

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ІМ. М. М. БОГОЛЮБОВА**

**ШАРАПОВ СЕРГІЙ ГЕННАДІЙОВИЧ**

УДК 530.145, 538.9

**ЕЛЕКТРОННІ ВЛАСТИВОСТІ СИСТЕМ З  
ДИРАКІВСЬКИМ ЕНЕРГЕТИЧНИМ СПЕКТРОМ:  
ГРАФЕН ТА ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНІ НАДПРОВІДНИКИ**

01.04.02 – теоретична фізика

**АВТОРЕФЕРАТ**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2010

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** У той час, коли передові наукові дослідження коштовні та складні, здається дивним, що визначне досягнення у фізиці може бути зроблено за допомогою простої липкої стрічки. Але у 2004 році, Андрій Гейм, Костянтин Новоселов – співробітники Манчестерського університету та Інституту мікроелектронної технології з Чорноголовки – зробили саме це [1a]. Обережно розколюючи зразок з графіту липкою стрічкою, вони створили те, що багато часу вважалось неможливим: виділили кристалічний вуглецевий шар атомної товщини, тепер відомий як *графен*.

Цей новий двовимірний кристал може спостерігатися навіть у звичайний оптичний мікроскоп. Одношарова сотова структура графена робить його «батьком» усіх систем, що базуються на вуглеці: графіт – це просто стос шарів графену; вуглецеві нанотрубки створені зі згорнутого у трубку шару або шарів графену; і фулеренові молекули, або “бакіболи”, – сфери нанорозміру, згорнуті з графену. Ці форми вуглецю були створені набагато раніше за графен і мають вже багато застосувань, але всі їх електричні, магнітні та механічні властивості походять, як з’ясувалося, з відповідних властивостей графену.

Унікальні властивості графену виникають з колективної поведінки електронів. Як підсумовано у відомому вислові Філіпа Андерсона: “Більше є відмінним.” (“More is different.”), ми знаємо, що коли велика кількість частинок взаємодіє сильно між собою, може з’явитися неочікуваний колективний рух. У випадку графену взаємодія між електронами та сотовою ґраткою призводить до того, що електрони поводять себе, як безмасові. Безмасова природа електронів у графені вперше була передбачена у 1947 році канадським теоретиком Філіпом Расселом Уолісом [2a]. Проте у той час ніхто не сподівався, що тверде тіло завтовшки в один атомний шар може існувати, тому Уоліс використав модель графену як початкову у дослідженнях графіту, які були частиною досліджень ядерних реакторів, використовуючих графіт. Як було показано іншим канадським теоретиком Гордоном Семенофф у 1984 році, за 20 років до фактичного отримання графену, у континуальному наближенні графен теоретично добре описується за допомогою двовимірної квантової електродинаміки (КЕД<sub>2+1</sub>) [3a].

Хоча графен було отримано тільки 6 років тому, йому вже присвячені тисячі статей. На березень 2010 року робота у Science [1a], де повідомлялось про відкриття графену, мала більше ніж 2200 посилань. Тому зараз важливість графену для фундаментальної фізики не потребує подальших доказів. Через свій незвичайний електронний спектр графен призвів до нової парадигми “релятивістської” теорії конденсованої матерії, де релятивістські квантові явища, деякі з котрих не спостерігались навіть у фізиці високих енергій, можуть бути імітовані та перевірені у настільних експериментах. Взагалі графен являє собою

концептуально новий клас матеріалів завтовшки в один атомний шар  $i$ , на цій основі, пропонує нові шляхи у низькорозмірну фізику [4a]. Здатність керувати рухом електронів у графені прокладає шлях до практично безвтратних та ультрашвидких транзисторів атомних розмірів.

Автор дисертації почав теоретичні дослідження графену ще до його експериментального створення, коли вивчав поведінку двовимірних діраківських ферміонів у зовнішньому магнітному полі. Через це багато з отриманих теоретичних результатів фактично стали передбаченнями основних властивостей графену, що і допомогло експериментаторам швидко перевірити і довести діраківський характер квазічастинок у графені.

Ще один напрям теоретичної фізики безпосередньо стосується двовимірних електронних систем, а саме: високотемпературних надпровідників (ВТНП). Зараз, коли вже минуло 23 роки після їх відкриття у купратах, основні питання щодо механізму ВТНП, природи псевдощілини тощо залишаються нез'ясованими, хоча і є постійний прогрес у вдосконаленні зразків, який супроводжується і теоретичним розвитком. Немає вже сумнівів, що надпровідний стан купратних ВТНП має  $d$ -хвильову щілину з вузлами вздовж діагоналей зони Бріллюена [5a]. Лінеаризація боголюбівського спектру квазічастинок навколо чотирьох вузлів на поверхні Фермі також дозволяє описувати відповідні безщілинні ферміонні збудження за допомогою ефективної діраківської теорії. Дослідження ВТНП спонукали великий інтерес до так званих вузлових (нодальних) квазічастинок, які є безщілинними фермі-збудженнями, пов'язаними з нулями щілинної функції. Залежно від фізичного походження щілини, можна розглядати різні фізичні ситуації, які дуже часто описуються моделями, що у певному наближенні зводяться до  $KE_{D_{2+1}}$ .

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконувалась в Інституті теоретичної фізики НАН України ім. М.М. Боголюбова. До роботи також увійшли результати, одержані під час стажування на фізичному факультеті університету Преторії (м. Преторія, Південна Африка), в Інституті фізики університету Ньюшателю (м. Ньюшатель, Швейцарія), в Інституті наукового обміну (м. Турін, Італія), на фізичному факультеті університету Макмастер (м. Гамільтон, Канада), у Західному Іллінойському університеті (м. Макоум, США). Частина результатів було отримано в процесі виконання наступних проектів: тема НАН України “Динамічні, термодинамічні та спектральні властивості неперервних та ґраткових систем з нелінійними збудженнями”, номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ 0103У006884 (шифр інститутської теми 1.4.7); ДФФД Ф28.2/083 “Застосування методів теорії струн та теорії поля у вивченні нелінійних явищ в низьковимірних системах” номер державної реєстрації в УкрІНТЕІ 0109U006861 (шифр інститутської теми 1.3.1).

**Мета і задачі дослідження.** Метою досліджень є встановлення основних термодинамічних та транспортних властивостей систем, які теоретично описуються

за допомогою квантової електродинаміки у 2+1-вимірі (КЕД<sub>2+1</sub>). Зокрема, розв'язувались наступні задачі:

- Виявлення дискретних симетрій ефективної КЕД<sub>2+1</sub> теорії графену.
- Одержання та дослідження виразів для діагональної та недіагональної статичної та динамічної магнітопровідностей графену.
- Дослідження квантових магнітних осциляцій та ефекту Нернста у графені.
- Дослідження впливу електрон-фононної взаємодії на властивості графену.
- Дослідження залежності надпровідної густини у високотемпературних надпровідниках від зовнішнього магнітного поля у присутності інших параметрів порядку, які конкурують з надпровідністю.

**Об'єктами дослідження** є квазічастинкові електронні збудження у графені та вузлові (нодальні) квазічастинки у високотемпературних надпровідниках. **Предметом дослідження** є густина станів (ГС), тензор електричної провідності графену та надпровідна густина у високотемпературних надпровідниках у зовнішньому магнітному полі.

У роботі застосовано такі теоретичні **методи дослідження**, як метод лінійного відгуку Кубо для обрахунку електричної провідності та надпровідної густини, метод температурних (мацубарівських) функцій Гріна та метод Швінгера для одержання функції Гріна у зовнішньому магнітному полі.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Автором дисертації вперше встановлено, що:

1. Циклотронна маса для діраківських ферміонів, що входить у температурний фактор у відповідному виразі для амплітуди осциляцій Шубнікова – де Гааза, у графені залежить від густини носіїв кореневим чином, що вже знайшло підтвердження в експериментальних дослідженнях.
2. Фаза квантових магнітних осциляцій у графені (зокрема, осциляцій Шубнікова – де Гааза) зсунута на  $\pi$  по відношенню до відповідної фази для електронів у нерелятивістському двовимірному електронному газі. Цей зсув фази магнітних осциляцій для діраківських ферміонів обумовлений тим, що енергія найнижчого рівня Ландау не залежить від магнітного поля.
3. Квантовий ефект Холла (КЕХ) для діраківських ферміонів у графені є аномальним (напівцілим) з фактором заповнення  $\nu = \pm 4(n+1/2)$ ,  $n=0,1,\dots$ . Аномальність КЕХ викликана виродженням найнижчого рівня Ландау, яке дорівнює половині виродження вищих рівнів.
4. Універсальна оптична (динамічна) провідність для невзаємодіючих діраківських ферміонів при енергіях фотонів  $\Omega \gg T, \mu$  ( $T$  – температура, а  $\mu$  – хімічний потенціал) визначається величиною  $\sigma_{opt} = \pi e^2 / (2h)$ , де  $e$  – заряд електрона, а  $h$  – постійна Планка. Поведінка оптичної провідності має поріг, який залежить від концентрації носіїв.
5. Поблизу діраківської точки сигнал Нернста стає великим та додатним порядку  $1 \mu\text{V/K}$  на 1 Tesla, що в 100 разів більше, ніж у звичайних системах.

6. За еволюцією ліній поглинання електромагнітних хвиль при зміні хімічного потенціалу в графені можна дізнатися про наявність аномального (найнижчого) діраківського рівня Ландау. При цьому перша лінія поглинання, яка пов'язана з цим рівнем, завжди має або повну інтенсивність, або цілком відсутня, тоді як всі інші лінії зникають у два кроки.
7. Розраховані правила сум для діагональної та холлівської оптичних провідностей у графені.
8. У присутності електрон-фононної взаємодії величина оптичної провідності стає меншою, ніж розрахована універсальна величина  $\sigma_{opt}$ .
9. У присутності параметру порядку іншої природи, який конкурує з  $d$ -хвильовою надпровідністю, залежність надпровідної густини від зовнішнього магнітного поля  $H$  відрізняється від простої  $\sim\sqrt{H}$  залежності, яку зазвичай пов'язують з доплерівським зсувом енергії квазічастинок.

**Практичне значення одержаних результатів.** Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теоретичний опис графену та високотемпературних надпровідників. Описані вище теоретичні передбачення властивостей графена, такі як незвичайний цілочисельний квантовий ефект Холла (ЦКЕХ) [1,2], зсув фази квантових магнітних осциляцій [3] (зокрема, осциляцій Шубнікова-де Гааза [4]) і концентраційна залежність циклотронної маси [4,5] спостерігалися у двох незалежних експериментальних роботах, опублікованих у найавторитетніших наукових журналах світу [6а,7а]. Саме на основі експериментального спостереження цих передбачень стало загальноприйнятим фактом, що квазічастинки у графені описуються за допомогою рівняння Дірака, а не Шрьодінгера, як у більшості інших матеріалів. Про широке використання та велике практичне значення результатів свідчить їх висока цитованість іншими авторами. Зокрема, на 1 квітня 2010 р. за даними ISI Thomson Scientific робота [1] має 354 цитування, робота [2] цитувалася 102 рази. Передбачена у роботі [5], цитованій вже 78 разів, універсальна оптична провідність та її порогова залежність від густини носіїв, експериментально спостерігалася у роботах [8а,9а,10а]. Керовані оптичні властивості графену мають великий потенціал застосувань в інфрачервоній оптиці та оптоелектроніці. Передбачений у [6] великий та додатний сигнал Нернста поблизу діраківської точки, який є ще однією ознакою діраківських ферміонів, спостерігався у найновіших експериментах, зокрема у [11а]. Результати дисертаційної роботи, що описують поведінку надпровідної густини, можуть бути використані при дослідженнях конкуруючих порядків у ВТНП. За даними SCOPUS огляди [24] та [25] мають, відповідно, 107 та 60 цитувань.

**Особистий внесок здобувача.** Результати, які увійшли до дисертації та були опубліковані із співавторами, одержані автором самостійно. Це стосується, зокрема, формулювання задач та виконаних аналітичних та чисельних розрахунків. У роботах за участю В.П. Гусиніна з квантового ефекту Холла [1,2], квантових магнітних осциляцій [3,4] та оптичних властивостей графену [5,7,8,13,22] здобувач

зробив порівняння з експериментальними даними, виклав остаточні результати у формі, зручній для використання у фізиці твердого тіла, а також зробив всі чисельні розрахунки. У роботах, виконаних без участі В.П. Гусиніна [14–17, 20, 21], навпаки, здобувач відповідав за використання теоретико-польового формалізму та аналітичні розрахунки. Це також стосується і робіт з високотемпературної надпровідності [6,18]. У роботах, присвячених крайовим станам у графені [10–12], автору належить частина постановки задачі та розрахунки. В огляді по графену у *Int. J. Mod. Phys. B* [25] автору належать оригінальні результати досліджень дискретних симетрій графену, а також текст перших трьох розділів. В огляді по ВТНП у *Physics Reports* [24] автор підготував текст перших п'яти розділів.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертації доповідалися на семінарах відділу Нелінійної фізики конденсованого стану та наукових сесіях Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної Академії наук України, та семінарах і колоквіумах інших установ по всьому світу: Інституту математики Національної Академії наук України, Інституту магнетизму Національної Академії наук України, Department of Physics, University of Pretoria (Преторія, Південна Африка), Department of Physics, University of the Witwatersrand (Йоханесбург, Південна Африка), Institut de Physique, Université de Neuchâtel (Нюшатель, Швейцарія), Institute for Theoretical Physics, ЕТН (Цюріх, Швейцарія), Département de Physique de la Matière Condensée, Université de Genève (Женева, Швейцарія), Université de Lausanne (Лозанна, Швейцарія), University of Leipzig (Лейпціг, Німеччина), University of Camerino (Камеріно, Італія), Torino Politecnico (Турін, Італія), University of Western Ontario (Лондон, Канада), Brock University (Санкт-Катарін, Канада), Western Illinois University (Макоум, США).

Результати були представлені як **запрошені доповіді** на міжнародних конференціях: *March 2006 Meeting of the American Physical Society*, Балтімор, Меріленд, США (березень 13-17, 2006) [29]; *Congress of the Canadian Association of Physicists, University of Saskatchewan*, Саскатун, Саскачевань, Канада (червень 17-20, 2007) [30] та *Workshop on Graphene: Fundamentals and Perspectives*, Бенаск, Іспанія (липень 26 – серпень 08, 2009).

Також, результати доповідалися на наступних міжнародних конференціях: *Third International Conference on New Theories, Discoveries, and Applications of Superconductors and Related Materials*, Гонолулу, Гаваї, США (січень 15-19, 2001); *Meeting of the Swiss Physical Society*, Дюбендорф, Швейцарія (2 травня, 2001); *Meeting of the Swiss Physical Society*, Лозанна, Швейцарія (1 березня, 2002); *Materials with Novel Electronic Properties (MaNEP) Topical Meeting "Non-Fermi Liquids and Low Dimensional Systems"*, Нюшатель, Швейцарія (10 лютого, 2003); *Meeting of the Swiss Physical Society*, Базель, Швейцарія (20 березня, 2003); *Bogolyubov Kyiv conference: Modern Problems of Mathematics and Theoretical Physics*, Київ (13-16 вересня, 2004); *workshop Electronic Properties of Graphene*, Kavli Institute

for Theoretical Physics, Санта Барбара, Каліфорнія, США (8-19 січня, 2007); *March 2007 Meeting of the American Physical Society*, Денвер, Колорадо, США (5-9 березня, 2007); *workshop on "Relativistic dynamics of graphene"*, Institute for Nuclear Theory, University of Washington, Сіетл, США (січень 8-11, 2008); *March 2009 Meeting of the American Physical Society*, Пітсбург, Пенсільванія, США (16-20 березня, 2009); *Київська Боголюбівська конференція: Сучасні проблеми теоретичної і математичної фізики*, Київ (15-18 вересня, 2009).

**Публікації.** За матеріалами дисертації опубліковано 30 наукових праць, у тому числі 22 статті [1-22] в провідних іноземних і вітчизняних журналах, 2 огляди [24,25], 5 праць конференцій [26-30] та препринт [23].

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається із вступу, семи розділів, висновку з оглядом основних результатів та семи додатків; викладена на 282 сторінках, у тому числі в додатках на 30 сторінках, 27 рисунках, з яких 2 займають окремі сторінки, та 1 таблиці. Список використаних літературних джерел складається з 326 найменувань.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У **ВСТУПІ** обґрунтовано актуальність теми дисертації, описано мету дослідження, наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, апробацію результатів дисертації та особистий внесок автора в роботи, виконані зі співавторами.

**ПЕРШИЙ РОЗДІЛ** має вступний характер і присвячений огляду основних моделей, що досліджуються в дисертації. Зокрема, у цьому розділі розглянуто дві системи: графен та ВТНП, які описується за допомогою КЕД<sub>2+1</sub>. *Підрозділ 1.1* починається з опису граткової моделі з зовнішнім векторним потенціалом, яка описує рух носіїв з  $\pi$  орбіталей вуглецю в графені. З неї одержується континуальне низькоенергетичне формулювання теорії, на якому базується практично весь подальший розгляд графену в дисертації з використанням лагранжіану КЕД<sub>2+1</sub>

$$L = \sum_{\sigma=\pm 1} \bar{\Psi}_{\sigma}(t, \mathbf{r}) [ i \gamma^0 (\hbar \partial_t - i \mu_{\sigma}) + i \hbar v_F \gamma^1 D_x + i \hbar v_F \gamma^2 D_y ] \Psi_{\sigma}(t, \mathbf{r}) \quad (1)$$

при записі якого були використані наступні позначення:  $D_{\alpha} = \partial_{\alpha} + ie/\hbar c A_{\alpha}$  з  $\alpha = x, y$  коваріантна похідна у зовнішньому магнітному полі  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , яке у цій дисертації є постійним та прикладеним перпендикулярно до площини графену вздовж позитивного напрямку  $z$ . Заряд електрона  $e < 0$  і ми утримали постійну Планка  $\hbar$  і швидкість світла  $c$ , але поклали постійну Больцмана  $k_B=1$ .  $v_F$  – це швидкість Фермі, яка у графені дорівнює приблизно  $10^6$  m/s. Також магнітне поле входить до члену з  $\mu_{\sigma}$ , який дорівнює  $\mu_{\sigma} = \mu - \sigma g/2 \mu_B B$ , де  $\mu$  - хімічний

потенціал, а другий член у якому  $\mu_B = e\hbar/(2 m_e c)$  є магнетоном Бору, і  $g$  є фактором Ланде, описує зеєманівську взаємодію. Збудження у графені описуються чотирьохкомпонентним спінором  $\Psi_\sigma^T = (\psi_{K_+A\sigma}, \psi_{K_+B\sigma}, \psi_{K_-B\sigma}, \psi_{K_-A\sigma})$  зі спіновим індексом  $\sigma = \pm 1$ , який комбінує блохівські стани на двох різних підгратках (А і В) гексагональної ґратки графену та з імпульсами поблизу двох нееквівалентних діраківських точок ( $K_+$  і  $K_-$ ) у зоні Бриллюена.  $\bar{\Psi}_\sigma = \Psi_\sigma^\dagger \gamma^0$  діраківськи спряжений спінором, а  $4 \times 4$  матриці  $\gamma^\nu$  з  $\nu = 0, 1, 2, 3$  належать до звідного представлення алгебри Дірака, задовольняють звичайним антикомутаційним співвідношенням та дорівнюють

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

У дисертації розглянуто і використано декілька представлень  $\gamma$ -матриць, зокрема вейлівське, або кіральне, представлення (2), у якому матриця  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  є діагональною. В *підрозділі 1.1.5* підведені підсумки щодо можливості використання безмасової КЕД<sub>2+1</sub> у якості ефективної низькоенергетичної теорії графену.

У *підрозділі 1.2* розглянуто КЕД<sub>2+1</sub> опис безщілинних ферміоних збуджень, пов'язаних з нулями щілинної функції у  $d$ -хвильовому надпровіднику ( $d$ НП) та у моделі псевдощілинного стану ВТНП, яка припускає існування хвиль  $d$ -густини (ХДГ). У випадку ХДГ модельний гамільтоніан практично такий же самий, як і (1), тоді як у  $d$ НП, як розглянуто у *розділі 7*, взаємодія із зовнішнім магнітним полем вже не може бути введена мінімальним чином, як у рівнянні (1).

**У ДРУГОМУ РОЗДІЛІ** розглядаються властивості КЕД<sub>2+1</sub> опису графена.

У *підрозділі 2.1* розглянуті неперервні симетрії КЕД<sub>2+1</sub> моделі. Якщо знехтувати спіном, то такою симетрією є долинно-підграткова симетрія  $U(2)$ , а якщо його включити, то симетрія стає  $U(4)$ . У *підрозділі 2.2* обговорюється фізичний зміст кіральності і показано, що у графені він відповідає долинному індексу  $K_\pm$ . У *підрозділі 2.3* дискретні  $P$ ,  $T$  та  $C$  операції симетрії у ефективній діраківській теорії визначені у відповідності з дискретними симетріями моделі на ґратці, яка розглянута у *підрозділі 1.1.3*. У *підрозділі 2.4* різниця між квазічастинками у графені і безмасовими нейтрино у пояснена з точки зору дискретних симетрій. У фізиці частинок припускається, що в природі існують тільки ліві нейтрино, тому для них використовується тільки одне рівняння Вейля. Це рівняння порушує  $C$  та  $P$  симетрії, але зберігає  $CP$  та  $T$  симетрії. Діраківські квазічастинки у графені з певною кіральністю, тобто які належать  $K_+$  або  $K_-$  долині, також описуються рівнянням Вейля для 2-компонентного спінору. Однак це рівняння порушує  $P$  та  $T$  симетрії, але зберігає  $PT$  та  $C$  симетрії. У *підрозділі 2.5* розглянуті різноманітні діраківські маси, присутність яких порушує  $U(4)$  симетрію. Загальний вигляд цих членів з масою має форму:

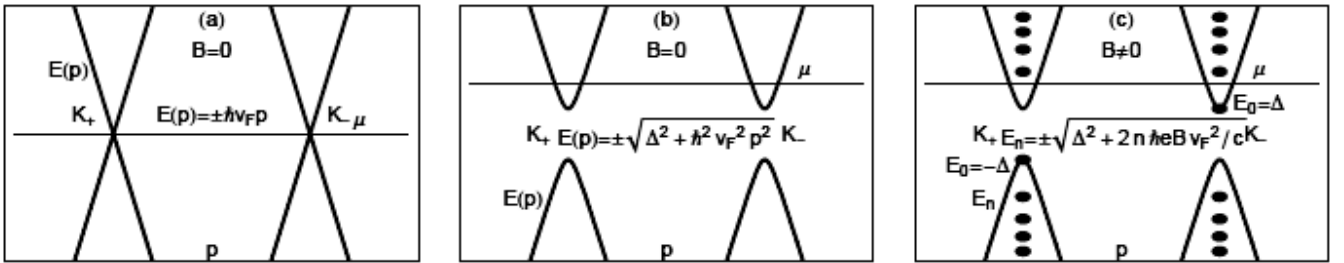


$$L_{\Delta} = \bar{\Psi}(t, \mathbf{r}) \Delta \sigma_{\kappa} \Gamma \Psi(t, \mathbf{r}), \quad (3)$$

де  $\Delta$  – це абсолютна величина діраківської маси,  $\sigma_{\kappa}$  – одна з матриць Паулі, яка діє у спіновому просторі (спіновий індекс  $\sigma$  присутній у (1) зараз опущено),  $\Gamma$  – це одна з чотирьох матриць  $I_4$ ,  $\gamma^3$ ,  $i\gamma^5$ ,  $\gamma^3\gamma^5$ . Далі детально обговорюється їх фізичний зміст та трансформаційні властивості при  $P$ ,  $T$  та  $C$  перетвореннях, які підсумовані у Таблиці 2.1. Поява таких членів можлива завдяки кулонівській взаємодії між квазічастинками в графені, особливо коли прикладене зовнішнє магнітне поле. У *підрозділі 2.6* розглянуті діраківські рівні Ландау в загальному випадку, коли до лагранжіану (1) доданий масовий член (3). (Деталі обчислень наведені у *Додатках А і Б*.) У найпростішому випадку  $\Delta=0$  вони мають енергії

$$E_n = \pm \left( \frac{e \hbar v_F^2 B 2n}{c} \right)^{1/2} \approx \pm 420 \sqrt{n} \sqrt{B[\text{T}]} \text{ К}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

У більш загальному випадку з масами  $\Delta \sigma_0$  ( $I_4$ ,  $\gamma^3$ ,  $i\gamma^5$ ) рівні енергії зображені на Рис.1с. З цього рисунку легко побачити властивість найнижчого рівня Ландау (НРЛ), яка полягає у тому, що виродження становить половину виродження вищих рівнів. Оскільки ця властивість НРЛ є принциповою для пояснення КЕХ у графені,



**Рис. 1.** Зонна структура графену. (а) Низькоенергетична лінійна дисперсія  $E(\mathbf{k})$  поблизу діраківських точок  $K_+$  та  $K_-$  при  $\mathbf{B}=0$ .

(б) Можлива модифікація спектру скінченною щільною (діраківською масою)  $\Delta$ . Хімічний потенціал (показаний горизонтальною лінією)  $\mu$  зсунутий від нуля напругою на затворі транзистора з графену.

(в) Рівні Ландау в діраківській теорії графену. Спінова ступінь свободи не враховується. Для заданого напрямку магнітного поля  $\mathbf{B}$ , яке прикладене перпендикулярно до площини графену, найнижчий ( $n=0$ ) рівень Ландау має енергію  $E_0 = -\Delta$  у точці  $K_+$  та  $E_0 = \Delta$  у точці  $K_-$ .

ми додамо декілька важливих деталей, які описані у *підрозділах 2.6 та 5.2*. Звідне представлення  $4 \times 4$   $\gamma$ -матриць, використане при записі лагранжіану (1), який

включає пару незалежних К точок на поверхні Фермі графену, зберігає парність. Воно містить у собі два незвідних представлення з різними парностями. НРЛ у незвідному представленні 2+1 вимірної діраківської теорії є спеціальним, оскільки залежно від того, яке з двох нееквівалентних незвідних представлень використано, цей рівень заповнений або електронами, або дірками, тоді як при  $n>1$  існують розв'язки рівняння Дірака, які описують як електрони, так і дірки. Суперпозиція обох спектрів, які відповідають двом нееквівалентним незвідним представленням, зрозуміло пояснює половинне заповнення НРЛ у графені, оскільки цей рівень може бути зайнятим дірками з  $K_+$  точки (коли  $\mu<0$ ) та електронами з  $K_-$  точки (коли  $\mu>0$ ). Треба особливо відзначити “релятивістський” масштаб енергій, який визначає відстань  $\Delta E = E_1 - E_0$  між рівнями Ландау в (4)

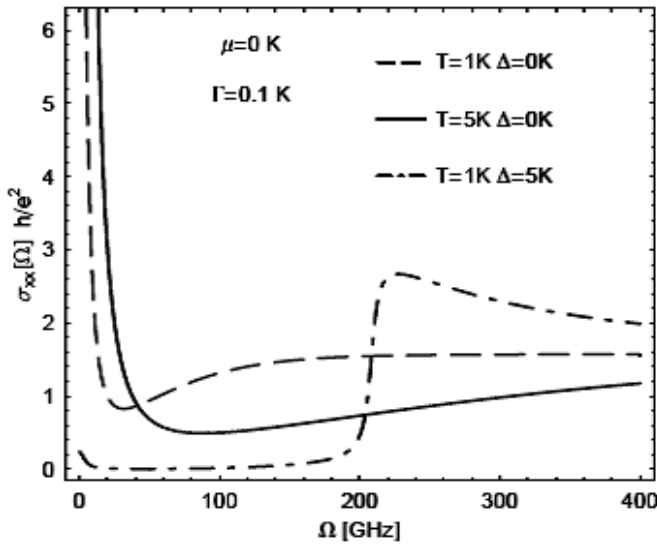
$$L(B) = \left( \frac{e \hbar v_F^2 B 2 n}{c} \right)^{1/2} \approx 420 \sqrt{B[\text{T}]} \text{K} \approx 36.3 \sqrt{B[\text{T}]} \text{meV}, \quad (5)$$

якщо для швидкості Фермі використати значення  $v_F \approx 10^6$  m/s . Це, наприклад, відповідає  $\Delta E \approx 2800$  K при  $B = 45$  T , що і робить можливим спостереження КЕХ у графені навіть при кімнатній температурі [12a].

У **ТРЕТЬОМУ РОЗДІЛІ** розглядається динамічна та статична електричні провідності діраківських ферміонів. Одержані загальні аналітичні вирази для діагональної та холлівської провідностей, які потім детально аналізуються. У *підрозділі 3.1* наведені загальні формальні вирази для електромагнітного відгуку, які впливають з формалізму Кубо. З їх використанням у *підрозділі 3.2* одержана і вивчена діагональна статична та динамічна електрична провідність у відсутності зовнішнього магнітного поля. (Деталі обчислень наведені у *Додатку В.*) Результат чисельного обрахунку цього виразу представлено на Рис.2. Із загального виразу для провідності  $\sigma_{xx}(\Omega)$  одержано багато корисних і досить простих виразів у різних граничних випадках. Зокрема, при  $T=\Delta=0$ , а також у границі нульового розсіяння на домішках ( $\Gamma=0$ ), маємо

$$\text{Re } \sigma_{xx}(\Omega) = \frac{2 \pi e^2}{h} |\mu| \delta(\Omega) + \frac{\pi e^2}{2h} \vartheta(|\Omega| - 2\mu), \quad h = 2\pi\hbar, \quad (6)$$

де  $\delta(\Omega)$  - це дельта-функція Дірака, а  $\vartheta(|\Omega| - 2\mu)$  – це ступенева функція Хевісайда. Перша частина (6), яка  $\sim \delta(\Omega)$ , відповідає внутризонному (Друде) члену. Вона містить  $\delta$ -функцію, оскільки записана у випадку  $\Gamma=0$ . Другий член (6) відповідає міжзонному вкладу. На великих частотах амплітуда цього вкладу не залежить від  $\Omega$ , і в наближенні, яке використане при одержанні всіх відповідних рівнянь, дорівнює по висоті  $\sigma_{opt} = \pi e^2 / (2 h)$ .



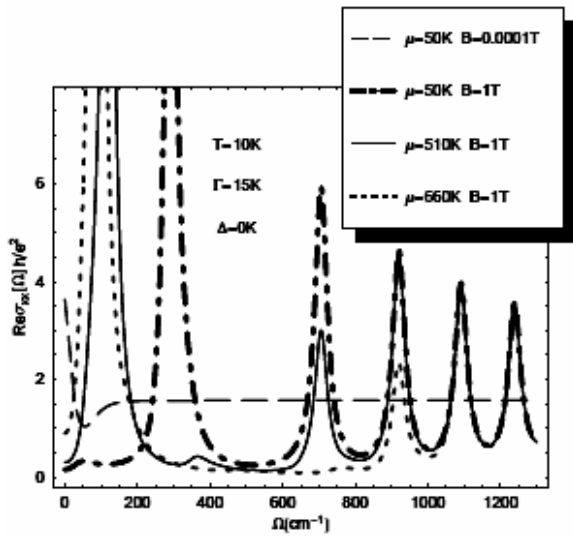
**Рис. 2.** Мікрохвильова провідність  $\sigma_{xx}(\Omega)$  в одиницях  $e^2/h$  як функція частоти  $\Omega$  у GHz. Лінія з довгими штрихами для  $T=1$  К, а суцільна лінія для  $T=5$  К. В обох випадках  $\mu=\Delta=0$  К та  $\Gamma=0.1$  К. Штрихпунктирна лінія для щілини  $\Delta=5$  К та  $T=1$  К.

Взагалі, можна показати, що

$$\sigma_{xx}(\Omega) = \frac{\pi e^2}{2h}, \quad \Omega \gg |\mu|, \Delta, T, \quad (7)$$

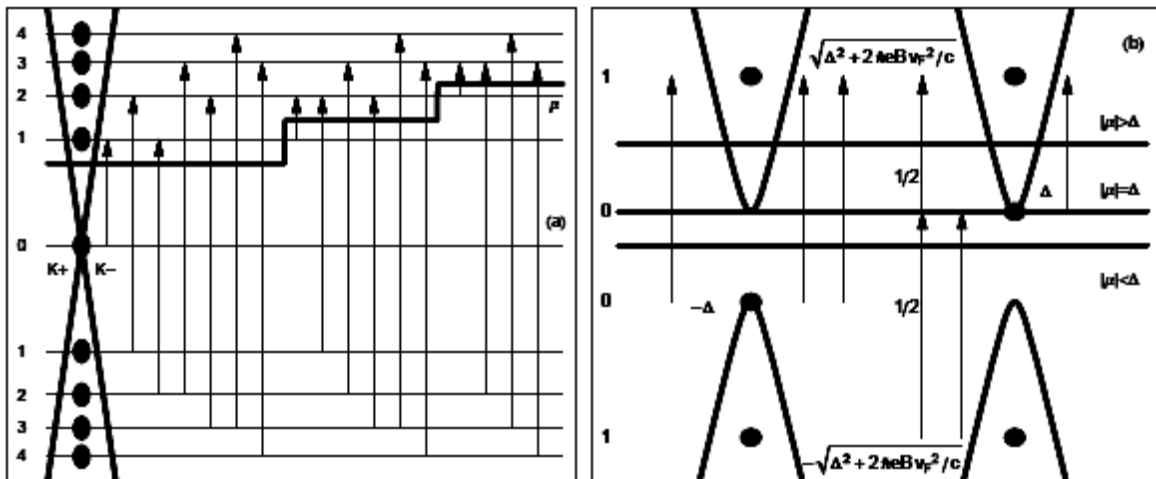
де, звичайно,  $\Omega$  повинно бути меншим, ніж границя зони. У підрозділі 3.2.3 робиться огляд експериментальних та новітніх теоретичних результатів. Зокрема, обговорюються роботи [8а,9а,10а], які підтвердили передбачення (6) та (7) експериментально.

У підрозділі 3.3 одержана і вивчена діагональна та холлівська статична та динамічна електричні провідності у зовнішньому магнітному полі. На початку у підрозділі 3.3.1 наведена електронна функція Гріна у зовнішньому магнітному полі, яка побудована у Додатку Г методом Швінгера. У неї феноменологічним чином введено затухання квазічастинок, яке пов'язане з розсіянням на домішках,  $\Gamma_n(\omega) = -\text{Im} \Sigma_n(\omega)$ , де  $\Sigma_n(\omega)$  – це власна енергія квазічастинок, а  $n$  – індекс рівня Ландау. Розглядається два випадки: (i)  $\Gamma(\omega) = \Gamma_n(\omega)$  є незалежним від індекса  $n$  рівня Ландау; (ii)  $\Gamma_n = \Gamma_n(\omega)$  є незалежним від енергії  $\omega$ . У підрозділі 3.3.2 для цих двох випадків одержані аналітичні вирази для динамічних провідностей  $\sigma_{xx}(\Omega, B, T, \mu, \Gamma, \Delta)$  та  $\sigma_{xy}(\Omega, B, T, \mu, \Gamma, \Delta)$ . (Деталі обчислень наведені у Додатку Д.) Обговорюється, як у випадку (i) у границі  $B \rightarrow 0$  одержати вираз для  $\sigma_{xx}(\Omega, T, \mu, \Gamma, \Delta)$  з попереднього підрозділу 3.2. Далі у підрозділі 3.3.3 на основі аналітичних виразів, що відповідають випадку (ii), також розглянуто границю малих полів. У підрозділі 3.3.4 проведено детальний чисельний та аналітичний аналіз одержаних виразів. На Рис.3 наведено результат одного з чисельних обрахунків.



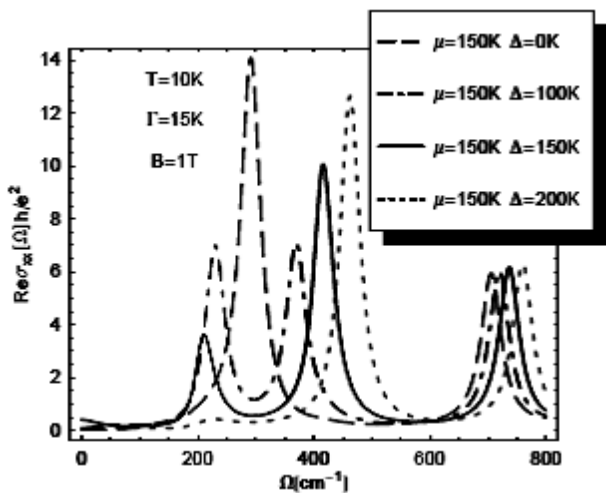
**Рис. 3.** Дійсна частина поздовжньої провідності,  $\sigma_{xx}(\Omega)$  в одиницях  $e^2/h$  як функція частоти  $\Omega$  у  $\text{cm}^{-1}$  для температури  $T=10$  К, розсіяння на домішках  $\Gamma=15$  К. Довгоштрихова лінія – хімічний потенціал  $\mu=50$  К і магнітне поле  $B=10^{-4}$  Т штрихпунктирна лінія -  $\mu=50$  К і  $B=1$  Т, суцільна лінія -  $\mu=510$  К і  $B=1$  Т, короткоштрихова лінія -  $\mu=660$  К і  $B=1$  Т.

Особлива увага була приділена еволюції ліній поглинання при зміні хімічного потенціалу, який, у свою чергу, легко змінюється при зміні напруги на затворі польового транзистору з графену. Цю еволюцію легко зрозуміти з Рис. 4 а.



**Рис. 4.** (а) Схематичне представлення дозволених переходів між рівнями Ландау з  $n=0,1,..4$  показаними як суцільні кола для додатних та від'ємних діраківських конусів. Пара діраківських конусів з вершинами у  $K_+$  та  $K_-$  точках зони Бриллюена графену (див. Рис.1) зібрана разом. Три величини хімічного потенціалу показані горизонтальною лінією. Ліворуч показані переходи для випадку, коли  $\mu$  знаходиться між  $n=0$  і  $n=1$ , посередині - між  $n=1$  і  $n=2$ , та праворуч - між  $n=2$  і  $n=3$ . (б) Можливі оптичні переходи між рівнями Ландау при наявності екситонної щілини  $\Delta$ . Показано дві пари конусів у  $K_+$  та  $K_-$  точках. Зображено рівні Ландау для  $n=0$  з енергіями  $-\Delta$  (у  $K_+$  точці) та  $\Delta$  (у  $K_-$  точці), та для  $n=1$ .

Перша лінія зі стрілкою ліворуч відповідає першому піку на штрих-пунктирній лінії на Рис.3. Вона є незвичайною тим, що одночасно відповідає внутризонним та міжзонним переходам і одразу зникає зі зміною хімічного потенціалу, тоді як всі інші міжзонні лінії спочатку зменшують їхню інтенсивність наполовину і тільки потім, коли  $\mu$  перетинає вищі енергетичні рівні, зникають повністю. При будь-якій величині  $\mu$  ця лінія ніколи не матиме половинну інтенсивність, і ця властивість є характерною ознакою діраківських квазічастинок. Також обговорюється використання динамічної провідності  $\sigma_{xx}(\Omega, V, T, \mu, \Gamma, \Delta)$  для одержання інформації про можливе відкриття щілини  $\Delta$ , пов'язане з порушенням симетрії у графені. Відповідна схема переходів представлена на Рис. 4 б. З неї випливає, що при  $\Delta < |\mu|$  один пік розщепиться на два, саме як показано на Рис.5. У підрозділі 3.3.4.2 робиться огляд експериментальних результатів з магнітооптичних вимірювань. Існуючі експериментальні дані узгоджуються з виразом для діагональної провідності, який одержано в дисертації. Більш того, тоді як перші дані цих вимірювань показували, що у великих магнітних полях щілина на НРЛ не відкривається, найновіші результати свідчать про присутність такої щілини.



**Рис. 5.** Дійсна частина поздовжньої провідності,  $\sigma_{xx}(\Omega)$  в одиницях  $e^2/h$  як функція частоти  $\Omega$  у  $\text{cm}^{-1}$  для температури  $T=10$  К, розсіяння на домішках  $\Gamma = 15$  К,  $B=1$  Т та хімічного потенціалу  $\mu = 150$  К для 4 величин екситонної щілини  $\Delta$ . Довгоштрихова лінія -  $\Delta = 0$  К, штрих-пунктирна лінія -  $\Delta = 100$  К, суцільна -  $\Delta = 150$  К, короткоштрихова -  $\Delta = 200$  К.

У підрозділі 3.4 розглядаються оптичні правила сум для діагональної та холлівської провідностей. Цей підрозділ починається із загальної інформації про оптичні правила сум та необхідність їх узагальнення для графену. Вказується, що коли розглядаються правила сум, необхідно вийти за межі діраківського наближення (1) та використовувати модель на гратці. Правило сум для діагональної провідності  $\sigma_{xx}(\Omega)$  одержано у підрозділі 3.4.2. (Деталі обчислень відокремлені у Додаток Е.) Показано, що узагальнення звичайного правила сум призводить до неправильного результату, і правильний шлях полягає у застосуванні заміни Пайерлса з самого початку, у первинному гамільтоніані графену на гратці. Правило сум для холлівського кута одержано у підрозділі 3.4.3. На відміну від набагато більш відомого правила сум для  $\sigma_{xx}(\Omega)$ , це правило записується для оптичного холлівського кута  $t_H(\Omega) = \sigma_{xy}(\Omega)/\sigma_{xx}(\Omega)$ , який грає роль функції відгуку на

інжектований струм, а не на прикладене поле:

$$j_x(\Omega) = \sigma_{xy}(\Omega)E_y(\Omega) = t_H(\Omega)j_y(\Omega), \quad j_y(\Omega) = \sigma_{xx}(\Omega)E_y(\Omega). \quad (8)$$

Холлівське правило сум стверджує, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega t_H(\omega) = \omega_H, \quad (9)$$

де  $\omega_H$  – холлівська частота, яка для випадку вільних електронів відповідає циклотронній частоті

$$\omega_c^{NR} = \frac{eB}{m_e c}, \quad (10)$$

де  $m_e$  – це маса електрона. Циклотронна частота  $\omega_c$  для діраківських квазічастинок визначається іншим чином

$$\omega_c = \frac{eB v_F^2}{c |\mu|}. \quad (11)$$

Оскільки ця частота розходиться при  $\mu \rightarrow 0$ , виникає питання, що слід використовувати в якості холлівської частоти у правій частині (8). Показано, що у графені холлівська частота дорівнює

$$\omega_H = -\frac{2 \operatorname{sgn}(eB)}{9 \pi \alpha} L^2(B) \frac{\mu^2 \operatorname{sgn}(\mu)}{\hbar t^3}, \quad \alpha \approx 0.61. \quad (12)$$

Тут  $L(B)$  – це масштаб Ландау, який визначено у (5),  $t$  – параметр перескоку, який зв'язаний зі швидкістю Фермі  $v_F$  співвідношенням  $v_F = \sqrt{3} t a / (2\hbar)$ , де  $a$  – це постійна гексагональної ґратки графену.

У **ЧЕТВЕРТОМУ РОЗДІЛІ** розглядаються квантові магнітні осциляції (МО) та ефект Нернста для діраківських ферміонів. Для початку у *підрозділі* 4.1 розглянуті осциляції густини станів (ГС). Зокрема, у *підрозділі* 4.1.2.1 детально обговорюється ідентифікація діраківських квазічастинок з вимірювань фази МО. Взагалі, осцилюючий фактор, який входить у ГС, або в інші величини, що описують МО (див. також формулу (16) нижче для осциляцій Шубнікова - де Гааза) можна записати у наступній формі

$$D_{osc} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left[ 2\pi k \left( \frac{B_F}{B} + \frac{1}{2} + \beta \right) \right], \quad (13)$$

де  $B_F$  - це частота осциляцій по  $1/B$ , а  $\beta$  - їх фаза ( $0 < \beta < 1$ ). Прямим обчисленням ГС для масивних діраківських ферміонів показано, що  $\beta=1/2$ , тоді як значення фази  $\beta=0$  (або  $\beta=1$ ) відповідає нерелятивістському 2D електронному газу. Саме той факт, що вимірювання фази осциляцій Шубнікова - де Гааза у графені [6а,7а] показали, що  $\beta=1/2$  і дозволив стверджувати, що квазічастинки у графені є діраківськими. У підрозділі 4.2 із загальних виразів для  $\sigma_{xx}(\Omega, B, T, \mu, \Gamma, \Delta)$  та  $\sigma_{xy}(\Omega, B, T, \mu, \Gamma, \Delta)$ , які були одержані у попередньому розділі, отримані зручні для подальшого аналізу представлення для поздовжньої та холлівської статичних провідностей. Проаналізовані різноманітні граничні випадки. Зокрема, при розгляді класичної границі натуральним чином виникає циклотронна частота (11)

$$\omega_c = \frac{eB}{m_c c}, \quad (14)$$

яка зараз переписана через фіктивну “релятивістську” масу

$$m_c = \frac{|\mu|}{v_F^2}. \quad (15)$$

У підрозділі 4.3 з виразу для статичної провідності  $\sigma_{xx}(B, T, \mu, \Gamma, \Delta)$  з попереднього підрозділу одержано наступне представлення для осцилюючої частини провідності, яке описує осциляції Шубнікова - де Гааза

$$\sigma_{osc} = \sigma_0 \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left[ \frac{\pi k c (\mu^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)}{e \hbar v_F^2 B} \right] R_T(k, \mu) R_D(k, \mu), \quad (16)$$

$$\sigma_0 = \frac{4e^2 \Gamma}{\pi \hbar |\mu|} \frac{(\mu^2 - \Delta^2 + \Gamma^2) \vartheta(\mu^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)}{\omega_c^2 + 4\Gamma^2},$$

де ми ввели температурний фактор

$$R_T(k, \mu) \equiv R_T(t_k) = \frac{t_k}{\sinh t_k}, \quad t_k = \frac{2 \pi^2 k T c \mu}{e \hbar v_F^2 B} \quad (R_T(0) = 1) \quad (17)$$

та фактор Дінгла

$$R_D(k, \mu) = \exp \left[ -\frac{2\pi k\Gamma c |\mu|}{e \hbar v_F^2 B} \right]. \quad (18)$$

У *підрозділі* 4.3.2.1 детально обговорюється ідентифікація діраківських квазічастинок з вимірювань температурного фактору. Суттєвим є те, що фактор Дінгла та температурний фактор для нерелятивістських систем

$$R_D^{NR}(k) = \exp \left[ -\frac{2\pi k\Gamma}{\hbar \omega_c^{NR}} \right], \quad R_T^{NR}(k) = \frac{t_k}{\sinh t_k}, \quad t_k = \frac{2\pi^2 k T}{\hbar \omega_c^{NR}} \quad (19)$$

з нерелятивістською циклотронною частотою (10) не залежать від концентрації носіїв, тоді як (17) та (18) залежать від концентрації через присутність  $\mu$ . Формально, виразам (17) та (18) можна також надати звичайну форму, якщо замінити  $\omega_c^{NR}$  на релятивістську циклотронну частоту (11). Більш того, як видно з (14) та (15), навіть самій циклотронній частоті можна надати звичайний нерелятивістський вигляд, якщо переписати її через “релятивістську” масу (15). Якщо тепер використати співвідношення між хімічним потенціалом  $\mu$  та густиною (дисбалансом густини) носіїв  $\rho$  для релятивістських квазічастинок, то можна показати, що циклотронна маса у графені  $m_c = (\pi \hbar^2 |\rho| / v_F^2)^{1/2}$  залежить від густини носіїв. Сама така залежність  $m_c \sim \rho$  була встановлена у роботах [6a,7a] при вимірюваннях концентраційної залежності фактора  $R_T$ . *Це стало доказом того, що квазічастинки в графені мають лінійний закон дисперсії.* У *підрозділі* 4.4 досліджені холлівський кут та коефіцієнт Нернста. Розвинений у дисертації підхід також дозволяє обрахувати інші транспортні коефіцієнти, такі як тензори теплопровідності  $\kappa_{ij}(B, \Gamma, \Delta)$  та термоелектричної (Пельтьє) провідності  $\beta_{ij}(B, \Gamma, \Delta)$ . У дисертації розглядалась низькотемпературна границя і сигнал Нернста

$$e_y(T, B) = -\frac{E_y}{\nabla_x T} \quad (20)$$

знаходився з похідної холлівського кута  $\Theta_H = \arctg \sigma_{xy} / \sigma_{xx}$  по  $\mu$ . У *підрозділі* 4.4.1 одержано декілька простих аналітичних виразів для  $e_y$  та робиться висновок, що у чистих системах сигнал Нернста поблизу від точки Дірака  $\mu \approx 0$  може бути дуже великим. *Тобто великий та додатний сигнал Нернста є ще однією ознакою діраківських квазічастинок.* Відзначимо, що саме така поведінка сигналу Нернста мала місце у найновіших експериментах (див., наприклад, [11a]), де спостерігався дуже великий пік Нернста 50  $\mu\text{V/K}$  (при 8Т) у точці Дірака. У немагнітних металах цей сигнал дуже малий ( $\sim 10$  nV/K на tesla). У *підрозділі* 4.4.2 розглянуті ілюстрації

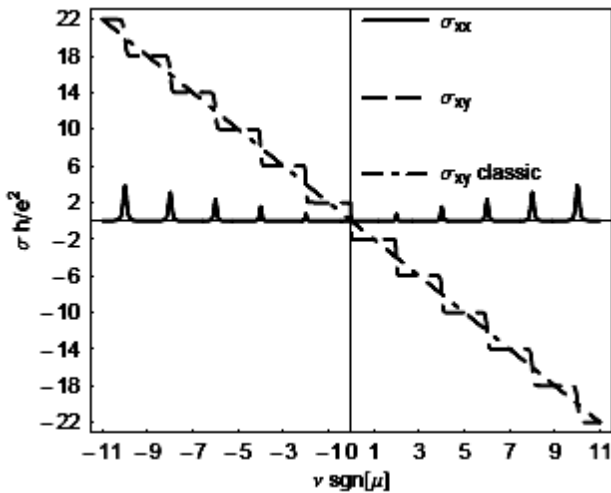


аналітичних результатів та обговорюється можливість визначення щілини  $\Delta$  з вимірювань холлівського кута.

У **П'ЯТОМУ РОЗДІЛІ** розглядається головний результат дисертаційної роботи - аномальний квантовий ефект Холла (КЕХ) у графені, а також розглядаються крайові стани у випадку сильних полів, коли з'являються нові плато із заповненням  $\nu = 0, \pm 1$ . У ввідному *підрозділі* 5.1 сформульована проблема, як фундаментальна різниця між властивостями рівнів Ландау у теорії Дірака (див. рівняння (4)) та теорії Шрьодінгера може спостерігатись у цілочисельному КЕХ. У *підрозділі* 5.2 із загального виразу, одержаного у попередньому розділі, одержано представлення для холлівської провідності у границі  $\Gamma \rightarrow 0$  у вигляді ряду. (Деталі обчислення наведені у *Додатку Ж*.) Показано, що цей вираз відповідає наступному правилу квантування провідності

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \nu, \quad \nu = \pm 4 \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (21)$$

Коефіцієнт 4 у (21) виникає через подвійне виродження по долинах  $K_{\pm}$  та по спінах. Ілюстрація цього квантування наведена на Рис.6. Оскільки у невеликих полях можна знехтувати розщепленням Зеємана, наше визначення фактору заповнення  $\nu_B = \pi \hbar c |\rho| / |eB|$  на Рис.6 також включає спінове виродження.

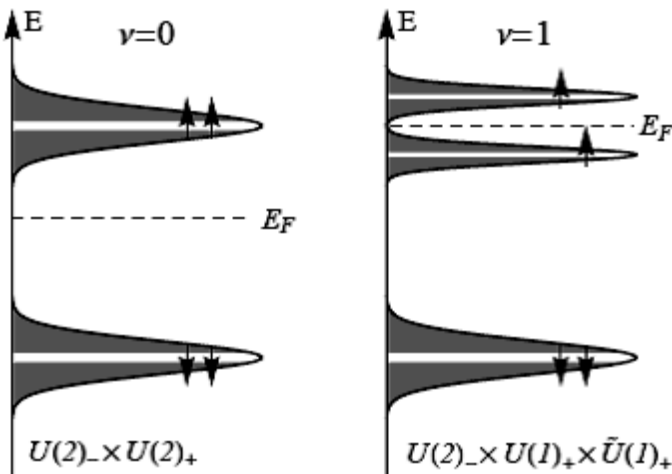


**Рис. 6.** Холлівська провідність  $\sigma_{xy}$  та діагональна провідність  $\sigma_{xx}$  у одиницях  $e^2/h$  як функція фактору заповнення  $\nu_B = 2n + 1$  при  $T = 2$  К,  $\Gamma = 1$  К та  $B = 2$  Т. Ми приймаємо, що  $\Delta = 0$ . Прямая лінія відповідає класичній залежності  $\sigma_{xy} = -e^2 c |\rho| \operatorname{sgn} \mu / B$ .

Поява непарних чисел у (21) ретельно розтлумачується у цьому підрозділі. Одне з пояснень базується на вищезгаданій властивості НРЛ, що його виродження дорівнює тільки половині виродження рівнів з  $n > 0$ . Про це й свідчить вдвічі менша висота плато з  $\sigma_{xy} = \pm 2e^2/h$ , яка прямо вказує на те, що НРЛ з  $E_0 = 0$  містить в собі тільки половину звичайного числа станів з зони провідності, а другу половину бере з зони валентності.

*Підрозділ* 5.3 присвячено дослідженню крайових станів у КЕХ у графені у сильних магнітних полях, коли з'являються нові плато з факторами заповнення  $\nu =$

$0, \pm 1, \pm 4 \dots$  На початку, у *підрозділі* 5.3.1 зроблено огляд головних експериментальних результатів та літератури з порушення симетрії в графені. Відзначається, що тоді як досі багато незвичайних властивостей графену було пояснено у рамках невзаємодіючої теорії Дірака, ефекти взаємодії між квазічастинками є істотними. Саме вони відповідальні за появу нових плато у КЕХ з факторами заповнення  $\nu = 0, \pm 1, \pm 4$ . З теоретичної точки зору, ці плато пов'язані із зняття наближеного виродження чотирьох підрівнів, що входять до НРЛ. Це виродження є наслідком обговореної у *підрозділі* 2.1.2 “ароматної”  $U(4)$  симетрії. Зокрема, як обговорюється у [9], плато  $\nu = 0$  може з'явитися або завдяки підсиленій спіновій щілині, або масовому члену. У деяких експериментальних роботах вважається необхідним присутність безщілинних крайових станів у новому КЕХ стані з  $\nu = 0$ , у *підрозділі* 5.3 досліджуються умови існування таких безщілинних станів. Структура енергетичних підрівнів для НРЛ у випадку ненульової спінової щілини показана на лівій частині Рис.6. Для того, щоб пояснити КЕХ плато з  $\nu = \pm 1$ , необхідні два різні параметри порядку. Наприклад, найпростіша з можливих структура енергетичних підрівнів для  $\nu = +1$  стану показана у правій частині Рис.7. У *підрозділі* 5.3.2 представлено модельний лагранжіан, який містить в собі узагальнення наведеного вище масового члену (3), та описує загальну динамічну ситуацію типу представленої на Рис.7.



**Рис. 7.** Ілюстрація розщеплення найнижчого рівня Ландау (НРЛ), яке необхідно, щоб пояснити існування  $\nu = 0$  та  $\nu = +1$  плато у КЕХ у графені.

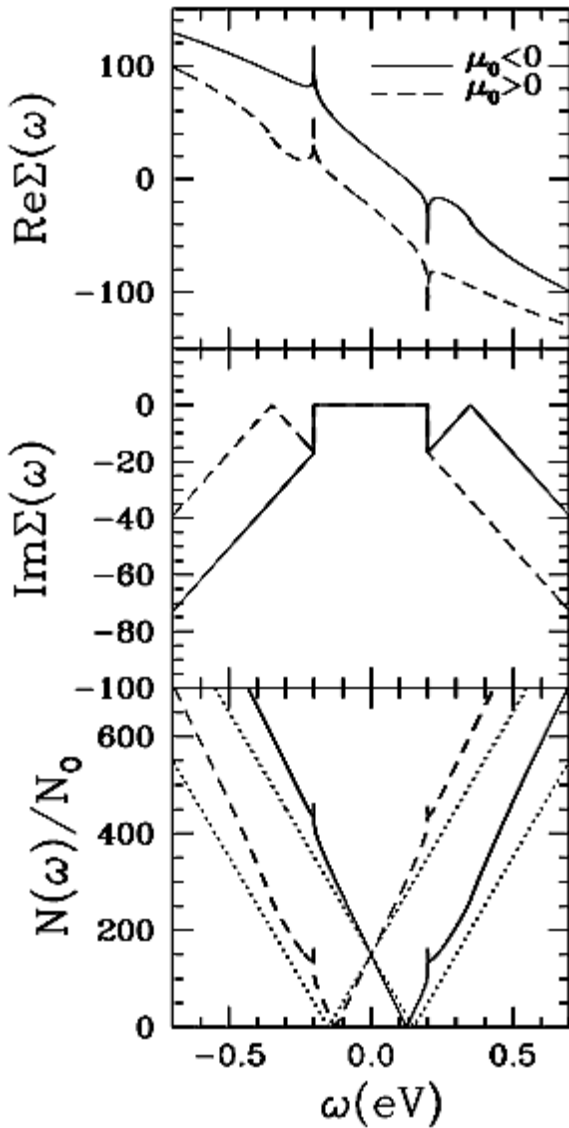
Спектр відповідного рівняння Дірака розглядається у *підрозділі* 5.3.3. Крайові стани на зигзагоподібному краю обговорюються у *підрозділі* 5.3.4. Сформульовано критерій існування безщілинних станів. Отримані результати обговорюються у *підрозділі* 5.3.5, де також наведені результати для кріслоподібного краю. Зроблений аналіз синглетних та триплетних діраківських мас [відносно долинної групи симетрії  $SU(2)$ ] показав, що спектральні властивості зигзагоподібних та кріслоподібних країв залежать від (i) відносної амплітуди мас та хімічних потенціалів, та (ii) типів мас.

У **ШОСТОМУ РОЗДІЛІ** розглядається електрон-фононна взаємодія (ЕФВ) у графені. Підрозділ 6.1 має оглядовий характер, у ньому робиться порівняння ролі ЕФВ у звичайних металах та графені. У підрозділі 6.2 введена модель Парка *та ін.*, яка здатна описувати фононний спектр графену з досить великою точністю, розглядаючи єдину фононну оптичну гілку з частотою  $\omega_E = 200 \text{ meV}$ . Але, на відміну від моделі Парка, ми розглядаємо електронну ГС  $N(\omega)$  самоузгодженим чином, тобто при чисельному обрахунку власної енергії електронів  $\Sigma(\omega)$  використовується вже не гола лінійна ГС (див. рівняння (22) нижче), а повна ГС, яка містить в собі вплив  $\Sigma(\omega)$ . У добрих металах у діапазоні енергій, важливому для електрон-фононної взаємодії, поблизу від поверхні Фермі електронна ГС майже не змінюється. Тільки її значення при хімічному потенціалі є важливим. У більш складних системах, таких як, наприклад,  $A15$  сполуки, раніше було встановлено, що це наближення не працює. У цьому випадку повинна використовуватись саме самоузгоджена ГС, як і зроблено для графену. Для одержання простих аналітичних результатів та подальшого порівняння із самоузгодженими результатами у підрозділі 6.2.1 детально досліджена ЕФВ у першому наближенні, без самоузгодження. У цьому випадку власна енергія  $\Sigma(\omega)$  обчислюється для голої, не взаємодіючої ГС

$$\frac{N(\omega)}{N_0} = |\omega + \mu_0|, \quad -W - \mu_0 < \omega < W - \mu_0, \quad (22)$$

де  $\mu_0$  - це голий хімічний потенціал, тобто без електрон-фононної ренормалізації, а  $W$  - це ширина зони. На Рис.8 для ілюстрації ми показуємо результати для  $\text{Re } \Sigma(\omega)$ ,  $\text{Im } \Sigma(\omega)$  та першої ітерації  $N(\omega)$ . Значення електрон-фононного параметру  $A$  взято  $250 \text{ meV}$ . Відповідне спектральне підсилення маси  $\lambda = 2A/\omega_E = 2.5$ . Цей параметр дуже сильно відрізняється від справжнього підсилення маси, позначеного через  $\lambda_{eff}$  і яке у графені описує ренормалізацію швидкості, оскільки носії є безмасовими.  $\text{Im } \Sigma(\omega)$  дорівнює нулю при  $-\omega_E < \omega < \omega_E$ , а на границях цього інтервалу стрибає до скінченного значення, оскільки стає можливим розпад квазічастинок завдяки утворенню бозонів. У звичайних металах це розсіяння залишалось би постійним вище  $\omega_E$ , оскільки густина електронних станів при  $\omega - \omega_E$  є постійною. Це не так у графені, де  $N(\omega - \omega_E)$  змінюється. У більш реалістичних обрахунках існує також скінченний внесок у власну енергію від акустичних фононів так, що  $\text{Im } \Sigma(\omega)$  ніколи б не дорівнювала нулю, як ми маємо зараз. У графені їхній внесок, однак, є малим. За означенням  $\lambda_{eff}$  у границі  $\omega \rightarrow 0$  маємо

$$\Sigma(\omega) = -\lambda_{eff} \omega + \text{Re}\Sigma(\omega = 0). \quad (23)$$



**Рис. 8.** Дійсна (згори) та уявна (посередині) частини власної енергії  $\Sigma(\omega)$  та густина станів  $N(\omega)$  (знизу) (всі у meV одиницях), як функції  $\omega$  у eV при  $\mu_0 = 150$  meV. Штрихова лінія для  $\mu_0 > 0$  та суцільна лінія для  $\mu_0 < 0$ . Гола ГС (22) показана лінією з короткими штрихами.

Для реалістичних значень параметрів величина параметру ренормалізації маси  $\lambda_{eff}$  змінюється від 0.2 до 0.4 у залежності від допінгу. Цей параметр, оскільки у графені носії є безмасовими, описує ренормалізацію швидкості,

$$v_F \rightarrow v_F^* = \frac{v_F}{1 + \lambda_{eff}} . \quad (24)$$

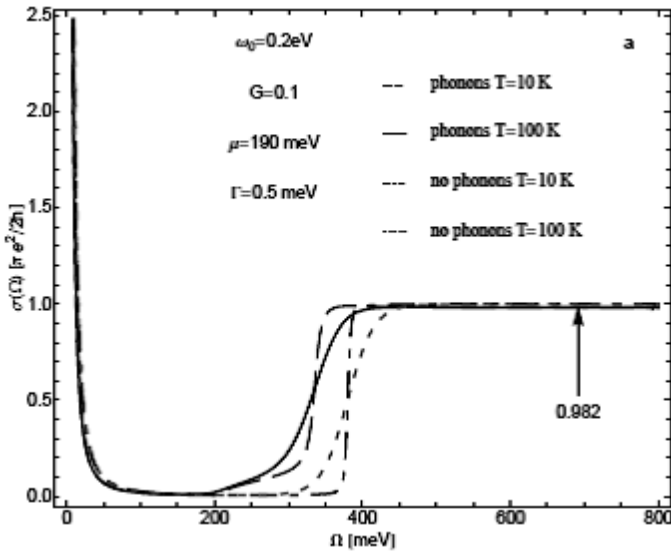
Величина  $\text{Re}\Sigma(\omega=0)$  також є дуже важливою і зв'язує взаємодіючий ( $\mu$ ) і невзаємодіючий ( $\mu_0$ ) хімічні потенціали наступним чином

$$\mu = \mu_0 + \text{Re}\Sigma(\omega = 0). \quad (25)$$

Ми показуємо, що у певному наближенні за перенормування  $\mu$  також відповідає фактор  $(1 + \lambda_{eff})^{-1}$ , тобто

$$\mu_0 \rightarrow \mu = \frac{\mu_0}{1 + \lambda_{eff}}. \quad (26)$$

Показано, що подібним чином перенормується і положення діраківської точки. У підрозділі 6.2.2 ЕФВ досліджується із врахуванням самоузгодження. Показано, що при невеликих заповненнях перша ітерація дає гарну оцінку величини  $\lambda_{eff}$ . У підрозділі 6.3 досліджується вплив ЕФВ на оптичну провідність графену. На Рис.9 порівняно результати для динамічної провідності  $\text{Re}\sigma_{xx}(\Omega)$  з та без фононів при двох значеннях температури. Тоді як у випадку голої зони основне підвищення провідності до універсального значення має місце при енергії  $2\mu_0$ , електрон-фононна ренормалізація, відповідно до (26), зсунула це підвищення до значення перенормованого хімічного потенціалу при  $2\mu$ , яке є суттєво меншим.



**Рис. 9.** Провідність  $\text{Re}\sigma_{xx}(\Omega)$  в одиницях  $\pi e^2/2h$  (універсального значення) для голої зони: штрихпунктирна чорна лінія при  $T=10$  К та короткоштрихова лінія при  $T=100$  К. Лінії з фононами ( $\omega_E = 0.2$  eV і  $G=0.1$ ) – довгоштрихова  $T=10$  К та суцільна з  $T=100$  К. В усіх випадках  $\mu = 190$  meV і  $\Gamma = 0.5$  meV.

Відзначимо, що при вищих значеннях енергії гола провідність зростає до свого універсального значення (6), тоді як перенормована залишається трохи меншою ніж 1 в обраних одиницях. Другою властивістю довгоштрихової одягнутої лінії у порівнянні з короткоштриховою кривою для голої зони є область, яка починається при  $\Omega = \omega_E$  і продовжується приблизно до  $2\mu$  (подвійний одягнутий хімічний потенціал). У випадку голої перенормованої зони провідність у цій області повністю пласка і мала, але одягнута крива має додаткове поглинання, яке починається з  $\Omega = \omega_E$  та суттєво зростає, коли  $\Omega$  наближається до  $2\mu$ . Це пов'язано з поглинанням за участю холстейнівського бозону, коли утворюється пара з дірки та частинки, і в кінцевому стані також присутній фонон. Такі процеси є добре відомими у звичайних металах і відповідають некогерентній частині електронної спектральної функції, яка виникає завдяки зв'язку з фононами.

У **СЬОМОМУ РОЗДІЛІ** досліджується модель високотемпературного

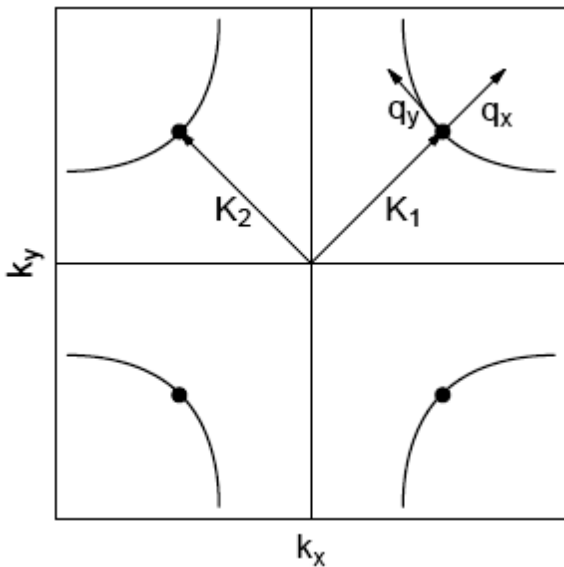
$d$ -хвильового надпровідника у надпровідному стані, котрий, на додаток до  $d$ -хвильового параметру порядку, має ще один параметр порядку іншої природи, пов'язаний або з хвилями спінової густини (ХСГ), або також з надпровідними  $is$ -, або  $id_{xy}$ -хвилями. Підрозділ 7.1 має оглядовий характер, у ньому обґрунтовується, що дослідження залежності надпровідної густини  $\rho(H)$  від зовнішнього магнітного поля  $H$  може бути використано для виявлення відкриття вторинної щілини у спектрі квазічастинкових збуджень. У підрозділ 7.2 на базі звичайного  $2 \times 2$  формалізму, у якому застосовуються звичайні спіори Намбу

$$\Psi^\dagger(\tau, \mathbf{k}) = \left( c_\uparrow^\dagger(\tau, \mathbf{k}), c_\downarrow(\tau, -\mathbf{k}) \right) \quad (27)$$

розроблено  $4 \times 4$  діраківський формалізм, який дозволяє описувати конкуруючі параметри порядку у  $d$ -хвильовому надпровіднику. Тут  $c_\sigma^\dagger(\tau, \mathbf{k}), c_\sigma(\tau, \mathbf{k})$  є, відповідно, операторами народження і знищення зі спіном  $\sigma = \uparrow, \downarrow$ . Цей формалізм має багато аналогій з формалізмом, використаним у попередніх розділах. Зокрема, роль  $K_\pm$  точок грають діагональні пари вузлів  $d$ -хвильового параметру порядку і відповідний 4- компонентний спіор

$$\Psi^\dagger(\tau, \mathbf{k}) = \left( c_\uparrow^\dagger(\tau, \mathbf{k}), c_\downarrow(\tau, -\mathbf{k}), c_\uparrow^\dagger(\tau, \mathbf{k} - \mathbf{Q}_i), c_\downarrow(\tau, -\mathbf{k} + \mathbf{Q}_i) \right) \quad (28)$$

де  $\mathbf{Q}_i = 2 \mathbf{K}_i$  – хвильовий вектор, який зв'язує вузли в діагональній парі  $i=1,2$ . Оскільки досліджуються низькотемпературні ( $T \ll T_c$ ) властивості системи, ми розглядаємо тільки оточення вузлів  $\mathbf{k} = \mathbf{K}_i + \mathbf{q}$  з  $|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{K}_i|$  як показано на Рис.10.



**Рис. 10.** Схематичний рисунок Фермі поверхні з векторами  $\mathbf{K}_i, i=1,2$ , та  $\mathbf{q}$ . Вектори ХСГ – це  $\mathbf{Q}_i = 2 \mathbf{K}_i$ .

Тоді у вузловому наближенні знову виникає ефективний КЕД $_{2+1}$  опис. У підрозділі 7.3 розвинутий у попередньому підрозділі формалізм використано для

отримання загального виразу для надпровідної густини. Для цього, як і у третьому розділі, використано “bubble approximation” з одягнутими ферміонними пропагаторами (тобто з власною енергією  $\Sigma$ , що робить внесок завдяки розсіянню на домішках), але нехтуючи вершинними та фермі-рідинними поправками. Встановлено загальні властивості надпровідної густини  $\rho_s$  у присутності конкуруючих порядків. У підрозділі 7.4 з використанням  $T$ -матричного формалізму досліджено вплив немагнітних домішок на залишкове розсіяння на домішках у присутності конкуруючого параметру порядку. У підрозділі 7.5 одержано декілька простих аналітичних виразів, які описують залежність надпровідної густини від розсіяння на домішках і величин конкуруючих щілин для ХСГ,  $id_{xy}$  та  $is$  впорядкувань у відсутності зовнішнього магнітного поля. Зокрема відтворюється відома лінійна залежність надпровідної густини від температури

$$\Lambda_s(T) \equiv \frac{\rho_s(T)}{m} = const - \frac{2 \ln 2 v_F}{\pi v_\Delta} T \quad (29)$$

де  $v_F$  – це швидкість Фермі у ВТНП, а  $v_\Delta$  – це так звана щілинна швидкість, яка визначається нахилом у вузлі щілини  $\Delta(\mathbf{k})$   $d$ -хвильового надпровідника. Показано, як у присутності вторинних щілин залежність (29) стає експоненційною при температурах, менших за величину вторинних щілин. Наприклад, для  $id_{xy}$  щілини маємо

$$\Lambda_s(T) = const - \frac{2 v_F}{\pi v_\Delta} \exp(-\Delta_{d_{xy}}/T), \quad \Delta_{d_{xy}} \gg T. \quad (30)$$

У протилежній границі залежність від  $T$  знову стає лінійною

$$\Lambda_s(T) = const - \frac{2 \ln 2 v_F}{\pi v_\Delta} T \left[ 1 - \frac{1}{8 \ln 2} \frac{\Delta_{d_{xy}}^2}{T^2} \right], \quad \Delta_{d_{xy}} \ll T. \quad (31)$$

У підрозділі 7.6 досліджена залежність надпровідної густини від зовнішнього поля у вихровому стані. Для цього використано феноменологічний підхід Воловіка, у якому присутність циркулюючих надструмів навкруги вихорів у змішаному стані прийнята до уваги за допомогою введення доплерівського зсуву квазічастинкових енергій,  $\omega \rightarrow \omega - \mathbf{v}_s(\mathbf{r})\mathbf{k}$ . Тут  $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$  – це надпровідна швидкість, залежна від розподілу вихорів, у позиції  $\mathbf{r}$ , та  $\mathbf{k}$  – це імпульс квазічастинок, в якості якого можна наближено взяти його значення у вузлі. Цей розподіл вихорів описується функцією

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{A} \int d^2 r \delta(\varepsilon - \mathbf{v}_s(\mathbf{r})\mathbf{k}), \quad (32)$$

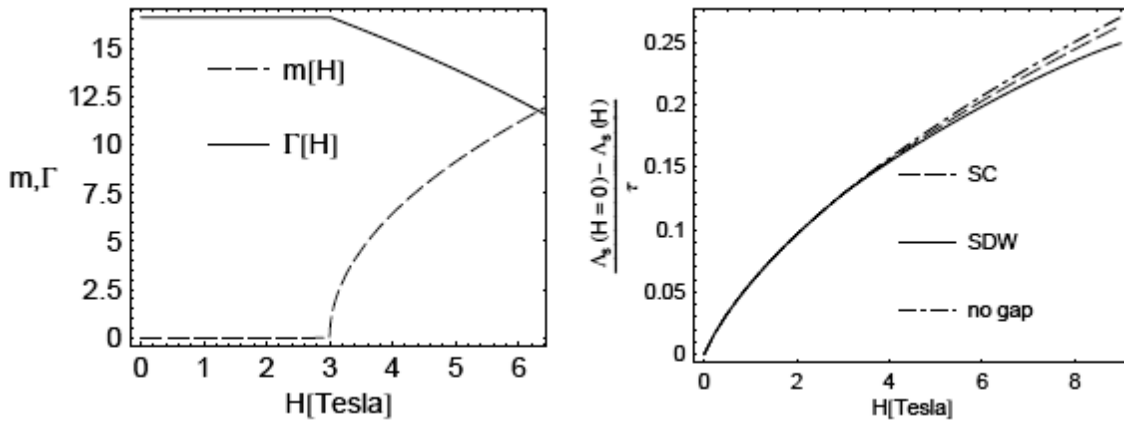
де інтегрування ведеться по одиничній комірці вихрової ґратки з площею  $A = \pi R^2$ . Декілька можливих варіантів вибору функції  $P(\varepsilon)$  обговорюється в літературі, цитованій у дисертації. Серед них слід відзначити розподіл для вихрової рідини

$$P(\varepsilon) = \frac{E_H^2}{2(\varepsilon^2 + E_H^2)^{3/2}}, \quad (33)$$

який є найбільш зручним для аналітичних обрахунків. Характерний масштаб енергії  $E_H$  у (33) і пов'язаний з доплерівським зсувом енергії у вихровому стані

$$E_H(H) = a \frac{\hbar v_F}{2R} = a \frac{\hbar v_F}{2} \left( \frac{\pi H}{\Phi_0} \right)^{1/2}, \quad (34)$$

де  $a$  – це геометричний фактор порядку одиниці і  $H$  це – магнітне поле, прикладене перпендикулярно до  $ab$  площини, а  $\Phi_0 = hc/2e$  – квант магнітного потоку. Хоча кінцеві результати залежать від вибору функції розподілу та величини  $a$ , якісні результати від цього не залежать. У розрахунках ми використали значення  $v_F = 2.5 \times 10^5$  m/s у сполуці LSCO, яке відповідає  $E_H$  [K] = 38 K T<sup>-1/2</sup>  $\sqrt{H}$  [T] [порівняйте з рівняннями (4) та (5)]. У зроблених розрахунках ефект доплерівського зсуву включено у формалізм функцій Гріна, який вже містить в собі розсіяння на домішках, за допомогою усереднення по розподілу  $P(\varepsilon)$ .



**Рис. 11.** Зліва: Модельна залежність ХСГ щілини  $m$  від прикладеного поля  $H$  та результуюча залежність розсіяння на домішках  $\Gamma$  від  $H$ .

Справа: Залежність  $\Delta_s(0) - \Delta_s(H)$  при  $T=0$  для  $d$ -хвильового надпровідника з вторинними ХСГ,  $id_{xy}$  щілинами (див. ліву панель цього рисунку), а також у відсутності конкуруючого порядку.



На Рис.11 ми наводимо одержані результати. Видно, що наявність конкуруючих порядків спричиняє відхилення польової залежності надпровідної густини  $\rho_s(H)$  від простої  $\sqrt{H}$  залежності, яку зазвичай пов'язують з доплерівським зсувом квазічастинкової енергії. Новим і досить важливим висновком є те, що такий ефект пов'язаний не тільки з розвитком конкуруючого порядку, але і з його впливом на остаточне розсіяння на домішках. Отримані результати обговорюються у *підрозділі 7.6*.

У *Додатках А і Б* описується розв'язок рівняння Дірака у зовнішньому магнітному полі, відповідно, у калібровці Ландау та симетричній калібровці. У *Додатку В* наведено деталі обчислення динамічної електропровідності у відсутності магнітного поля. У *Додатку Г* описується побудова електронної функції Гріна у зовнішньому магнітному полі за допомогою метода Швінгера. У *Додатку Д* наведено деталі обчислення динамічної діагональної та холлівської електропровідностей у зовнішньому магнітному полі. У *Додатку Е* наведено деталі обчислень діаманітного члену, який входить у правило сум для діагональної провідності, та правила сум для холлівської провідності. У *Додатку Ж* одержано представлення у вигляді ряду для статичної холлівської провідності для чистої системи.

## ВИСНОВКИ

У дисертації наведено теоретичне вирішення наукової проблеми щодо електронних властивостей двовимірних систем з діраківським енергетичним спектром. Для цього в дисертаційній роботі вказані та досліджені ті фізичні ефекти, за допомогою яких можна експериментально виявити існування діраківських квазічастинок у графені та визначити їх властивості. Також в дисертації розвинуто опис діраківських квазічастинок у надпровідному стані високотемпературних  $d$ -хвильових надпровідників у присутності вторинного параметру порядку. Головні результати дисертаційної роботи полягають у наступному. Доведено, що:

1. Циклотронна маса для діраківських ферміонів, яка входить у температурний фактор у відповідному виразі для амплітуди осциляцій Шубнікова-де Гааза, у графені залежить від хімічного потенціалу лінійним, а від густини носіїв – кореневим чином. Експериментальне спостереження [6а,7а] цієї залежності довело, що закон дисперсії квазічастинок у графені є лінійним.

2. Фаза квантових магнітних осциляцій для діраківських ферміонів (зокрема, осциляцій Шубнікова-де Гааза) зсунута на  $\pi$  по відношенню до відповідної фази для електронів у нерелятивістському двовимірному електронному газі. Цей зсув дорівнює  $\pi$  як для безмасових частинок, коли він співпадає з адіабатичною фазою Беррі для них, так і для масивних частинок, коли фаза Беррі починає залежати від маси. Зсув фази на  $\pi$  магнітних осциляції для діраківських ферміонів обумовлений тим, що енергія найнижчого рівня Ландау не залежить від магнітного поля. Експериментальне дослідження [6а,7а] діаграми Ландау дозволило встановити, що

фаза осциляцій Шубнікова-де Гааза зсунута на  $\pi$  по відношенню до відповідної фази у звичайних матеріалах, що доводить діраківський характер квазічастинок у графені.

3. Квантовий ефект Холла для діраківських ферміонів у графені є аномальним (напівцілим) з фактором заповнення  $\nu = \pm 4(n+1/2)$ ,  $n=0,1,\dots$ . Аномальність КЕХ викликана тим, що виродження найнижчого рівня Ландау дорівнює половині виродження вищих рівнів. Головним доказом існування діраківських ферміонів у графені стало саме спостереження незвичайного квантового ефекту Холла [6а,7а], передбачене у роботі [1] здобувача.

4. Сформульовано критерій існування безщілинних крайових станів у енергетичному спектрі в режимі із фактором заповнення  $\nu=0$ .

5. Універсальна оптична (динамічна) провідність для невзаємодіючих діраківських ферміонів, при енергіях фотонів  $\Omega \gg T, \mu$  ( $T$  – температура, а  $\mu$  – хімічний потенціал) визначається величиною  $\sigma_{opt} = \pi e^2 / (2h)$  [5]. Поведінка оптичної провідності має поріг, який залежить від концентрації носіїв, що нагадує ефект Бурштейна-Мосса у напівпровідниках. При  $\Omega < 2|\mu|$  оптична провідність майже відсутня, через блокування Паулі, а при  $\Omega > 2|\mu|$  провідність виходить на своє універсальне значення  $\sigma_{opt}$ . Саме така поведінка оптичної провідності спостерігалася в експериментальних роботах [8а,9а,10а].

6. Поблизу діраківської точки сигнал Нернста стає великим та додатним, сягаючи  $\sim 1 \mu\text{V/K}$  на 1 Tesla [2], що в  $10^2$  разів більше, ніж у звичайних системах. Така поведінка сигналу Нернста мала місце у нещодавніх експериментах [11а], де спостерігався дуже великий пік Нернста ( $50 \mu\text{V/K}$  при 8 T) у точці Дірака.

7. За еволюцією ліній поглинання електромагнітних хвиль при зміні хімічного потенціалу в графені можна здобути відомості про наявність аномального (найнижчого) діраківського рівня Ландау. При цьому перша лінія поглинання, яка пов'язана з цим рівнем, завжди має або повну інтенсивність, або цілком відсутня, тоді як усі інші лінії зникають у два кроки. Хоча й буквально описана еволюція ліній поглинання не спостерігалась, існуючі експерименти по магнітооптиці узгоджуються з виразом для діагональної динамічної магнітопровідності, який наведено у дисертації.

8. Одержані правила сум для діагональної та холлівської оптичної провідностей у графені. Як стало відомо, автори роботи [10а] обробляють свої експериментальні результати з використанням часткової спектральної ваги у спосіб, який дозволяє сподіватися, що представлені у дисертації результати для правила сум знайдуть своє використання.

9. У присутності електрон-фононної взаємодії величина оптичної провідності стає меншою, ніж розрахована універсальна величина  $\sigma_{opt}$ . На даний час експериментальні вимірювання цієї величини не мають такої точності, щоб можна було побачити відхилення від  $\sigma_{opt}$ , пов'язані із взаємодією.

10. У присутності параметру порядку іншої природи, який конкурує з  $d$ -хвильовою надпровідністю, залежність надпровідної густини від зовнішнього магнітного поля  $H$  відрізняється від простої  $\sim\sqrt{H}$  залежності, яку зазвичай пов'язують з доплерівським зсувом енергії квазічастинок.

### СПИСОК ЦИТОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- 1a. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films / K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov et al. // *Science* - 2004. - Vol. **306**, no. 5696.- Pp. 666–669.
- 2a. Wallace P.R. The band theory of graphite / P.R. Wallace // *Phys. Rev.* - 1947. Vol. 71, no.9. - Pp. 622–634.
- 3a. Semenoff G.W. Condensed-matter simulation of a three-dimensional anomaly / G.W. Semenoff // *Phys. Rev. Lett.* - 1984.- Vol. 53, no. 26.- Pp. 2449– 2452.
- 4a. Geim A.K. Graphene: Status and prospects / A.K. Geim // *Science.* - 2009.- Vol. 324, no. 5934. - Pp. 1530 –1534.
- 5a. Tsuei C.C. Pairing symmetry in cuprate superconductors / C.C. Tsuei, J. R. Kirtley // *Rev. Mod. Phys.* - 2000. - Vol. 72, no. 4. - Pp. 969–1016.
- 6a. Two-Dimensional Gas of Massless Dirac Fermions in Graphene / K.S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov et al. // *Nature* - 2005. - Vol. 438. - Pp. 197–200.
- 7a. Experimental Observation of Quantum Hall Effect and Berry's Phase in Graphene / Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormer, P. Kim // *Nature* - 2005. - Vol. 438. - Pp. 201–204.
- 8a. Gate-Variable Optical Transitions in Graphene / F. Wang, Y. Zhang, C. Tian et al. // *Science* - 2008. - Vol. 320, no. 5873. - Pp. 206–209.
- 9a. Universal dynamic conductivity and quantized visible opacity of suspended graphene / R. R. Nair, P. Blake, A. N. Grigorenko et al. // *Science* - 2008. - Vol. 320, no. 5881. - P. 1308.
- 10a. Dirac charge dynamics in graphene by infrared spectroscopy / Z. Q. Li, E.A. Henriksen, Z. Jiang et al. // *Nature Phys.* - 2008. - Vol. 4. – Pp. 532–535.
- 11a. Anomalous Thermoelectric Transport of Dirac Particles charge in Graphene / P. Wei, W. Bao, Y. Pu et al. // *Phys. Rev. Lett.* - 2009.- Vol. 102, no. 16.- P.166808.
- 12a. Room-Temperature Quantum Hall Effect in Graphene / K.S. Novoselov, Z. Jiang, Y. Zhang et al. // *Science* - 2007. - Vol. 315, no. 5817. - P. 1379.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Gusynin V. P. Unconventional Integer Quantum Hall Effect in Graphene / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov // *Phys. Rev. Lett.* - 2005. - Vol. 95, no. 14. - P. 146801.
2. Gusynin V. P. Transport of Dirac quasiparticles in graphene: Hall and optical conductivities / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov // *Phys. Rev. B.* - 2006. - Vol. 73, no. 24. - P. 245411.
3. Sharapov S. G. Magnetic oscillations in planar systems with the Dirac-like spectrum of quasiparticle excitations / S. G. Sharapov, V. P. Gusynin, H. Beck // *Phys. Rev. B.* - 2004. - Vol. 69, no. 7. - P. 075104.
4. Gusynin V. P. Magnetic oscillations in planar systems with the Dirac-like spectrum of quasiparticle excitations. II. Transport properties / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov // *Phys. Rev. B.* - 2005. - Vol. 71, no. 12. - P.125124.
5. Gusynin V. P. Unusual Microwave Response of Dirac Quasiparticles in Graphene / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, J. P. Carbotte // *Phys. Rev. Lett.* – 2006. - Vol. 96, no. 25. - P. 256802.
6. Sharapov S. G. Transport properties in the d-density-wave state in an external magnetic field: The Wiedemann-Franz law / S. G. Sharapov, V. P. Gusynin, H. Beck // *Phys. Rev. B.* - 2003. - Vol. 67, no. 14. - P. 144509.
7. Gusynin V.P. Anomalous absorption line in the magneto-optical response of graphene / V.P. Gusynin, S. G. Sharapov, J.P. Carbotte // *Phys. Rev. Lett.* - 2007. - Vol. 98, no. 15. - P. 157402.
8. Gusynin V.P. Magneto-optical conductivity in graphene / V.P. Gusynin, S. G. Sharapov, J.P. Carbotte // *J. Phys. Condens. Matter.* - 2007.- Vol. 19. – P. 026222.
9. Gusynin V.P. Excitonic gap, phase transition, and quantum Hall effect in graphene/ V. P. Gusynin, V. A. Miransky, S. G. Sharapov, I. A. Shovkovy // *Phys. Rev. B.* – 2006. - Vol. 74, no. 19. - P. 195429.
10. Gusynin V.P. Edge states, mass and spin gaps, and quantum Hall effect in graphene / V.P. Gusynin, V.A. Miransky, S. G. Sharapov, I. A. Shovkovy // *Phys. Rev. B.* - 2008. - Vol. 77, no. 20. - P. 205409.
11. Gusynin V.P. Edge states in quantum Hall effect in graphene / V.P. Gusynin, V.A. Miransky, S. G. Sharapov, I. A. Shovkovy // *ФНТ.* - 2008. - Vol. 34, no. 10. – Pp. 993–1006.
12. Gusynin V.P. Edge states on graphene ribbon in magnetic field: interplay between Dirac and ferromagnetic-like gaps / V. P. Gusynin, V. A. Miransky, S. G. Sharapov, C.M. Wyenberg // *Phys. Rev. B.* - 2009. - Vol. 79. – P. 115431.
13. Gusynin V. P. Sum rules for the optical and Hall conductivity in

- graphene / V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, J. P. Carbotte // Phys. Rev. B. - 2007. - Vol. 75, no. 16. - P. 165407.
14. Benfatto L. Robustness of the optical conductivity sum rule in bilayer graphene / L. Benfatto, S. G. Sharapov, J.P. Carbotte // Phys. Rev. B.- 2008. - Vol. 77, no. 12. - P. 125422.
  15. Benfatto L. Effect of orbital currents on the restricted optical sum rule / L. Benfatto, S. G. Sharapov, H. Beck // Eur. Phys. J. B. - 2004. - Vol. 39. - Pp. 469–473.
  16. Benfatto L. Ward identity and optical conductivity sum rule in the d-density wave state / L. Benfatto, S. G. Sharapov, N. Andrenacci, H. Beck // Phys. Rev. B. - 2005. - Vol. 71, no. 10. - P. 104511.
  17. Benfatto L. Optical-conductivity sum rule in cuprates and unconventional charge density waves: a short review / L. Benfatto, S. G. Sharapov //  $\Phi$ HT . - 2006. - Vol. 32, no. 6. - Pp. 700–715.
  18. Sharapov S. G. Low-temperature superfluid stiffness of a d-wave Superconductor in a magnetic field / S. G. Sharapov, V. P. Gusynin, H. Beck // Phys. Rev. B. - 2002. - Vol. 66, no. 1. - P. 012515.
  19. Sharapov S. G. Superfluid density and competing orders in *d*-wave Superconductors / S. G. Sharapov, J. P. Carbotte // Phys. Rev. B. - 2006. - Vol. 73, no. 9. - P. 094519.
  20. Sharapov S. G. Finite-temperature time-dependent effective theory for the phase field in two-dimensional *d*-wave neutral superconductors / S.G. Sharapov, H. Beck, V.M. Loktev // Phys. Rev. B. - 2001. - Vol. 64, no. 13. - P. 134519.
  21. Sharapov S.G. Effective action approach and Carlson-Goldman mode in *d*-wave superconductors / S. G. Sharapov, H. Beck // Phys. Rev. B. - 2002. - Vol. 65, no. 13. - P. 134516.
  22. Gusynin V.P. On the universal AC optical background in graphene / V.P. Gusynin, S. G. Sharapov, J.P. Carbotte // New J. Phys. - 2009. - Vol. 11. - P. 095013.
  23. Carbotte J.P. Effect of electron-phonon interaction on spectroscopies in graphene / J.P. Carbotte, E. J. Nicol, S. G. Sharapov // Preprint arXiv:0908.2608. – 2009; Phys. Rev. B. - 2010. - Vol. 81, no. 4. – P. 045419.
  24. Loktev V.M. Phase fluctuations and pseudogap phenomena / V.M. Loktev, R.M. Quick, S. G. Sharapov // Phys. Rep. - 2001. - Vol. 349. - Pp. 1–123.
  25. Gusynin V.P. AC conductivity of graphene: from tight-binding model to 2+1-dimensional quantum electrodynamics / V.P. Gusynin, S. G. Sharapov, J.P. Carbotte // Int. J. Mod. Phys. B. - 2007. - Vol. 21, no. 27. –

- Pp. 4611 – 4658.
26. Sharapov S. G. Ginzburg-Landau theory for the time-dependent phase field in a two-dimensional  $d$ -wave superconductor / S.G. Sharapov, H. Beck, V. M. Loktev // Proceedings of “*Third International Conference on New Theories, Discoveries, and Applications of Superconductors and Related Materials*” Honolulu, Hawaii, USA, January 15 -19, 2001. – Physica C. - 2001.- Vol. 364-365. - Pp. 437–440.
  27. Sharapov S. G. Low temperature superfluid density of  $d$ -wave superconductor in an applied magnetic field / S.G. Sharapov, V.P. Gusynin, H. Beck // Proceedings of International Conference “*Modern problems of theoretical physics (MPTP-2002)*” Dedicated to the 90th anniversary of A.S.Davydov. Kyiv, Ukraine, December 9-15, 2002. – УФЖ. -2003. - Vol. 48, no.8. – Pp. 863–868.
  28. Sharapov S. G.  $d$ -density wave state in an external magnetic field / S.G. Sharapov, V.P. Gusynin, H. Beck // Proceedings of 7-th International Conference on “*Materials and Mechanisms of Superconductivity and High Temperature Superconductors*” Rio de Janeiro, Brasil, May 25-30, 2003. - Physica C. – 2004. Vol. 408-410. - Pp. 420–421.
  29. Sharapov S. Dirac fermions as a cause of unusual Quantum Hall Effect in Graphene / S. Sharapov // Proceedings of “*March 2006 Meeting of the American Physical Society*” Baltimor, Mariland, USA, March 13-17. - Bulletin of Amer. Phys. Soc. - 2006. - Vol. 51. - P. 276.
  30. Sharapov S. Dirac-like quasiparticles in Graphene / S. Sharapov // Proceedings of “*Congress of the Canadian Association of Physicists*” Saskatoon, Saskatchewan, June 17-20, 2007. - Physics in Canada. - 2007. - Vol. 63. – P.43.

## АНОТАЦІЇ

**Шарапов С.Г. Електронні властивості систем з діраківським енергетичним спектром: графен та високотемпературні надпровідники. – Рукопис.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. – Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ. – 2010.

У дисертації вивчаються електронні квазічастинкові збудження у графені та вузлові квазічастинки у високотемпературних надпровідниках. Одержані аналітичні вирази для статичної та динамічної діагональної та холлівської електричних провідностей графену у зовнішньому магнітному полі. Досліджені оптичні властивості графену, осциляції Шубнікова-де Гааза та квантовий ефект Холла. Передбачене квантування холлівської провідності у графені з фактором заповнення  $\nu = \pm 4 (n+1/2)$ ,  $n=0,1,\dots$  є незвичайним через зсув на  $1/2$ . Експериментальне відкриття у 2005 році саме такого квантування холлівської провідності остаточно довело діраківську природу квазічастинок в графені. Також досліджена залежність надпровідної густини від зовнішнього магнітного поля у  $d$ -хвильовому надпровіднику з вторинним параметром порядку.

**Ключові слова:** діраківські квазічастинки, графен, квантовий ефект Холла, універсальна оптична провідність, ефект Нернста, електрон-фононна взаємодія, високотемпературні купратні надпровідники.

**Шарапов С.Г. Электронные свойства систем с дираковским энергетическим спектром: графен и высокотемпературные сверхпроводники. – Рукопись.**

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика. – Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАН Украины, Киев. – 2010.

В диссертации изучаются электронные квазичастичные возбуждения в графене и узловое квазичастичные возбуждения в высокотемпературных сверхпроводниках. Получены аналитические выражения для статической и динамической диагональной и холловской электрических проводимостей графена во внешнем магнитном поле. Изучены оптические свойства графена, осцилляции Шубникова-де Гааза и квантовый эффект Холла. Предсказанное квантование холловской проводимости в графене с фактором заполнения  $\nu = \pm 4 (n+1/2)$ ,  $n=0,1,\dots$  является необычным из-за сдвига на  $1/2$ . Экспериментальное открытие в 2005 году именно такого квантования холловской проводимости окончательно доказало дираковскую природу квазичастиц в графене. Также изучена зависимость сверхпроводящей плотности от внешнего магнитного поля в  $d$ -волновом сверхпроводнике с дополнительным параметром порядка.

**Ключевые слова:** дираковские квазичастицы, графен, квантовый эффект Холла, универсальная оптическая проводимость, эффект Нернста, электрон-фононное взаимодействие, высокотемпературные купратные сверхпроводники.

**Sharapov S. G. Electronic properties of the systems with the Dirac-like energetic spectrum: graphene and high-temperature superconductors. – Manuscript.**

Thesis for the degree of Doctor of Physics and Mathematics by speciality 01.04.02 – Theoretical Physics. – Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv. - 2010.

This habilitation thesis is devoted to the investigations of the electronic quasiparticle excitations in graphene and nodal excitations in high-temperature superconductors.

In the beginning we consider the relationship between the tight-binding Hamiltonian of the two-dimensional honeycomb lattice of carbon atoms and the 2 + 1 dimensional Hamiltonian of quantum electrodynamics which emerges in the continuum limit. We pay particular attention to the symmetries of the free Dirac fermions including spatial inversion, time reversal, charge conjugation and chirality. We illustrate a power of such a mapping by considering the effect of the possible symmetry breaking, which corresponds to the generation of finite Dirac masses. The analytical expressions for both diagonal and off-diagonal ac and dc conductivities of graphene placed in an external magnetic field applied perpendicular to graphene's plane are derived. These conductivities exhibit rather unusual behavior as functions of frequency, chemical potential, and applied field which is caused by the fact that the quasiparticle excitations in graphene are Dirac-like.

Shubnikov – de Haas oscillations are extracted from a general expression for the dc conductivity of graphene. It is shown that the phase of Shubnikov–de Haas oscillations for Dirac quasiparticles is shifted by  $\pi$  compared to the phase of nonrelativistic quasiparticles. Moreover, the Dingle and temperature factors in the amplitude of oscillations explicitly depend on the carrier density in the case of a Dirac-like spectrum. This phase shift and the square root carrier concentration dependence of the temperature factor were observed in the magneto-conductivity measurements and provided evidence that the behavior of quasiparticle dynamics in graphene is described by the Dirac equation.

It was predicted that the Hall conductivity in graphene is quantized with a filling factor  $\nu = \pm 4 (n+1/2)$ ,  $n=0,1,\dots$ . It is argued that the origin of the anomalous shift  $1/2$  in the quantization rule is caused by the *quantum anomaly* of the lowest Landau level with  $n=0$  in the Dirac theory, i.e., by the fact that it has *a twice smaller degeneracy* than the levels with  $n>0$ . This level can be thought of as shared equally by electrons and holes. The ultimate experimental proof of the existence of the Dirac fermions in graphene comes from the observation of the unconventional quantum Hall effect in 2005.

It was also predicted that the AC conductivity of noninteracting Dirac fermions in zero magnetic field is equal to the universal value  $\sigma_{opt}=\pi e^2/(2 h)$  above a threshold photon energy which is equal to the doubled chemical potential. Exactly this behavior of the optical conductivity was observed in the measurements done 2008.

The intensity as well as position in energy of the absorption lines in the infrared conductivity of graphene in an external magnetic field, both exhibit features that are directly related to the Dirac nature of its quasiparticles. We show that the evolution of the



pattern of absorption lines as the chemical potential is varied encodes the information about the presence of the anomalous lowest Landau level. The first absorption line related to this level always appears with full intensity or is entirely missing, while all other lines disappear in two steps. We demonstrate that if a gap (Dirac mass) develops, the main absorption line splits into two provided that the chemical potential is greater than or equal to the gap.

It is predicted that in the vicinity of the Dirac point Nernst signal is getting large and positive of the order of  $1 \mu\text{V/K}$  per 1 Tesla which is two orders of magnitude larger than its value in conventional systems. The experimental measurements reported in 2009 confirmed this prediction with the measured Nernst signal at the Dirac point reaching the value of  $50 \mu\text{V/K}$  at 8 T.

We investigated the influence of the electron-phonon interaction on the properties of graphene. It is shown that this interaction causes a shift in the chemical potential and in the position in energy of the Dirac point. The value of the Fermi velocity in graphene is also renormalized by the electron-phonon interaction. It is also shown that in the presence of this interaction the value of the AC conductivity is depleted below  $\sigma_{opt}$ .

We derived expressions for the superfluid density  $\rho_s$  in the low-temperature limit  $T \rightarrow 0$  in  $d$ -wave superconductors, taking into account the presence of competing orders such as spin-density waves,  $id_{xy}$  pairing, etc. Experimental data for the thermal conductivity and for elastic neutron scattering in  $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$  suggest there are magnetic field induced anomalies that can be interpreted in terms of competing orders. We consider the implications of these results for the superfluid density and show in the case of competing spin-density wave order that the usual Volovik-like  $\sqrt{H}$  depletion of  $\rho_s(H)$  is replaced by a slower dependence on applied magnetic field. We find that it is crucial to include the competing order parameter in the self-consistent equation for the impurity scattering rate.

**Keywords:** Dirac quasiparticles, graphene, quantum Hall effect, universal optical conductivity, Nernst effect, electron-phonon interaction, high-temperature cuprates superconductors.

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова  
Національної академії наук України.

Наукові консультанти:

Доктор фізико-математичних наук, професор,  
**Гусинін Валерій Павлович**, завідувач відділу астрофізики та елементарних  
частинок Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України

Доктор фізико-математичних наук, академік НАН України, професор  
**Локтєв Вадим Михайлович**, завідувач відділу  
нелінійної фізики конденсованого стану  
Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України

Офіційні опоненти:

Доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України, професор  
**Стасюк Ігор Васильович**, завідувач відділу квантової статистики  
Інституту фізики конденсованих систем НАН України

Доктор фізико-математичних наук, професор  
**Кочелап Вячеслав Олександрович**, завідувач відділу теоретичної фізики  
Інституту фізики надпровідників ім. В.Є. Лашкарьова НАН України

Доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України, професор  
**Лев Богдан Іванович**, завідувач відділу синергетики  
Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України

Захист відбудеться “\_17\_” червня\_\_\_\_\_2010 р. об \_11\_ годині на засіданні  
спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01 в Інституті теоретичної фізики ім.  
М.М. Боголюбова НАН України за адресою 03680, Київ, вул. Метрологічна, 14-Б.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту теоретичної фізики ім.  
М.М. Боголюбова НАН України за адресою 03680, Київ, вул. Метрологічна, 14-Б.

Автореферат розісланий “\_5\_” травня\_\_\_\_\_2010р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради  
доктор фізико-математичних наук

Кузьмичев В.С.

Шарапов Сергій Геннадійович

Електронні властивості систем з діраківським енергетичним спектром:  
графен та високотемпературні надпровідники (автореферат дисертації на  
здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук)

---

Зам. 13	Формат 60×84/16	Обл.-вид. арк. 1.86
Підписано до друку	1 квітня 2010 р.	Тираж 100

---

Поліграфічна дільниця ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України  
03680, м. Київ, вул. Метрологічна, 14-Б