль у Δ_0 для того, щоб підкреслити, що цей розв'язок отриманий при нульовій густині заряду і нульовій температурі. У двох граничних випадках $\chi_0 \ll 1$ і $\chi_0 \gg 1$ ми маємо наступні асимптотики

$$\Delta_0 \simeq \frac{g\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{v_F^2|eB|}{c}}\left(1 - \frac{\chi_0}{\sqrt{\pi}} + \frac{\chi_0^2}{2} + \cdots\right) \tag{5.39}$$

для малих N_f і

$$\Delta_0 \simeq \frac{g}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{v_F^2|eB|}{c}}\frac{\ln\chi_0}{\chi_0} \equiv \frac{v_F}{4\pi\nu_0 N_f}\sqrt{\frac{|eB|}{c}}\ln\chi_0 \tag{5.40}$$

для великих N_f. Відповідно з явищем магнітного каталіза [68, 69] ми бачимо, що в зовнішньому постійному магнітному полі щілина генерується при будь-якому значенні константи зв'язку $g = e^2/\varepsilon_0 v_F$, тобто критична константа зв'язку дорівнює нулю.

Неважко перевірити, що при малій константі зв'язку $g = e^2/\varepsilon_0 v_F$ або достатньо великому значенні N_f розв'язок (5.40) отриманий в наближенні найнижчого рівня Ландау є самоузгодженим. В обох цих випадках щілина Δ_0 є набагато меншою від відстані $\sqrt{2v_F^2|eB|/c}$ між найнижчим і першим рівнями Ландау.

Розглянемо тепер вплив хімічного потенціала і температури на генерацію щілини в графені. Використовуючи мацубарівський формалізм легко узагальнити рівняння для щілини на випадок ненульових хімічного потенціалу і температури. Ми маємо

$$\Delta_T(\mu) = \frac{e^2}{2\sqrt{2}\varepsilon_0}\sqrt{\frac{|eB|}{c}}\int_0^\infty \frac{dk\exp(-k^2)}{1+k\chi_0}\,\frac{\sinh\frac{\Delta_T(\mu)}{T}}{\cosh\frac{\Delta_T(\mu)}{T}+\cosh\frac{\mu}{T}}. \tag{5.41}$$

В наближенні НРЛ густина заряду виражається через хімічний потенціал наступним чином

$$n = \frac{N_f|eB|}{2\pi c}\frac{\sinh\frac{\mu}{T}}{\cosh\frac{\Delta_T(\mu)}{T}+\cosh\frac{\mu}{T}}. \tag{5.42}$$

Будемо вважати, що густина носіїв заряду (тобто $n = n_{el} - n_h$) є фіксованою. Тоді маємо

$$\sinh\frac{\mu}{T} = \frac{\nu_B}{1-\nu_B^2}\left(\cosh\frac{\Delta_T(\mu)}{T} + \sqrt{1+\nu_B^2\sinh^2\frac{\Delta_T(\mu)}{T}}\right),$$

$$\cosh\frac{\mu}{T} = \frac{1}{1-\nu_B^2}\left(\sqrt{1+\nu_B^2\sinh^2\frac{\Delta_T(\mu)}{T}} + \nu_B^2\cosh\frac{\Delta_T(\mu)}{T}\right),$$

де

$$\nu_B = \frac{2\pi c n}{N_f|eB|} \equiv \frac{B_c}{B} \tag{5.43}$$

є так званий фактор заповнення, який стандартно використовується в дослідженнях квантового ефекта Хола.

Тоді рівняння для щілини може бути переписано наступним чином

$$\Delta_T(\nu_B) = \frac{e^2}{2\sqrt{2}\varepsilon_0}\sqrt{\frac{|eB|}{c}}\int_0^\infty \frac{dk\exp(-k^2)}{1+k\chi_0}$$
$$\times\frac{(1-\nu_B^2)\sinh\frac{\Delta_T(\nu_B)}{T}}{\cosh\frac{\Delta_T(\nu_B)}{T}+\sqrt{1+\nu_B^2\sinh^2\frac{\Delta_T(\nu_B)}{T}}}. \tag{5.44}$$

Розглянемо спочатку випадок нульової температури. Тоді рівняння для щілини приймає дуже простий вигляд

$$|\Delta_0(\nu_B)| = \frac{1-\nu_B}{2}\Delta_0(0) \equiv \frac{e^2(1-\nu_B)}{2\sqrt{2}\varepsilon_0}\sqrt{\frac{|eB|}{c}}\int_0^\infty \frac{dk\exp(-k^2)}{1+k\chi_0}, \tag{5.45}$$

де $\Delta_0(0)$ є значення щілини при $\nu_B = 0$. Із цього рівняння випливає, що його розв'язок відсутній при $\nu_B \geq 1$, тобто симетрія відновлюється. Умова $\nu_B = 1$ визначає критичну густину $n_c = N_f|eB|/2\pi c$. Ця критична густина відповідає повністю заповненому найнижчому рівню Ландау і є універсальною для всіх докритичних значень константи зв'язку. Виражаючи n через B ми можемо сказати, що при фіксованій густині заряду n, критичним значенням магнітного поля є $|eB_c| = 2\pi cn/N_f$, тобто ненульова щілина генерується тільки для магнітних полів B більших B_c.

Критична температура визначається рівняням (5.44) з $\Delta_T(\nu_B) = 0$

$$T_c = \frac{e^2(1-\nu_B^2)}{4\sqrt{2}\varepsilon_0}\sqrt{\frac{|eB|}{c}}\int_0^\infty \frac{dk\exp(-k^2)}{1+k\chi_0}. \tag{5.46}$$

При фіксованій густині n це рівняння означає, що критична температура дорівнює нулю при магнітних полях менших B_c визначеного вище. Для $B > B_c$ критична температура T_c зростає з B.

5.3. Провідність і опір

Провідність і опір є дуже важливими величинами в фізиці конденсованого стану і вони відіграють також дуже важливу роль при експериментальному дослідженні фазового переходу напівметал-ізолятор в графені. В цьому параграфі ми з'ясуємо як генерація щілини у зовнішньому магнітному полі впливає на провідність і опір. Спочатку ми розглянемо випадок нульового магнітного поля. При обчисленні транспортних коефіцієнтів і провідності та опору зокрема дуже корисно використовувати спектральне представлення для квазічастинкової функції Гріна, яке визначається наступним чином

$$S(i\omega_n, \vec{k}) = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega A(\omega, \vec{k})}{i\omega_n - \mu - \omega}. \tag{5.47}$$

Для квазічастинкового пропагатора розглянутого в параграфі 5.1 ми маємо

$$A(\omega,\vec{k}) = \frac{\Gamma}{2\pi E}\left[\frac{\gamma^0 E - \vec{k}\vec{\gamma} + \Delta}{(\omega - E)^2 + \Gamma^2} + \frac{\gamma^0 E + \vec{k}\vec{\gamma} - \Delta}{(\omega + E)^2 + \Gamma^2}\right], \tag{5.48}$$

де $E = \sqrt{v_F^2\vec{k}^2 + \Delta^2}$ і всюди в цьому параграфі ми будемо використовувати символ Δ для щілини, тобто $\Delta \equiv \Delta_T(\mu)$ і $\Delta \equiv \Delta_T(\nu_B)$ у випадках $B = 0$ і ненульового магнітного поля відповідно. Зауважимо, що феноменологічний параметр Γ є шириною. Без цієї величини обчислення провідностей не має сенсу. Ненульова ширина з'являється в результаті взаємодій і, зокрема, розсіяння на домішках. Ширина Γ визначається уявною частиною власної енергії електрона $\Gamma(\omega) = -\mathrm{Im}\Sigma^R(\omega)$ і в загальному випадку є величиною, яка залежить від температури і магнітного поля. Як і динамічна щілина, ширина повинна бути знайдена з рівнянь ШД. При низьких температурах вона зазвичай моделюється як деяка феноменологічна константа. Це є ще одним із наближень, яке ми будемо використовувати в цьому параграфі.

В термінах спектральної функції густина заряду дорівнює

$$n = \frac{1}{2}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\left(\tanh\frac{\omega+\mu}{2T} - 1\right)\mathrm{tr}\left[\gamma^0 A(\omega,\vec{k})\right]. \tag{5.49}$$

Тензор провідностей визначається формулою

$$\sigma_{ij} = \lim_{\Omega\to 0}\frac{\mathrm{Im}\Pi_{ij}^R(\Omega + i\epsilon)}{\Omega}, \tag{5.50}$$

де $\Pi_{ij}^R(\Omega)$ є так звана запізнююча кореляційна функція струмів, яка також може бути отримана за допомогою спектральної функції

$$\Pi_{ij}(\Omega + i\epsilon) = \frac{e^2 v_F^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \frac{\tanh\frac{\omega+\mu}{2T} - \tanh\frac{\omega'+\mu}{2T}}{\omega - \omega' + \Omega + i\epsilon}$$

$$\times\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\mathrm{tr}\left[\gamma_i A(\omega,\vec{k})\gamma_j A(\omega',\vec{k})\right]. \tag{5.51}$$

Якщо магнітне поле відсутне, то тензор провідностей має тільки діагональні компоненти $\sigma = \sigma_{xx} = \sigma_{yy}$. Ці компоненти є рівними внаслідок симетрії відносно обертань. Провідність дорівнює

$$\sigma = \frac{e^2 N_f}{4\pi^2 T}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma^2 d\omega}{\cosh^2\frac{\omega+\mu}{2T}}\int\limits_{\Delta^2}^{\infty}dx\frac{(x+\omega^2+\Gamma^2)^2-4\omega^2\Delta^2}{[(x+\omega^2+\Gamma^2)^2-4x\omega^2]^2}$$

$$= \frac{e^2 N_f}{8\pi^2 T}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\cosh^2\frac{\omega+\mu}{2T}}\left[1+\frac{\omega^2-\Delta^2+\Gamma^2}{2|\omega|\Gamma}\times\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\Gamma^2+\Delta^2-\omega^2}{2|\omega|\Gamma}\right)\right], \tag{5.52}$$

де густина носіїв заряду визначається наступним рівнянням

$$n = \frac{\Gamma N_f}{2\pi^2 v_F^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega^2+\Gamma^2}\int\limits_{\Delta}^{\infty}dEE\times\left[\tanh\frac{\omega+\mu+E}{2T}+\tanh\frac{\omega+\mu-E}{2T}\right]. \tag{5.53}$$

В границі $\Gamma\to 0$ ці два рівняння прямують до

$$\sigma = \frac{e^2 N_f}{16\pi T\Gamma}\int\limits_{\Delta}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega}\left[\frac{\omega^2-\Delta^2}{\cosh^2\frac{\omega+\mu}{2T}}+(\mu\to-\mu)\right] \tag{5.54}$$

та

$$n = \frac{N_f}{2\pi v_F^2}\int\limits_{\Delta}^{\infty}dEE\left[\tanh\frac{\mu+E}{2T}+\tanh\frac{\mu-E}{2T}\right] = \frac{N_f T^2\sinh\frac{\mu}{T}}{\pi v_F^2}\int\limits_{\frac{\Delta}{T}}^{\infty}\frac{dxx}{\cosh x+\cosh\frac{\mu}{T}}$$

$$= \frac{N_f T^2}{\pi v_F^2}\left[\frac{\Delta}{T}\ln\frac{1+\exp(\frac{\mu-\Delta}{T})}{1+\exp(-\frac{\mu+\Delta}{T})}+\mathrm{Li}_2\left(-e^{-\frac{\mu+\Delta}{T}}\right)-\mathrm{Li}_2\left(-e^{\frac{\mu-\Delta}{T}}\right)\right], \tag{5.55}$$

де $\mathrm{Li}_2(z)$ є подвійна логаріфмічна функція. При великих температурах провідність лінійно зростає з температурою

$$\sigma \simeq \frac{e^2 N_f}{4\pi}\frac{T}{\Gamma}\ln 2, \quad \text{для} \quad T\to\infty \tag{5.56}$$

а при низьких температурах дорівнює

$$\sigma = \frac{e^2 N_f}{2\pi^2}\left[1+\frac{\mu^2-\Delta^2+\Gamma^2}{2|\mu|\Gamma}\times\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\Gamma^2+\Delta^2-\mu^2}{2|\mu|\Gamma}\right)+O\left(\frac{T}{\Gamma}\right)\right]. \tag{5.57}$$

Густина носіїв заряду при низьких температурах визначається формулою

$$n = \frac{N_f}{2\pi v_F^2}(\mu^2-\Delta^2)\mathrm{sgn}(\mu)\theta(\mu^2-\Delta^2). \tag{5.58}$$

Параметр

$$\eta = \frac{1}{\Gamma}\sqrt{\frac{2\pi v_F^2 n}{N_f}} \tag{5.59}$$

характеризує зв'язок між густиною заряду і шириною. Для чистої і брудної систем цей параметр є відповідно великим або малим. Провідність при нульовій температурі прямує до

$$\sigma = \frac{e^2 N_f \eta}{4\pi}\sqrt{\frac{2\pi v_F^2 n}{2\pi v_F^2 n + N_f \Delta^2}} \tag{5.60}$$

для $\eta \gg 1$ і

$$\sigma = \frac{e^2 N_f}{2\pi^2}\left[1 + \frac{\Gamma}{2\Delta}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\Gamma}{2\Delta}\right)\right] \tag{5.61}$$

для $\eta \ll 1$. Останній вираз був отриманий при умові $n \ll \Delta^2/v_F^2$. При нульовій густині заряду (тобто $\mu = 0$) ми знаходимо

$$\sigma = \frac{e^2 N_f}{\pi^2}\frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \Delta^2}. \tag{5.62}$$

Відзначимо, що наш результат (5.62) узгоджується з законом Відемана–Франца

$$\frac{\sigma T}{\kappa}|_{T\to 0} = \frac{3e^2}{\pi^2}, \tag{5.63}$$

де ми використали значення термічної провідності κ обчисленної в [301].

Обчислимо тепер провідність в присутності зовнішнього магнітного поля. Спектральна функція $A(\omega, \vec{k})$ трансляційно інваріантної частини квазічастинкового пропагатора має вигляд

$$A(\omega, \vec{k}) = \frac{\Gamma}{\pi}\exp\left(-\frac{c|\vec{k}|^2}{|eB|}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{M_n}$$

$$\times\left[\frac{(\gamma^0 M_n + \Delta) f_1(\vec{k}) + f_2(\vec{k})}{(\omega - M_n)^2 + \Gamma^2} + \frac{(\gamma^0 M_n - \Delta) f_1(\vec{k}) - f_2(\vec{k})}{(\omega + M_n)^2 + \Gamma^2}\right], \tag{5.64}$$

де $M_n = \sqrt{\Delta^2 + 2nv_F^2|eB|/c}$ і функції $f_1(\vec{k})$ та $f_2(\vec{k})$ були визначені раніше в рівнянні (5.30). В зовнішньому магнітному полі провідність є тензорною величиною. Діагональні і антидіагональні компоненти провідності дорівнюють

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2 N_f |eB| \Gamma^2}{2\pi^2 T} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\cosh^2 \frac{\omega+\mu}{2T}}$$

$$\times \frac{(\omega^2 + M_n^2 + \Gamma^2)(\omega^2 + M_{n+1}^2 + \Gamma^2) - 4\omega^2 \Delta^2}{[(\omega^2 - M_n^2 - \Gamma^2)^2 + 4\omega^2\Gamma^2]\left[(\omega^2 - M_{n+1}^2 - \Gamma^2)^2 + 4\omega^2\Gamma^2\right]} \tag{5.65}$$

і

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2 N_f}{2\pi} \nu_B \tag{5.66}$$

відповідно. Фактор заповнення ν_B визначається рівнянням

$$\nu_B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tanh \frac{\mu + \omega}{2T} \left[\frac{\Gamma}{(\omega - \Delta)^2 + \Gamma^2} + (\omega \to -\omega) \right.$$

$$\left. +2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Gamma}{(\omega - M_n)^2 + \Gamma^2} + (\omega \to -\omega) \right) \right]. \tag{5.67}$$

Сума по рівнях Ландау в (5.65) обчислюється аналітично і результат виражається в термінах $\psi(z)$ функції

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2 N_f \Gamma}{4\pi^2 T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\cosh^2 \frac{\omega+\mu}{2T}} \frac{\Gamma}{(\frac{v_F^2 eB}{c})^2 + (2\omega\Gamma)^2}$$

$$\times \left[2\omega^2 + \frac{(\omega^2 + \Delta^2 + \Gamma^2)\left(\frac{v_F^2 eB}{c}\right)^2 - 2\omega^2(\omega^2 - \Delta^2 + \Gamma^2)\frac{v_F^2 eB}{c}}{(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)^2 + 4\omega^2\Gamma^2} \right.$$

$$\left. - \frac{\omega(\omega^2 - \Delta^2 + \Gamma^2)}{\Gamma} \mathrm{Im}\, \psi \left(\frac{\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2 - 2i\omega\Gamma}{2v_F^2 |eB|/c} \right) \right]. \tag{5.68}$$

Високотемпературна асимптотика, яка випливає з рівняння (5.68) співпадає з відповідною асимптотикою (5.56) у відсутності магнітного поля. Границя $T \to 0$ є відмінною від (5.57) і визначається рівнянням

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2 N_f \Gamma}{\pi^2} \frac{\Gamma}{(\frac{v_F^2 eB}{c})^2 + (2\mu\Gamma)^2}$$

$$\times \left[2\mu^2 + \frac{(\mu^2 + \Delta^2 + \Gamma^2)\left(\frac{v_F^2 eB}{c}\right)^2 - 2\mu^2(\mu^2 - \Delta^2 + \Gamma^2)\frac{v_F^2 eB}{c}}{(\mu^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)^2 + 4\mu^2\Gamma^2} \right.$$

$$+\frac{\mu(\mu^2-\Delta^2+\Gamma^2)}{\Gamma}\mathrm{Im}\ \psi\left(\frac{\Delta^2+\Gamma^2-\mu^2+2i\mu\Gamma}{2v_F^2|eB|/c}\right)\Bigg]. \qquad (5.69)$$

Якщо $\Gamma \to 0$, то наведені вище вирази прямують до

$$\sigma_{xx}=\frac{e^2N_f\Gamma}{2\pi T}\left[\frac{1+\cosh\frac{\Delta}{T}\cosh\frac{\mu}{T}}{(\cosh\frac{\Delta}{T}+\cosh\frac{\mu}{T})^2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1+\cosh\frac{M_n}{T}\cosh\frac{\mu}{T})}{(\cosh\frac{M_n}{T}+\cosh\frac{\mu}{T})^2}\right] \qquad (5.70)$$

для діагональної компоненти провідності і

$$\nu_B=\frac{1}{2}\left(\tanh\frac{\mu+\Delta}{2T}+\tanh\frac{\mu-\Delta}{2T}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tanh\frac{\mu+M_n}{2T}+\tanh\frac{\mu-M_n}{2T}\right) \qquad (5.71)$$

для фактора заповнення.

В термінах провідностей діагональна компонента тензора опору дорівнює

$$\rho_{xx}=\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2+\sigma_{xy}^2}. \qquad (5.72)$$

Зрозуміло, що при малій густині заряда холівська провідність σ_{xy} є набагато меншою від σ_{xx} і тому опір в (5.72) є $1/\sigma_{xx}$. З іншого боку, при достатньо великій густині, коли холівська провідність домінує порівняно з діагональною компонентою, провідність дорівнює $\rho_{xx}\approx\sigma_{xx}/\sigma_{xy}^2$.

5.4. Квантовий ефект Хола в графені і параметри порядку

Особлива роль у вивченні графена належить квантовому ефекту Хола. В роботі [282] вивчалась холівська провідність графену в присутності магнітного поля в межах самоузгодженного борнівського наближення. Холівська провідність розглядалась у випадках коротко- та довгосяжних розсіювачів і аналітично обчислювалась для сильних і слабких магнітних полів. Чисельні розрахунки показали, що холівська провідність описує квантовий ефект Хола коли енергія Фермі знаходиться серед низьких рівнів Ландау та при слабкому розсіянні [282].

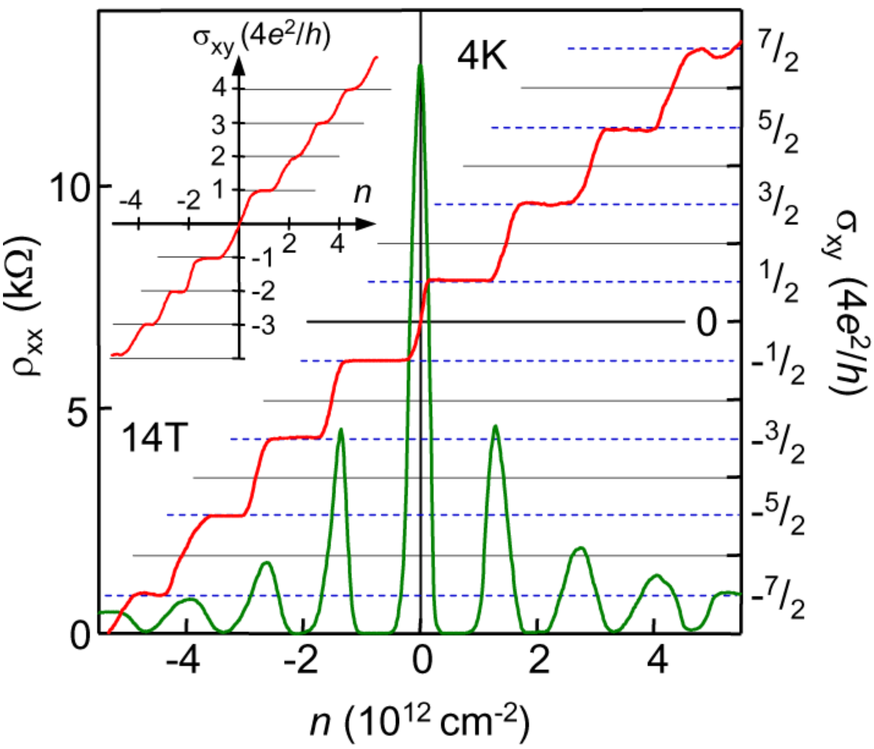


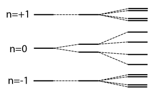
Рис. 5.2. Опір і холівська провідність як функції густини заряду в графені для $B = 14T$ і $T = 4$K. На вставці зображена холівська провідність в двошаровому графені.

В роботах [218], [293] було показано, що характер збуджень в графені у зовнішньому магнітному полі призводить до незвичної форми квантової холівської провідності $\sigma_{xy} = -(2e^2/h)(2n+1)$ з $n = 0, 1\dots$. Наголошувалось, що це суттєво відрізняє графен від інших матеріалів в яких спостерігався цілочисельний квантовий ефект Холла. Незвичне квантування виникає завдяки квантовій аномалії найнижчого рівня Ландау. Експериментально це теоретичне передбачення було підтверджено в роботах [273, 274]. На Рис. 5.2 ми наводимо відповідний результат з роботи [273]. Крім того, в роботах [218, 293] вивчались транспортні властивості квазічастинок графену. Аналітично були побудовані діагональна і недіагональна змінна та постійна провідності графену в зовнішньому магнітному полі, а також проаналізована їх залежність від частоти, хімічного потенціалу і зовнішнього магнітного поля. Було доведено, що відповідні залежності обумовлені діраківським типом квазічастинкових збуджень графену [218], [293].

Нещодавно були проведені експерименти [308, 309] по дослідженню холівської провідності в графені у сильних магнітних полях $B \geq 20T$, де спостерігались нові холівські плато $\nu = 0, \pm 1, \pm 4$ пов'язані з розщепленням $n = 0$ та $n = \pm 1$ рівнів Ландау. На Рис. 5.3 ми наводимо експериментальні дані отримані в роботі [308]. В літературі було запропоновано два теоретичних сценарія для пояснення причини появи цих нових холівських плато. Один з них грунтується на моделі квантового холівського феромагнетизму, інший – на сценарії магнітного каталізу, де спонтанно генеруються екситоноподібні конденсати. Перший сценарій [303, 304] пов'язан із генерацією спінової або псевдоспінової щілини в спектрі квазічастинок, а другий [305, 306] характеризується генерацією масової щілини в спектрі. З технічної точки зору різниця між цими двома сценаріями полягає у використанні різних параметрів порядку, які порушують $U(4)$ симетрію гамільтоніана квазічастинок графена з кулонівською взаємодією. Феромагнітні параметри порядку, які відповідають спіновій і псевдоспіновій густинам, пов'язані із діагональними генераторами неабелевої підгрупи $SU(4) \subset U(4)$. Параметри порядку в сценарії магнітного каталізу є діракоподібними масовими членами, які зв'язані з дисбалансом заряду на двох підгратках і долинах графена.

В роботах [100, 101, 102] використовуючи рівняння Швінгера-Дайсона для пропагатора діраківських квазічастинок ми показали, що феромагнітні і екситоноподібні параметри порядку не є конкуруючими, а навпаки в графені у зовнішньому магнітному полі феромагнітні параметри порядку з необхідністю співіснують з параметрами порядку пов'язаними з діраківськими масами (ексітонними конденсатами). Факт співіснування феромагнітних і екситоноподібних параметрів порядка призводить до важливих наслідків, зокрема, передбачає можливість існування безщілинних крайових станів [307].

Модель, яка розглядалась в роботах [100, 101, 102] визначається наступним чином (це та ж сама модель, яка вивчалась в перших двох параграфах цього розділу). По-перше, квазічастинкові збудження в графені стандартним чином



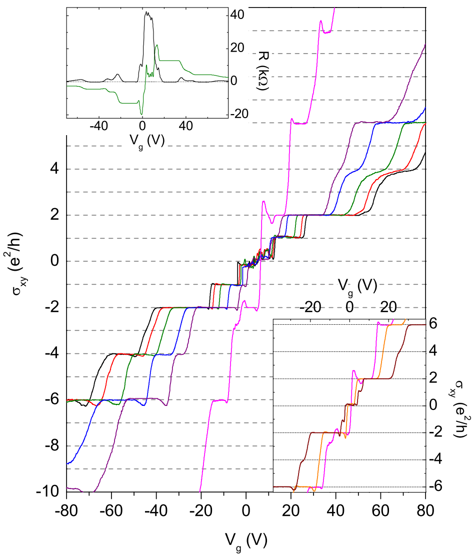


Рис. 5.3. Холівська провідність як функція напруги на затворі для полів $B = 9;\ 25;\ 30;\ 37;\ 42;\ 45$ Т для кривих починаючи в правому верхньому кутку зверху вниз. Вставка зліва вгорі: R_{xx} і R_{xy} для $B = 25$ Т. Вставка справа внизу: σ_{xy} біля діраківської точки для $B = 9;\ 11,5;\ 17,5$ Т. Зліва вгорі схематично: необхідне розщеплення $n = 0$ і $n = \pm 1$ рівнів Ландау.

описуються у вигляді чотирьохкомпонентного діраківського спінора $\Psi_s^T = (\psi_{KAs}, \psi_{KBs}, \psi_{K'Bs}, \psi_{K'As})$, який комбінує блохівські стани із спіном $s = \pm$ на двох підгратках $(A,\ B)$ гексагональної гратки графена з імпульсами в двох долинах поблизу двох нееквівалентних точок $(K,\ K')$ зони Брілюена. Вільний квазічастинковий гамільтоніан має релятивістські-подібну форму

$$H_0 = v_F \int d^2 r\, \overline{\Psi} \left(\gamma^1 \pi_x + \gamma^2 \pi_y\right) \Psi, \tag{5.73}$$

де $\overline{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ є діраківські спряжений спінор, γ^ν - матриці Дірака, а саме $\gamma^\nu = \tilde{\tau}^3 \otimes (\tau^3, i\tau^2, -i\tau^1)$, де $\tilde{\tau}^i$ і τ^i - матриці Паулі, $i = 1, 2, 3$, які діють в підпросторі двох долин $(K,\ K')$ і двох підграток $(A,\ B)$ відповідно. Канонічний імпульс $\pi \equiv (\pi_x, \pi_y) = -i\hbar\nabla + e\mathbf{A}/c$ містить векторний потенціал $\mathbf{A}$ пов'язаний з компонентою магнітного поля $B_\perp$ перпендикулярною до площини графена. По-друге, ефективна кулонівська взаємодія, яка описує електрон-електронну взаємодію в моделі, що розглядається, має наступний вигляд

$$H_C \;=\; \frac{1}{2}\int d^2r d^2r' \Psi^\dagger(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})U_C(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Psi^\dagger(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}'), \tag{5.74}$$

де $U_C(\mathbf{r})$ враховує поляризаційні ефекти, які обчислюються в стандартному наближенні випадкових фаз. Повний гамільтоніан $H = H_0 + H_C$ має глобальну $U(4)$ симетрію і динамічне порушення цієї симетрії призводить до появи $\nu = 0, \pm1, \pm4$ плато холівської провідності. Електронний хімічний потенціал μ_0, який визначає заповнення рівнів Ландау, характеризується доданком $-\mu_0\Psi^\dagger\Psi$ до гамільтоніану. Цей доданок також має $U(4)$ симетрію. Зееманівська взаємодія враховується шляхом включення в гамільтоніан моделі доданка $\mu_B B\Psi^\dagger\sigma^3\Psi$, де $B \equiv |\mathbf{B}|$ і $\mu_B = e\hbar/(2mc)$ є магнетон Бора. Спінова матриця σ^3 має власні значення $+1$ (-1) для станів із спіном направленим вздовж (проти) магнітного поля $\mathbf{B}$. Зееманівська взаємодія зменшує $U(4)$ симетрію гамільтоніана до $U(2)_+ \times U(2)_-$ симетрії, де індекс $\pm$ позначає відповідні спінові стани на які ці підгрупи діють.

Динаміка моделі досліджувалась в наближенні Хартрі–Фока (середнього поля). Крім того, при ненульовій густині носіїв заряду кулонівська взаємодія деяким чином екранується, хоча і не повністю. Зважаючи на це, а також приймаючи до уваги той факт, що аналіз моделі з локальною взаємодією є значно простішим ніж аналіз моделі з нелокальною взаємодією, в роботах [100, 101, 102] частково екранова кулонівська взаємодія $U_C(\mathbf{r})$ була апроксимована локальною взаємодією $G_{\text{int}}\delta^2(\mathbf{r})$, де G_{int} - константа зв‘язку. В такій моделі рівняння Швінгера–Дайсона приймає вигляд

$$\begin{aligned} G^{-1}(u,u') = S^{-1}(u,u') + i\hbar G_{\text{int}}\gamma^0 G(u,u)\gamma^0\delta^3(u-u') \\ -i\hbar G_{\text{int}}\gamma^0\,\mathrm{tr}[\gamma^0 G(u,u)]\delta^3(u-u'), \end{aligned} \tag{5.75}$$

де $u \equiv (t, \mathbf{r})$, $G^{-1}(u,u')$ - обернений повний пропагатор квазічастинок і

$$iS^{-1}(u,u') = \left[(i\hbar\partial_t + \mu_0 - \mu_B B\sigma^3)\gamma^0 - v_F(\pi\cdot\gamma)\right]\delta^3(u-u') \tag{5.76}$$

відповідає оберненому затравочному пропагатору.

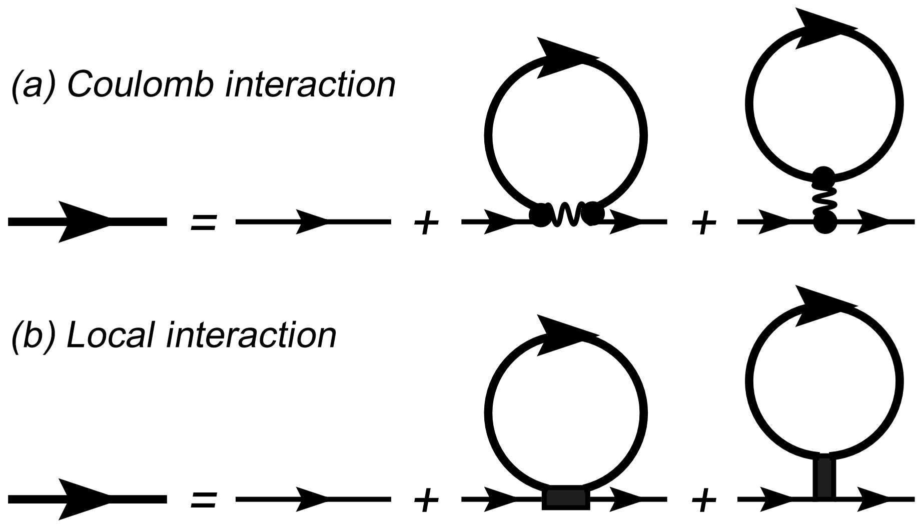


Рис. 5.4. Рівняння Швінгера–Дайсона в наближенні середнього поля. Верхні діаграми (a) відповідають випадку далекодіючої кулонівської, а нижні (b) локальної взаємодії.

Як ми побачимо далі, в аналізі рівняння ШД для квазічастинкового пропагатора корисно визначити і використовувати безрозмірну константу зв'язку $\lambda = G_{\text{int}}\Lambda/(4\pi^{3/2}\hbar^2 v_F^2)$ замість G_{int}. Зауважимо, що Λ є енергетичним ультрафіолетовим масштабом, який нам потрібно визначити в нашій моделі з локальною взаємодією. В початковій моделі з кулонівською взаємодією масштаб

$$\epsilon_B \equiv \sqrt{2\hbar|eB_\perp|v_F^2/c} \simeq 424\sqrt{|B_\perp[\text{T}]|}\ \text{K}\,, \tag{5.77}$$

який визначає різницю енергій між першим і найнижчим рівнями Ландау, є єдиним енергетичним масштабом. Це вказує на те, що ультрафіолетовий параметр обрізання Λ повинен мати значення порядку ϵ_B в нашій моделі з локальною взаємодією. Тоді $G_{\text{int}} \simeq 4\pi^{3/2}\hbar^2 v_F^2 \lambda/\epsilon_B$ і безрозмірну константу зв'язку λ ми визначаємо пізніше. Для того, щоб з'ясувати в якій формі шукати $G(x-y)$ ми повинні ретельно вивчити симетрії моделі.

Гамільтоніан моделі $H = H_0 + H_C$ з H_0 і H_C визначеними в рівняннях (5.73) і (5.74) має $U(4)$ симетрію з наступними шістнадцятьма генераторами

$$\frac{\sigma^\alpha}{2} \otimes I_4, \quad \frac{\sigma^\alpha}{2i} \otimes \gamma^3, \quad \frac{\sigma^\alpha}{2} \otimes \gamma^5, \quad \text{та} \quad \frac{\sigma^\alpha}{2} \otimes \gamma^3\gamma^5, \tag{5.78}$$

де I_4 є 4×4 одинична матриця, σ^α з $\alpha = 1, 2, 3$ є матрицями Паулі пов'язаними із спіновими ступенями вільності, а σ^0 є 2×2 одинична матриця. В представленні матриць Дірака γ^ν, яке ми використовуємо в цьому параграфі, матриці γ^3 і $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ дорівнюють

$$\gamma^3 = i \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = i \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.79}$$

де I є 2×2 одинична матриця. Ми будем називати матрицю $\gamma^3\gamma^5$ псевдоспіновим оператором.

Повний гамільтоніан

$$H_{\mathrm{tot}} \equiv H + \int d^2r \, [\mu_B B \Psi^\dagger \sigma^3 \Psi - \mu_0 \Psi^\dagger \Psi] \tag{5.80}$$

внаслідок зееманівської взаємодії $\mu_B B \Psi^\dagger \sigma_3 \Psi$ має тільки $U(2)_+ \times U(2)_-$ симетрію. Генераторами $U(2)_s$, де $s = \pm$, є $I_4 \otimes P_s$, $-i\gamma^3 \otimes P_s$, $\gamma^5 \otimes P_s$, $\gamma^3\gamma^5 \otimes P_s$, а $P_\pm = (1 \pm \sigma^3)/2$ є проекторами на стани із спіном вгору і вниз.

Наша ціль полягає в тому, щоб знайти всі розв'язки рівняння (5.75) з непорушенною або спонтанно порушенною $SU(2)_s$ симетрією, де $SU(2)_s$ є неабелева підгрупа $U(2)_s$. Генерація діраківського масового члена $\tilde{\Delta}_s \bar{\Psi} P_s \Psi \equiv \tilde{\Delta}_s \Psi^\dagger \gamma^0 P_s \Psi$, де $\tilde{\Delta}_s$ діраківська маса належить до триплетного представлення $SU(2)_s$, призведе до порушення $SU(2)_s$ симетрії до $\tilde{U}(1)_s$ симетрії з генератором $\gamma^3\gamma^5 \otimes P_s$ [299, 300, 98]. З іншого боку, інший можливий масовий член $\Delta_s \bar{\Psi} \gamma^3 \gamma^5 P_s \Psi$ є синглетом відносно $SU(2)_s$ і тому його генерація не порушить цієї симетрії, хоча буде порушувати дискретну симетрію відносно обернення часу. Відзначимо, що можливість появи синглетної діраківської маси Δ, яка є непарною відносно симетрії щодо обертання часу, в фізиці конденсованого стану вперше була вказана Халдейном в роботі [302], тому таку масу ми будемо іноді називати халдейнівською масою.

Масові члени Δ_s і $\tilde{\Delta}_s$ пов'язані з параметрами порядку сценарія магнітного каталізу $\langle \bar{\Psi} \gamma^3 \gamma^5 P_s \Psi \rangle$ і $\langle \bar{\Psi} P_s \Psi \rangle$. В термінах блохівських компонент спінорів для цих параметрів порядку ми маємо

$$\Delta_s : \qquad \bar{\Psi} \gamma^3 \gamma^5 P_s \Psi = \psi^\dagger_{KAs} \psi_{KAs} - \psi^\dagger_{K'As} \psi_{K'As} - \psi^\dagger_{KBs} \psi_{KBs} + \psi^\dagger_{K'Bs} \psi_{K'Bs},$$

$$\tilde{\Delta}_s: \qquad \bar{\Psi} P_s \Psi = \psi^\dagger_{KAs}\psi_{KAs} + \psi^\dagger_{K'As}\psi_{K'As} - \psi^\dagger_{KBs}\psi_{KBs} - \psi^\dagger_{K'Bs}\psi_{K'Bs}. \quad (5.81)$$

Ці вирази пояснюють фізичне значення масових параметрів як лагранжевих множників, які контролюють різні дисбаланси густин електронів в двох долинах і на двох підгратках. Зокрема, параметр порядку (5.81) описує дисбаланс заряду на двох підгратках, тобто хвилю зарядової густини. Далі величина $\tilde{\mu}_s$ пов'язана із псевдоспіновою густиною $\langle \Psi^\dagger \gamma^3 \gamma^5 P_s \Psi \rangle$. Тому $\mu_3 \equiv (\mu_+ - \mu_-)/2$ і $\tilde{\mu}_s$ зв'язані з феромагнітними параметрами порядку, а саме спіновою $\langle \Psi^\dagger \sigma^3 \Psi \rangle$ і псевдоспіновою $\langle \Psi^\dagger \gamma^3 \gamma^5 P_s \Psi \rangle$ густинами відповідно. В термінах блохівських компонент спінорів ми маємо

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_s: \qquad & \Psi^\dagger \gamma^3 \gamma^5 P_s \Psi = \psi^\dagger_{KAs}\psi_{KAs} - \psi^\dagger_{K'As}\psi_{K'As} + \psi^\dagger_{KBs}\psi_{KBs} - \psi^\dagger_{K'Bs}\psi_{K'Bs}, \\ \mu_3: \qquad & \Psi^\dagger \sigma^3 \Psi = \frac{1}{2} \sum_{\kappa=K,K'} \sum_{a=A,B} \left(\psi^\dagger_{\kappa a+}\psi_{\kappa a+} - \psi^\dagger_{\kappa a-}\psi_{\kappa a-} \right). \end{aligned} \quad (5.82)$$

Порівнюючи останній вираз з (5.81) ми бачимо, що $\tilde{\mu}_s$ описує дисбаланс заряду між двома долинами в зоні Брілюена. Очевидно також, що параметр порядку пов'язаний з μ_3 описує спінову хвилю. Таким чином, обернений пропагатор квазічастинок для фіксованого спінового стану s в загальному випадку має наступний вигляд

$$iG_s^{-1}(x,y) = [(i\hbar\partial_t + \mu_s + \tilde{\mu}_s \gamma^3\gamma^5)\gamma^0 - v_F \vec{\pi}\vec{\gamma} - \tilde{\Delta}_s + \Delta_s \gamma^3\gamma^5]\delta^3(x-y). \quad (5.83)$$

Зееманівська взаємодія призводить до розщеплення станів по спіну. Як було відзначено в роботі [307] магнітне поле може значно підсилити спінову щілину в графені за рахунок хімічного потенціалу $\mu_3 = (\mu_+ - \mu_-)/2 \gg Z$, який пов'язаний з параметром порядку $\langle \Psi^\dagger \sigma^3 \Psi \rangle$ сценарія квантового холлівського феромагнетизма. Однак, ми бачимо, що спінова щілина може бути підсилена також за рахунок діраківської маси $\Delta_3 \equiv (\Delta_+ - \Delta_-)/2$ пов'язаною з параметром порядку $\langle \bar{\Psi} \gamma^3 \gamma^5 \sigma^3 \Psi \rangle$ сценарія магнітного каталізу.

Симетрія $U(2)_+ \times U(2)_-$ є точною для гамільтоніана $H_{\rm tot}$ (5.80) ефективної теорії в континуальному наближенні. Однак, в роботі [304] було показано, що симетрія гамільтоніана графена в мікроскопічній теорії на гратці є меншою і в гамільтоніан низькоенергетичної ефективної континуальної теорії повинні бути добавлені члени, які описують локальне відштовхування і зменшують симетрію $U(2)_+ \times U(2)_-$ до $U(1)_+ \times Z_{2+} \times U(1)_- \times Z_{2-}$, де елементи підгрупи Z_{2s} є $\gamma^5 \otimes P_s + I_4 \otimes P_{-s}$ та одинична матриця. Цей факт має важливі наслідки, тому що в той час, як спонтанне порушення неперервної симетрії згідно з теоремою Коулмена–Мерміна–Вагнера неможливе у двовимірній системі при скінченній температурі, ця теорема не забороняє спонтанне порушення дискретної $Z_{2\pm}$ симетрії з параметрами порядку $\langle \bar{\Psi} P_\pm \Psi \rangle$ і $\langle \Psi^\dagger \gamma^3 \gamma^5 P_\pm \Psi \rangle$. Таким чином, ми маємо шість параметрів порядку, які описують динамічне порушення $U(4)$ симетрії. Два з них пов'язані з μ_3 і Δ_3, а чотири інші з $\tilde{\mu}_\pm$ і $\tilde{\Delta}_\pm$.

5.5. Квазічастинковий пропагатор і рівняння для щілини

В цьому параграфі ми знайдемо пропагатор квазічастинок і рівняння для щілини. Для спрощення проміжних формул ми будемо використовувати одиниці, в яких $\hbar = 1$ і $c = 1$. Повний пропагатор, який відповідає оберненому пропагатору (5.83) дорівнює

$$\begin{aligned} G_s(u,u') = i\langle u| \Big[(i\partial_t + \mu_s)\gamma^0 - v_F(\pi\cdot\gamma) + i\tilde{\mu}_s\gamma^1\gamma^2 - i\Delta_s\gamma^0\gamma^1\gamma^2 + \tilde{\Delta}_s \Big] \\ \times \Big[(i\partial_t + \mu_s)^2 - v_F^2\pi^2 + 2i\tilde{\mu}_s(i\partial_t + \mu_s)\gamma^0\gamma^1\gamma^2 + 2i\Delta_s\tilde{\Delta}_s\gamma^0\gamma^1\gamma^2 - ieB_\perp v_F^2\gamma^1\gamma^2 \\ + \tilde{\mu}_s^2 - \tilde{\Delta}_s^2 - \Delta_s^2 \Big]^{-1} |u'\rangle, \end{aligned} \tag{5.84}$$

де $u = (t, \mathbf{r})$ і $\mathbf{r} = (x, y)$. Наша ціль - знайти пропагатор у вигляді розкладу по рівнях Ландау. Виконуючи перетворення Фур'є відносно часу ми маємо

$$G_s(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\left[W - v_F(\pi_r \cdot \boldsymbol{\gamma})\right] \langle \mathbf{r}| \left(\mathcal{M} - v_F^2\pi^2 - ieB_\perp v_F^2\gamma^1\gamma^2\right)^{-1} |\mathbf{r}'\rangle, \tag{5.85}$$

де матриці W і $\mathcal{M}$ дорівнюють

$$W = (\omega + \mu_s)\gamma^0 + i\tilde{\mu}_s\gamma^1\gamma^2 - i\Delta_s\gamma^0\gamma^1\gamma^2 + \tilde{\Delta}_s, \tag{5.86}$$

$$\mathcal{M} = (\omega + \mu_s + i\tilde{\mu}_s\gamma^0\gamma^1\gamma^2)^2 - (\tilde{\Delta}_s - i\Delta_s\gamma^0\gamma^1\gamma^2)^2. \tag{5.87}$$

Оператор π^2 має добре відомі власні значення $(2n+1)|eB_\perp|$ з $n = 0, 1, 2, \ldots$, а його нормовані власні функції в калібровці Ландау $\mathbf{A} = (0, B_\perp x)$ дорівнюють

$$\psi_{np}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n\left(\frac{x}{l} + pl\right) e^{-\frac{1}{2l^2}(x+pl^2)^2} e^{ipy}, \tag{5.88}$$

де $H_n(x)$ - поліноми Ерміта, $l = \sqrt{\hbar c/|eB_\perp|}$ - магнітна довжина. Далі ми маємо

$$\int d^2 r \psi^*_{np}(\mathbf{r}) \psi_{n'p'}(\mathbf{r}) = \delta_{nn'} \delta(p - p') \tag{5.89}$$

і

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp \psi^*_{np}(\mathbf{r}) \psi_{np}(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{5.90}$$

Використовуючи спектральний розклад одиничного оператора (5.90), ми знаходимо

$$\langle \mathbf{r} | \left(\mathcal{M} - v_F^2 \pi^2 - ieB_\perp v_F^2 \gamma^1 \gamma^2\right)^{-1} |\mathbf{r}'\rangle = \frac{1}{2\pi l^2} \exp\left(-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{4l^2} - i\frac{(x + x')(y - y')}{2l^2}\right)$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mathcal{M} - (2n+1)v_F^2 |eB_\perp| - iv_F^2 eB_\perp \gamma^1 \gamma^2} L_n\left(\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{2l^2}\right), \tag{5.91}$$

де ми проінтегрували по квантовому числу p за допомогою формули 7.378 з [197]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x + y) H_n(x + z) dx = 2^n \pi^{1/2} m! z^{n-m} L_m^{n-m}(-2yz), \tag{5.92}$$

яка справедлива для $m \leq n$. Функції L_n^α є узагальненими поліномами Лагера, а $L_n \equiv L_n^0$. Матриця $iv_F^2 eB_\perp \gamma^1 \gamma^2$ має власні значення $\pm v_F^2 |eB_\perp|$ і, таким чином,

$$\frac{L_n(\xi)}{\mathcal{M} - (2n+1)v_F^2 |eB_\perp| - iv_F^2 eB_\perp \gamma^1 \gamma^2} = \frac{P_- L_n(\xi)}{\mathcal{M} - (2n+1)v_F^2 |eB_\perp| + v_F^2 |eB_\perp|}$$
$$+ \frac{P_+ L_n(\xi)}{\mathcal{M} - (2n+1)v_F^2 |eB_\perp| - v_F^2 |eB_\perp|}, \tag{5.93}$$

де змінна ξ і проектори $P_\pm$ визначаються рівняннями

$$\xi = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{2l^2}, \qquad P_\pm = \frac{1}{2}\left[1 \pm i\gamma^1\gamma^2 \mathrm{sign}(eB_\perp)\right]. \tag{5.94}$$

Якщо ми перепозначимо $n \to n-1$ в другому доданку в рівнянні (5.93), рівняння (5.91) переписується наступним чином

$$\langle \mathbf{r}|[\mathcal{M} - v_F^2\pi^2 - ieB_\perp v_F^2\gamma^1\gamma^2]^{-1}|\mathbf{r}'\rangle = \frac{e^{i\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}')}e^{-\xi/2}}{2\pi l^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_- L_n(\xi) + P_+ L_{n-1}(\xi)}{\mathcal{M} - 2nv_F^2|eB_\perp|},$$

де $L_{-1} \equiv 0$ і фаза

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{(x + x')(y - y')}{2l^2} = -e\int\limits_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}} dz_i A_i(z) \tag{5.95}$$

з'являється внаслідок того, що в постійному магнітному поля комутативна група звичайних трансляцій заміняється на некомутативну групу магнітних трансляцій [195]. Приймаючи до уваги, що

$$\pi_x e^{i\Phi} = e^{i\Phi}\left(-i\partial_x - \frac{y - y'}{2l^2}\right), \quad \pi_y e^{i\Phi} = e^{i\Phi}\left(-i\partial_y + \frac{x - x'}{2l^2}\right), \tag{5.96}$$

ми бачимо, що пропагатор (5.85) може бути представлений як добуток фазового фактора і трансляційно інваріантної частини $\bar{G}_s(\omega; \mathbf{r} - \mathbf{r}')$,

$$G_s(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{i\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\bar{G}_s(\omega; \mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{5.97}$$

де

$$\bar{G}_s(\omega; \mathbf{r} - \mathbf{r}') = i\left[W - v_F\gamma^1\left(-i\partial_x - \frac{y - y'}{2l^2}\right) - v_F\gamma^2\left(-i\partial_y + \frac{x - x'}{2l^2}\right)\right]\frac{e^{-\xi/2}}{2\pi l^2}$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_- L_n(\xi) + P_+ L_{n-1}(\xi)}{\mathcal{M} - 2nv_F^2|eB_\perp|}. \tag{5.98}$$

Важливо відзначити, що фазовий фактор не впливає на рівняння для щілини у випадку локальної взаємодії (5.75), тому що це рівняння містить повний пропагатор тільки при $u' = u$.

Фур'є образ трансляційно інваріантної частини пропагатора (5.98) знаходимо обчислюючи спершу інтеграл по кутовій змінній

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{ikr\cos\theta} = 2\pi J_0(kr), \tag{5.99}$$

де $J_0(x)$ - функкція Беселя, а потім використовуючи формулу 7.421.1 з [197]

$$\int_0^\infty xe^{-\frac{1}{2}\alpha x^2} L_n\left(\frac{1}{2}\beta x^2\right) J_0(xy)dx = \frac{(\alpha-\beta)^n}{\alpha^{n+1}} e^{-\frac{1}{2\alpha}y^2} L_n\left(\frac{\beta y^2}{2\alpha(\beta-\alpha)}\right), \tag{5.100}$$

яка справедлива для $y > 0$ і $\operatorname{Re}\alpha > 0$. В результаті отримуємо наступний розклад по рівнях Ландау

$$\bar{G}_s(\omega, \mathbf{k}) = ie^{-k^2l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n D_{ns}(\omega, \mathbf{k})}{\mathcal{M} - 2nv_F^2|eB_\perp|}, \tag{5.101}$$

де

$$D_{ns}(\omega, \mathbf{k}) = 2W\left[P_- L_n\left(2k^2l^2\right) - P_+ L_{n-1}\left(2k^2l^2\right)\right] + 4v_F(\mathbf{k}\cdot\gamma) L_{n-1}^1\left(2k^2l^2\right) .$$

Рівняння для мас і хімічних потенціалів містять повний пропагатор в точці $u' = u$, тобто $G_s(u, u')|_{u=u'} = \bar{G}_s(u, u)$. Ми маємо

$$G_s(u, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \bar{G}_s(\omega, 0) = \frac{i}{2\pi l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} W \frac{P_- + P_+\theta(n-1)}{\mathcal{M} - 2nv_F^2|eB_\perp|}. \tag{5.102}$$

В подальшому зручно використовувати власні вектори матриць $\gamma^1\gamma^2$ і γ^0. Внаслідок $(\gamma^1\gamma^2)^2 = -1$ власні вектори $|s_{12}\rangle$ матриці $\gamma^1\gamma^2$ відповідають уявним власним значенням $is_{12} = \pm i$, тобто

$$\gamma^1\gamma^2|s_{12}\rangle = is_{12}|s_{12}\rangle . \tag{5.103}$$

Далі $(\gamma^0)^2 = 1$ і власні вектори $|s_0\rangle$ матриці γ^0 відповідають власним значенням $s_0 = \pm 1$, тобто

$$\gamma^0|s_0\rangle = s_0|s_0\rangle. \tag{5.104}$$

Матриці γ^0 і $\gamma^1\gamma^2$ комутують. Тому ми можемо використовувати стани $|s_{12}s_0\rangle$, які є одночасно власними векторами $\gamma^1\gamma^2$ і γ^0 із власними значеннями is_{12} та

s_0 відповідно. Вектори $|s_{12}s_0\rangle$ формують повний базис. Тому будь-яка 4×4 матриця $\mathcal{O}$ може бути представлена наступним чином

$$\mathcal{O} = \sum_{s_{12}',s_0',s_{12},s_0} \mathcal{O}_{s_{12}'s_0's_{12}s_0}|s_{12}'s_0'\rangle\langle s_{12}s_0|. \qquad (5.105)$$

Приймаючи до уваги, що пропагатор (5.102) містить тільки одиничну, γ^0, $\gamma^1\gamma^2$ і $\gamma^0\gamma^1\gamma^2$ матриці (дивись рівняння (5.86),(5.87)), його розклад в формі (5.105) містить тільки діагональні члени $s_{12}' = s_{12}$ і $s_0' = s_0$. Таким чином, ми маємо

$$G_s(u,u) = \frac{i}{4\pi l^2}\sum_{s_{12},s_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\omega+\mu_s-\tilde{\mu}_s s_{12}s_0)s_0+\tilde{\Delta}_s+\Delta_s s_{12}s_0}{(\omega+\mu_s-\tilde{\mu}_s s_{12}s_0)^2-(\tilde{\Delta}_s+\Delta_s s_{12}s_0)^2-2v_F^2|eB_\perp|n}$$
$$\times\left\{1+s_{12}\mathrm{sign}(eB_\perp)+\left[1-s_{12}\mathrm{sign}(eB_\perp)\right]\theta(n-1)\right\}\,|s_{12}s_0\rangle\,\langle s_{12}s_0|\;. \qquad (5.106)$$

Нулі знаменника підінтегрального виразa визначають закони дисперсії рівнів енергії. Для $n\geq1$ вони дорівнюють

$$\omega_{ns}^{(\sigma)} = -\mu_s+\sigma\tilde{\mu}_s\pm\sqrt{2v_F^2|eB_\perp|n+(\tilde{\Delta}_s+\sigma\Delta_s)^2}, \qquad (5.107)$$

де $\sigma\equiv s_{12}s_0$ (тобто $\sigma=\pm1$) і два знаки перед квадратним корнем відповідають рівням енергії для валентної зони і зони провідності. Випадок найнижчого рівня Ландау є спеціальним, тому що чисельник для $n=0$ доданка в рівнянні (5.106) співпадає з одним з нулів знаменника. Приймаючи це до уваги, ми знаходимо наступний закон дисперсії

$$\omega_s^{(\sigma)} = -\mu_s+\sigma[\tilde{\mu}_s\,\mathrm{sign}(eB_\perp)+\tilde{\Delta}_s]+\Delta_s\,\mathrm{sign}(eB_\perp). \qquad (5.108)$$

Як випливає із (5.107) і (5.108) для фіксованого спіна члени з σ відповідальні за розщеплення рівнів Ландау.

Інтегруючи по ω в (5.106) ми маємо

$$G_s(u,u) = \frac{1}{8\pi l^2}\sum_{s_{12},s_0}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(-s_0\,\mathrm{sign}(\mu_s-\tilde{\mu}_s s_{12}s_0)\theta(|\mu_s-\tilde{\mu}_s s_{12}s_0|-E_{ns}^{\sigma})$$

$$+\frac{(\tilde{\Delta}_s + \Delta_s s_{12} s_0)\theta(E^\sigma_{ns} - |\mu_s - \tilde{\mu}_s s_{12} s_0|)}{E^\sigma_{ns}}\Bigg)$$

$$\times \left\{1 + s_{12}\,\mathrm{sign}(eB_\perp) + [1 - s_{12}\,\mathrm{sign}(eB_\perp)]\,\theta(n-1)\right\}\ |s_{12}s_0\rangle\langle s_{12}s_0|, \qquad (5.109)$$

де $E^\sigma_{ns} = \sqrt{2v_F^2|eB_\perp|n + (\tilde{\Delta}_s + \sigma\Delta_s)^2}$.

Використовуючи цей вираз і рівняння (5.76),(5.83), ми отримуємо наступне рівняння

$$-\mu_s s_0 + \tilde{\mu}_s s_{12} + \Delta_s s_{12} s_0 + \tilde{\Delta}_s = -\bar{\mu}_s s_0 + A\sum_{n=0}^{\infty}\Big[1 + s_{12}\mathrm{sign}(eB_\perp)$$

$$+\left(1 - s_{12}\mathrm{sign}(eB_\perp)\right)\theta(n-1)\Big]\ [-s_0\mathrm{sign}(\mu_s - \tilde{\mu}_s s_{12} s_0)\theta(|\mu_s - \tilde{\mu}_s s_{12} s_0| - E^\sigma_{ns})$$

$$+\frac{(\tilde{\Delta}_s + \Delta s_{12} s_0)\theta(E^\sigma_{ns} - |\mu_s - \tilde{\mu}_s s_{12} s_0|)}{E^\sigma_{ns}}\Bigg] \qquad (5.110)$$

$$-A\,s_0\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s'=\pm}\sum_{s'_{12},s'_0}\Big[1 + s'_{12}\mathrm{sign}(eB_\perp) + \left(1 - s'_{12}\mathrm{sign}(eB_\perp)\right)\theta(n-1)\Big]$$

$$\times[-s'_0\mathrm{sign}(\mu_{s'} - \tilde{\mu}_{s'} s'_{12} s'_0)\theta(|\mu_{s'} - \tilde{\mu}_{s'} s'_{12} s'_0| - E^\sigma_{ns'})$$

$$+\frac{(\tilde{\Delta}_{s'} + \Delta_{s'} s'_{12} s'_0)\theta(E^\sigma_{ns'} - |\mu_{s'} - \tilde{\mu}_{s'} s'_{12} s'_0|)}{E^\sigma_{ns'}}\Bigg], \qquad (5.111)$$

де $A \equiv G_{\mathrm{int}}/(8\pi l^2)$. Останній член в правій частині рівняння (5.111), пропорційний s_0, є хартрієвським членом. Остаточно, домножаючи (5.111) на 1, $s_{12}s_0$, s_{12} та s_0 відповідно, обчислюючи суми по s_{12} і s_0 і узагальнюючи стандартним чином відповідні рівняння на випадок ненульової температури, ми знаходимо наступні рівняння для Δ_s, $\tilde{\Delta}_s$, μ_s і $\tilde{\mu}_s$

$$\Delta_s^{(\pm)} = Af_1\left(\Delta_s^{(\pm)}, \mu_s^{(\mp)}\right), \qquad (5.112)$$

$$\mu_s^{(\pm)} = \bar{\mu}_s + Af_2\left(\Delta_s^{(\mp)}, \mu_s^{(\pm)}\right) + 2Af_2\left(\Delta_s^{(\pm)}, \mu_s^{(\mp)}\right)$$

$$+2Af_2\left(\Delta_{-s}^{(\pm)}, \mu_{-s}^{(\mp)}\right) + 2Af_2\left(\Delta_{-s}^{(\mp)}, \mu_{-s}^{(\pm)}\right), \qquad (5.113)$$

де

$$f_1\left(\Delta_s^{(\pm)},\mu_s^{(\mp)}\right)=\frac{\sinh\left(\frac{\Delta_s^{(\pm)}}{T}\right)-s_\perp\sinh\left(\frac{\mu_s^{(\mp)}}{T}\right)}{\cosh\left(\frac{\Delta_s^{(\pm)}}{T}\right)+\cosh\left(\frac{\mu_s^{(\mp)}}{T}\right)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\Delta_s^{(\pm)}\sinh\left(\frac{E_{ns}^{\pm}}{T}\right)}{E_{ns}^{\pm}\left[\cosh\left(\frac{E_{ns}^{\pm}}{T}\right)+\cosh\left(\frac{\mu_s^{(\mp)}}{T}\right)\right]}, \tag{5.114}$$

$$f_2\left(\Delta_s^{(\pm)},\mu_s^{(\mp)}\right)=\frac{s_\perp\sinh\left(\frac{\Delta_s^{(\pm)}}{T}\right)-\sinh\left(\frac{\mu_s^{(\mp)}}{T}\right)}{\cosh\left(\frac{\Delta_s^{(\pm)}}{T}\right)+\cosh\left(\frac{\mu_s^{(\mp)}}{T}\right)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sinh\left(\frac{\mu_s^{(\mp)}}{T}\right)}{\cosh\left(\frac{E_{ns}^{\pm}}{T}\right)+\cosh\left(\frac{\mu_s^{(\mp)}}{T}\right)}, \tag{5.115}$$

а також $E_{ns}^{\pm}=\sqrt{2\hbar|neB_\perp|v_F^2/c+(\tilde{\Delta}_s\pm\Delta_s)^2}$, $\Delta_s^{(\pm)}=\Delta_s\pm\tilde{\Delta}_s$, $\mu_s^{(\pm)}=\mu_s\pm\tilde{\mu}_s$, $\bar{\mu}_\pm=\mu_0\mp Z$, $A=G_{\rm int}|eB_\perp|/(8\pi\hbar c)$ і $s_\perp=\mathrm{sign}(eB_\perp)$.

Тепер покажемо, що з цих рівнянь випливає, що феромагнітні параметри порядку і параметри порядку пов'язані із сценарієм магнітного каталізу з необхідністю співіснують. Припустимо, що рівняння (5.112) і (5.113) мають розв'язок з ненульовими хімічними потенціалами $\mu_s^{\mp}$, а $\Delta_s^{(\pm)}=0$. Тоді, очевидно, ліва частина рівняння (5.112) дорівнює нулю. З іншого боку, використовуючи (5.114), ми знаходимо, що для $\Delta_s^{(\pm)}=0$ ми маємо

$$f_1\left(0,\mu_s^{(\mp)}\right)=\frac{-s_\perp\sinh\left(\frac{\mu_s^{(\mp)}}{T}\right)}{1+\cosh\left(\frac{\mu_s^{(\mp)}}{T}\right)}=-s_\perp\tanh\left(\frac{\mu_s^{(\mp)}}{2T}\right). \tag{5.116}$$

Таким чином, $\Delta_s^{(\pm)}$ можуть бути рівними нулю тільки якщо $\mu_s^{(\mp)}$ дорівнюють нулю, що протирічить нашому припущенню. Це означає, що феромагнітні параметри порядку і параметри порядку пов'язані із сценарієм магнітного каталізу з необхідністю співіснують і не можуть розглядатися окремо. Це твердження є одним із основних результатів отриманих в роботах [100, 101, 102].

5.6. Розв'язки рівняння Швінгера–Дайсона і фазова фіаграма

В цьому параграфі ми знайдемо аналітичні розв'язки наступних рівнянь для параметрів порядку при нульовій температурі

$$\tilde{\Delta}_s = \frac{A}{2}\Bigg\{ -\Big[\mathrm{sign}(\mu_s - \tilde{\mu}_s)\theta(|\mu_s - \tilde{\mu}_s| - E^+_{0s}) - \mathrm{sign}(\mu_s + \tilde{\mu}_s)\theta(|\mu_s + \tilde{\mu}_s| - E^-_{0s})\Big]\ s_\perp$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(\tilde{\Delta}_s + \Delta_s)\theta(E^+_{ns} - |\mu_s - \tilde{\mu}_s|)}{E^+_{ns}} + \frac{(\tilde{\Delta}_s - \Delta_s)\theta(E^-_{ns} - |\mu_s + \tilde{\mu}_s|)}{E^-_{ns}}\right][1+\theta(n-1)]\Bigg\}, \tag{5.117}$$

$$\Delta_s = \frac{A}{2}\Bigg\{ -\Big[\mathrm{sign}(\mu_s - \tilde{\mu}_s)\theta(|\mu_s - \tilde{\mu}_s| - E^+_{0s}) + \mathrm{sign}(\mu_s + \tilde{\mu}_s)\theta(|\mu_s + \tilde{\mu}_s| - E^-_{0s})\Big]\ s_\perp$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(\tilde{\Delta}_s + \Delta_s)\theta(E^+_{ns} - |\mu_s - \tilde{\mu}_s|)}{E^+_{ns}} - \frac{(\tilde{\Delta}_s - \Delta_s)\theta(E^-_{ns} - |\mu_s + \tilde{\mu}_s|)}{E^-_{ns}}\right][1+\theta(n-1)]\Bigg\}, \tag{5.118}$$

$$\tilde{\mu}_s = \frac{A}{2}\Bigg\{ \left[\frac{(\tilde{\Delta}_s + \Delta_s)\theta(E^+_{0s} - |\mu_s - \tilde{\mu}_s|)}{E^+_{0s}} + \frac{(\tilde{\Delta}_s - \Delta_s)\theta(E^-_{0s} - |\mu_s + \tilde{\mu}_s|)}{E^-_{0s}}\right] s_\perp + \sum_{n=0}^{\infty}$$
$$\Big[-\mathrm{sign}(\mu_s - \tilde{\mu}_s)\theta(|\mu_s - \tilde{\mu}_s| - E^+_{ns}) + \mathrm{sign}(\mu_s + \tilde{\mu}_s)\theta(|\mu_s + \tilde{\mu}_s| - E^-_{ns})\Big][1+\theta(n-1)]\Bigg\}, \tag{5.119}$$

$$\mu_s = \bar{\mu}_s + X + \frac{A}{2}\Bigg\{ \left[\frac{(\tilde{\Delta}_s + \Delta_s)\theta(E^+_{0s} + |\mu_s - \tilde{\mu}_s|)}{E^+_{0s}} - \frac{(\tilde{\Delta}_s - \Delta_s)\theta(E^-_{0s} - |\mu_s + \tilde{\mu}_s|)}{E^-_{0s}}\right] s_\perp +$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\mathrm{sign}(\mu_s - \tilde{\mu}_s)\theta(|\mu_s - \tilde{\mu}_s| - E^+_{ns}) + \mathrm{sign}(\mu_s + \tilde{\mu}_s)\theta(|\mu_s + \tilde{\mu}_s| - E^-_{ns})\Big][1+\theta(n-1)]\Bigg\}, \tag{5.120}$$

де $s_\perp = \mathrm{sign}(eB_\perp)$, $\theta(x) = 1$ для $x \geq 0$ і $\theta(x) = 0$ для $x < 0$. В цих рівняннях ми ввели новий енергетичний масштаб A, який відіграє важливу роль в аналізі та знаходженні розв'язків рівнянь (5.117)-(5.120). Цей масштаб визначається магнітним полем і константою зв'язку

$$A \equiv \frac{G_{\mathrm{int}}|eB_\perp|}{8\pi\hbar c} = \frac{\sqrt{\pi}\lambda\epsilon_B^2}{4\Lambda}. \tag{5.121}$$

Другий член в правій частині рівняння (5.120) є хартрієвським членом і дорівнює

$$X = \sum_{s=\pm} X_s, \tag{5.122}$$

де

$$X_s = -2A\Bigg\{-\left[\frac{(\tilde{\Delta}_s+\Delta_s)\theta(E^{+}_{0s}-|\mu_s-\tilde{\mu}_s|)}{E^{+}_{0s}} - \frac{(\tilde{\Delta}_s-\Delta_s)\theta(E^{-}_{0s}-|\mu_s+\tilde{\mu}_s|)}{E^{-}_{0s}}\right] s_{\perp}+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathrm{sign}(\mu_s-\tilde{\mu}_s)\theta(|\mu_s-\tilde{\mu}_s|-E^{+}_{ns})+\mathrm{sign}(\mu_s+\tilde{\mu}_s)\theta(|\mu_s+\tilde{\mu}_s|-E^{-}_{ns})\right][1+\theta(n-1)]\Bigg\}. \quad (5.123)$$

Відзначимо, що завдяки присутності цього хартрієвського члена рівняння для параметрів зі спіном вгору і вниз не відщеплюються. На щастя, це єдиний доданок в рівняннях, який змішує параметри з різним значенням спінового індекса і це факт значно спрощує аналіз рівнянь (5.117)-(5.120).

Як ми відзначали вище, для магнітних полів $B \leq 10$T, експериментально спостерігаються холівські плато з факторами заповнення $\nu = \pm 4(n+1/2)$. При більших значеннях магнітного поля спостерігаються нові плато $\nu = 0$ і $\nu = \pm 1$. Перше плато з'являється при $B \geq 10$ T, а друге при $B \geq 20$ T [308, 309]. В цьому параграфі ми покажемо, що динамічно згенеровані щілини природним чином пояснюють появу цих плато. Ми розглянемо випадок додатніх ν і μ_0 (від'ємні значення ν і μ_0 можуть бути отримані за рахунок симетрії відносно зарядового спряження і тому не будуть обговорюватися окремо).

Плато $\nu = 0$, $\nu = \pm 1$ і $\nu = \pm 2$ пов'язані із заповненням найнижчого рівня Ландау, яке контролюється електронним хімічним потенціалом μ_0. Для кожного значення спіна аналіз рівнянь (5.117)-(5.120) показав, що мають місце три наступні типи розв‘язків : а) розв‘язок з ненульовою Δ і $\tilde{\Delta} = \tilde{\mu} = 0$, б) розв‘язок з ненульовими $\tilde{\Delta}$ і $\tilde{\mu}$ та $\Delta = 0$, в) розв‘язок, де всі Δ, $\tilde{\Delta}$ та $\tilde{\mu}$ відмінні від нуля. Останній розв‘язок реалізується тільки для вищих рівнів Ландау. Для того, щоб знайти стан з найменшою енергією серед всіх можливих розв‘язків ми обчислили вільну енергію для кожного з можливих рішень за допомогою загального виразу для вільної енергії наведеного в Додатку В. Таким чином, у випадку коли заповнюється тільки найнижчий рівень Ландау реалізуються наступні розв‘язки рівняння Швінгера–Дайсона:

i) Розв‘язок з протилежними за знаком масами $\Delta_\pm$ для полів зі спіном вгору і вниз має місце коли хімічний потенціал знаходиться в інтервалі $0 \leq \mu_0 < 2A + Z$

$$\tilde{\Delta}_\pm = \tilde{\mu}_\pm = 0,\ \mu_\pm = \mu_0 \mp (Z + A),\ \Delta_\pm = \pm M \,\mathrm{sign}(eB)\,, \tag{5.124}$$

де $M \equiv A/(1 - \lambda)$, $\lambda \equiv G_{int}\Lambda/(4\pi^{3/2}\hbar^2 v_F^2)$, Λ - параметр обрізання. Це один із декількох розв'язків з ненульовими синглетними діраківськими масами і ми будемо називати цей розв'язок $S1$ розв'язком (S означає синглет). Цей розв'язок має різні знаки обох мас Δ_+, Δ_- та обох хімічних потенціалів μ_+, μ_-. Тому явне порушення $U(4)$ симетрії до $U(2)_+ \times U(2)_-$ зееманівським членом сильно підсилюється за рахунок багаточастинкових взаємодій. Внаслідок того, що всі триплетні параметри порядку дорівнюють нулю, має місце $U(2)_+ \times U(2)_-$ симетрія. Як ми покажемо далі, цей розв‘язок відповідає $\nu = 0$ плато в аномальному квантовому ефекті Хола і пов‘язаний з наполовину заповненим найнижчим рівнем Ландау.

ii) Гібрідний розв‘язок з ненульовою масою Δ_- для поля зі спіном вниз і діраківською масою $\tilde{\Delta}_+$ для поля зі спіном вгору відповідає основному стану системи для хімічного потенціалу в інтервалі $2A + Z \leq \mu_0 < 6A + Z$

$$\tilde{\Delta}_+ = M,\ \ \tilde{\mu}_+ = A\,\mathrm{sign}(eB),\ \ \mu_+ = \mu_0 - Z - 4A,\ \ \Delta_+ = 0,$$

$$\tilde{\Delta}_- = \tilde{\mu}_- = 0,\ \mu_- = \mu_0 + Z - 3A,\ \Delta_- = -M\,\mathrm{sign}(eB). \tag{5.125}$$

Ми будемо називати цей розв'язок $H1$ розв'язком, де H означає гібрідне, тому що цей розв'язок є сумішю синглетних і триплетних параметрів порядку. Для цього розв'язку симетрія $SU(2)_+ \subset U(2)_+$ для спіна вгору спонтанно порушується до $U(1)_+$ (чим генератором є $\gamma^3\gamma^5 \otimes P_+$), а $SU(2)_- \subset U(2)_-$ симетрія для спіна вниз залишається непорушеною. Цей розв‘язок відповідає $\nu = 1$ плато в аномальному квантовому ефекті Хола і пов‘язаний з на три чверті заповненим найнижчим рівнем Ландау.

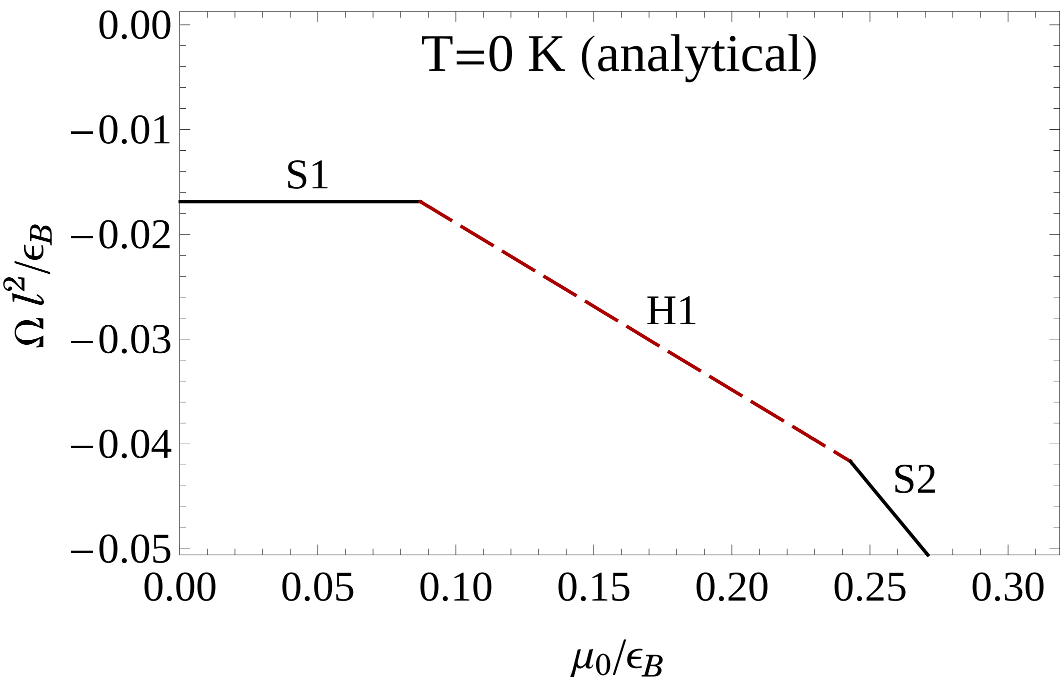


Рис. 5.5. Густина вільної енергії для декількох аналітичних розв'язків як функція електронного хімічного потенціалу.

iii) Розв‘язок з однаковими $\Delta_\pm$ масами для полів зі спіном вгору і вниз, який відповідає повністю заповненому найнижчому рівню Ландау, має місце для $\mu_0 > 6A + Z$

$$\tilde{\Delta}_\pm = \tilde{\mu}_\pm = 0, \;\; \mu_\pm = \mu_0 \mp Z - 7A, \;\; \Delta_\pm = -M\,\mathrm{sign}(eB). \tag{5.126}$$

Ми будемо називати цей розв'язок $S2$ розв'язком, для якого $U(4)$ симетрія порушена до $U(2)_+ \times U(2)_-$ тільки за рахунок зееманівського члена. Дійсно синглетні маси і динамічні внески до хімічних потенціалів мають однаковий знак для різних орієнтацій спіна і, таким чином, не порушують ніякої симетрії. Цей розв‘язок описує $\nu = 2$ плато в аномальному квантовому ефекті Хола і відповідає повністю заповненому НРЛ.

Вільні енергії цих трьох розв'язків дорівнюють

$$\Omega = -\frac{|eB_\perp|}{2\pi\hbar c}\left(M + A + 2Z + h\right), \quad \text{для} \quad 0 < \mu_0 < 2A + Z, \quad (5.127)$$

$$\Omega = -\frac{|eB_\perp|}{2\pi\hbar c}\left(M - A + Z + h + \mu_0\right), \quad \text{для} \quad 2A + Z < \mu_0 < 6A + Z, \quad (5.128)$$

$$\Omega = -\frac{|eB_\perp|}{2\pi\hbar c}\left(M - 7A + h + 2\mu_0\right), \quad \text{для} \quad 6A + Z < \mu_0, \quad (5.129)$$

де

$$h \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2M^4}{\sqrt{n\epsilon_B^2 + M^2}\left(\sqrt{n\epsilon_B^2 + M^2} + \sqrt{n}\,\epsilon_B\right)^2} \simeq \frac{M^4}{2\epsilon_B^3}\left[\zeta\left(\frac{3}{2}\right) - \zeta\left(\frac{5}{2}\right)\frac{M^2}{\epsilon_B^2}\right]$$

і в правій частині ми використали розклад по ступенях $(M/\epsilon_B)^2$. Відзначимо, що вищі рівні Ландау мають один і той самий внесок для всіх розв'язків. Тому тільки внесок найнижчого рівня Ландау є суттєвим при знаходженні рішення з найнижчою енергією. Наостанок ми хотіли б зазначити також, що хоча параметри порядку для розв'язків i)-iii) мають стрибки в точках $\mu_0 = 2A+Z$ і $\mu_0 = 6A+Z$, їх вільні енергії співпадають в цих точках, а тому в системі мають місце фазові переходи першого роду при цих значеннях хімічного потенціалу. Вільні енергії (5.127)-(5.129) як функції μ_0 показані на Рис. 5.5. Цей рисунок відповідає $M = 4.84 \times 10^{-2}\epsilon_B$ і $A = 3.90 \times 10^{-2}\epsilon_B$.

Чисельно ми проаналізували рівняння для параметрів порядку при ненульовій температурі і отримали фазову діаграму графена в площині температури T і електронного хімічного потенціалу μ_0 зображену на Рис. 5.6. Області зображені зеленим кольором відповідають розв'язкам з порушенною симетрію. Ці області відокремлені від інших областей діаграми фазовими переходами. На границі $\nu = 1$ області має місце фазовий перехід першого роду при низьких температурах і перехід другого роду при високих температурах. На діаграмі зображені також області $\nu = 3$ і $\nu = 5$ плато, які були розглянуті в роботі [102], але ми не аналізуємо їх в дисертаційній роботі. Слід також зазначити, що в цьому параграфі ми дослідили генерацію щілин в графені в наближенні середнього поля в моделі з локальною взаємодією. Незважаючи

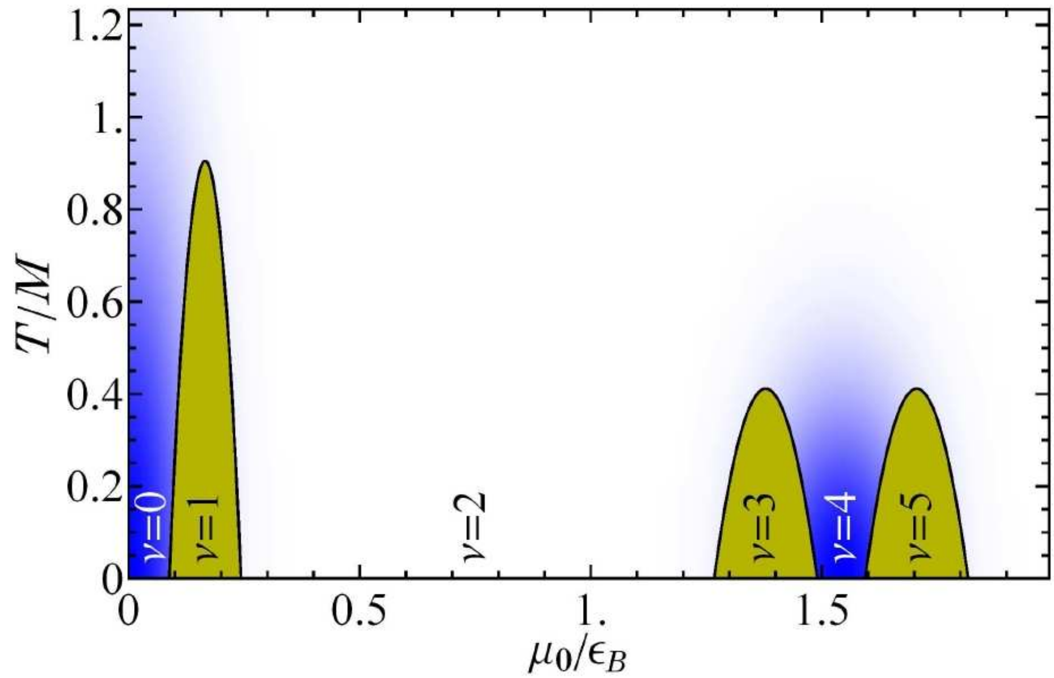


Рис. 5.6. Фазова діаграма графена у площині температури і хімічного потенціалу.

на ці наближення, ми віримо, що Рис. 5.6 коректно передає загальні риси фазової діаграми графена для достатньо чистих зразків.

На Рис. 5.6 області зображені блакитним кольором відповідають станам із квазіспонтанним порушенням симетрії. У випадку $\nu = 0$ і $\nu = 4$ плато явне порушення $U(4)$ симетрії зееманівським членом $U(2)_+ \times U(2)_-$ значно підсилюється динамічними внесками.

Отримані результати якісно узгоджуються з експериментальними даними [308, 309]. Вважаючи безрозмірну константу зв'язку $\lambda = 4A\Lambda/(\sqrt{\pi}\epsilon_B^2)$ вільним параметром і беручи параметр обрізання Λ порядка масштабу ϵ_B, ми знаходимо $A \sim \lambda\sqrt{|eB_\perp|}$ і $M \sim \lambda\sqrt{|eB_\perp|}$. Звідси випливає, що щілина $\Delta E_1 = 2(A + M) \sim \lambda\sqrt{|eB_\perp|}$, пов'язана з $\nu = \pm 1$ плато, має таку ж саму залежність від магнітного поля. Далі ми знаходимо, що експериментальне значення $\Delta E_1 \sim 100$ K для $B_\perp = 30$ T наведене в роботі [309] відповідає $\lambda \sim 0.02$.

Таким чином, ми показали, що параметри порядку пов'язані із сценаріями квантового холівського феромагнетизму і магнітного каталізу в графені з необхідністю співіснують. Цей результат має важливі наслідки для опису динаміки пов'язаною з квантовим ефектом Хола в графені. Розглянута нами модель якісно правильно описує спостережувані експериментально нові холівські плато в графені в сильних магнітних полях.

ВИСНОВКИ

В дисертації наведено теоретичний розгляд проблеми впливу зовнішніх полів, зокрема постійних магнітного і електричного полів, від'ємної кривизни простору, а також ненульової густини ферміонів на динамічне порушення симетрії в релятивістських квантових теоріях поля. Також в дисертації досліджено динамічне порушення симетрії в графені, який має лінійний релятивістські-подібний енергетичний спектр. Головні результати дисертаційної роботи полягають в наступному:

1. Встановлено, що постійне зовнішнє магнітне поле в просторах вищої розмірності у випадку максимального числа параметрів, які характеризують це поле, призводить до ефективної редукції розмірності простору-часу для динаміки ферміонів в інфрачервоній області $D+1 \to 1+1$ та $D+1 \to 0+1$ для просторів-часу парної і непарної розмірності відповідно, тим самим сприяючи динамічному порушенню кіральної симетрії і генерації маси. Натомість присутність постійного електричного поля паралельного магнітному протидіє динамічному порушенню кіральної симетрії.

2. Доведено, що низькоенергетична динаміка нейтральних станів в релятивістських квантових теорій поля в зовнішньому постійному магнітному полі описується ефективною некомутативною теорією. Важливо, що відповідні ефективні некомутативні теорії відрізняються від звичайних некомутативних квантовопольових теорій, що розглядаються в літературі. Зокрема, так звана проблема УФ/ІЧ змішування присутня в звичайних некомутативних квантовопольових теорій відсутня в ефективних некомутативних теоріях в зовнішньому полі. Причина цього полягає у тому,

що низькоенергетичні збудження в ефективних некомутативних моделях у зовнішніх магнітних полях є нейтральними складеними станами, вершини взаємодії яких характеризуються динамічними форм-факторами, які експоненційно швидко прямують до нуля при великих імпульсах, що, таким чином, вирішує проблему УФ/ІЧ змішування.

3. Проаналізовано кіральну динаміку калібрувальних теорій у сильному зовнішньому магнітному полі і для електрично нейтральних складених полів в цих теоріях в наближенні найнижчого рівня Ландау обчислено вершини взаємодії, які можуть бути представлені як вершини взаємодії в складних нелокальних некомутативних теоріях.

4. В наближенні найнижчого рівня Ландау розраховано ефективні вершини взаємодії фотонів в квантовій електродинаміці у сильному магнітному полі з урахуванням всіх степенів похідних в ефективній низькоенергетичній дії для фотонів. Ці ефективні вершини взаємодії відповідають вершинам взаємодії некомутативної квантової електродинаміки.

5. Досліджено динамічне порушення кіральної симетрії в моделі Намбу-Йона-Лазініо в просторі-часі $R \times H^2$, де H^2 - двовимірний простір постійної від'ємної кривизни (площина Лобачевського) і встановлено, що критична константа зв'язку дорівнює нулю. Аномальне напівціле квантування холівської провідності має місце для ферміонів на площині Лобачевського, а від'ємна кривизна цього простору зміщує холівські плато до більш високих значень магнітного поля і зменшує їх ширину порівняно з випадком плоского простору.

6. Доведено, що фізична причина нульового значення критичної константи зв'язку для динамічного порушення симетрії в просторах постійної від'ємної кривизни H^D полягає в ефективній редукції розмірності простору-часу $D+1 \to 1+1$ для динаміки ферміонів в інфрачервоній області, яка є наслідком того факта, що асимптотика ядра теплопровідності оператора

Дірака в просторах H^D при великих значеннях власного часу відповідає поведінці ефективної (1+1)-вимірної теорії. З точки зору класичної теорії ця ефективна редукція розмірності простору пов'язана з обмеженим характером класичного руху частинок в цих просторах.

7. Встановлено, що закон відщеплення масивних полів в секторі з вищими похідними ефективної низькоенергетичної гравітаційної дії співпадає з законом відщеплення масивних полів Апелквіста-Каразоне у плоскому просторі. Для космологічної сталої і ньютонівської константи зв'язку ренормгрупові β-функції є нульовими в пертурбативному режимі і тому закон відщеплення квантових ефектів масивних полів в цьому секторі залишається відкритим питанням.

8. З'ясовано, що хромомагнітна нестабільність кольорового надпровідного стану для кваркової матерії з двома ароматами кварків пов'язана з тахіонним спектром плазмонів. Хромомагнітна нестабільність в каналі 4-7-го глюонів в 2SC фазі має стандартний хігсівськй характер і характеризується неправильним знаком квадрата маси. Нестабільність в каналі 8-го глюона в безщілинній g2SC фазі має інший характер і пов'язана з від'ємним знаком квадрата швидкості v^2 безщілинного тахіонного плазмона.

9. В якості основного стану кольорової надпровідності кварковій матерії з двома ароматами кварків при великій густині баріонного заряду запропоновано глюонну фазу з векторними конденсатами глюонних полів. Наявність таких конденсатів вирішує проблему хромомагнітної нестабільності 2SC фази кольорової надпровідності і призводить до повного порушення кольорової і електромагнітної калібрувальних симетрії та симетрії відносно просторових обертів. Глюонна фаза описує анізотропне середовище в якому кольорова і електромагнітна надпровідності співіснують.

10. Встановлено, що надпровідний стан Ларкіна-Овчінікова-Фульде-Ферела кваркової матерії з двома ароматами кварків і однохвильовою неоднорідністю надпровідної щілини з урахуванням умов кольорової і електричної нейтральності має хромомагнітну нестабільність в усій області, де цей стан співіснує з 2SC і g2SC станами кольорової надпровідності.

11. Доведено, що параметри порядку пов'язані з феромагнітними і екситоноподібними конденсатами з необхідністю співіснують в графені у зовнішньому магнітному полі, що призводить до зняття виродження рівнів Ландау. Розв'язки рівняння для щілини в спектрі квазічастинок коректно пояснюють спостережувані холівські плато у сильному магнітному полі в квантовому ефекті Хола в графені.

ПОДЯКИ

Я хотів би щиро подякувати

- Моїм Вчителям Валерію Павловичу Гусиніну і Володимиру Адольфовичу Міранському за те, що починаючи з 1987 року вчили мене теоретичній фізиці, її методам і завдянням, показуючи на своєму прикладі як працювати в науці, як знаходити цікаві задачі і як їх розв'язувати. Я також дуже вдячний моїм Вчителям за плідну співпрацю на протязі багатьох років, за їх постійну підтримку, в тому числі і поза межами нашої спільної наукової діяльності.

- Вадиму Михайловичу Локтєву і Петру Івановичу Фоміну за підтримку, увагу, корисні поради і співпрацю.

- Адріано Натале (Adriano Natale) і Іллі Шапіро за чудовий час нашої співпраці в Бразилії.

- Моїм гарним товаришам і друзям Олександру Бучелу, Станіславу Вільчинському, Володимиру Кушніру, Стефану Машкевічу, Сергію Шарапову, Ігорю Шовковому і Юрі Штанову.

- Моїм колегам і співробітникам з відділів Астрофізики і елементарних частинок та Нелінійної фізики конденсованого стану за доброзичливу атмосферу і підтримку.

ДОДАТОК А. Ефективна редукція розмірності в гіперболічних просторах

В параграфі 3.2.2 Розділу 3 аналізуючи ядро теплопровідності для оператора Дірака в просторах $R \times H^D$ ми з'ясували, що має місце ефективна редукція розмірності простору для динаміки ферміонів в інфрачервоній області, однак на відміну від випадків магнітного каталізу і теорії надпровідності залишалось незрозумілим з чисто фізичної і інтуїтивної точок зору чому така редукція відбувається і з чим вона пов'язана, тому що ядро теплопровідності є тільки інтегральною характеристикою. Це питання ми розглянемо у цьому Додатку.

Причини ефективної редукції розмірності простору для динаміки ферміонів в H^D були досліджені в роботі [88] використовуючи загальне теоретичне положення [314] згідно якому ефективна редукція розмірності простору в інфрачервоній області має місце в квантовій проблемі тільки тоді коли рух у відповідній класичній проблемі має обмежений характер в координатах відносно яких відбувається ефективна редукція розмірності. Як приклад, розглянемо випадок ефективної редукції розмірності простору в зовнішньому постійному магнітному полі. Добре відомо, що класична заряджена частинка рухається в магнітному полі по колу в площині перпендикулярній до поля. Радіус орбіти є пропорційним енергії і тому частинка може досягти нескінченності тільки у випадку коли вона має нескінченну енергію. Таким чином, заряджена частинка (яка має скінченну енергію) завжди рухається в обмеженій області площини перпендикулярної до магнітного поля. Цей факт повністю узгоджується з тим, що у відповідній квантовій задачі має місце ефективна редукція розмірності простору в інфрачервоній області на 2 одиниці. Таким чином, зрозуміло, що для того, щоб з'ясувати причину ефективної редукції розмірності в H^D необхідно розглянути класичний рух частинок в цих просторах.

Метрика гіперболічного простора H^D в координатах Пуанкаре визначена наступним чином

$$dl^2 = \frac{a^2}{x_1^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_D^2), \tag{A.1}$$

де $x_1 > 0$ і a - радіус кривизни. Рівняння руху мають вигляд

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\dot{x_1}^2 - \dot{x}_2^2 - \dot{x}_3^2 - ... - \dot{x}_D^2}{x_1},$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\dot{x}_2}{x_1^2}) = ... = \frac{d}{dt}(\frac{\dot{x}_D}{x_1^2}) = 0\,. \tag{A.2}$$

Інтегруючи ці рівняння знаходимо класичні траекторії руху (геодезичні) в просторі H^D

$$z(t) = \ln(x_1(t)) = \ln\frac{u}{C\cosh(ut+b)},$$

$$x_2(t) = \frac{uC_2}{C^2}\tanh(ut+b) + \tilde{C}_2,$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$x_D(t) = \frac{uC_D}{C^2}\tanh(ut+b) + \tilde{C}_D, \tag{A.3}$$

де $C = \sqrt{C_2^2 + C_3^2 + ... + C_D^2}$ а константи $u, b, C_2, \tilde{C}_2, ..., C_D, \tilde{C}_D$ є довільними (для кожної конкретної траєкторії вони фіксуються початковими умовами). Зауважимо, що для опису руху координата z виглядає більш природньою з точки зору метрики (A.1) ніж координата x_1, тому що для координати z відповідний внесок в інтервал має звичний евклідовий вигляд dz^2, а також координата z приймає значення на всій дійсній вісі на відміну від координати x_1, яка приймає значення тільки на півпрямій. З отриманих рівнянь (A.3) випливає, що класичний рух відносно координати z має звичайний евклідовий вигляд за виключенням часового інтервала порядка $1/u$. Дійсно, згідно (A.3), класична частинка рухається як $z(t) = ut + z_1$ для $t \ll -\frac{1}{u}$. Для $|t| \leq \frac{1}{u}$, її рух відрізняється від звичайного інерціального руху в евклідовому просторі. Для $t \gg \frac{1}{u}$, частинка знов рухається як $z(t) = -ut + z_2$, тобто вона змінює напрямок руху і прямує на $-\infty$, звідки вона почала свій рух.

З іншого боку, згідно (A.3), рух відносно координат $x_2, ..., x_D$ має абсолютно інший характер. Частинка практично нерухома майже весь час за виключенням часового інтервала порядка $1/u$ коли вона рухається на деяку відстань. Це означає, що рух частинки відносно цих координат має обмежений характер. Однак, як добре відомо, координати у викривленому просторі можуть бути вибрані довільним чином. Використовуючи векторні поля Кілінга ми покажемо нижче, що незважаючи на довільність вибору координат, обмеженність класичного руху в гіперболічних просторах має інваріантний характер.

Гіперболічний простір H^D має $D-1$ "трансляційних" векторних полів Кілінга ξ_i $(i = \overline{2, D})$, які в координатах Пуанкаре мають вигляд

$$\xi_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\,, \quad i = 2, \ldots, D\,. \qquad (A.4)$$

Використовуючи нормовані векторні поля

$$n_i = \frac{\xi_i}{(-\xi_i \cdot \xi_i)^{1/2}}\,, \qquad (A.5)$$

де точка посередині означає скалярний добуток відносно метрики (A.1), в роботі [88] був обчислений наступний репараметрично-інваріантний інтеграл вздовж геодезичної

$$l_i^{(geo)} = \int |\,(u_t \cdot n_i)\,| dt = a \int \sqrt{\frac{\dot{x_i}^2}{x_1^2}} dt = \frac{\pi a |C_i|}{C}\,, \qquad (A.7)$$

де u_t - вектор дотичний до геодезичної. В силу того, що $|C_i| < C$, величини $l_i^{(geo)}$ завжди менші від $L = \pi a$. Це означає, що простір $l_2^{(geo)} \times ... \times l_D^{(geo)}$ пов'язаний з геодезичним рухом відносно координат $x_2, ..., x_D$ є $(D-1)$-вимірним кубом L^{D-1}. Завдяки тому, що $l_i^{(geo)}$ інваріантні відносно заміни координат, вищезгаданий результат означає, що геодезичний рух в гіперболічних просторах має обмежений характер відносно $D-1$ координат. Підкреслимо також, що цей результат не означає, що геодезичний рух відбувається в деякій обмеженій області відносно координат $x_2, ..., x_D$. Як випливає із рівнянь (A.3), будь-які дві точки з різними x_i можуть бути зв'язані геодезичною, тому що величина $|C_i|/C^2$ може приймати як завгодно велике значення на відміну від $|C_i|/C$, яка міститься в (A.7) і яка обмежена одиницею.

Стосовно руху відносно координати x_1 корисно розглянути інтеграл $l_1^{(geo)} = a\int\sqrt{\frac{\dot{x_1}^2}{x_1^2}}dt$, який, очевидно, є аналогом (A.7) для випадку руху відносно x_1 координати. Використовуючи перше рівняння в (A.3) легко бачити, що цей інтеграл на відміну від (A.7) є нескінченним для геодезичних. Для $\zeta_1 = \partial_{x_1}$ цей інтеграл може бути представлений наступним чином

$$l_1^{(geo)} = \int |\,(u_t \cdot n_1)\,|dt\,, \qquad (A.8)$$

де $n_1 = \zeta_1/(-\zeta_1 \cdot \zeta_1)^{1/2}$ - нормоване векторне поле ортогональне векторним полям n_i $(i = \overline{2, D})$. Хоча ζ_1 є подібним до векторних полів ξ_i, визначених в (A.4), ζ_1 не є векторним полем Кілінга в гіперболічних просторах. Відзначимо, що векторні поля ζ_1 і ξ_i формують комутуючу алгебру векторних полів еквівалентну алгебрі "трансляційних" векторних полів Кілінга D-вимірного евклідового простору. Таким чином, обмежений характер руху в гіперболічних просторах можливо найбільш виразно характеризується областями значень $l_1^{(geo)}$ і $l_i^{(geo)}$.

В роботі [88] було розв'язано також рівняння Дірака в H^D і показано, що дійсно має місце ефективна редукція розмірності простору-часу $D+1 \to 1+1$ в квантовій проблемі. Рівняння Дірака в H^D має вигляд

$$\left(i\gamma^0\partial_t + \frac{ix_1}{a}\gamma^1\partial_1 + ... + \frac{ix_1}{a}\gamma^D\partial_D - \frac{i(D-1)}{2a}\gamma^1 - m\right)\psi = 0. \qquad (A.9)$$

Стандартним чином квадруючи це рівняння і шукаючи його розв'язки у вигляді $\psi = e^{-iEt+ip_2x_2+...+ip_Dx_D}f(x_1)$, ми отримуємо рівняння

$$(E^2+\frac{(D-1)^2}{4a^2}-\frac{D-2}{a^2}x_1\partial_1+\frac{x_1^2\partial_1^2}{a^2}-\frac{x_1^2}{a^2}(p_2^2+...+p_D^2)+A-m^2)f(x) = 0, \quad (A.10)$$

де

$$A = -i\frac{x_1}{a^2}\gamma^1\gamma^2 p_2 - i\frac{x_1}{a^2}\gamma^1\gamma^3 p_3 - ... - i\frac{x_1}{a^2}\gamma^1\gamma^D p_D.$$

Оператор A ермітовий, а його квадрат

$$A^2 = \frac{x_1^2}{a^4}(p_2^2 + ... + p_D^2)$$

пропорційний одиничний матриці. Тому він може бути діагоналізован і його власні значення дорівнюють

$$\sigma\frac{x_1}{a^2}\sqrt{p_2^2 + ... + p_D^2}, \qquad (A.11)$$

де $\sigma = \pm$. Виконуючи заміну $x = x_1\sqrt{p_2^2 + ... + p_D^2}$, ми маємо наступне рівняння

$$\left(E^2 + \frac{x^2}{a^2}(-1 + \partial_x^2) + \frac{(D-1)^2}{4a^2} - \frac{(D-2)x}{a^2}\partial_x + \frac{\sigma x}{a^2} - m^2\right) f(x) = 0. \qquad (A.12)$$

Це рівняння не залежить від $p_2, ..., p_D$ і, як наслідок, енергія є однаковою для будь-яких $p_2, ..., p_D$. Очевидно, рівняння (A.12) має вигляд рівняння $(1+1)$-вимірної проблеми і не важко знайти відповідний спектр $E = \pm\sqrt{\nu^2/a^2 + m^2}$, де ν приймає значення на півпрямій $(0, +\infty)$. Ефективна $(1+1)$-вимірна форма рівняння (A.12) свідчить про ефективну редукцію розмірності простору для ферміонів в гіперболічних просторах. З математичної точки зору ця редукція пов‘язана із сферичною і масштабною симетріями метрики (A.1). Дійсно, сферична симетрія $x_2, ..., x_D$ частини метрики (A.1) зводить залежність енергії від $p_2, ..., p_D$ тільки до залежності від інваріанта $p^2 = p_2^2 + ... + p_D^2$, а потім масштабна симетрія $x_k \to \lambda x_k\, (k = \overline{1, D})$ (нагадаємо заміну змінної $x = x_1\sqrt{p_2^2 + ... + p_D^2}$, яку ми зробили перед рівнянням (A.12) виключає будь-яку залежність від $p_2, ..., p_D$ в рівнянні (A.12) для власних функцій.

ДОДАТОК Б. Масивне скалярне поле і теорема Апелквіста – Каразоне у викривленому просторі

У цьому додатку ми дослідимо відщеплення масивного скалярного поля при низьких енергіях у викривленому просторі і покажемо, що відповідний закон відщеплення узгоджується з теоремою Апелквіста-Каразоне [230] у плоскому просторі. Ми будемо розглядати найпростіший випадок масивного скалярного поля чия дія має вигляд

$$S_s \,=\, \frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,\left\{g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - m^2\phi^2 - \xi R\phi^2\right\}\,, \qquad (\text{Б}.1)$$

де R - скаляр кривизни, $g = det\, g_{\mu\nu}$ - детермінант метрики, ξ - константа немінімальної взаємодії. Квантові флуктуації скалярного поля призводять до наступного внеску в ефективну гравітаційну дію

$$\bar{\Gamma}^{(1)} \,=\, -\frac{1}{2}\,\mathrm{Trln}\Big(-\nabla^2\hat{1}+m^2-\hat{P}+\frac{1}{6}\,R\hat{1}\Big) \,=\, -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\,\mathrm{tr}\,K(s)\,, \qquad (\text{Б}.2)$$

де $\hat{P} = -(\xi - 1/6)R$ і

$$\mathrm{tr}\,K(s) \,=\, \frac{(\mu^2)^{2-w}}{(4\pi s)^w}\int d^4x\,g^{1/2}\,e^{-sm^2}\,\mathrm{tr}\,\Big\{\hat{1} \,+\, s\hat{P} \,+\, s^2\Big[R_{\mu\nu}f_1(-s\nabla^2)R^{\mu\nu} +$$

$$+Rf_2(-s\nabla^2)R + \hat{P}f_3(-s\nabla^2)R + \hat{P}f_4(-s\nabla^2)\hat{P}\Big]\Big\} \,+\, \mathcal{O}(\mathcal{R}^3)\,, \qquad (\text{Б}.3)$$

а функції f_1, f_2, f_3 і f_4 дорівнюють

$$f_1(\tau) = \frac{f(\tau)-1+\tau/6}{\tau^2}\,, \qquad f_2(\tau) = \frac{f(\tau)}{288} + \frac{f(\tau)-1}{24\tau} - \frac{f(\tau)-1+\tau/6}{8\tau^2}\,,$$

$$f_3(\tau) = \frac{f(\tau)}{12} + \frac{f(\tau)-1}{2\tau}\,, \qquad f_4(\tau) = \frac{f(\tau)}{2}$$

і

$$f(\tau) = \int_0^1 d\alpha\,e^{\alpha(1-\alpha)\tau}\,, \qquad \tau = -s\nabla^2\,.$$

Інтеграл по власному часі s є розбіжним. Ми використаємо розмірну регуляризацію. Далі зробимо заміну

$$u = \frac{\tau}{t} = -\frac{\nabla^2}{m^2}$$

і після нескладних обчислень знаходимо

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{1}{2(4\pi)^2}\int d^4x g^{1/2}\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{w-2}\int_0^\infty dt\, e^{-t}\left\{\frac{m^4}{t^{w+1}}\right.$$

$$\left.+\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\frac{Rm^2}{t^w}+\sum_{i=1}^{3} l_i^*\cdot R_{\mu\nu}M_iR^{\mu\nu}+\sum_{j=1}^{5} l_j\cdot RM_jR\right\}, \qquad (\text{Б}.4)$$

де

$$l_1^* = 1\,, \qquad l_2^* = \frac{1}{6}\,, \qquad l_3^* = -1\,;$$

$$l_1 = \frac{1}{288}-\frac{1}{12}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)^2, \qquad l_2 = \frac{1}{24}-\frac{1}{2}\left(\xi-\frac{1}{6}\right),$$

$$l_3 = -\frac{1}{8}\,, \qquad l_4 = -\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\left(\xi-\frac{1}{6}\right), \qquad l_5 = \frac{1}{8}$$

і

$$M_1 = \frac{f(tu)}{u^2t^{w+1}}\,, \quad M_2 = \frac{f(tu)}{ut^w}\,, \quad M_3 = \frac{f(tu)}{ut^{w+1}}$$

$$M_4 = \frac{1}{ut^w}\,, \;\; M_5 = \frac{1}{u^2t^{w+1}}\,. \qquad (\text{Б}.5)$$

Обчислюючи інтеграли в (Б.4) використовуючи співвідношення

$$\Gamma(2-\omega) = \frac{1}{2-\omega} + \mathcal{O}(2-\omega)\,,$$

$$\Gamma(1-\omega) = -\frac{1}{2-\omega} - 1 + \mathcal{O}(2-\omega)\,,$$

$$\Gamma(-\omega) = \frac{1}{2(2-\omega)} + \frac{3}{4} + \mathcal{O}(2-\omega)\,, \qquad (\text{Б}.6)$$

позначення

$$A = -\frac{1}{2}\int_0^1 d\alpha \ln\Big[1+\alpha(1-\alpha)u\Big] = 1-\frac{1}{a}\ln\frac{1+a/2}{1-a/2}\,, \quad a^2 = \frac{4\nabla^2}{\nabla^2-4m^2} \qquad (\text{Б}.7)$$

і розклад

$$\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{w-2} = 1 + (2-w)\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + \ldots,$$

ефективна дія приймає вигляд

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{1}{2(4\pi)^2}\int d^4x\, g^{1/2}\left\{\frac{m^4}{2}\cdot\left[\frac{1}{2-w}+\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)+\frac{3}{2}\right]+\right.$$

$$+\left(\xi-\frac{1}{6}\right)m^2R\left[\frac{1}{2-w}+\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)+1\right]+$$

$$+\frac{1}{2}C_{\mu\nu\alpha\beta}\left[\frac{1}{60\,(2-w)}\;+\;\frac{1}{60}\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)+k_W(a)\right]C^{\mu\nu\alpha\beta}+$$

$$+R\left[\frac{1}{2}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{2-w}+\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)\right)+k_R(a)\right]R\Bigg\}\,, \tag{Б.8}$$

де

$$k_W(a)\;=\;\frac{8A}{15\,a^4}\;+\;\frac{2}{45\,a^2}\;+\;\frac{1}{150}\,,$$

$$k_R(a)\;=\;A\left(\xi-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{A}{6}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)+\frac{2A}{3a^2}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)+\frac{A}{9a^4}-\frac{A}{18a^2}+\frac{A}{144}$$

$$+\frac{1}{108\,a^2}-\frac{7}{2160}+\frac{1}{18}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)^2. \tag{Б.9}$$

Маючи ефективну дію ми можемо тепер зробити висновки стосовно ренорм-групових β-функцій і закону відщеплення масивних скалярних полів у викривленому просторі.

В $\overline{\mathrm{MS}}$ схемі β-функція деякого ефективного заряду C визначається наступним чином

$$\beta_C(\overline{\mathrm{MS}})\;=\;\mu\,\frac{dC}{d\mu}\,. \tag{Б.10}$$

Обчислюючи в цій схемі β-функції для параметрів Λ/G, $1/G$, $a_{1,2}$ використовуючи ефективну дію (Б.8) ми знаходимо наступні добре відомі в літературі β-функції $\overline{\mathrm{MS}}$ схеми (дивись, наприклад [231]) для космологічної сталої, ньютонівської константи зв‘язку та констант зв‘язку при доданках $C^2=C_{\mu\nu\alpha\beta}C^{\mu\nu\alpha\beta}$ і R^2 в ефективній гравітаційній дії

$$\beta_\Lambda(\overline{MS})\;=\;\frac{m^4}{2(4\pi)^2},\qquad\qquad \beta_R(\overline{MS})\;=\;\frac{m^2}{(4\pi)^2}\left(\xi-\frac{1}{6}\right),$$

$$\beta_{C^2}(\overline{MS})\;=\;-\,\frac{1}{120\,(4\pi)^2}\,,\qquad\qquad \beta_{R^2}(\overline{MS})\;=\;-\,\frac{1}{2\,(4\pi)^2}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)^2. \tag{Б.11}$$

Розглянемо тепер обчислення β-функцій в схемі, яка залежить від маси. Спочатку від регуляризованої величини віднімемо її значення в точці

$-\Box \to p^2 = M^2$, де M є точка перенормування. Далі β-функція визначається (порівняй з рівнянням (Б.10) як

$$\beta_C = M\,\frac{dC}{dM}\,. \tag{Б.12}$$

Математично така процедура еквівалентна обчисленню похідної $-pd/dp$ від регуляризованої величини. Таким чином для β-функції пов'язаної з $C^2_{\mu\nu\alpha\beta}$ членом ми маємо наступний результат

$$\beta_{C^2} \,=\, -\,\frac{1}{(4\pi)^2}\left(\,\frac{1}{18a^2}\,-\,\frac{1}{180}\,-\,\frac{a^2-4}{6a^4}\,A\right). \tag{Б.13}$$

В ультрафіолетовій границі $p^2 \gg m^2$ ми знаходимо β-функцію

$$\beta^{UV}_{C^2} \,=\, -\,\frac{1}{(4\pi)^2}\,\frac{1}{120} + \mathcal{O}\Big(\frac{m^2}{p^2}\Big)\,, \tag{Б.14}$$

яка узгоджується з β-фукцією в $\overline{\mathrm{MS}}$ схемі (Б.11). В інфрачервоній границі $p^2 \ll m^2$ β-функція дорівнює

$$\beta^{IR}_{C^2} \,=\, -\,\frac{1}{1680\,(4\pi)^2}\cdot\frac{p^2}{m^2}\,+\,\mathcal{O}\Big(\frac{p^4}{m^4}\Big)\,. \tag{Б.15}$$

Подібні розрахунки для β-функції пов'язаної з R^2 членом призводять до наступного результату

$$\begin{aligned}\beta_{R^2} \,=\,=\, -\,\frac{1}{(4\pi)^2}\Big\{\,\frac{1}{8}\,(\,4A\,-\,a^2A\,+\,a^2\,)\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)^2 - \\ -\,\frac{a^2-4}{48}\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)\,+\,\frac{(a^2-4)\,(a^2-12)A}{48\,a^2}\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big) + \\ +\,\frac{a^2-4}{8}\Big[\,\frac{A}{6a^2}-\frac{A}{144}-\frac{5\,A}{9a^4}+\frac{1}{144}-\frac{5}{108a^2}\Big]\Big\}\,.\end{aligned} \tag{Б.16}$$

В ультрафіолетовій границі $p^2 \gg m^2$ β-функція знов таки узгоджується з β-функцією в $\overline{\mathrm{MS}}$ схемі (Б.11)

$$\beta^{UV}_{R^2} \,=\, -\,\frac{1}{2(4\pi)^2}\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)^2 + \mathcal{O}\Big(\frac{m^2}{p^2}\Big)\,, \tag{Б.17}$$

в той час як в інфрачервоній області $p^2 \ll m^2$ ми маємо

$$\beta_{R^2}^{IR} \;=\; -\,\frac{1}{12\,(4\pi)^2}\,\Big[\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)^2-\frac{1}{15}\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)+\frac{1}{630}\Big]\cdot\frac{p^2}{m^2}\;+\;\mathcal{O}\Big(\frac{p^4}{m^4}\Big)\,. \tag{Б.18}$$

Із порівняння β-функцій в високоенергетичній області (Б.14), (Б.17) з β-функціями в низькоенергетичній області (Б.15), (Б.18) ясно видно явище відщеплення квантових ефектів масивних частинок. З іншого боку, якщо ми обчислимо похідні від імпульсів доданків ефективної гравітаційної дії, які відповідають космологічній сталій і R члену, ми отримаємо нульовий результат. Як відомо, β-функції описують залежність ефективних констант зв'язку від переданого імпульсу. В координатному просторі відповідна залежність пов'язана з похідними від полів в доданках ефективної дії, які описують відповідні ефективні заряди. Очевидно, що у випадку космологічної сталої похідним нема на що діяти, бо похідна від константи рівна нулю. У випадку айнштайн-гільбертового члена похідні можуть діяти на кривизну R, але результат такої дії є повна похідна, яка не впливає на рівняння руху. Тому природньо, що фізичні β-функції для космологічної сталої і ньютонівської константи зв'язку дорівнюють нулю.

ДОДАТОК В. Вільна енергія для параметрів порядку в графені

В цьому додатку ми використовуємо одиниці, в яких $\hbar = 1$ і $c = 1$. Для того, щоб обчислити вільну енергію ми застосуємо метод Корнуела–Джеківа–Томбуліса описаний в Розділі 1. В наближенні середнього поля, яке ми використовуємо, відповідна КДТ ефективна дія має вигляд

$$\Gamma(G) = -i\,\mathrm{Tr}\left[\mathrm{Ln}G^{-1} + S^{-1}G - 1\right]$$
$$+\frac{G_{int}}{2}\int d^3x \left\{\mathrm{tr}\left[\gamma^0 G(x,x)\gamma^0 G(x,x)\right] - \left(\mathrm{tr}\left[\gamma^0 G(x,x)\right]\right)^2\right\}, \qquad (B.1)$$

де слід, логаріфм і добудок $S^{-1}G$ розуміються в функціональному сенсі і $G = \mathrm{diag}(G_+, G_-)$. Густина вільної енергії Ω є $\Omega = -\Gamma/TV$, де TV - об'єм простору-часу. Умова екстремуму $\delta\Gamma(G)/\delta G = 0$ призводить до рівняння Швінгера–Дайсона. В точці екстремуму ефективна дія дорівнює

$$\Gamma = -i\,\mathrm{Tr}\left[\mathrm{Ln}G^{-1} + \frac{1}{2}\left(S^{-1}G - 1\right)\right]. \qquad (B.2)$$

Внаслідок симетрії відносно трансляцій по часу ми маємо

$$G_s(u,u') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega(t-t')} G_s(\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}'). \qquad (B.3)$$

Тоді ефективна дія Γ може бути переписана наступним чином

$$\Gamma = -i\,T\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\mathrm{Tr}\left[\ln G^{-1}(\omega) + \frac{1}{2}\left(S^{-1}(\omega)G(\omega) - 1\right)\right], \qquad (B.4)$$

де

$$G_s^{-1}(\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}') = -i\left[(\omega+\mu_s)\gamma^0 - v_F(\pi\cdot\gamma) + i\tilde{\mu}_s\gamma^1\gamma^2 + i\Delta_s\gamma^0\gamma^1\gamma^2 - \tilde{\Delta}_s\right]\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$
$$S_s^{-1}(\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}') = -i\left[(\omega+\bar{\mu}_s)\gamma^0 - v_F(\pi\cdot\gamma)\right]\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \qquad (B.5)$$

В рівнянні (B.4) функціональна операція Tr тепер включає в себе інтегрування тільки по просторовим координатам, а також слід по матричним індексам.

Інтегруючи по частинах логаріфм в (B.4) і нехтуючи несуттєвими поверхневими членами, які не залежать від фізичних параметрів, ми знаходимо

$$\Gamma = -iT \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \mathrm{Tr} \left[-\omega \frac{\partial G^{-1}(\omega)}{\partial \omega} G(\omega) + \frac{1}{2} \left(S^{-1}(\omega)\, G(\omega) - 1 \right) \right] \qquad (B.6)$$

де

$$\frac{\partial G^{-1}(\omega)}{\partial \omega} = -i\gamma^0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \qquad (B.7)$$

Підставляючи (B.7) в Γ, ми отримуємо

$$\Gamma = -iTV \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \mathrm{tr} \left[i\gamma^0 \omega \bar{G}(\omega; 0) + \frac{1}{2} \left(-i \left[(\omega + \bar{\mu})\gamma^0 - v_F(\pi \cdot \gamma) \right] \bar{G}(\omega; \mathbf{r})|_{r=0} \right) \right].$$

Далі для густини вільної енергії ми маємо

$$\Omega = i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \mathrm{tr} \left\{ i\omega\gamma^0 \bar{G}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{1}{2} \left(-i \left[(\omega + \bar{\mu})\gamma^0 - v_F(\mathbf{k} \cdot \gamma) \right] \bar{G}(\omega, \mathbf{k}) - 1 \right) \right\}$$

$$= - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{4\pi} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \mathrm{tr} \left\{ \left[(\omega - \bar{\mu})\gamma^0 + v_F(\mathbf{k} \cdot \gamma) \right] \bar{G}(\omega, \mathbf{k}) + i \right\}, \qquad (B.8)$$

де пропагатор $\bar{G}_s(\omega, \mathbf{k})$ визначається рівнянням (5.101). Для того, щоб знайти густину вільної енергії ми обчислюємо наступні два інтеграли

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \gamma^0 \bar{G}_s(\omega, \mathbf{k}) = \frac{i}{4\pi l^2} \sum_{n=0}^{\infty}$$

$$\frac{\left(\omega + \mu_s + i\tilde{\mu}_s \gamma^0\gamma^1\gamma^2 - i\Delta_s \gamma^1\gamma^2 + \tilde{\Delta}_s \gamma^0 \right) P_n}{(\omega + \mu_s + i\tilde{\mu}_s \gamma^0\gamma^1\gamma^2)^2 - (\tilde{\Delta}_s - i\Delta_s \gamma^0\gamma^1\gamma^2)^2 - 2v_F^2 |eB_\perp| n},$$

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} v_F(\mathbf{k} \cdot \gamma) \bar{G}_s(\omega, \mathbf{k}) = \frac{i}{\pi l^2} \sum_{n=0}^{\infty}$$

$$\frac{v_F^2 |eB_\perp| n\, \theta(n-1)}{(\omega + \mu_s + i\tilde{\mu}_s \gamma^0\gamma^1\gamma^2)^2 - (\tilde{\Delta}_s - i\Delta_s \gamma^0\gamma^1\gamma^2)^2 - 2v_F^2 |eB_\perp| n},$$

де

$$P_n = 1 - i\gamma^1\gamma^2 \mathrm{sign}(eB_\perp) + \left[1 + i\gamma^1\gamma^2 \mathrm{sign}(eB_\perp) \right] \theta(n-1)$$

і ми використали формулу 7.414.7 з [197], тобто

$$\int_0^{\infty} e^{-at} t^{\alpha} L_n^{\alpha}(t) dt = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)(a-1)^n}{n! a^{\alpha+n+1}}, \quad \mathrm{Re}\, \alpha > -1, \, \mathrm{Re}\, a > 0. \qquad (B.9)$$

Нехтуючи розбіжними доданками, які не залежать від фізичних параметрів, ми знаходимо з рівняння (B.8) наступну густину вільної енергії

$$\Omega = -\frac{i}{(4\pi l)^2} \sum_{s=\pm} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \mathrm{tr}_D \sum_{n=0}^{\infty}$$

$$\frac{(\omega - \bar{\mu}_s)\left[\omega + \mu_s + i\tilde{\mu}_s \gamma^0\gamma^1\gamma^2 - i\Delta_s \gamma^1\gamma^2 + \tilde{\Delta}_s \gamma^0\right] P_n + 4v_F^2 |eB_\perp| n\theta(n-1)}{(\omega + \mu_s + i\tilde{\mu}_s \gamma^0\gamma^1\gamma^2)^2 - (\tilde{\Delta}_s - i\Delta_s \gamma^0\gamma^1\gamma^2)^2 - 2v_F^2 |eB_\perp| n},$$

де tr_D відбувається по діраківських індексах.

Густина вільної енергії Ω є функцією від $\tilde{\Delta}_s$, $\tilde{\mu}_s$, μ_s, Δ_s, $\bar{\mu}_s$ і $B_\perp$. Нормуючи Ω віднімаючи її значення при $\tilde{\Delta}_s = \tilde{\mu}_s = \mu_s = \Delta_s = \bar{\mu}_s = 0$, ми маємо

$$\Omega = -\frac{i}{(4\pi l)^2} \sum_{s=\pm} \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \mathrm{tr}_D$$

$$\left[\frac{(\omega - \bar{\mu}_s)[\omega + \mu_s + i\tilde{\mu}_s \gamma^0\gamma^1\gamma^2 - i\Delta_s \gamma^1\gamma^2 + \tilde{\Delta}_s \gamma^0] P_n + 4v_F^2 |eB_\perp| n\theta(n-1)}{(\omega + i\epsilon \mathrm{sign}(\omega) + \mu_s + i\tilde{\mu}_s \gamma^0\gamma^1\gamma^2)^2 - (\tilde{\Delta}_s - i\Delta_s \gamma^0\gamma^1\gamma^2)^2 - 2v_F^2 |eB_\perp| n}\right.$$

$$\left. - \frac{\omega^2 P_n + 4v_F^2 |eB_\perp| n\theta(n-1)}{\left(\omega + i\epsilon \mathrm{sign}(\omega)\right)^2 - 2v_F^2 |eB_\perp| n}\right]. \qquad (B.10)$$

Легко перевірити, що для $\tilde{\mu}_s = \Delta_s = \mu_s = \bar{\mu}_s = B_\perp = 0$ і $\tilde{\Delta}_+ = \tilde{\Delta}_- = \tilde{\Delta}$ цей вираз дорівнює

$$\Omega(\tilde{\Delta}, 0, 0, 0, 0, 0) = -\frac{\tilde{\Delta}^4}{4\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\tilde{\Delta}^2 + x}\left(\sqrt{\tilde{\Delta}^2 + x} + \sqrt{x}\right)^2} = -\frac{\tilde{\Delta}^3}{6\pi} \qquad (B.11)$$

і співпадає з відповідним виразом для густини вакуумної енергії для (2+1)-мірного простору-часу в роботі [99].

Остаточно, інтегруючи по ω і обчислюючи слід, ми знаходимо густину вільної енергії

$$\Omega = -\frac{1}{8\pi l^2} \sum_{s=\pm} \left\{ \left[\mu_s + \bar{\mu}_s - \tilde{\mu}_s - (\tilde{\Delta}_s + \Delta_s) s_\perp)\right] \mathrm{sign}(\mu_s - \tilde{\mu}_s) \theta(|\mu_s - \tilde{\mu}_s| - |\tilde{\Delta}_s + \Delta_s|) \right.$$

$$+\left[\tilde{\Delta}_s+\Delta_s-(\mu_s+\bar{\mu}_s-\tilde{\mu}_s)s_\perp)\right]\ \mathrm{sign}(\tilde{\Delta}_s+\Delta_s)\theta(|\tilde{\Delta}_s+\Delta_s|-|\mu_s-\tilde{\mu}_s|)$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\big[(\mu_s+\bar{\mu}_s-\tilde{\mu}_s)\mathrm{sign}(\mu_s-\tilde{\mu}_s)-2\epsilon_B\sqrt{n}\big]\,\theta\left(|\mu_s-\tilde{\mu}_s|-E^{+}_{ns}\right)$$

$$+\frac{(\tilde{\Delta}_s+\Delta_s)^4\theta(E^{+}_{ns}-|\mu_s-\tilde{\mu}_s|)}{E^{+}_{ns}(E^{+}_{ns}+\epsilon_B\sqrt{n})^2}\Bigg]+[\tilde{\mu}_s\to-\tilde{\mu}_s,\,\Delta_s\to-\Delta_s,\,s_\perp)\to-s_\perp)]\Bigg\},\qquad (B.12)$$

де $E^{\pm}_{ns}=\sqrt{n\epsilon_B^2+(\tilde{\Delta}_s\pm\Delta_s)^2}$, $s_\perp=\mathrm{sign}(eB_\perp)$ і $\epsilon_B=\sqrt{2v_F^2|eB_\perp|}$.

ДОДАТОК Г. Кіральна асиметрія поверхні Фермі для релятивістської матерії в постійному магнітному полі

Згідно з Розділом 1, структура основного стану в релятивістських кірально інваріантних теоріях в магнітному полі визначається явищем магнітного каталізу динамічного порушення кіральної симетрії і динамічною генерацією маси. Ситуація змінюється і становиться більш складною в присутності ненульової густини ферміонів [315, 316, 317], яка протидіє динамічному порушенню кіральної симетрії [315].

У цьому додатку, який ґрунтується на роботі [82], ми покажемо, що в нормальній фазі релятивістської матерії у зовнішньому постійному магнітному полі існує динамічний внесок в аксіальний струм пов'язаний з відносним зсувом імпульсів для ферміонів з протилежними кіральностями. Цей зсув має місце для ферміонів всіх рівнів Ландау включаючи також рівні поблизу поверхні Фермі, що, таким чином, призводить до кіральної асиметрії поверхні Фермі. Цей результат має загальний характер і призводить до важливих наслідків для опису транспортних і емісійних властивостей матерії в нейтронних зірках і можливо білих карликах.

Проведене нами дослідження квантового ефекта Хола в графені в Розділі 5 показало можливість існування деяких нових типів параметрів порядку, які не розглядались раніше в релятивістських теоріях в (3+1)-вимірному просторі-часі. Тому в цьому додатку ми з'ясуємо можливість генерації відповідних параметрів порядку в релятивістських теоріях при ненульовій густині матерії в (3+1)-вимірному просторі-часі. Для цього ми розглянемо модель Намбу–Йона-Лазініо з затравочною ферміонною масою чий лагранжіан визначається рівнянням

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(iD_\nu + \mu_0\delta^0_\nu\right)\gamma^\nu\psi + m_0\,\bar{\psi}\psi + \frac{G_{\rm int}}{2}\left[\left(\bar{\psi}\psi\right)^2 + \left(\bar{\psi}i\gamma^5\psi\right)^2\right], \qquad (\text{Г}.1)$$

де $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, μ_0 - хімічний потенціал, m_0 - затравочна маса. Постійне магнітне поле B направлено вздовж вісі z і для A_μ ми використовуємо калібровку Ландау $A_\nu = xB\delta^2_\nu$.

В якості повного ферміонного пропагатора ми розглянемо (3+1)-вимірне узагальнення анзатца, який був використаний при дослідженні квантового ефекта Хола в графені [100], а саме

$$iG^{-1}(u,u') = \Big[(i\partial_t+\mu)\gamma^0-(\pi\cdot\gamma)-\pi^3\gamma^3+i\tilde{\mu}\gamma^1\gamma^2+\Delta\gamma^3\gamma^5-m\Big]\delta^4(u-u'), \quad (\text{Г.2})$$

де $\pi_k = i(\partial_k - ieA_k)$ - канонічний імпульс і $u = (t, \mathbf{r})$. Цей пропагатор містить декілька динамічних параметрів, які відсутні в затравочному пропагатору

$$iS^{-1}(u,u') = \left[(i\partial_t + \mu_0)\gamma^0 - (\pi\cdot\gamma) - \pi^3\gamma^3 - m_0\right]\delta^4(u-u'). \quad (\text{Г.3})$$

В оберненому пропагаторі (Г.2) параметр m є діраківською масою, μ - хімічний потенціал, а $\tilde{\mu}$ відповідає аномальному магнітному моменту (в графені він може бути інтерпретований також як хімічний потенціал пов'язаний із псевдоспіновим струмом, який зберігається [100]).

Параметр Δ в графені є масовим параметром, який є неперервним відносно перетворень парності і обернення часу. Як випливає з рівняння (Г.2), в (3+1)- вимірних теоріях цей параметр індукує аксіальний струм $\bar{\psi}\gamma^3\gamma^5\psi$ вздовж напрямку магнітного поля. Ми покажемо нижче, що Δ визначає зсув імпульсів ферміонів протилежних кіральностей і тому ми будемо називати цей параметр кіральним зсувом. Важливо відзначити, що симетрія відносно обертання часу і парності відсутні в зовнішньому магнітному полі і тому поява Δ не порушує ніякої симетрії.

Параметри m, μ, Δ і $\tilde{\mu}$ самоузгоджено визначаються з рівняння для щілини, яке в наближенні середнього поля має наступну форму

$$G^{-1}(u,u') = S^{-1}(u,u') - iG_{\rm int}\left\{G(u,u) - \gamma^5 G(u,u)\gamma^5 {\rm tr}[G(u,u)]\right.$$

$$\left.+\gamma^5\,{\rm tr}[\gamma^5 G(u,u)]\right\}\delta^4(u-u'). \quad (\text{Г.4})$$

В моделі, яка розглядається, в наближенні середнього поля ми покажемо, що $\tilde{\mu} = 0$ є самоузгодженним розв'язком рівнянь для динамічних параметрів.

Цей факт спрощує аналіз, однак, слід відзначити, що $\tilde{\mu}$ може бути відмінним від нуля в моделях з іншим типом взаємодії [100, 101]. З іншого боку, як показує аналіз в графені, присутність ненульового $\tilde{\mu}$ не повинно змінити головні якісні характеристики фази з індукованою Δ.

Спектр ферміонних квазічастинок визначається полюсами повного пропагатора, який знаходиться з (Г.2) при $\tilde{\mu} = 0$. Розкладаючи, як і в роботах [72, 101], пропагатор по рівнях Ландау ми знаходимо наступний закон дисперсії для квазічастинок

$$\omega_{n,\sigma} = -\mu \pm \sqrt{\left[\sqrt{m^2 + k_3^2} + \sigma\,\Delta\mathrm{sign}(eB)\right]^2 + 2n|eB|}, \qquad (\text{Г.5})$$

де n є індексом рівнів Ландау, $\sigma = \pm 1$, а k_3 - імпульс вздовж напрямку магнітного поля. В кіральній границі $m \to 0$ стани з квантовим числом $\sigma = \pm 1$ мають імпульс $k^3 \to k^3 \pm \Delta\,\mathrm{sign}(eB)$. Значення σ відповідають ферміонам з протилежними кіральностями і тому поверхні Фермі для лівих і правих ферміонів є зсунутими одна відносно одної.

В подальшому ми будемо розглядати випадок $m \ll \Delta$ коли формули спрощуються. До речі слід додати, що хоча маса m є малою, ми не можемо покласти її рівною нулю. Справа в тому, що при $m = 0$ модель (Г.1) має кіральну $U_L(1) \times U_R(1)$ симетрію. Тоді параметр Δ немає фізичного змісту, тому що, як легко показати, за допомогою кірального перетворення ми можемо позбавитись від Δ. Розв'язок для Δ знаходиться з рівняння Швінгера–Дайсона (Г.4) для пропагатора

$$\Delta = g\mu \frac{eB}{\Lambda^2\left[1 + 2ag\right] + g|eB|}, \qquad (\text{Г.6})$$

де a - безрозмірна константа порядку 1, яка визначається схемою регуляризації, що використовується в аналізі (дивись нижче). Відзначимо, що температурна залежність Δ зв'язана тільки з хімічним потенціалом, який слабо залежить від температури при $T \ll \mu$. При нульовій температурі $T = 0$

хімічний потенціал визначається наступним рівнянням

$$\mu = \mu_0 - \frac{g}{(\Lambda l)^2}\left[\mu - \Delta \mathrm{sign}(eB)\right] - \frac{2g\mathrm{sign}(\mu)}{(\Lambda l)^2}$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mu^2 - 2n|eB|}\,\theta\left(\mu^2 - 2n|eB|\right). \quad (\Gamma.7)$$

Наближенним розв'язком цього рівняння є $\mu \simeq \mu_0$ з точністю до степеневих поправок по g.

Властивості квазічастинок з $\sigma = \pm 1$ в (Г.5) в кіральній границі $m \to 0$ більш детально проявляються в структурі повного пропагатора

$$G(u,u) = G_0^- \mathcal{P}_- + \sum_{n=1}^{\infty}\left(G_n^- \mathcal{P}_- + G_n^+ \mathcal{P}_+\right), \quad (\Gamma.8)$$

де

$$\mathcal{P}_\pm \equiv \frac{1}{2}\left[1 \pm i\gamma^1\gamma^2 \mathrm{sign}(eB)\right]$$

є спіновими проекторами. Функції $G_n^\pm$ для $n \geq 0$ дорівнюють

$$G_n^\pm = \frac{i|eB|\gamma^0}{2\pi}\int \frac{d\omega dk^3}{(2\pi)^2} \times \left[\frac{\omega + \mu \pm [k^3 - \Delta]\,\mathrm{sign}(eB)]}{(\omega+\mu)^2 - 2n|eB| - [k^3 - \Delta\,\mathrm{sign}(eB)]^2}\mathcal{P}_5^-\right.$$

$$\left. + \frac{\omega + \mu \mp [k^3 + \Delta\,\mathrm{sign}(eB)]}{(\omega+\mu)^2 - 2n|eB| - [k^3 + \Delta\,\mathrm{sign}(eB)]^2}\mathcal{P}_5^+\right], \quad (\Gamma.9)$$

де

$$\mathcal{P}_5^\pm \equiv \frac{1}{2}\left[1 \pm \gamma^5 \mathrm{sign}(eB)\right]$$

при фіксованому знаку eB є кіральними проекторами. Як випливає з цього рівняння, квазічастинки протилежних кіральностей мають закони дисперсії, які відрізняються від відповідних законів дисперсії вільної теорії зсувом їх імпульсів $k^3 \to k^3 \pm \Delta\,\mathrm{sign}(eB)$. Цей результат має фундаментальні наслідки для фізичних властивостей матерії.

Стан з $\Delta \neq 0$ характеризується ненульовим вакуумним середнім аксіального струму

$$\langle j_5^3(u)\rangle = -\mathrm{tr}\left[\gamma^3\gamma^5 G(u,u)\right] = \frac{eB}{2\pi^2}\mu - \frac{|eB|}{2\pi^2}\Delta$$

$$-\frac{|eB|}{\pi^2}\Delta\sum_{n=1}^{\infty}\kappa(\sqrt{2n|eB|},\Lambda)\,, \tag{Г.10}$$

де $\kappa(x,\Lambda)$ є гладкою функцією, яка визначається параметром обрізання Λ і шириною області в якій значення функції зменшується від 1 до 0 (тобто функція $\kappa(x,\Lambda)\simeq 1$ для $x\ll\Lambda$ і $\kappa(x,\Lambda)\simeq 0$ для $x\gg\Lambda$). В результаті сума в (Г.10) дорівнює $\sum_{n=1}^{\infty}\kappa(\sqrt{2n|eB|},\Lambda)=a\Lambda^2/|eB|$, де $a=O(1)$.

В той час, як перші два доданки в (Г.10) пов'язані з найнижчим рівнем Ландау, останній доданок відповідає внеску вищих рівнів Ландау $n\geq 1$. Ми бачимо, що всі вищі рівні Ландау мають однаковий внесок в індукований аксіальний струм. Перший доданок в аксіальному струмі, пропорційний μ, має топологічну природу і, як показано в роботі [319], з'являється навіть у випадку вільної теорії. Всі інші члени, пропорційні Δ, з'являються за рахунок взаємодії і не були отримані в літературі раніше. Ми очікуємо, що поява таких членів може сильно модифікувати транспортні і емісійні властивості релятивістської матерії в зовнішньому магнітному полі. Дійсно, індукований аксіальний струм є наслідком відносного потіку квазічастинок протилежних кіральностей, включаючи стани поблизу поверхні Фермі. Присутність станів з кіральною асиметрією поблизу поверхні Фермі за рахунок Δ якісно відрізняє пов'язану з ними динаміку від динаміки станів на найнижчому рівні Ландау, яка призводить до топологічного внеску в аксіальний струм, тому що найнижчий рівень Ландау знаходиться здебільшо глибоко під поверхнею Фермі і тому практично не впливає на низькоенергетичні властивості релятивістської матерії.

Наостанок зробимо декілька зауважень відносно модельної залежності отриманих результатів. Той факт, що параметр кірального зсува Δ згідно рівняння (Г.6) є лінійним по константі зв'язку g свідчить про те, що динаміка, яка призводить до появи цього параметра є пертурбативною. Очевидно, що ця характеристика не залежить від того чи є взаємодія локальною, як в моделі НЙЛ, чи далекодіючою, як в КХД чи КЕД. В будь-якому випадку параметр

Δ незахищений ніякою симетрію. Вищезгадані результати були отримані в моделі з точною кіральною симетрією. Більшість цих результатів повинні бути справедливими також у випадку коли кіральна симетрія є наближенною і ферміони мають ненульові діраківські маси, які є значно меншими порівняно з хімічним потенціалом.

Зауважимо, що дуже важливим питанням, яке потребує в подальшому свого дослідження, є співвідношення динаміки відповідальної за генерацію параметра кірального зсуву з динамікою пов'язаною з кольоровою надпровідністю, яку ми розглядали у Розділі 4. Ми очікуємо, що параметр кірального зсуву буде суттєво впливати на фізичні властивості кваркової матерії, яка може існувати в центральних областях нейтронних зірок і буде важливим навіть для виродженного електронного газу в білих карликах. Також генерація ненульового Δ може вплинути на кіральний магнітний ефект у зіткненнях важких іонів [320].

Одним з наслідків явища дослідженного в цьому додатку є можливість якісно нового механізму генерації великих швидкостей пульсарів [321]. В присутності магнітного поля майже будь-який тип релятивістської матерії протонейтронної зірки повинен мати аксіальні струми як в рівнянні (Г.10). Основними носіями таких струмів є електрони в ядерній матерії та кварки разом із електронами в кварковій матерії. В силу того, що індуковані струми і параметр кірального зсуву мають тільки слабку температурну залежність (ми вважаємо, що $T \ll \mu$), ці струми створюють анізотропне середовище навіть на ранніх стадіях протонейтронної зірки. Цей результат є важливим, тому що досить гаряча матерія з 10 MeV $\lesssim T \lesssim$ 50 MeV, яка присутня в перші декілька десятків секунд еволюції протонейтронної зірки [322], має достатню кількість термальної енергії, щоб призвести до генерації найсильніших (з $v \gtrsim$ 1000 км/с) спостережуваних швидкостей пульсарів [321]. Однак, зазвичай, гаряча матерія дуже легко знищує анізотропію в розподілі нейтрино, яка продукується за рахунок майже будь-якого механізма [323]. В механізмі, який ґрунтується на динаміці дослідженній в цьому додатку асиметричний розподіл нейтрино виникає внаслідок їх багатократного розсіяння на лівих електронах та кварках і в силу кіральної асиметрії поверхні Фермі останніх в зовнішньому магнітному полі цей асиметричний розподіл фактично є термодинамічно стабільним рівноважним станом.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Weinberg, S.* Quantum field theory. Vol. 2 / S. Weinberg. – Cambridge University Press, New York, 1996. – P. 489.

[2] *Ициксон, К.* Квантовая теория поля. Т. 2 / К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер. – Мир, Москва, 1984. – С. 400.

[3] *Пескин, М. Е.* Введение в квантовую теорию поля / М. Е. Пескин, Д. В. Шрёдер. – Регулярная и хаотическая динамика, Ижевск, 2001. – С. 784.

[4] *Ребенко, О. Л.* Основи сучасної теорії взаємодії квантованих полів / О. Л. Ребенко. – Наукова думка, Київ, 2007. – С. 538.

[5] *Anderson, P. W.* Basic notions of condensed matter physics / P. W. Anderson. – The Benjamin/Cummings Publishing Company, Menlo Park, 1984. – P. 243.

[6] *Абрикосов, А. А.* Методы квантовой теори поля в статистической физике / А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский. – Физматгиз, Москва, 1962. – С. 444.

[7] *Altland, A.* Condensed matter field theory / A. Altland, B. Simons. – Cambridge University Press, Cambridge, 2006. – P. 624.

[8] *Mahan, G. D.* Many-particle physics / G. D. Mahan. – Plenum Press, New York, 1990. – P. 1032.

[9] *Fetter, A. L.* Quantum theory of many-particle systems / A. L. Fetter, J. D. Walecka. – Dover Publications, Mineola, 2003. – P. 601.

[10] *Englert, F.* Broken Symmetries and the Mass of Gauge Vector Mesons // F. Englert, R. Brout // *Phys. Rev. Lett.* – 1964. – Vol. 13, no.9. – Pp. 321–323.

[11] *Higgs, P. W.* Broken Symmetries, Massless Particles, and Gauge Fields / P. W. Higgs // *Phys. Lett.* – 1964. – Vol. 12, no. 2. – Pp. 132–133.

[12] *Higgs, P. W.* Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons / P. W. Higgs // *Phys. Rev. Lett.* – 1964. – Vol. 13, no.16. – Pp. 508–509.

[13] *Guralnik, G. S.* Global Conservation Laws and Massless Particles / G. S. Guralnik, C. R. Hagen, T. W. B. Kibble // *Phys. Rev. Lett.* – 1964. – Vol. 13, no.20. – Pp. 585–587.

[14] *Weinberg, S.* A Model of Leptons / S. Weinberg // Phys. Rev. Lett. – 1967. – Vol. 19, no. 21. – Pp. 1264–1266.

[15] *Salam, A.* Weak and Electromagnetic Interactions / A. Salam // Elementary Particle Physics / Ed. by N. Svartholm. – Stockholm, 1968. – Pp. 367-371.

[16] Symmetry of the Order Parameter in the high-T_c Superconductor $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ / J. R. Kirtley, C. C. Tsuei, J. Z. Sun et al. // *Nature.* – 1995. – Vol. 373. – Pp. 225–228.

[17] *Johannes, M.* The Iron Age of Superconductivity / M. Johannes // *Physics.* – 2008. – Vol. 1. – P. 28.

[18] *Weiss, P.* L'Hypothese du Champ Moleculaire et de la Propriete Ferromagnetique / P. Weiss // *J. de Phys.* – 1907. – Vol. 6. – Pp. 661–690.

[19] *Ландау, Л. Д.* К теории Фазовых Переходов. I / Л. Д. Ландау // ЖЭТФ. – 1937. – Т. 7. – Сс. 19–36.

[20] *Гинзбург, В. Л.* К Теории Сверхпроводимости / В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау // *ЖЭТФ.* – 1950. – Т. 20. – Сс. 1064–1090.

[21] *Абрикосов, А. А.* О Магнитных Свойствах Сверхпроводников Второй Группы / А. А. Абрикосов // *ЖЭТФ.* – 1957. – Т. 5. – Сс. 1174–1183.

[22] *Kibble, T. W. B.* Topology of Cosmic Domains and Strings / T. W. B. Kibble // J. Phys. A. – 1976. – Vol. 9. – Pp. 1387–1398.

[23] *Zurek, W. H.* Cosmological Experiments in Superfluid Helium? / W. H. Zurek // *Nature.* – 1985. – Vol. 317. – Pp. 505–507.

[24] *Bardeen, J.* Theory of Superconductivity / J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer // *Phys. Rev.* – 1957. – Vol. 108, no.5. – Pp. 1175-1204.

[25] *Горьков, Л. П.* Микроскопический Вывод Уравнений Гинзбурга–Ландау в Теории Сверхпроводимости / Л. П. Горьков // *ЖЭТФ.* – 1959. – Т. 36. – Сс. 1918–1923.

[26] *Schwinger, J. S.* On the Green's Functions of Quantized Fields / J. S. Schwinger // *Proc. Nat. Acad. Sc.* – 1951. – Vol. 37. – Pp. 452–464.

[27] *Dyson, F. J.* The S Matrix in Quantum Electrodynamics / F. J. Dyson // *Phys. Rev.* – 1949. – Vol. 75, no.11. – Pp. 1736–1755.

[28] *Nambu, Y.* Axial Vector Current Conservation in Weak Interactions / Y. Nambu // *Phys. Rev. Lett.* – 1960. – Vol. 4, no.7. – Pp. 380–382.

[29] *Nambu, Y.* Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with the Theory of Superconductivity. I. / Y. Nambu, G. Jona-Lasinio // *Phys. Rev.* – 1961. – Vol. 122, no.1. – Pp. 345–358.

[30] *Арбузов, Б. А.* О Фермионной Массе в γ^5-инвариантной Модели Квантовой Теории Поля / Б. А. Арбузов, А. П. Тавхелидзе, Р. Н. Фаустов // *ДАН СССР.* – 1961. – Т. 139, №2. – Сс. 345–347.

[31] *Вакс В. Г.* Применение Методов Теории Сверхпроводимости к Вопросу о Массах Элементарных Частиц / В. Г. Вакс, А. И. Ларкин // *ЖЭТФ.* – 1961. – Т. 40, № 1. – Сс. 282–285.

[32] *Мигдал, А. А.* Спонтанное Нарушение Симметрии Сильного Взаимодействия и Отсутствие Безмассовых Частиц / А. А. Мигдал, А. М. Поляков // *ЖЭТФ.* – 1966. – Т. 51, № 1. – Сс. 135–146.

[33] *Jackiw, R.* Dynamical Model of Spontaneously Broken Gauge Symmetries / R. Jackiw, K. Johnson // *Phys. Rev. D.* – 1973. – Vol. 8, no.8. – Pp. 2386–2397.

[34] *Cornwall J. M.* Spontaneous Symmetry Breaking Without Scalar Mesons / J. M. Cornwall, R. E. Norton // *Phys. Rev. D.* – 1973. – Vol. 8, no. 10. – Pp. 3338–3345.

[35] *Eichten, E.* Dynamical Symmetry Breaking of Non-Abelian Gauge Symmetry / E. Eichten, F. Feinberg // *Phys. Rev. D.* – 1974. – Vol. 10, no. 10. – Pp. 3254–3280.

[36] *Фомин, П. И.* Некоторые Вопросы Квантовой Электродинамики на Малых Расстояниях / П. И. Фомин // *ЭЧАЯ.* – 1976. – Т. 7, № 3. – Сс. 687–725.

[37] *Goldstone, J.* Field Theories with Superconductor Solutions / J. Goldstone // *Nuovo Cimento.* – 1961. – Vol. 19. – Pp. 154–164.

[38] *Goldstone J.* Broken Symmetries / J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg // *Phys. Rev.* – 1962. – Vol. 127, no.3. – Pp. 965–970.

[39] *Nielsen, H. B.* On How One Count Goldstone Bosons / H. B. Nielsen, S. Chandha // *Nucl. Phys. B.* – 1976. – Vol. 105. – Pp. 445–453.

[40] *Mermin, N. D.* Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models / N. D. Mermin, H. Wagner // *Phys. Rev. Lett.* – 1966. – Vol. 17, no.22. – Pp. 1133–1136.

[41] *Honenberg, P. C.* Existence of Long-Range Order in One and Two Dimensions // P. C. Hohenberg // *Phys. Rev.* – 1967. – Vol. 158, no.2. – Pp. 383–386.

[42] *Coleman, S.* There Are No Goldstone Bosons in Two Dimensions / S. Coleman // *Commun. Math. Phys.* – 1973. – Vol. 31. – Pp. 259–264.

[43] *Elitzur, S.* Impossibility of Spontaneously Breaking Local Symmetries / S. Elitzur // *Phys. Rev. D.* – 1975. – Vol. 12, no.12. – Pp. 3978–3982.

[44] *Wilson, K.* Confimenent of Quarks / K. Wilson // *Phys. Rev. D.* – 1974. – Vol. 10, no.8. – Pp. 2445–2459.

[45] *Polyakov, A. M.* Thermal Properties of Gauge Fields and Quark Liberation / A. M. Polyakov // *Phys. Lett. B.* – 1978. – Vol. 72. – Pp. 477–480.

[46] *Donagi, R.* Supersymmetric Yang–Mils Systems and Integrable Systems / R. Donagi, E. Witten // *Nucl. Phys. B.* – 1996. – Vol. 460. – Pp. 299–334.

[47] *Anderson, P. W.* Plasmons, Gauge Invariance and Mass / P. W. Anderson // Phys. Rev. – 1963. – Vol. 130, no.1. – Pp. 439–442.

[48] *Kadanoff, L. P.* Scaling Laws for Ising Models near T_c / L. P. Kadanoff // *Physics.* – 1966. – Vol. 2. – Pp. 263–275.

[49] *Wilson, K. G.* Renormalization Group and Critical Phenomena. I. Renormalization Group and the Kadanoff Scaling Picture / K. G. Wilson // Phys. Rev. B. – 1971. – Vol. 4, no.9. – Pp. 3174–3183.

[50] *Гриб, А. А.* Проблема неинвариантности вакуума в квантовой теории поля / А. А. Гриб. – Атомиздат, Москва. – 1978. – С. 128.

[51] *Miransky, V. A.* Dynamical symmetry breaking in quantum field theories / V.A. Miransky. – World Scientific, Singapore, 1993. – P. 517.

[52] *Stone, M. H.* Linear Transformations in Hilbert Space. III. Operational Methods and Group Theory / M. H. Stone // *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* – 1930. – Vol. 16. – Pp. 172–175.

[53] *von Neumann, J.* Die Eindeutigkeit der Schrodingerschen Operatoren / J. von Neumann // *Math. Ann.* – 1931. – Vol. 104. – Pp. 570–578.

[54] *Yang, C. N.* Statistical Theory of Equations of States and Phase Transitions. I. Theory of Condensation / C. N. Yang, T. D. Lee // *Phys. Rev.* – 1952. – Vol. 87, no.3. – Pp. 404–409.

[55] *Боголюбов, Н. Н.* Квазисредние в Задачах Статистической Механики / Н. Н. Боголюбов // *Препринт ОИЯИ Р-1451.* – 1961. – С. 34.

[56] *Cornwall, J. M.* Effective Action for Composite Operators / J. M. Cornwall, R. Jackiw, E. Tomboulis // *Phys. Rev. D.* – 1974. – Vol. 10, no.8. – Pp. 2428–2445.

[57] *Klinkhamer, F. R.* A Saddle-Point Solution in the Weinberg–Salam Theory / F. R. Klinkhamer, N. S. Manton // *Phys. Rev. D.* – 1984. – Vol. 30, no.10. – Pp. 2212–2220.

[58] *Сахаров, А. Д.* Нарушение CP-инвариантности, C-асиметрия и Барионная Асимметрия Вселенной / А. Д. Сахаров // *Письма в ЖЭТФ.* – 1967. – Т. 5, № 1. – Сс. 32–35.

[59] *Riotto, A.* Theories of Baryogenesis / A. Riotto // Preprint arXiv:hep-ph/9807454. – 1998.

[60] *Skalozuv, V.* Ring Diagrams and Electroweak Phase Transition in a Magnetic Field / V. Skalozub, M. Bordag // it Int. J. Mod. Phys. A. – 2000. – Vol. 15. – Pp. 349–362.

[61] *Гриб, А. А.* Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях / А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко. – Атомиздат, Москва, 1980. – С. 296.

[62] *Demchik, V. I.* Spontaneous Generation of Magnetic and Chromomagnetic Fields at High Temperature in the Standard Model / V. I. Demchik, V. V. Skalozub // *Eur. Phys. J. C.* – 2002. – Vol. 25. – Pp. 291–296.

[63] *Skalozub, V. V.* On Generation of Abelian Magnetic Fields in $SU(3)$ Gluodynamics at High Temperature / V. V. Skalozub, A. V. Strelchenko // *Eur. Phys. J. C.* – 2004. – Vol. 33. – Pp. 105–112.

[64] *Parker, L.* Quantized Fields and Particle Creation in Expanding Universes. I / L. Parker // *Phys. Rev.* – 1969. – Vol. 183, no.5. – Pp. 1057–1068.

[65] *Parker, L.* Quantized Fields and Particle Creation in Expanding Universes. II / L. Parker // *Phys. Rev. D.* – 1971. – Vol. 3, no.2. – Pp. 346–356.

[66] *Hawking, S. W.* Black Hole Explosions? / S. W. Hawking // *Nature.* – 1974. – Vol. 248. – Pp. 30–31.

[67] *Hawking, S. W.* Particle Creation by Black Holes / S. W. Hawking // *Commun. Math. Phys.* – 1975. – Vol. 43. – Pp.199–220.

[68] *Gusynin, V. P.* Catalysis of Dynamical Flavor Symmetry Breaking by a Magnetic Field in 2+1 Dimensions / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Phys. Rev. Lett.* – 1994. – Vol. 73, no.26. – Pp. 3499–3502.

[69] *Gusynin, V. P.* Dimensional Reduction and Dynamical Chiral Symmetry Breaking by a Magnetic Field in 3+1 Dimensions / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Phys. Lett. B.* – 1995. – Vol. 349, no.4. – Pp. 477–483.

[70] *Gusynin, V. P.* Dynamical Flavor Symmetry Breaking by a Magnetic Field in 2+1 Dimensions / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Phys. Rev. D.* – 1995. – Vol. 52, no.8. – Pp. 4718–4735.

[71] *Gusynin, V. P.* Dynamical Chiral Symmetry Breaking in QED / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Phys. Rev. D.* – 1995. – Vol. 52, no.8. – Pp. 4747–4751.

[72] *Gusynin V. P.* Dynamical Reduction and Catalysis of Dynamical Symmetry Breaking by a Magnetic Field / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Nucl. Phys. B.* – 1996. – Vol. 462. – Pp. 249–290.

[73] *Shankar, R.* Renormalization-Group Approach to Interacting Fermions / R. Shankar // *Rev. Mod. Phys.* – 1994. – Vol. 66. – Pp. 129–192.

[74] *Krive, I. V.* Dynamical Symmetry Breaking and Phase Transitions in a Three-Dimensional Gross–Neveu Model in a Strong Magnetic Field / I. V. Krive, S. A. Naftulin // *Phys. Rev. D.* – 1992. – Vol. 46, no.6. – Pp. 2737-2740.

[75] *Клименко, К. Г.* Трехмерная модель Гросса–Невье во внешнем магнитном поле. I / К. Г. Клименко // *Теор. Мат. Физика.* – 1992. – Т. 89, № 2. – Сс. 211-221.

[76] Gorbar, E. V. On the Effective Potential for Local Composite Operators / E. V. Gorbar // *Annals of Physics (NY).* – 1999. – Vol. 277. – Pp. 255–266.

[77] *Gorbar, E. V.* Relating the Quark and Gluon Condensates Through the QCD Vacuum Energy / E. V. Gorbar, A. A. Natale // *Phys. Rev. D.* – 2000. – Vol. 61, no.5. – P.054012.

[78] *Gorbar, E. V.* Dynamical Chiral Symmetry Breaking on a Brane in Reduced QED / E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky // *Phys. Rev. D.* – 2001. – Vol.64, no.10. – P.105028.

[79] *Gorbar, E. V.* Chiral Symmetry Breaking in a Constant Magnetic Field in Higher Dimension / E. V. Gorbar // *Phys. Lett. B.* – 2000. – Vol. 491, nos.3-4. – Pp. 305–310.

[80] *Babansky, A. Yu.* Dynamical Chiral Symmetry Breaking in External Constant Electromagnetic Field / A. Yu. Babansky, E. V. Gorbar, G. V. Shchepanyuk // *Phys. Lett. B.* – 1998. – Vol. 419, nos.1-4. – Pp. 272–278.

[81] *Gamayun, O. V.* Dynamical Symmetry Breaking on a Cylinder in Magnetic Field / O. V. Gamayun, E. V. Gorbar // *Phys. Lett. B.* – 2005. – Vol. 610, nos.1-2. – Pp. 74–79.

[82] *Gorbar, E. V.* Chiral Asymmetry of the Fermi Surface in Dense Relativistic Matter in a Magnetic Field / E. V. Gorbar, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Phys. Rev. C.* – 2009. – Vol.80, no.3. – P. 032901(R).

[83] *Gorbar, E. V.* Relativistic Field Theories in a Magnetic Background as Noncommutative Field Theories / E. V. Gorbar, V. A. Miransky // *Phys. Rev. D.* – 2004. – Vol. 70, no.10. – P. 105007.

[84] *Gorbar, E. V.* Chiral Dynamics in QED and QCD in a Magnetic Background and Nonlocal Noncommutative Field Theories / E. V. Gorbar, S. Homayouni, V. A. Miransky // *Phys. Rev. D.* – 2005. – Vol. 72, no. 6. – P. 065014.

[85] *Gorbar, E. V.* Nondecoupling Phenomena in QED in a Magnetic Field and Noncommutative QED / E. V. Gorbar, M. Hashimoto, V. A. Miransky // *Phys. Lett. B.* – 2005. – Vol. 611, nos.1-2. – Pp. 207–214.

[86] *Gorbar, E. V.* Gap Generation for Dirac Fermions on Lobachevsky Plane in a Magnetic Field / E. V. Gorbar, V. P. Gusynin // *Annals of Physics (NY).* – 2008. – Vol. 323, no.9. – Pp. 2132–2146.

[87] *Gorbar, E. V.* Dynamical Symmetry Breaking in Spaces with Constant Negative Curvature / E. V. Gorbar // *Phys. Rev. D.* – 1999. – Vol. 61, no. 2. – P. 024013.

[88] *Gorbar, E. V.* Effective Dimensional Reduction in Hyperbolic Spaces / E. V. Gorbar // *Ukrainian Journal of Physics.* – 2009. – Vol. 54, no. 6. – Pp. 541–546.

[89] *Gorbar, E. V.* Heat Kernel Expansion for Operators Containing a Root of the Laplace Operator / E. V. Gorbar // *J. Math. Phys.* – 1997. – Vol. 38, no.3. – Pp. 1692–1699.

[90] *Gorbar, E. V.* Renormalization Group and Decoupling in Curved Space / E. V. Gorbar // *Nucl. Phys. (Proc. Suppl).* – 2004. – Vol. 127. – Pp. 162–165.

[91] *Gorbar, E. V.* Renormalization Group and Decoupling in Curved Space: III. The Case of Spontaneous Symmetry Breaking / E. V. Gorbar, I. L. Shapiro // *J. High Energy Physics.* – 2004. – Vol. 0402. – P.060.

[92] Collective Excitations, Instabilities, and Ground State in Dense Quark Matter / E. V. Gorbar, M. Hashimoto, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Phys. Rev. D.* – 2006. – Vol. 73, no.11. – P. 111502.

[93] *Gorbar, E. V.* Gluonic Phase in Neutral Two-flavor Dense QCD / E. V. Gorbar, M. Hashimoto, V. A. Miransky // *Phys. Lett. B.* – 2006. – Vol. 632, nos.2-3. – Pp. 305–312.

[94] *Gorbar, E. V.* Gluonic Phases, Vector Condensates, and Exotic Hadrons in Dense QCD / E. V. Gorbar, M. Hashimoto, V. A. Miransky // *Phys. Rev. D.* – 2007. – Vol. 75, no.8. – P. 085012.

[95] *Gorbar, E. V.* Neutral Larkin–Ovchinnikov–Fulde–Ferrell State and Chromomagnetic Instability in Two-flavor Dense QCD / E. V. Gorbar, M. Hashimoto, V. A. Miransky // *Phys. Rev. Lett.* – 2006. – Vol. 96, no. 2. – P. 022005.

[96] *Gorbar, E. V.* Vortices in Gauge Models at Finite Density with Vector Condensates / E. V. Gorbar, J. Jia, V. A. Miransky // *Phys. Rev. D.* – 2006. – Vol. 73, no.4. – P. 045001.

[97] *Gorbar, E. V.* Color Superconductivity in An External Magnetic Field / E. V. Gorbar // *Phys. Rev. D.* – 2000. – Vol. 62, no.1. – P. 014007.

[98] Magnetic Field Driven Metal-Insulator Phase Transition in Planar Systems / E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Phys. Rev. B.* – 2002. – Vol. 66, no. 4. – P.045108.

[99] Fractal Structure of the Effective Action in (Quasi-)Planar Models with Long-Range Interactions / E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Phys. Lett. A.* – 2003. – Vol. 313, nos.5-6. – Pp. 472–477.

[100] *Gorbar, E. V.* Toward Theory of Quantum Hall Effect in Graphene / E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky // *ФНТ.* – 2008. – Vol. 34, no. 10. – Pp. 1007–1011.

[101] Dynamics in Quantum Hall Effect and Phase Diagram in Graphene / E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Phys. Rev. B.* – 2008. – Vol. 78, no. 8. – P. 085437.

[102] *Gorbar, E. V.* Dynamical Gaps and Quantum Hall Effect in Graphene / E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky // *Mod. Phys. Lett. B.* – 2009. – Vol. 23, no. 7. – Pp. 891–902.

[103] *'t Hooft, G.* Naturalness, Chiral Symmetry and Spontaneous Chiral Symmetry Breaking / G. 't Hooft // Recent Developmens in Gauge Theories / Ed. by G. 't Hooft.– Springer, Berlin, 1980. – Pp. 135–157.

[104] *Weinberg, S.* Implications of Dynamical Symmetry Breaking: An Addendum / S. Weinberg // *Phys. Rev. D.* – 1979. – Vol. 19, no.4 – Pp. 1277–1280.

[105] *Susskind, L.* Dynamics of Spontaneous Symmetry Breaking in the Weinberg–Salam Theory / L. Susskind // *Phys. Rev. D.* – 1979. – Vol. 20, no.10. – Pp. 2619–2625.

[106] *Hill, C. T.* Strong Dynamics and Electroweak Symmetry Breaking / C. T. Hill, E. H. Simmons // *Phys. Rept.* – 2003. – Vol. 381, nos.4–6. – Pp. 235–402.

[107] *Baer, H.* Weak Scale Supersymmetry: From Superfields to Scattering Events / H. Baer, X. Tata. – Cambridge University Press, Cambridge, 2006. – P. 556.

[108] *Leutwyler, H.* On the Foundations of Chiral Perturbation Theory / H. Leutwyler // *Annals of Physics (NY).* – 1994. – Vol. 235. – Pp. 165–203.

[109] *Baym, G.* Conservation Laws and Correlation Functions / G. Baym, L. P. Kadanoff // *Phys. Rev.* – 1961. – Vol. 124, no.2. – Pp. 287–299.

[110] *Hubbard, J.* Calculation of Partition Functions / J. Hubbard // *Phys. Rev. Lett.* – 1959. – Vol. 3, no.2. – Pp. 77–78.

[111] *Stratonovich, R. L.* On a Method of Calculating Quantum Distribution Functions / R. L. Stratonovich // *Sov. Phys. - Dokl.* – 1958. – Vol. 2. – Pp. 416-423.

[112] *Gross, D.J.* Dynamical Symmetry Breaking in Asymptotically Free Field Theories / D. J. Gross, A. Neveu // *Phys. Rev. D.* – 1974. – Vol. 10, no.10. – Pp. 3235–3253.

[113] *Криве, И. В.* О Характере Проводимости Квазиодномерных Систем в Пайерлсовской Фазе с Удвоением Периода / И. В. Криве, А. С. Рожавский // *Письма в ЖЭТФ.* – 1980. – Т. 31, № 11. – Сс. 647–651.

[114] *Jackiw, R.* Solitons with Fermion Number $\frac{1}{2}$ in Condensed Matter and Relativistic Field Theories / R. Jackiw, J. R. Schrieffer // *Nucl. Phys. B.* – 1981. – Vol. 190, no.2. – Pp. 253-265.

[115] *Krive, I. V.* On the Instability of the One-Dimensional Peierls Insulator in Uniform Electric Field / I. V. Krive, A. S. Rozhavsky // *Solid State Communications.* – 1981.– Vol. 39, no.3. – Pp. 427–431.

[116] *Lee, T. D.* Many-Body Problem in Quantum Statistical Mechanics. IV. Formulation in Terms of Average Occupation Number in Momentum Space / T. D. Lee, C. N. Yang // *Phys. Rev.* – 1960. – Vol. 117, no.1. – Pp. 22–36.

[117] *Luttinger, J. M.* Ground-State Energy of a Many-Fermion System. II. / J. M. Luttinger, J. C. Ward // *Phys. Rev.* – 1960. – Vol. 118, no.5. – Pp. 1417–1427.

[118] *De Dominicis, C.* Stationary Entropy Principle and Renormalization in Normal and Superfluid Systems. I. Algebraic Formulation / C. De Dominicis, P. Martin // *J. Math. Phys.* – 1964. – Vol. 5. – Pp. 14–27.

[119] *Dahmen, H. D.* Variational Formulation of QFT. I. / H. D. Dahmen, G. Jona-Lasinio // *Nuovo Cimento A.* – 1967. – Vol. 52. – Pp. 807–838.

[120] *Васильев, А. Н.* Преобразования Лежандра Порождающих Функционалов в Квантовой Теории Поля / А. Н. Васильев, А. К. Казанский // *Теор. Мат. Физика.* – 1972. – Т. 12. – Сс. 352–369.

[121] Renormalization Group and Superconductivity, and Neutrino-Type Solutions in Field Theory / P. I. Fomin, V. P. Gusynin, V. A. Miransly, Yu. A. Sitenko // *Nucl. Phys. B.* – 1976. – Vol. 110, nos.4-5. – Pp. 445–460.

[122] *Miransky, V. A.* Dynamical Generation of the Spectrum of Fermions in Non-Abelian Gauge Field Theories / V. A. Miransky, V. P. Gusynin, Yu. A. Sitenko // *Phys. Lett. B.* – 1981. – Vol. 100, no. 2. – Pp. 157–162.

[123] *Gusynin, V. P.* On the Dynamics of Tumbling Gauge Theories / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, Yu. A. Sitenko // *Phys. Lett. B.* – 1983. – Vol. 123, no.6. – Pp. 407–412.

[124] *Gusynin, V. P.* Dynamical Realization of the Linear σ-Model and Bifermion Condensates in QCD / V. P. Gusynin, V. A. Miranky, Yu. A. Sitenko // *Phys. Lett. B.* – 1983. – Vol. 123, no.6. – Pp. 428–432.

[125] Dynamical Symmetry Breaking and Particle Mass Generation in Gauge Field Theories / P. I. Fomin, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, Yu. A. Sitenko // *Rivista del Nuovo Cimento.* – 1983. – Vol. 6. – Pp. 1-90.

[126] *Banks, T.* Improved Effective-Potential Formalism for Composite Fields / T. Banks, S. Raby // *Phys. Rev. D.* – 1976. – Vol. 14, no.8. – Pp. 2182–2190.

[127] *Ellwanger, U.* Composite Field Condensation and Renormalization Group / U. Ellwanger // *Nucl. Phys. B.* – 1982. – Vol. 207. – Pp. 447–460.

[128] *Miransky, V.A.* On the Generating Functional for Proper Vertices of Local Composite Operators in the Gauged Nambu–Jona-Lasinio Model / V. A. Miransky // *Int. J. Mod. Phys. A.* – 1993. – Vol. 8. – Pp. 135–151.

[129] *Miransky, V.A.* Conformal Phase Transition in Gauge Theories / V. A. Miransky, K. Yamawaki // *Phys. Rev. D.* – 1997. – Vol. 55, no.8. – Pp. 5051–5066.

[130] *Gusynin, V.P.* Effective Action and Conformal Phase Transition in Three-Dimensional QED / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, A. V. Shpagin // *Phys. Rev. D.* – 1998. – Vol.58, no.8. – P.085023.

[131] *Zamolodchikov, A.B.* Factorized S-matrices in Two Dimensions as the Exact Solutions of Certain Relativistic Quantum Field Theory Models / A. B. Zamolodchikov, A. B. Zamolodchikov // *Annals of Physics (NY).* – 1979. – Vol. 120. – Pp. 253–291.

[132] *Haymaker, R.* Dynamics and Stability of Dynamical Symmetry Breaking Without Fundamental Scalars / R. Haymaker, J. Perez-Mercader // *Phys. Rev. D.* – 1983. – Vol. 27, no.6. – Pp. 1353–1368.

[133] Composite Operator Calculation of Chiral Symmetry Breaking in Color Gauge Theory / R. Casalbuoni, S. de Curtis, D. Dominici, R. Gatto // *Phys. Lett. B.* – 1984. – Vol. 140, nos.5-6. – Pp. 357–362.

[134] Ambiguity in the Effective Potential of Composite Fields / M. Inoue, H. Katata, T. Muta, K. Shimizu // *Prog. Theor. Phys.* – 1988. – Vol. 79, no.2. – Pp. 519–534.

[135] *Де Альфаро, В.* Токи в физике адронов / В. Де Альфаро, С. Фубини, Е. Фурлан, К. Рассети. – Мир, Москва, 1976. – С. 670.

[136] *Adler, S. L.* Axial-Vector Vertex in Spinor Electrodynamics / S. L. Adler // *Phys. Rev.* – 1969. – Vol. 177, no.5. – Pp. 2426–2438.

[137] *Bell, J. S.* A PCAC Puzzle: $\pi_0 \to \gamma\gamma$ in the σ-Model / J. S. Bell, R. Jackiw // *Il Nuovo Cimento A.* – 1969. – Vol. 60, no.1. – Pp. 47–61.

[138] *Cornwall, J. M.* Dynamical Mass Generation in Continuum Quantum Chromodynamics / J. M. Cornwall // *Phys. Rev. D.* – 1982. – Vol. 26, no.6. – Pp. 1453–1478.

[139] *Bordag, M.* Gluon Polarization Tensor in Color Magnetic Background / M. Bordag, V. V. Skalozub // *Eur. Phys. J. C.* – 2006. – Vol. 45. – Pp. 159–178.

[140] *Bordag, M.* Non-traversatility of the Gluon Polarization Tensor in a Chromomagnetic Background // M. Bordag, J. Grebenyuk, V. V. Skalozub // *Theor. Math. Phys.* – 2006. – Vol. 148. – Pp. 910–922.

[141] *Bordag, M.* Neutral Gluon Polarization Tensor in Color Magnetic Background at Finite Temperature / M. Bordag, V. V. Skalozub // *Phys. Rev. D.* – 2007. – Vol. 75. – P. 1250003.

[142] *Bordag, M.* Polarization Tensor of Charged Gluons in Color Magnetic Chromomagnetic Background Field at Finite Temperature / M. Bordag, V. V. Skalozub // *Phys. Rev. D.* – 2008. – Vol. 77. – P. 105113.

[143] The Green Function of Neutral Gluons in Color Magnetic Background Field at Finite Temperature / M. Bordag, A. Ferludin, N. Khandoga, V. Skalozub // *J. Phys. A.* – 2008. – Vol. 41. – P. 164045.

[144] *Brown, N.* Studies of Confinement: How Quarks and Gluons Propagate / N. Brown, M. R. Pennington // *Phys. Rev. D.* – 1988. – Vol. 38, no.7. – Pp. 2266–2276.

[145] *Mandelstam, S.* Approximation Scheme for Quantum Chromodynamics / S. Mandelstam // *Phys. Rev. D.* – 1979. – Vol. 20, no.12. – Pp. 3223–3238.

[146] *Natale, A. A.* Chiral Parameters in a QCD-Motivated Model with Confined and Massive Gluons / A. A. Natale, P.S. Rodrigues da Silva // *Phys. Lett. B.* – 1998. – Vol. 442, nos.1-4. – Pp. 369–373.

[147] *Lavelle, M.* Gauge-Invariant Effective Gluon Mass From Operator-product Expansion / M. Lavelle // *Phys. Rev. D.* – 1991. – Vol. 44, no.1. – Pp. R26-R28.

[148] *Crewther, R.* Nonperturbative Evaluation of the Anomalies in Low-Energy Theorems / R. Crewther // *Phys. Rev. Lett.* – 1972. – Vol. 28, no.21. – Pp. 1421–1424.

[149] *Chanowitz, M.* Canonical Anomalies and Broken Scale Symmetry / M. Chanowitz, J. Ellis // *Phys. Lett. B.* – 1972. – Vol. 40, no.3.– Pp. 397–400.

[150] *Collins, J. C.* Trace and Dilatation Anomalies in Gauge Theories / J. C. Collins, A. Duncan, S. D. Joglekar // *Phys. Rev. D.* – 1974. – Vol. 16, no.2. – Pp. 438–449.

[151] *Gusynin, V. P.* Dynamical Mass Function of Quark and Effective Potential in QCD / V. P. Gusynin, Yu. A. Sitenko // *Z. fur Physik C.* – 1985. – Vol. 29. – Pp. 547–550.

[152] Dynamical Chiral-Symmery Breaking and Determination of the Quark Masses / A. Barducci, R. Casalbouni, S. de Curtis et al. // *Phys. Rev. D.* – 1988. – Vol. 38, no.1. – Pp. 238–278.

[153] *Shifman, M. A.* QCD and Resonance Physics. Theoretical Foundations / M. A. Shifman, A. I. Vainstein, V. I. Zakharov // *Nucl. Phys. B.* – 1979. – Vol. 147. – Pp. 385–447.

[154] *Shifman M. A.* QCD and Resonance Physics. Applications / M. A. Shifman, A. I. Vainstein, V. I. Zakharov // *Nucl. Phys. B.* – 1979. – Vol. 147. – Pp. 448–518.

[155] *Vilenkin, A.* Cosmic strings and other topological defects / A. Vilenkin, E. P. S. Shellard. – Cambridge University Press, Cambridge, 1994. – P. 517.

[156] *Dvali, G.* (Quasi)localized Gauge Field on a Brane: Dissipating Cosmic Radiation to Extra Dimensions? / G. Dvali, G. Gabadadze, M. Shifman // *Phys. Lett. B.* – 2001. – Vol. 497, no.3-4. – Pp. 271–280.

[157] *Deser, S.* Three-Dimensional Massive Gauge Theories / S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton // *Phys. Rev. Lett.* – 1982. – Vol. 48, no.15. – Pp. 975-978.

[158] *Pisarski, R. D.* Chiral-Symmetry Breaking in Three-Dimensional Electrodynamics / R. D. Pisarski // *Phys. Rev. D.* – 1984. – Vol. 29, no.10. – Pp. 2423–2426.

[159] Spontaneous Breaking of Parity in (2+1)-Dimensional QED / T. Appelquist, M. J. Bowick, D. Karabali, L. C. R. Wjewardhana // *Phys. Rev. D.* – 1986. – Vol. 33, no.12. – Pp. 3774–3776.

[160] *Kondo, K.-I.* Spontaneous Chiral-Symmetry Breaking and Scaling Law in Three-Dimensional QED / K.-I. Kondo, H. Nakatani // *Mod. Phys. Lett. A.* – 1990. – Vol. 5. – Pp. 407–416.

[161] *Aitchison, I. J.* Inverse Landau–Khalatnikov Transformation and Infrared Critical Exponents of a (2+1)-Dimensional Quantum Electrodynamics / I. J. Aitchison, N. E. Mavromatos, D. McNeill // *Phys. Lett. B.* – 1997. – Vol. 402, nos.1-2. – Pp. 154–158.

[162] *Kugo, T.* The Chiral Ward–Takahashi Identity in the Ladder Approximation / T. Kugo, M. G. Mitchard // *Phys. Lett. B.* – 1992. – Vol. 282, nos.1-2. – Pp. 162-170.

[163] *Nash, D.* Higher-Order Corrections in (2+1)-Dimensional QED / D. Nash // *Phys. Rev. Lett.* – 1989. – Vol. 62, no.26. – Pp. 3024–3026.

[164] *Atkinson, D.* Chiral Symmetry Breakdown. II. Ansatz for Vertex in Ultraviolet / D. Atkinson // *J. Math. Phys.* – 1987. – Vol. 28. – Pp. 2494–2499.

[165] *Скалозуб, В. В.* О восстановлении Спонтанного Нарушения Симметрии в Магнитном Поле / В. В. Скалозуб // *Ядерная физика.* – 1978. – Т. 28. – Сс. 228–230.

[166] *Nielsen N. K.* An Unstable Yang–Mills Field Mode / N. K. Nielsen, P. Olesen // *Nucl. Phys. B.* – 1978. – Vol. 144, nos.2-3. – Pp. 376–396.

[167] *Скалозуб, В. В.* Решетка Абрикосова в Теории Электрослабых Взаимодействий / В. В. Скалозуб // *Ядерная физика.* – 1986. – Т. 43. – Сс. 1045–1052.

[168] *Скалозуб, В. В.* Структура Вакуума в Теории Вайнберга-Салама / В. В. Скалозуб // *Ядерная Физика.* – 1987. – Т. 45. – Сс. 1708–1718.

[169] *Ambjorn, J.* On Electroweak Magnetism / J. Ambjorn, P. Olesen // *Nucl. Phys. B.* – 1989. – Vol. 315, no.3. – Pp. 606–614.

[170] *Ambjorn, J.* A Magnetic Condensate Solution of the Classical Electroweak Theory / J. Ambjorn, P. Olesen // *Phys. Lett. B.* – 1989. – Vol. 218, no.1. – Pp. 67–71.

[171] *Ferrara, S.* String Phase Transitions in a Strong Magnetic Field / S. Ferrara, M. Porrati // *Mod. Phys. Lett. A.* – 1993. – Vol. 8, no.26. – Pp. 2497–2502.

[172] *Ferrer, E. J.* Regge Trajectories and Critical Fields of the Charged String in a Magnetic Background / E. J. Ferrer, V. de la Incera // *Int. J. Mod. Phys. A.* – 1996. – Vol. 11, no.21. – Pp. 3875–3884.

[173] *Russo, J. G.* Magnetic Flux Tubes in Superstring Theory / J. G. Russo, A. A. Tseytlin // *Nucl. Phys. B.* – 1996. – Vol. 461. – Pp. 131–154.

[174] *Gavrilov, S. P.* Vacuum Instability in External Fields / S. P. Gavrilov, D. M. Gitman // *Phys. Rev. D.* – 1996. – Vol. 53, no.12. – Pp. 7162–7175.

[175] *Klevansky, S. P.* Chiral-Symmetry Restoration in the Nambu–Jona-Lasinio Model with a Constant Electromagnetic Field / S. P. Klevansky, R. H. Lemmer // *Phys. Rev. D.* – 1989. – Vol. 39, no.11. – Pp. 3478-3489.

[176] *Schwinger, J.* On Gauge Invariance and Vacuum Polarization / J. Schwinger // *Phys. Rev.* – 1951. – Vol. 82, no.5. – Pp. 664–679.

[177] *Прудников, А. П.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – Наука, Москва, 1981. – С. 800.

[178] *Snyder, H. S.* Quantized Space-Time / H. S. Snyder // *Phys. Rev.* – 1947. – Vol. 71, no.1. – Pp. 38–41.

[179] *Carlip, S.* Quantum Gravity: a Progress Report / S. Carlip // *Rept. Prog. Theor.* – 2001. – Vol. 64. – Pp. 885–957.

[180] *Kiefer, C.* Quantum gravity / C. Kiefer. – Oxford University Press, Oxford, 2007. – P. 376.

[181] *Polchinski, J.* String theory. I. Introdunction to the bosonic string / J. Polchinski. – Cambridge University Press, Cambridge, 1998. – P. 402.

[182] *Polchinski, J.* String theory. II. Superstring theory and beyond / J. Polchinski. – Cambridge University Press, Cambridge, 1998. – P. 552.

[183] *Zwiebach, B.* A first course in string theory / B. Zwiebach. – Cambridge University Press, Cambridge, 2004. – P. 558.

[184] *Connes, A.* Noncommutative Geometry and Matrix Theory: Compactification on Tori / A. Connes, M. R. Douglas, A. Schwarz // *J. High Energy Physics.* – 2002. – Vol. 02. – P. 003.

[185] *Douglas, M. R.* D-branes and the Noncommutative Torus / M. R. Douglas, C. Hull // *J. High Energy Physics.* – 2002. – Vol. 02. – P. 008.

[186] *Minwalla, S.* Noncommutative Perturbative Dynamics / S. Minwalla, M. Van Raaamsdonk, N. Seiberg // *J. High Energy Physics.* – 2002. – Vol. 02. – P. 020.

[187] *Alford, M.* QCD at Finite Baryon Density: Nucleon Droplets and Color Superconductivity / M. Alford, K. Rajagopal, F. Wilczek // *Phys. Lett. B.* – 1998. – Vol. 422, nos.1-4. – Pp. 247–256.

[188] Diquark Bose Condensates in High Density Matter and Instantons / R. Rapp, T. Schäfer, E. V. Shuryak, M. Velkovsky // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. – Vol. 81, no.1. – Pp. 53-56.

[189] *Klevansky, S. P.* The Nambu–Jona-Lasinio Model of Quantum Chromodynamics / S. P. Klevansky // *Rev. Mod. Phys.* – 1992. – Vol. 64. – Pp. 649–708.

[190] *Ландау, Л. Д.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л.Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – Наука, Москва, 1989. – С. 768.

[191] *Dunne, G.* "Peierles Substitution" and Chern–Simons Quantum Mechanics / G. Dunne, R. Jackiw // *Nucl. Phys. Proc. Suppl. C.* – 1993. – Vol. 33. – Pp. 114–118.

[192] *Girvin, S.* Formalism for the Quantum Hall Effect: Hilbert Space of Analytic Functions / S. Girvin, T. Jach // *Phys. Rev. B.* – 1984. – Vol. 29, no.10. – Pp. 5617–5625.

[193] *Douglas, M. R.* Noncommutative Field Theory / M. R. Douglas, N. A. Nekrasov // *Rev. Mod. Phys.* – 2001. – Vol. 73. – Pp. 977–1029.

[194] *Szabo, R.* Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces / R. Szabo // *Phys. Rep.* – 2003. – Vol. 378. – Pp. 207–299.

[195] *Zak, J.* Magnetic Translation Group / J. Zak // *Phys. Rev.* – 1964. – Vol. 134, no.6A. – Pp. A1602–A1606.

[196] *Heisenberg, W.* Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons / W. Heisenberg, H. Euler // Zeitschr. Phys. – 1936. – Vol. 98, nos.11–12. – Pp. 714–732.

[197] *Градштейн, И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. - Наука, Москва, 1971. – С. 1100.

[198] *Wen, X. G.* Electrodynamical Properties of Gapless Edge Excitations in the Fractional Quantum Hall States / X. G. Wen // *Phys. Rev. Lett.* – 1990. – Vol. 64, no.18. – Pp. 2206-2209.

[199] *Miransky, V. A.* Magnetic Catalysis and Anisotropic Confinement in QCD / V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Phys. Rev. D.* – 2002. – Vol. 66, no.4. – P. 045006.

[200] *Kleinert, H.* Hadronization of Quark Theories and a Bilocal Form of QED / H. Kleinert // *Phys. Lett. B.* – 1976. – Vol. 62, no.4. – Pp. 429–432.

[201] *Kugo, T.* Dynamical Instability of the Vacuum in the Lagrangian Formalism of the Bethe–Salpeter Bound States / T. Kugo // *Phys. Lett. B.* – 1978. – Vol. 76, no.5. – Pp. 625-630.

[202] *DeWitt, B. S.* Dynamical theory of groups and fields / B. S. DeWitt. – Gordon and Breach, New York, 1965. – P. 248.

[203] *Birrell, N. D.* Quantum fields in curved space / N. D. Birrell, P. C. W. Davies. – Cambridge University Press, Cambridge, 1982. – P. 340.

[204] *Wald, R. M.* Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics / R. M. Wald. – University of Chicago Press, Chicago, 1994. – P. 220.

[205] Fulling, S. Aspects of quantum field theory in curved space-time / S. Fulling. – Cambridge University Press, Cambridge, 1998. – P. 315.

[206] *Unruh, W. G.* Notes on Black-Hole Evaporation / W. G. Unruh // *Phys. Rev. D.* – 1976. – Vol. 14, no.4. – Pp. 870–892.

[207] *Bekenstein, J. D.* Black Holes and the Second Law / J. D. Bekenstein // *Nuovo Cimento Letters.* – 1972. – Vol. 4. – Pp. 737–740.

[208] *Bekenstein, J. D.* Black Holes and Entropy / J. D. Bekenstein // *Phys. Rev. D.* – 1973. – Vol. 7, no.8. – Pp. 2333–2346.

[209] *Bekenstein, J. D.* Statistical Black-Hole Thermodynamics / J. D. Bekenstein // *Phys. Rev. D.* – 1975. – Vol. 12, no.10. – Pp. 3077–3085.

[210] *Buchbinder, I. L.* Gross–Neveu Model in Curved Space-Time: The Effective Potential and Curvature-Induced Phase Transition / I. L. Buchbinder, E. N. Kirilova // *Int. J. Mod. Phys. A.* – 1989. – Vol. 4. – Pp. 143–149.

[211] *Muta, T.* Model Dependence of the Non-Mininal Scalar-Graviton Effective Coupling Constant in Curved Space-Time / T. Muta, S. D. Odintsov // *Mod. Phys. Lett. A.* – 1991. – Vol. 6. – Pp. 3641–3646.

[212] *Inagaki, T.* Nambu–Jona-Lasinio Model in Curved Space-Time / T. Inagaki, T. Muta, S. D. Odintsov // *Mod. Phys. Lett. A.* – 1993. – Vol. 8. – Pp. 2117–2123.

[213] *Elizalde, E.* Chiral Symmetry Breaking in d=3 Nambu–Jona-Lasinio Model in Curved Space-Time / E. Elizalde, S. D. Odintsov, Yu. I. Shil'nov // *Mod. Phys. Lett. A.* – 1994. – Vol. 9. – Pp. 913–918.

[214] *Inagaki, T.* Curvature-Induced Phase Transition in a Four-Fermion Theory Using the Weak Curvature Expansion / T. Inagaki // *Int. J. Mod. Phys. A.* – 1996. – Vol. 11. – Pp. 4561–4576.

[215] *Inagaki, T.* Dynamical Chiral Symmetry Breaking in Curved Space - Four-Fermion Interactions / T. Inagaki, T. Muta, S. D. Odintsov // *Prog. Theor. Phys. Suppl.* – 1997. – Vol. 127. – Pp. 93–193.

[216] *Gitman, D. M.* Chiral Symmetry Breaking in d=3 NJL Model in External Gravitational and Magnetic Fields / D. M. Gitman, S. D. Odintsov, Yu. I. Shil'nov // *Phys. Rev. D.* – 1996. – Vol. 54, no.4. – Pp. 2968-2970.

[217] *Bulaev, D. V.* Quantum Hall Effect on the Lobachevsky Plane / V. A. Geyler, V. A. Margulis // *Physica B.* – 2003. – Vol. 337, nos.1-4. – Pp. 180-185.

[218] *Gusynin, V. P.* Unconventional Integer Quantum Hall Effect in Graphene / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – Vol. 95, no.14. – P. 146801.

[219] *Cortijo, A.* Electronic Properties of Curved Graphene Sheets / A. Cortijo, M. A. H. Vozmedeiano // *Europhysics Letters.* – 2007. – Vol. 77, no.4. – P. 47002.

[220] *Herbut, I. F.* Interactions and Phase Transitions on Graphene‘s Honeycomb Lattice / I. F. Herbut // *Phys. Rev. Lett.* – 2006. – Vol. 97, no.14. – P. 146401.

[221] *Comtet, A.* Effective Action on the Hyperbolic Plane in a Constant External Field / A. Comtet, P. J. Houston // *J. Math. Phys.* – 1985. – Vol. 26. – Pp. 185–193.

[222] *Callan, C. G.* Infrared Behavior at Negative Curvature / C. G. Callan, F. Wilzek // *Nucl. Phys. B.* – 1990. – Vol. 340. – Pp. 366–386.

[223] *Balazs, N. L.* Chaos on the Pseudosphere / N. L. Balazs, A. Voros // *Phys. Rept. C.* – 1986. – Vol. 143. – Pp. 109–240.

[224] *Camporesi, R.* The Spinor Heat Kernel in Maximally Symmetric Spaces / R. Camporesi // *Commun. Math. Phys.* – 1992. – Vol. 148. – Pp. 283–308.

[225] Quantum Fields and Extended Objects in Space-Times with Constant Negative Spatial Section / A. A. Bytsenko, G. Cognola, L. Vanzo, S. Zerbini // *Phys. Rept. C.* – 1996. – Vol. 266. – Pp. 1–126.

[226] *Sharapov, S. G.* Magnetic Oscillations in Planar Systems with the Dirac-like Spectrum of Quasiparticle Excitations / S. G. Sharapov, V. P. Gusynin, H. Beck // *Phys. Rev. B.* – 2003. – Vol. 69, no.7. – P. 075104.

[227] *Streda, P.* Theory of Quantized Hall Conductivity in 2 Dimensions / P. Streda // *Journal of Physics C.* – 1982. – Vol. 15. – Pp. L717–L723.

[228] *Candelas, P.* Calculation of Gauge Couplings and Compact Circumferences from Self-Consistent Dimensional Reduction / P. Candelas, S. Weinberg // *Nucl. Phys. B.* – 1984. – Vol. 237. – Pp. 397–441.

[229] *Weinberg, S.* The Cosmological Constant Problem / S. Weinberg // *Rev. Mod. Phys.* – 1989. – Vol. 61. – Pp. 1–23.

[230] *Appelquist, T.* Infrared Singularities and Massive Fields / T. Appelquist, J. Carazzone // *Phys. Rev. D.* – 1975. – Vol. 11, no.10. – Pp. 2856-2861.

[231] *Nelson B. L.* Scaling Behavior of Interacting Quantum Fields in Curved Spacetime / Nelson B.L., Panangaden P. // *Phys. Rev. D.* – 1982. – Vol. 25, no.4. – Pp. 1019–1027.

[232] *Бухбиндер, И. Л.* Об Уравнениях Ренормализационной Группы в Искривленном Пространстве-Времени / И. Л. Бухбиндер // *Теор. и Мат. Физика.* – 1984. – Т. 61. – Сс. 393–399.

[233] *Buchbinder, I. L.* Effective action in quantum gravity. / I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov, I. L. Shapiro. - IOP Publishing, Bristol. 1992. – P. 548.

[234] *Shapiro, I. L.* The Scaling Behavior of the Cosmological Constant and the Possible Existence of New Forces and New Light Degreees of Freedom / I. L. Shapiro, J. Sola // *Phys. Lett. B.* – 2000. – Vol. 475, nos.3-4. – Pp. 236–246.

[235] *Shapiro, I. L.* Massive Fields Temper Anomaly-Induced Inflation: The Clue to Graceful Exit? / I. L. Shapiro // *Phys. Lett. B.* – 2001. – Vol. 530. – Pp. 10–19.

[236] *Авramиди, И. Г.* Ковариантные Исследования Нелокальной Структуры Эффективного Действия / И. Г. Авramиди // *Ядерная Физика.* – 1989. – Т. 49. – Сс. 735–741.

[237] *Barvinsky, A. O.* Covariant Perturbation Theory II. Second Order in the Curvature. General Alrorithms / A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky // *Nucl. Phys. B.* – 1990. – Vol. 333. – Pp. 471–511.

[238] *Gorbar, E. V.* Renormalization Group and Decoupling in Curved Space / E. V. Gorbar, I. L. Shapiro // *J. High Energy Physics.* – 2003. – Vol. 0302. – P.021.

[239] *Cooper, L. N.* Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas / L. N. Cooper // *Phys. Rev.* – 1956. – Vol. 104, no.4. – Pp. 1189–1190.

[240] *Barrois, B. C.* Superconducting Quark Matter / B. C. Barrois // *Nucl. Phys. B.* – 1977. – Vol. 129, no.3. – Pp. 390–396.

[241] *Rajagopal, K.* The Condensed Matter Physics of QCD / K. Rajagopal, F. Wilczek // Handbook of QCD / Ed. M. Shifman. – World Scientific, Singapore, 2001. – Vol. 3. – Pp. 2061-2151.

[242] *Alford, M. G.* Color Superconducting Quark Matter / M. G. Alford // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* – 2001. – Vol. 51. – Pp. 131–160.

[243] *Rischke, D. H.* The Quark-Gluon Plasma in Equilibrium / D. H. Rischke // *Prog. Part. Nucl. Phys.* – 2004. – Vol. 52. – Pp. 197–296.

[244] *Shovkovy, I. A.* Two Lectures on Color Superconductivity / I. A. Shovkovy // *Found. Phys.* – 2005. – Vol. 35. – Pp. 1309–1358.

[245] *Alford, M.* Absence of Two-Flavor Color-Superconductivity in Compact Stars / M. Alford, K. Rajagopal // *J. High Energy Physics.* – 2002. – Vol. 0206. – P. 031.

[246] *Steiner, A. W.* Color-Neutral Superconducting Quark Matter / A. W. Steiner, S. Reddy, M. Prakash // *Phys. Rev. D.* – 2002. – Vol. 66, no.9. – P. 094007.

[247] *Shovkovy, I. A.* Gapless Two-Flavor Color Superconductor / I. A. Shovkovy, M. Huang // *Phys. Lett. B.* – 2003. – Vol. 564, nos.3-4. – Pp. 205–209.

[248] *Huang, M.* Gapless Color Superconductivity at Zero and at Finite Temperature / M. Huang, I. A. Shovkovy // *Nuc. Phys. A.* – 2003. – Vol. 729. – Pp. 835–863.

[249] *Alford, M.* Gapless Color-Flavor-Locked Quark Matter / M. Alford, C. Kouvaris, K. Rajagopal // *Phys. Rev. Lett.* – 2004. – Vol. 92, no.22. – P. 222001.

[250] *Huang, M.* Chromomagnetic Instability in Dense quark Matter / M. Huang, I. A. Shovkovy // *Phys. Rev. D.* – 2004. – Vol. 70, no.5. – P. 051501(R).

[251] Meissner Masses in the gCFL Phase of QCD / R. Casalbuoni, R. Gatto, M. Mannarelli et al. // *Phys. Lett. B.* – 2005. – Vol. 605, nos.3-4. – Pp. 362–368.

[252] *Alford, M.* Photons in Gapless Color-Flavor-Locked Quark Matter / M. Alford, Q. Wang // *Journal of Physics G.* – 2005. – Vol. 31. – Pp. 719–738.

[253] *Alford, M.G.* Crystalline Color Superconductivity / M. G. Alford, J. A. Bowers, K. Rajagopal // *Phys. Rev. D.* – 2001. – Vol. 63, no.7. – P. 074016.

[254] *Casalbuoni, R.* Inhomogeneous Superconductivity in Condensed Matter and QCD / R. Casalbuoni, G. Nardulli // *Rev. Mod. Phys.* – 2004. – Vol. 76. – Pp. 263–320.

[255] *Ларкин, А. И.* Неоднородное Состояние Сверхпроводников / А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников // *ЖЭТФ.* – 1964. – Т. 47. – Сс. 1136–1146.

[256] *Fulde, P.* Superconductivity in A Strong-Spin Exchange Field / P. Fulde, R. A. Ferrell // *Phys. Rev.* – 1964. – Vol. 135, no.3A. – Pp. A550–A563.

[257] *Giannakis, I.* Chromomagnetic Instability and the LOFF State in a Two Flavor Color Superconductor / I. Giannakis, H. C. Ren // *Phys. Lett. B.* – 2005. – Vol. 611, nos.1-2. – Pp. 137–146.

[258] *Giannakis, I.* A Neutral Two Flavor LOFF Color Superconductor / I. Giannakis, D. Hou, H. C. Ren // *Phys. Lett. B.* – 2005. – Vol. 631, nos.1-2. – Pp. 16–21.

[259] *Giannakis, I.* The Meissner Effect in a Two Flavor LOFF Color Superconductor / I. Giannakis, H. C. Ren // *Nucl. Phys. B.* – 2005. – Vol. 723. – Pp. 255–280.

[260] *Gerhold, A.* Gauge Dependence Identities for Color Superconducting QCD / A. Gerhold, A. Rebhan // *Phys. Rev. D.* – 2003. – Vol. 68, no.1. – P. 011502(R).

[261] *Gusynin, V. P.* Spontaneous Rotational Symmetry Breaking and Roton Like Excitations in Gauged σ-Model at Finite Density / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy // *Phys. Lett. B.* – 2004. – Vol. 581, nos.1-2. – Pp. 82–92.

[262] *Huang, M.* Gapless Color Superconductivity at Zero and Finite Temperature / M. Huang, I. A. Shovkovy // *Nucl. Phys. A.* – 2003. – Vol. 729. – Pp. 835–863.

[263] *Brown, L. S.* Vacuum Polarization in Uniform Non-Abelian Gauge Fields / L. S. Brown, W. I. Weisberger // Nucl. Phys. B. – 1979. – Vol. 157. – Pp. 285–326.

[264] *Giannakis, I.* The Meissner Effect in a Two Flavor LOFF Color Superconductor / I. Giannakis, H. C. Ren// *Nucl. Phys. B.* – 2005. – Vol. 723. – Pp. 255–280.

[265] *Alford, M.* Magnetic Fields Within Color Superconducting Neutron Star Cores / M. Alford, J. Berges, K. Rajagopal // *Nucl. Phys. B.* – 2000. – Vol. 571. – Pp. 269-284.

[266] *Alford, M.* Unlocking Color and Flavor in Superconducting Strange Quark Matter / M. Alford, J. Berges, K. Rajagopal // *Nucl. Phys. B.* – 1999. – Vol. 558. – Pp. 219-242.

[267] Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films / K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov et al. // *Science.* – 2004. – Vol. 306, no. 5696. – Pp. 666–669.

[268] *Geim, A. K.* Graphene: Status and Prospects / A. K. Geim // *Science.* – 2009. – Vol. 324, no. 5934. – Pp. 1530–1534.

[269] *Katsnelson M. I.* Graphene: New Bridge Between Condensed Matter Physics and Quantum Electrodynamics // M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov // *Solid State Commun.* – 2007. – Vol. 143. – Pp. 3–13.

[270] The electronic Properties of Graphene / A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres e al. // *Rev. Mod. Phys.* – 2009. – Vol. 81. – Pp. 109–162.

[271] *Wallace, P. R.* The Band Theory of Graphite / P. R. Wallace // *Phys. Rev.* – 1947. – Vol. 71, no.9. – Pp. 622-634.

[272] *Semenoff, G.* Condensed-Matter Simulation of a Three-Dimensional Anomaly / G. Semenoff // *Phys. Rev. Lett.* – 1984. – Vol. 53, no.26. – Pp. 2449–2452.

[273] Two-Dimensional Gas of Massless Dirac Fermions in Graphene / K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov et al. // *Nature.* – 2005. – Vol. 438. – Pp. 197–200.

[274] *Zhang, Y.* Experimental Observation of Quantum Hall Effect and Berry‘s Phase in Graphene / Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Störmer, P. Kim // *Nature.* – 2005. – Vol. 438. – Pp. 201–204.

[275] Room-Temperature quantum Hall Effect in Graphene / K. S. Novoselov, Z. Jiang, Y. Zhang et al. // *Science.* – 2007. – Vol. 315. – Pp. 1379-1381.

[276] *Peres, N. M. R.* Electronic Properties of Disordered Two-Dimensional Carbon / N. M. R. Peres, F. Guinea, A. H. Castro Neto // *Phys. Rev. B.* – 2006. – Vol. 73, no.12. – P. 125411.

[277] *von Klitzing, K.* New Method for High-Accuracy Determination of the Fine Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance / K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper // *Phys. Rev. Lett.* – 1980. – Vol. 45, no.6. – Pp. 494–497.

[278] *Ishikawa, K.* Axial Anomaly in Three Dimensions and Planar Fermions / K. Ishikawa // *Phys. Rev. D.* – 1985. – Vol. 31, no.6. – Pp. 1432–1442.

[279] *Widom, A.* Implications of the Chiral Anomaly for Quantum-Hall Effect Devices / A. Widom, M. H. Friedman, Y. N. Srivastava // *Phys. Rev. B.* – 1985. – Vol. 31, no.10. – Pp. 6588–6591.

[280] *Abouelsaood, A.* Relation Between the Chiral Anomaly and the Quantized Hall Effect / A. Abouelsaood // *Phys. Rev. Lett.* – 1985. – Vol. 54, no.18. – Pp. 1973–1975.

[281] *Криве, И. В.* Дробный Заряд в Квантовой Теории Поля и Физике Твердого Тела / И. В. Криве, А. С. Рожавский // *УФН.* – 1987. – Т. 152, № 1. – Сс. 33–74.

[282] *Zheng, Y.* Hall Conductivity of a Two-Dimensional Graphite System / Y. Zheng, T. Ando // *Phys. Rev. B.* – 2002. – Vol. 65, no.24. – P. 245420.

[283] Unconventional Quantum Hall Effect and Berry‘s Phase 2 pi in Bilayer Graphene / K. S. Novoselov, E. McCann, S. V. Morozov et al. // *Nature Phys.* – 2006. – Vol. 2. – Pp. 177–180.

[284] *Katsnelson, M. I.* Chiral Tunneling and the Klein paradox in Graphene / M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, A. K. Geim // *Nature Physics.* – 2006. – Vol. 2. – Pp. 620–625.

[285] *Katsnelson, M. I.* Nonlinear Screening of Charge Impurities in Graphene / M. I. Katsnelson // *Phys. Rev. B.* – 2006. – Vol. 74, no.20. – P. 201401(R).

[286] *Shytov, A. V.* Vacuum Polarization and Screening of Supercrtitical Impurities in Graphene / A. V. Shytov, M. I. Katsnelson, S. V. Levitov // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol. 99, no.23. – P. 236801.

[287] *Shytov, A. V.* Atomic Collapse and Quasi-Rydberg States in Graphene / A. V. Shytov, M. I. Katsnelson, S. V. Levitov // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol. 99, no.24. – P. 246802.

[288] *Fogler, M. M.* Screening of Hypercritical Charge in Graphene / M. M. Fogler, S. D. Novikov, B. Shklovskii // *Phys. Rev. B.* – 2007. – Vol. 76. – P. 233802.

[289] *Gamayun, O. V.* Supercritical Coulomb Center and Excitonic Instability / O. V. Gamayun, E. V. Gorbar, V. P. Gusynin // *Phys. Rev. B.* – 2009. – Vol. 80, no.16. – P. 165429.

[290] *Wang, J.* Many-Body Signature of Coulomb Implosion in Graphene // *Preprint arXiv: 0909.4076.* – 2009.

[291] *Sitenko, Yu. A.* Electronic Properties of Graphene with a Topological Defect / Yu. A. Sitenko, N. D. Vlasii // *Nucl. Phys. B.* – 2007. – Vol. 787, no.3. – Pp. 241–259.

[292] *Vlasii, N. D.* Electronic Properties of Graphitic Nanocones / N. D. Vlasii, Yu. A. Sitenko // *Ukrainian Journal of Physics.* – 2008. – Vol. 52, no.12. – Pp. 1181–1187.

[293] *Gusynin, V. P.* Transport of Dirac Quasiparticles in Graphene: Hall and Optical Conductivities / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov // *Phys. Rev. B.* – 2006. – Vol. 73, no. 24. – P. 245411.

[294] Landau Level Quantization and Possible Superconducting Instabilities in Highly Oriented Pyrolitic Graphite / Y. Kopelevich, V. V. Lemanov, S.

Moehlecke, J. H. C. Torres // *Физика Твердого Тела.* – 1999. – Т. 41. – Сс. 2135–2139.

[295] Magnetic-Field-Driven Superconductor-Insulator-Type Transition in Graphite / H. Kempa, Y. Kopelevich, F. Mrowka et al. // *Solid State Commun.* – 2000. – Vol. 115. – Pp. 539–542.

[296] Evidence for Internal Field in Graphite: a Conduction Electron Spin-resonance Study / M. S. Sercheli, Y. Kopelevich, R. R. da Silva et al. // *Solid State Commun.* – 2002. – Vol. 121. – Pp. 579–583.

[297] *Скалозуб, В. В.* Эффективный Лагранжиан и Нелинейное Взаимодействие Неоднородного Электромагнитного Поля в $_{2+1}$ в Плотной Фермионной Среде / В. В. Скалозуб, А. Ю. Тищенко // *ЖЭТФ.* – 1995. – Т. 108. – Сс. 385.

[298] *Shpagin A. V.* Dynamical Mass Generation in 2+1-dimensional Electrodynamics in an External Magnetic Field // *Preprint arXiv: hep-ph/9611412.* – 1996.

[299] *Khveshchenko, D. V.* Magnetic-Field-Induced Insulating Behavior in Highly Oriented Pyrolitic Graphite / D. V. Khveshchenko // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – Vol. 87, no.20. – P. 206401.

[300] *Khveshchenko, D. V.* Ghost Excitonic Insulator Transition in Layered Graphite / D. V. Khveshchenko // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol. 87, no.24. – P. 246802.

[301] *Ferrer, E. J.* Thermal Conductivity in 3D NJL Model Under External Magnetic Field / E. J. Ferrer, V. P. Gusynin, V. de la Incera // Eur. Phys. J. B. – 2003. – Vol. 33. – Pp. 397–412.

[302] *Haldane, F. D. M.* Model for a Quantum Hall Effect Without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of "the Parity Anomaly"/ F. D. M. Haldane // *Phys. Rev. Lett.* – 1988. – Vol. 61, no.18. – Pp. 2015–2018.

[303] *Nomura, K.* Quantum Hall Ferromagnetism in Graphene / K. Nomura, A. H. MacDonald // *Phys. Rev. Lett.* – 2006. – Vol. 96, no.25. – P. 256602.

[304] *Alicea, J.* Graphene Integer Quantum Hall Effect in the Ferromagnetic and Paramagnetic Regimes / J. Alicea, M. P. A. Fisher // *Phys. Rev. B.* – 2006. – Vol. 74, no.7. – P. 075422.

[305] Excitonic Gap, Phase Transition, and Quantum Hall Effect in Graphene / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, S. G. Sharapov // *Phys. Rev. B.* – 2006. – Vol. 74, no.19. – P. 195429.

[306] *Ezawa, M.* Supersymmetry and Unconventional Quantum Hall Effect in Monolayer, Bilayer and Trilayer Graphene / M. Ezawa // *Physica E.* – 2007. – Vol. 40, no.2. – Pp. 269-272.

[307] *Abanin, D. A.* Spin-Filtered Edge States and Quantum Hall effect in Graphene / D. A. Abanin, P. A. Lee, L. S. Levitov // *Phys. Rev. Lett.* – 2006. – Vol. 96, no.17. – P. 176803.

[308] Landau-Level Splitting in Graphene in High Magnetic Fields / Y. Zhang, Z. Jiang, J. P. Small et al. // *Phys. Rev. Lett.* – 2006. – Vol. 96, no.13. – P. 136806.

[309] Quantum Hall States Near the Charge-Neutral Dirac Point in Graphene / Z. Jiang, Y. Zhang, H. A. Stormer, P. Kim // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol. 99, no.10. – P. 106802.

[310] *Yang, K.* Spontaneous Symmetry Breaking and Quantum Hall Effect in Graphene / K. Yang // *Solid State Commun.* – 2007. – Vol. 143. – Pp.27–32.

[311] *Checkelsky, J. G.* Zero-Energy State in Graphene in a Magnetic Field / J. G. Checkelsky, L. Li, L. P. Ong // *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – Vol. 100, no. 20. – P. 206801.

[312] *Checkelsky, J. G.* Divergence of the Resistance of Graphene at the Dirac Point to 40 $M\Omega$ in a Strong Magnetic Field / J. G. Checkelsky, L. Li, N. P. Ong // *Phys. Rev. B.* – 2009. – Vol. 79, no. 20. – P. 115434.

[313] Effect of Next-to-nearest Neighbor Hopping on Electronic Properties of Graphene / Y. F. Suprunenko, E. V. Gorbar, V. M. Loktev, S. G. Sharapov // *ФНТ.* – 2008. – Vol. 34, no.10. – Pp. 1033–1039.

[314] *O'Connor, D. J.* A Study of Finite Size Systems / D. J. O'Connor, C. R. Stephens, B. L. Hu // *Annals of Physics (NY).* – 1989. – Vol. 190, no.2. – Pp. 310–353.

[315] *Ebert D.* Magnetic Oscillations in Dense Cold Quark Matter With Four-Fermion Interactions / D. Ebert, K. G. Klimenko, M. A. Vdovichenko, A. S. Vshivtsev // *Phys. Rev. D.* – 1999. – Vol. 61, no.2. – P. 025005.

[316] *Ferrer, E. J.* Magnetic Color-Flavor Locking Phase in High-Density QCD / E. J. Ferrer, V. de la Incera, C. Manuel // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – Vol. 95, no.15. – P. 152002.

[317] *Son, D. T.* Axial Anomaly and Magnetism of Nuclear and Quark Matter / D. T. Son, M. A. Stephanov // *Phys. Rev. D.* – 2008. – Vol. 77, no.1. – P. 014021.

[318] *Clogston, A. M.* Upper Limit for the Critical Field in Hard Superconductors / A. M. Clogston // *Phys. Rev. Lett.* – 1962. – Vol. 9, no.6. – Pp. 266-267.

[319] *Metlitski, M. A.* Anomalous Axion Interactions and Topological Currents in Dense Matter / M. A. Metlitski, A. R. Zhitnitsky // *Phys. Rev. D.* – 2005. – Vol. 72, no.4. – P. 045011.

[320] *Kharzeev, D. E.* The Effects of Topological Charge Change in Heavy Ion Collisions: "Event by event P and CP Violation"/ D. E. Kharzeev, L. D. McLerran, H. J. Warringa // *Nucl. Phys. A.* – 2008. – Vol. 803. – Pp. 277–253.

[321] *Lyne, A. G.* High Birth Velocities of Radio Pulsars / A. G. Lyne, D. R. Lorimer // *Nature.* – 1994. – Vol. 369. – Pp. 127–129.

[322] *Page, D.* Dense Matter in Compact Stars: Theoretical Developments and Observational Constraints / D. Page, S. Reddy // *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* – 2006. – Vol. 56. – Pp. 327–374.

[323] *Kusenko, A.* Neutrino Transport: No Asymmetry in Equilibrium / A. Kusenko, G. Segre, A. Vilenkin // *Phys. Lett. B.* – 1998. – Vol. 437, nos.3-4. – Pp. 359–361.