Національна академія наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова

На правах рукопису

Іоргов Микола Зіновійович

УДК 537.611.2:512.552; 514.8

КВАНТОВІ ІНТЕГРОВНІ СИСТЕМИ З КВАНТОВО-АЛГЕБРАЇЧНИМИ СИМЕТРІЯМИ

01.04.02 — теоретична фізика

Автореферат дисертації
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2010

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної академії наук України.

Науковий консультант: *доктор фізико-математичних наук, професор* **КЛІМИК Анатолій Улянович**, Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, відділ математичних методів в теоретичній фізиці.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор **БЕЛАВІН Олександр Абрамович**, Інститут теоретичної фізики ім. Л.Д. Ландау Російської академії наук, м. Черноголовка, Російська Федерація, завідувач сектору квантової теорії поля,

доктор фізико-математичних наук, професор **БІЛОКОЛОС Євген Дмитрович**, Інститут магнетизму НАН України, м. Київ, завідувач відділу теоретичної фізики,

доктор фізико-математичних наук **СИТЕНКО Юрій Олексійович**, Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, м. Київ, завідувач відділу теорії ядра і квантової теорії поля.

Захист відбудеться "10" червня 2010 р. о(б) 11 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.191.01 в Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної академії наук України (03680, м. Київ, вул. Метрологічна, 14-б).

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України (03680, м. Київ, вул. Метрологічна, 14-б).

Автореферат розісланий "_____"________________ 2010 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор фіз.-мат. наук В.Є. КУЗЬМИЧЕВ

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Добре відомо, що методи теорії симетрії є важливими серед арсеналу методів сучасної теоретичної фізики. Універсальність концепції симетрії пов'язана передусім з тим, що основні фізичні закони, відповідні рівняння та їх розв'язки, різноманітні математичні моделі фізичних явищ мають деяку симетрію, тобто інваріантність, незмінність якоїсь величини (закону, властивості, рівняння) відносно певного набору перетворень, сукупність яких утворює групу. Тому методи теорії груп, а також теорії представлень цих груп, є тим адекватним математичним апаратом, який фізики використовують при дослідженні симетрійних аспектів різноманітних явищ. При цьому, крім дискретних груп, часто розглядають скінченновимірні та нескінченновимірні неперервні групи — групи Лі, супергрупи і т.д. Приблизно тридцять років тому, в зв'язку з розвитком квантового методу оберненої задачі розсіяння для дослідження квантових інтегровних систем, з'явились нові типи алгебр — квантові алгебри, які, разом з пов'язаними з ними квантовими групами та квантовими просторами, поповнили сучасний арсенал теорії симетрії. З того часу квантові алгебри та їх представлення стали об'єктами для досліджень в математиці, а результати цих досліджень стали важливими для вивчення квантових інтегровних систем. Але, з іншого боку, розвиток теорії квантових інтегровних систем продовжує стимулювати вивчення цих нових математичних об'єктів та їх різноманітних модифікацій.

Актуальність теми.

Однією з важливих задач сучасної теоретичної фізики є розробка методів дослідження моделей квантової механіки та квантової теорії поля поза рамками теорії збурень. Квантові інтегровні моделі як раз і є прикладами таких моделей, в дослідженні яких можна суттєво просунутись і набути необхідний для цієї мети досвід. Особливістю цих моделей є наявність прихованих симетрій, які дозволяють використовувати сучасні алгебраїчні методи для їх досліджень. Один із нових типів симетрій, який тридцять років тому виник в теорії квантових інтегровних систем — це симетрії, що описуються квантовими алгебрами. Актуальність тематики дисертаційної роботи обумовлена тим, що в ній представлено як вивчення квантових алгебр, як алгебр симетрії, так і застосування алгебраїчних методів до знаходження власних станів гамільтоніанів різноманітних квантових інтегровних систем.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Результати, що увійшли в дисертаційну роботу, були отримані в рамках планової наукової тематики відділу математичних методів в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики НАН України (тема "Представлення квантових груп і калібрувальні та інтегровні взаємодії", 1996–2000 рр., шифр 1.2.2, № д.р. в УкрІНТЕІ 0096U001612; тема "Квантові симетрії і властивості інтегровних та квантово-польових систем", 2001–2004 рр., шифр 1.2.2, 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0101U000331; тема "Симетрії, інтегровні системи, класичні і квантові поля", 2005–2007 рр., шифр 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0101U006883; тема "Методи теорії симетрій та проблеми нелінійної динаміки в сучасній теорії поля та теорії елементарних частинок", 2008–2010 рр., шифр 1.4.7, № д.р. в УкрІНТЕІ 0106U007885).

Мета і задачі дослідження.

Метою дисертаційної роботи є знаходження власних станів гамільтоніанів квантових інтегровних систем використовуючи алгебри симетрій та їх представлення.

Зокрема, розв'язувалися наступні задачі:

- Знаходження власних станів комутуючих інтегралів руху в $\mathbb{Z}_N$-спіновому ланцюжку Бакстера–Бажанова–Строганова та його часткових випадків (ланцюжок Тоди та модель Ізінга).
- Обчислення матричних елементів спінового оператора між власними станами трансфер-матриці моделі Ізінга.
- Знаходження власних хвильових функцій моделі Тоди з граничною взаємодією.
- Побудова комутуючих інтегралів руху моделі Рузінарса як радіальних компонент операторів Лапласа на квантових симетричних просторах. Обчислення хвильових функцій в цій моделі.
- Знаходження розв'язків рівняння Лапласа $\Delta_q p = 0$ на різних квантових векторних просторах.

- Класифікація скінченновимірних представлень нестандартної деформації $U'_q(\mathrm{so}_n)$ алгебри Лі so_n групи обертань.

Об'єктами дослідження є квантові інтегровні системи та їх симетрії.

Предметом дослідження є власні стани гамільтоніанів квантових інтегровних систем та метод розділення змінних для їх побудови.

В роботі було застосовано наступні **методи дослідження**: квантовий метод оберненої задачі розсіяння для квантових інтегровних систем, метод квантового розділення змінних Скляніна–Харчева–Лебедева.

Наукова новизна одержаних результатів.

В дисертаційній роботі вперше:

1. Класифіковано всі скінченновимірні представлення алгебри Гаврилика–Клімика $U'_q(\mathrm{so}_n)$ коли q не є коренем з одиниці. Описано представлення циклічного типу алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ в базисі Гельфанда–Цетліна коли q є коренем з одиниці.

2. Введено визначення тензорного добутку $T^{\otimes}$ векторного та довільного представлення T алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$. Описано розклад $T^{\otimes}$ на незвідні підпредставлення та знайдено відповідні коефіцієнти Клебша–Гордана. Введено визначення векторного оператора алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ та для нього доведено q-аналог теореми Вігнера–Екарта.

3. Побудовано елементи Казиміра алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$, обрахувано власні значення відповідних операторів Казиміра в незвідних представленнях. Коли q є коренем з одиниці існують додаткові центральні елементи. У цьому випадку, для алгебри $U'_q(so_3)$, знайдено їх алгебраїчну залежність.

4. Вивчено q-гармонічні поліноми на квантовому дійсному та комплексному векторних просторах. Отримано q-аналог класичних зональних та приєднаних гармонічних поліномів. Показано, що має місце розділення змінних у відповідності з різними ланцюжками вкладених підалгебр алгебри симетрії квантового простору.

5. Отримано у явному вигляді радіальні компоненти елементів Казиміра квантової алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$, які відповідають квантовому аналогу однорідного простору $\mathrm{GL}(n)/\mathrm{SO}(n)$. Показано, що вони співпадають

з гамільтоніаном та інтегралами руху квантової тригонометричної n-частинкової моделі Рузінарса. Хвильові функції моделі виражено через поліноми Макдональда.

6. Побудовано власні вектори для компонент $A_n(\lambda)$ та $B_n(\lambda)$ матриці монодромії для неоднорідного ланцюжка Бакстера–Бажанова–Строганова (ББС) скінченної довжини. Для періодичного ланцюжка проведено розділення змінних та отримано $T-Q$-рівняння Бакстера для кожної з розділенних змінних.

7. Показано, що модель ББС при $N = 2$ еквівалентна узагальненій моделі Ізінга у точці вільних ферміонів. У цьому випадку знайдено розв'язки рівняння Бакстера, які дають явні формули для власних векторів трансфер-матриці моделі Ізінга. Доведена формула Бугрія–Лісового для матричних елементів спінового оператора між цими векторами.

8. Граничним переходом з формул для власних векторів періодичної моделі ББС отримано власні вектори трансфер-матриці моделі з фіксованими спінами на кінцях ланцюжка.

9. Методом квантового розділення змінних знайдено інтегральне представлення для хвильових функцій квантового n-частинкового ланцюжка Тоди з граничною інтегровною взаємодією та власні стани квантового релятивістського ланцюжка Тоди при коренях з одиниці.

Практичне значення одержаних результатів.

Результати, отримані в дисертації, мають теоретичний характер і є важливими, по-перше, в теорії представлень квантових та інших q-деформованих алгебр; по-друге, для досліджень квантових інтегровних систем методом розділення змінних. В свою чергу, точні розв'язки для квантових інтегровних систем допомогають у вивченні властивостей фізичних низькорозмірних квантових систем в непертурбативній області значень параметрів.

Особистий внесок здобувача.

Автор має 9 публікацій без співавторів, а в інших публікаціях внесок дисертанта є істотнім. У спільних роботах із вивчення нестандартної деформації $U'_q(\mathrm{so}_n)$ алгебри Лі групи обертань автору належать ідея побудови представлень некласичного типу з представлень класичного типу в базисі Гельфанда–Цетліна методом аналітичного продовження, введення поняття антисиметричних тензорних операторів для цієї алгебри та побудова на їх основі елементів Казиміра, обрахування власних значень елементів Казиміра в представленнях Гельфанда–Цетліна, адаптація доведення теореми класифікації скінченновимірних представлень алгебри Лі so_n, знайдене А.У.Клімиком, до представлень класичного та некласичного типів q-деформованої алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$.

У спільних роботах із вивчення гармонічного аналізу на квантових просторах, автору належить реалізація спільних з А.У.Клімиком ідей щодо шляхів адаптації відомих результатів з теорії гармонічного аналізу до квантових просторів.

У спільних роботах з дослідження квантових інтегровних систем методом розділення змінних автору належать більшість ідей щодо конкретних напрямків досліджень, а також велика частина технічної реалізації цих ідей: ітеративна побудова власних векторів в моделі ББС, ідея застосування цих формул до моделі Ізінга з метою доведення формули Бугрія–Лісового для матричних елементів спінового оператора та пропозиції щодо конкретних шляхів її технічної реалізації, ідея отримання власних векторів в моделі ББС з фіксованими спінами на границі граничним переходом за параметрами в неоднорідній моделі з періодичними граничними умовами, ідея застосування моделі ББС до релятивістського ланцюжка Тоди при корені з одиниці, побудова ланцюжка вкладених задач для знаходження інтегрального представлення для хвильових функцій для квантового ланцюжка Тоди з різними граничними умовами.

Апробація роботи.

Матеріали дисертації пройшли апробацію на семінарах ІТФ НАН України (Київ, 1999-2009), Інст. математики НАН України, університетів м. Анжер (Франція), м. Тур (Франція), м. Париж VI-VII (Франція), Інститут математики ім. Макса Планка (м.Бонн, Німеччина), Лабораторії теор. фізики ОІЯД (м.Дубна, Росія), доповідалися на III, IV, V, VI, VII, VIII міжнародних конференціях “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics” (Київ, червень 1999; 2001; 2003; 2005; 2007; 2009), міжнародній конф. “Квантові групи та інтегровні системи” (Прага, Чехія, червень 1999), міжнародній конф. “Неевклідова геометрія в сучасній фізиці II” (Ніредьгаза, Угорщина, липень 1999), міжнародній конф. "Квантові групи та інтегровні системи" (Прага, Чехія, червень 2000), XXIII міжнародному колоквіумі "Теоретико-групові методи у фізиці" (Дубна, серпень 2000), XIII Гуцульській робочій нараді "Методи теоретичної та математичної фізики" (Київ, вересень 2000), Робочій нараді НАТО "Некомутативні структури у фізиці і математиці" (Київ, вересень 2000), II міжнар. симпозіумі "Quantum Theory and Symmetries" (Краков, Польща, липень 2001), III міжнародній конф. "Functional Analysis" (Київ, серпень 2001), міжнародній конф. "Non-Euclidean Geometry in Modern Physics: Bolyai–Gauss–Lobachevsky" (Тиргу-Муреш, Румунія, липень 2002), міжнародній конф. "Conformal Field Theory and Integrable Systems" (Чорноголовка, Росія, вересень 2002), міжнародній конф. "Classical and Quantum Integrable Systems" (Дубна, Росія, 26-29 січня 2004), IV міжнародній конф. "Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics" (Нижній Новгород, Росія, 7-11 вересня 2004), Київський Боголюбівський конференції "Сучасні проблеми математики та теоретичної фізики" (Київ, 13-16 вересня 2004), міжнародній нараді "Classical and Quantum Integrable Systems" (Дубна, Росія, 22-25 січня 2007), міжнародній нараді "Integrable Models and related mathematical structures" (Тур, Франція, 7-10 листопада 2007), "The 2007 Twente Conference on Lie Groups" (Енсхеде, Нідерланди, 12-14 грудня, 2007), міжнародній конф. "Классические и квантовые интегрируемые системы 2008" (Протвіно, Росія, 21-24 січня 2008), конференція "Liouville Field Theory and Statistical Models" (Москва, 21-24 червня 2008), міжнародній конф. "Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics" (Київ, 15-18 вересеня, 2009).

Публікації.

За матеріалами дисертації опубліковано 31 наукова праця у тому числі 27 статей у наукових журналах та фахових сбірниках наукових праць, а 4 статті видані як матеріали конференцій. Дисертант має 9 публікацій без співавторів.

Структура та обсяг дисертації.

Дисертаційна робота викладена на 275 сторінках; складається із Вступу, чотирьох Розділів, Висновків, Списку використаних джерел з 158 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У Вступі дана загальна характеристика роботи: обгрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету роботи та ін.

У першому розділі — "Нестандартна деформація $U'_q(so_n)$ алгебри Лі групи ортогональних перетворень" — розглядається нестандартна деформація $U'_q(\mathrm{so}_n)$ алгебри Лі so_n групи обертань $SO(n)$, яка була введена О.М. Гавриликом та А.У. Клімиком, класифікуються всі скінченновимірні представлення цієї алгебри, даються вирази для елементів Казиміра, а також доводиться q-аналог теореми Вігнера–Екарта для векторних операторів. Результати, що отримані автором по темі цього розділу і виносяться на захист опубліковані в роботах [1,3,4,9,10,11,12,14, 15,17,18,20,28].

В підрозділі 1.1 дано огляд відомостей про нестандартну деформацію $U'_q(\mathrm{so}_n)$ та її порівняння з стандартною деформацією Дрінфельда–Джімбо. Вказані різноманітні застосування цієї алгебри. Зокрема, алгебра $U'_q(\mathrm{so}_n)$ пов'язана з алгеброю спостережуваних в 2+1-вимірній квантовій гравітації (петлі Вільсона на ріманових поверхнях роду g породжують цю алгебру при $n = 2g + 2$).

В підрозділі 1.2 дається визначення $U'_q(\mathrm{so}_n)$, описуються скінченновимірні незвідні представлення класичного та некласичного типу цієї алгебри, елементи Казиміра та власні значення відповідних операторів Казиміра в незвідних представленнях.

Алгебра $U'_q(\mathrm{so}_n)$ — це асоціативна алгебра з породжуючими елементами $I_{21}, I_{32}, \ldots, I_{n,n-1}$, які задовільняють співвідношення

$$I^2_{j,j-1}I_{j-1,j-2} + I_{j-1,j-2}I^2_{j,j-1} - [2]_q \; I_{j,j-1}I_{j-1,j-2}I_{j,j-1} = -I_{j-1,j-2}, \tag{1}$$

$$I^2_{j-1,j-2}I_{j,j-1} + I_{j,j-1}I^2_{j-1,j-2} - [2]_q \; I_{j-1,j-2}I_{j,j-1}I_{j-1,j-2} = -I_{j,j-1}, \tag{2}$$

$$[I_{i,i-1}, I_{j,j-1}] = 0 \;, \qquad \text{якщо} \quad | \, i - j \, | > 1, \tag{3}$$

де через

$$[x]_q \equiv [x] \equiv \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} \;, \qquad x \in \mathbf{C} \tag{4}$$

позначено q-число, що відповідає числу x, а q — параметр деформації ($q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0, \pm 1$). Коли $q \to 1$ ('класична' границя), $[x]_q$ переходить в x, а комутаційні співвідношення (1)–(3) переходять в комутаційні співвідношення універсальної огортуючої алгебри для алгебри Лі so_n групи обертань, де $I_{j,j-1}$ — генератор повороту в площині $(j-1, j)$. Генератори $I^{\pm}_{k,l}$, що відповідають повороту в площині (l,k), $k > l+1$, визначаються рекурсивно ($I^{+}_{k+1,k} \equiv I^{-}_{k+1,k} \equiv I_{k+1,k}$): $I^{\pm}_{k,l} \equiv q^{\pm 1/2} I_{l+1,l} I^{\pm}_{k,l+1} - q^{\mp 1/2} I^{\pm}_{k,l+1} I_{l+1,l}$.

Далі ми наведемо формули для незвідних представлень $U'_q(\mathrm{so}_n)$ у явному вигляді. Для $U'_q(\mathrm{so}_n)$ відомо два типи незвідних скінченновимірних представлень: (а) представлення класичного типу; (б) представлення некласичного типу. Незвідні представлення класичного типу є q-деформаціями незвідних скінченновимірних представлень алгебри Лі so_n. Для представлень некласичного типу немає класичного аналогу: оператори представлення $T(a)$, $a \in U'_q(\mathrm{so}_n)$, мають сингулярності при $q \to 1$.

Незвідні скінченновимірні представлення класичного типу алгебр $U'_q(\mathrm{so}_n)$, $n \geq 3$, задаються наборами $\mathbf{m}_n$ з $\lfloor n/2 \rfloor$ чисел $m_{1,n}, m_{2,n}, ..., m_{\lfloor n/2 \rfloor, n}$ (тут $\lfloor n/2 \rfloor$ позначає цілу частину від $n/2$), які є всі цілі або всі напівцілі та задовільняють умовам домінантності

$$m_{1,2k+1} \geq \cdots \geq m_{k,2k+1} \geq 0, \qquad m_{1,2k} \geq \cdots \geq m_{k-1,2k} \geq |m_{k,2k}|$$

для $n = 2k+1$ та $n = 2k$, відповідно. Ці представлення позначено через $T_{\mathbf{m}_n}$. Ми вибіраємо у просторі представлення q-аналог базиса Гельфанда–Цетліна (ГЦ), який отримується послідовними звуженням представлення $T_{\mathbf{m}_n}$ на підалгебри $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$, $U'_q(\mathrm{so}_{n-2})$, $\cdots$, $U'_q(\mathrm{so}_3)$, $U'_q(\mathrm{so}_2) := U(\mathrm{so}_2)$. Як і в класичному випадку, його елементи позначаються таблицями ГЦ

$$\{\alpha_n\} \equiv \left\{ \begin{matrix} \mathbf{m}_n \\ \mathbf{m}_{n-1} \\ \dots \\ \mathbf{m}_2 \end{matrix} \right\} \equiv \{\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}\} \equiv \{\mathbf{m}_n, \mathbf{m}_{n-1}, \alpha_{n-2}\}, \tag{5}$$

де компоненти $\mathbf{m}_s$ та $\mathbf{m}_{s-1}$ задовільняють умовам галуження

$$m_{1,2p+1} \geq m_{1,2p} \geq m_{2,2p+1} \geq m_{2,2p} \geq ... \geq m_{p,2p+1} \geq m_{p,2p} \geq -m_{p,2p+1},$$

$$m_{1,2p} \geq m_{1,2p-1} \geq m_{2,2p} \geq m_{2,2p-1} \geq ... \geq m_{p-1,2p-1} \geq |m_{p,2p}|.$$

Зручно ввести так звані l-координати $l_{j,2p+1} = m_{j,2p+1} + p - j + 1$, $l_{j,2p} = m_{j,2p} + p - j$, для чисел $m_{i,k}$. Оператор $T_{\mathbf{m}_n}(I_{2p+1,2p})$ діє на базисні елементи ГЦ, помічені (5), за формулою

$$T_{\mathbf{m}_n}(I_{2p+1,2p})|\alpha_n\rangle = \sum_{j=1}^{p} \frac{A^j_{2p}(\alpha_n)}{a(l_{j,2p})}|(\alpha_n)^{+j}_{2p}\rangle - \sum_{j=1}^{p} \frac{A^j_{2p}((\alpha_n)^{-j}_{2p})}{a(l_{j,2p}-1)}|(\alpha_n)^{-j}_{2p}\rangle$$

та оператор $T_{\mathbf{m}_n}(I_{2p,2p-1})$ діє як

$$T_{\mathbf{m}_n}(I_{2p,2p-1})|\alpha_n\rangle = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{B^j_{2p-1}(\alpha_n)}{b(l_{j,2p-1})[l_{j,2p-1}]}|(\alpha_n)^{+j}_{2p-1}\rangle$$

$$-\sum_{j=1}^{p-1} \frac{B^j_{2p-1}((\alpha_n)^{-j}_{2p-1})}{b(l_{j,2p-1}-1)[l_{j,2p-1}-1]}|(\alpha_n)^{-j}_{2p-1}\rangle + \mathrm{i}\, C_{2p-1}(\alpha_n)|\alpha_n\rangle.$$

В цих формулах через $(\alpha_n)^{\pm j}_s$ позначено таблицю (5), в якій j-та компонента $m_{j,s}$ в $\mathbf{m}_s$ замінена на $m_{j,s} \pm 1$ та

$$A^j_{2p}(\alpha_n) = \left(\frac{\prod_{i=1}^{p}[l_{i,2p+1} + l_{j,2p}][l_{i,2p+1} - l_{j,2p} - 1]}{\prod_{i\neq j}^{p}[l_{i,2p} + l_{j,2p}][l_{i,2p} - l_{j,2p}]} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\prod_{i=1}^{p-1}[l_{i,2p-1} + l_{j,2p}][l_{i,2p-1} - l_{j,2p} - 1]}{\prod_{i\neq j}^{p}[l_{i,2p} + l_{j,2p} + 1][l_{i,2p} - l_{j,2p} - 1]} \right)^{1/2},$$

$$B^j_{2p-1}(\alpha_n) = \left(\frac{\prod_{i=1}^{p}\prod_{i=1}^{p-1}[l_{i,2p-2} + l_{j,2p-1}][l_{i,2p-2} - l_{j,2p-1}]}{\prod_{i\neq j}^{p-1}[l_{i,2p-1}+l_{j,2p-1}][l_{i,2p-1}-l_{j,2p-1}]} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\prod_{i=1}^{p-1}[l_{i,2p-2} + l_{j,2p-1}][l_{i,2p-2} - l_{j,2p-1}]}{\prod_{i\neq j}^{p-1}[l_{i,2p-1}+l_{j,2p-1}-1][l_{i,2p-1}-l_{j,2p-1}-1]} \right)^{1/2},$$

$$C_{2p-1}(\alpha_n) = \frac{\prod_{s=1}^{p}[l_{s,2p}]\prod_{s=1}^{p-1}[l_{s,2p-2}]}{\prod_{s=1}^{p-1}[l_{s,2p-1}][l_{s,2p-1}-1]},$$

$$a(l_{j,2p}) = \{(q^{l_{j,2p}+1} + q^{-l_{j,2p}-1})(q^{l_{j,2p}} + q^{-l_{j,2p}})\}^{1/2},$$

$$b(l_{j,2p-1}) = ([2l_{j,2p-1}+1][2l_{j,2p-1}-1])^{1/2}.$$

Має місце наступне твердження: *Представлення $T_{\mathbf{m}_n}$ є незвідними. Представлення $T_{\mathbf{m}_n}$ та $T_{\mathbf{m}'_n}$ є попарно нееквівалентними для $\mathbf{m}_n \neq \mathbf{m}'_n$.*

Незвідні скінченновимірні представлення некласичного типу даються наборами $\epsilon := (\epsilon_2, \epsilon_3, \cdots, \epsilon_n)$, $\epsilon_i = \pm 1$, та наборами $\mathbf{m}_n$, що складається з $\lfloor n/2 \rfloor$ *напівцілих* (не цілих!) чисел $m_{1,n}, m_{2,n}, \cdots, m_{\lfloor n/2 \rfloor, n}$, які задовільняють умовам домінантності

$$m_{1,n} \geq m_{2,n} \geq ... \geq m_{\lfloor n/2 \rfloor, n} \geq 1/2. \tag{6}$$

Ці представлення позначаються через $T_{\epsilon, \mathbf{m}_n}$. В дисертації наведено відповідні явні формули для дії операторів представлень в базисі ГЦ. Справедливе наступне твердження [10]: *Представлення $T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$ та $T_{\epsilon',\mathbf{m}'_n}$ — попарно нееквівалентні для $(\epsilon, \mathbf{m}_n) \neq (\epsilon', \mathbf{m}'_n)$. Для будь-яких допустимих $(\epsilon, \mathbf{m}_n)$ та $\mathbf{m}'_n$, представлення $T_{\epsilon,\mathbf{m}_n}$ та $T_{\mathbf{m}'_n}$ є попарно нееквівалентними.*

В дисертації введено q-аналоги антисиметричних тензорних операторів для алгебр $U'_q(\mathrm{so}_n)$ наступним чином:

$$J^{\pm}_{k_1,k_2,\ldots,k_{2r}} = q^{\mp \frac{r(r-1)}{2}} \sum_{s \in S_{2r}}{}' \varepsilon_{q^{\pm 1}}(s) I^{\pm}_{k_{s(2)},k_{s(1)}} I^{\pm}_{k_{s(4)},k_{s(3)}} \cdots I^{\pm}_{k_{s(2r)},k_{s(2r-1)}}. \tag{7}$$

Тут $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_{2r} \leq n$, та підсумовування проводиться по всіх перестановках s індексів $k_1, k_2, \ldots, k_{2r}$, таких що

$$k_{s(2)} > k_{s(1)},\ k_{s(4)} > k_{s(3)},\ \ldots\ ,\ \ k_{s(2r)} > k_{s(2r-1)}; \quad k_{s(2)} < k_{s(4)} < \ldots < k_{s(2r)}\,.$$

Символ $\varepsilon_{q^{\pm 1}}(s) \equiv (-q^{\pm 1})^{\ell(s)}$ є q-аналогом антисиметричного тензора Леві–Чевіти, $\ell(s)$ — довжина перестановки s.

Елементи

$$C_n^{(2r)} = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_{2r} \leq n} q^{k_1+k_2+\ldots+k_{2r}-r(n+1)} J^{+}_{k_1,k_2,\ldots,k_{2r}} J^{-}_{k_1,k_2,\ldots,k_{2r}}, \tag{8}$$

де $r = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ означає цілу частину x), є елементами Казиміра $U'_q(\mathrm{so}_n)$. Крім того, для парного n, елементи $C_n^{(n)+} \equiv J^{+}_{1,2,\ldots,n}$ та $C_n^{(n)-} \equiv J^{-}_{1,2,\ldots,n}$ також належать центру.

Також в дисертації наводяться явні формули для власних значень відповідних операторів Казиміра в незвідних представленнях. Коли q є коренем з 1, вказаний набір елементів Казиміра не породжує весь центр. Існують додаткові елементи Казиміра, які є алгебраїчно залежними. Випадок алгебри $U'_q(so_3)$ було детально розглянуто в роботі [18].

В підрозділі 1.3 введено визначення тензорного добутку довільного представлення на векторне представлення алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$, знайдено розклад цього представлення на незвідні підпредставлення та відповідні коефіцієнти Клебша–Гордана, також доведено q-аналог теореми Вігнера–Екарта для векторних операторів.

Алгебра $U'_q(\mathrm{so}_n)$ може бути вкладена в квантову алгебру Дрінфельда–Джімбо $U_q(\mathrm{sl}_n)$, яка визначається як асоціативна алгебра, породжена елементами e_i, f_i, k_i, k_i^{-1}, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, та співвідношеннями

$$k_i k_i^{-1} = k_i^{-1} k_i = 1, \quad k_i k_j = k_j k_i, \quad k_i e_j k_i^{-1} = q^{a_{ij}} e_j, \quad k_i f_j k_i^{-1} = q^{-a_{ij}} f_j,$$

$$[e_i, e_j] = [f_i, f_j] = 0, \quad |i-j| > 1, \qquad [e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q - q^{-1}},$$

$$e_i^2 e_{i\pm1} - (q+q^{-1}) e_i e_{i\pm1} e_i + e_{i\pm1} e_i^2 = 0, \quad f_i^2 f_{i\pm1} - (q+q^{-1}) f_i f_{i\pm1} f_i + f_{i\pm1} f_i^2 = 0,$$

де $a_{ii} = 2$, $a_{i,i\pm1} = -1$ та $a_{ij} = 0$ при $|i-j| > 1$. В роботі Ноумі, Умеди та Вакаями показано, що елементи

$$\tilde{I}_{i+1,i} = f_i - q^{-1} k_i e_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{9}$$

задовільняють співвідношення (1)–(3) та визначають гомоморфізм $U'_q(\mathrm{so}_n) \to U_q(\mathrm{sl}_n)$. Більш того, в [11] доведено, що цей гомоморфізм є вкладенням, тобто ми можемо розглядати $U'_q(\mathrm{so}_n)$ як підалгебру в $U_q(\mathrm{sl}_n)$.

Квантова алгебра $U_q(\mathrm{sl}_n)$ допускає структуру Хопфа. Комноження генераторів цієї алгебри може бути визначене як

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes k_i^{-1} + 1 \otimes e_i, \qquad \Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + k_i \otimes f_i, \qquad \Delta(k_i) = k_i \otimes k_i.$$

Тому ми маємо, що $U'_q(\mathrm{so}_n)$, вкладена в $U_q(\mathrm{sl}_n)$, має властивість коідеалу:

$$\Delta(\tilde{I}_{i+1,i}) = \tilde{I}_{i+1,i} \otimes 1 + k_i \otimes \tilde{I}_{i+1,i}.$$

Твердження 1.1. *Алгебра $U'_q(\mathrm{so}_n)$ є $U_q(\mathrm{sl}_n)$-комодульною алгеброю з кодією $\phi(I_{i+1,i}) = \tilde{I}_{i+1,i} \otimes 1 + k_i \otimes I_{i+1,i}$. При вкладенні $U'_q(\mathrm{so}_n)$ в $U_q(\mathrm{sl}_n)$, дія ϕ редукується до комноження Δ алгебри $U_q(\mathrm{sl}_n)$.*

Ця комодульна структура може бути використана для введення тензорного добутку векторного та довільного представлення T алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$: нехай T — деяке представлення $U'_q(\mathrm{so}_n)$ на лінійному просторі $\mathcal{V}$ з базисом

$\{v_\alpha\}$ та $\mathcal{V}_{\mathbf{1}}$ — n-вимірний лінійний простір з базисом $\{v_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, та $\mathcal{V}^{\otimes} \equiv \mathcal{V}_{\mathbf{1}} \otimes \mathcal{V}$.

Твердження 1.2. *Відображення* $T^{\otimes} \equiv T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\mathbf{m}_n}$ *з* $U'_q(\mathrm{so}_n)$ *в* $\mathrm{End}\,\mathcal{V}^{\otimes}$, *що дається формулами*

$$T^{\otimes}(I_{j,j-1})\,(v_{j-1} \otimes v_\alpha) = q\ v_{j-1} \otimes T(I_{j,j-1})v_\alpha - q^{1/2}\ v_j \otimes v_\alpha, \tag{10}$$

$$T^{\otimes}(I_{j,j-1})\,(v_j \otimes v_\alpha) = q^{-1}\ v_j \otimes T(I_{j,j-1})v_\alpha + q^{-1/2}\ v_{j-1} \otimes v_\alpha, \tag{11}$$

$$T^{\otimes}(I_{j,j-1})\,(v_k \otimes v_\alpha) = v_k \otimes T(I_{j,j-1})v_\alpha, \qquad j \neq k,\ j-1 \neq k \tag{12}$$

визначає представлення $U'_q(\mathrm{so}_n)$ *у просторі* $\mathcal{V}^{\otimes}$.

В [14] отримано розклад представлення $T^{\otimes} \equiv T_{\mathbf{1}} \otimes T_{\mathbf{m}_n}$ алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$, $n \geq 4$, на незвідні складові:

$$T^{\otimes} = \bigoplus_{\mathbf{m}'_n \in \mathcal{S}(\mathbf{m}_n)} T_{\mathbf{m}'_n}, \tag{13}$$

де $\mathcal{S}(\mathbf{m}_{2p+1}) = \bigcup_{j=1}^{p}\{\mathbf{m}_{2p+1}^{+j}\} \cup \bigcup_{j=1}^{p}\{\mathbf{m}_{2p+1}^{-j}\} \cup \{\mathbf{m}_{2p+1}\}$, $\mathcal{S}(\mathbf{m}_{2p}) = \bigcup_{j=1}^{p}\{\mathbf{m}_{2p}^{+j}\} \cup \bigcup_{j=1}^{p}\{\mathbf{m}_{2p}^{-j}\}$. Через $\mathbf{m}_n^{\pm j}$ ми позначаємо набір $\mathbf{m}_n$ з $m_{j,n}$, що замінено на $m_{j,n}\pm 1$. Подібний розклад має місце також для представлень некласичного типу [17].

Визначення 1.1. *Набір операторів* $\{V_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *на просторі* $\mathcal{V}$, *де реалізовано представлення* T *алгебри* $U'_q(\mathrm{so}_n)$, *такий що*

$$[V_{j-1}, T(I_{j,j-1})]_q = V_j, \quad [T(I_{j,j-1}), V_j]_q = V_{j-1}, \tag{14}$$

$$[T(I_{j,j-1}), V_k] = 0, \qquad \text{якщо } j \neq k \text{ та } j-1 \neq k, \tag{15}$$

де $[X, Y]_q = q^{1/2}XY - q^{-1/2}YX$, *називається векторним оператором алгебри* $U'_q(\mathrm{so}_n)$.

Нехай T — пряма сума незвідних представлень класичного типу алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ з довільною кратністю. Виберемо базис ГЦ в $\mathcal{V}$. Розглянемо деякий інваріантний підпростір $\mathcal{V}_{\mathbf{m}_n,s}$ де реалізовано підпредставлення еквівалентне $T_{\mathbf{m}_n}$. Якщо відповідні кратності більше 1, число s нумерує такі підпростори. Для векторних операторів доведено q-аналог теореми Вігнера–Екарта:

Теорема 1.3. *Якщо $\mathcal{V}$ — гільбертів простір з ортонормованим базисом Гельфанда–Цетліна $\{|\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}; s\rangle\}$, ми маємо для компонент векторного оператора $\{V_k\}$ на $\mathcal{V}$ наступну факторизацію*

$$\langle \mathbf{m}'_n, \alpha'_{n-1}; s'|V_k|\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}; s\rangle = ((\mathbf{m}'_n, \alpha'_{n-1})|k, (\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}))(\mathbf{m}'_n, s'\|V\|\mathbf{m}_n, s),$$

де коефіцієнти Клебша–Гордана визначаються формулою

$$((\mathbf{m}'_n, \alpha'_{n-1})|k, (\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1})) = \frac{\langle \mathbf{m}_{n+1}, \alpha'_n|T_{\mathbf{m}_{n+1}}(I^+_{n+1,k})|\mathbf{m}_{n+1}, \alpha_n\rangle}{\langle \mathbf{m}_{n+1}, \mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1}|T_{\mathbf{m}_{n+1}}(I_{n+1,n})|\mathbf{m}_{n+1}, \mathbf{m}_n, \alpha_{n-1}\rangle}$$

$$\times(n, (\mathbf{m}_n, \alpha_{n-1})|(\mathbf{m}'_n, \alpha_{n-1})), \qquad 1 \le k < n,$$

а через $(\mathbf{m}'_n, s'\|V\|\mathbf{m}_n, s)$ позначено приведені матричні елементи, які не залежать від індекса k векторного оператора V_k та від конкретних базисних елементів, між якими береться матричний елемент.

Аналогічна теорема має місце і для представлень некласичного типу.

В підрозділі 1.4 доводяться теореми про класифікацію скінченновимірних представлень алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ коли q не є коренем з 1. Доведення суттєво використовує q-аналог теореми Вігнера–Екарта, що доведена в підрозділі 1.3.

Теорема 1.8. *Незвідні скінченновимірні представлення алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ вичерпуються представленнями класичного та некласичного типів. Кожне скінченновимірне представлення алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ є цілком звідним.*

Другий розділ дисертації називається “Гармонічний аналіз на квантових векторних просторах”. В ньому побудована теорія q-гармонічних поліномів на квантових дійсному та комплексному векторних просторах (просторах з некомутуючими координатами). Зокрема показано, що різним ланцюжкам вкладених підалгебр відповідають різні схеми розділення змінних. Результати, що отримані автором по темі цього розділу і виносяться на захист, опубліковані в роботах [13,16,19,21,23].

У підрозділі 2.1 окреслена загальна схема теорії гармонічних поліномів на звичайних векторних просторах та що їй відповідає у випадку квантових просторів.

Підрозділ 2.2 присвячено побудові теорії q-гармонічних поліномів на квантовому дійсному векторному просторі, породженому q-комутуючими елементами x_1, $x_2, \dots,$ x_n — координатами на цьому просторі: нехай $\mathcal{A} \equiv$

$\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — асоціативна алгебра породжена елементами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з визначальними співвідношеннями $x_i x_j = q x_j x_i$, $i < j$. Ця алгебра називається алгеброю функцій на n-вимірному квантовому векторному просторі. Ми визначаємо на $\mathcal{A}$ операції q-диференціювань ∂_i та ∂_i', які є лінійними операторами, що зануляють мономи p, які не містять x_i, та діють як

$$\partial_i = \breve{x}_i^{-1} \frac{\gamma_i - \gamma_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \qquad \partial_i' = \hat{x}_i^{-1} \frac{\gamma_i - \gamma_i^{-1}}{q - q^{-1}}$$

на мономи, які містять x_i, де через $\hat{x}_i$ та $\breve{x}_i$ позначено оператори лівого та правого множення на x_i, відповідно, та автоморфізм γ_i діє як $\gamma_i(x_k) = q^{\delta_{ik}} x_k$. На цьому квантовому просторі $\mathcal{A}$ діє квантова алгебра $U_q(\mathrm{sl}_n)$:

$$\rho(k_i) = \gamma_i \gamma_{i+1}^{-1}, \quad \rho(e_i) = \breve{x}_i \gamma_i \partial_{i+1}, \quad \rho(f_i) = \breve{x}_{i+1} \gamma_i^{-1} \partial_i.$$

Дія ρ та формула (9), що задає вкладення $U_q'(\mathrm{so}_n) \subset U_q(\mathrm{sl}_n)$, приводять до представлення $T = \rho \circ \varphi$ алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ на $\mathcal{A}$:

$$T(I_{j+1,j}) = \breve{x}_{j+1} \gamma_j^{-1} \partial_j - \breve{x}_j \gamma_{j+1} \partial_{j+1}\,.$$

Оператори квадрата q-радіусу $\hat{Q} = \hat{x}_1^2 + q^{-1} \hat{x}_2^2 + \cdots + q^{-n+1} \hat{x}_n^2$ та *q-оператор Лапласа* на квантовому векторному просторі

$$\Delta_q \equiv \Delta = q^{n-1} \partial_1^2 + q^{n-2} \partial_2^2 + \cdots + \partial_n^2$$

комутують з дією $U_q'(\mathrm{so}_n)$. Поліном $p \in \mathcal{A}$ називається *q-гармонічним* якщо $\Delta p = 0$. Лінійний підпростір $\mathcal{A}$, що складається з усіх q-гармонічних поліномів позначаємо через $\mathcal{H}$. Нехай $\mathcal{A}_m$ (відповідно $\mathcal{H}_m$) — підпростір всіх (відповідно гармонічних) поліномів степеня m. Тоді подібно до класичного випадку, простір $\mathcal{A}_m$ може бути представлений у вигляді прямої суми

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{H}_m \oplus Q \mathcal{A}_{m-2}.$$

Цей розклад має наступний наслідок:

$$\mathcal{A}_m = \bigoplus_{0 \le 2j \le m} Q^j \mathcal{H}_{m-2j}$$

(підсумовування проводиться по $j = 0, 1, 2, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor$, де $\lfloor m/2 \rfloor$ — ціла частина $m/2$). Кожен підпростір $\mathcal{H}_m$ є інваріантним по відношенню до дії

$U'_q(\mathrm{so}_n)$. Основним технічним засобом при побудові базису q-гармонічних поліномів є проектор $H_m : \mathcal{A}_m = \mathcal{H}_m \oplus Q\mathcal{A}_{m-2} \to \mathcal{H}_m$. Явна формула для нього знайдена і має вигляд

$$H_m p = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \alpha_k \hat{Q}^k \Delta^k p, \quad \alpha_k = \frac{(-1)^k [n+2m-2k-4]!!}{[2k]!![n+2m-4]!!},$$

$[s]!! = [s][s-2][s-4]\cdots[2]$ (або $[1]$) та $[0]!! = 1$.

В дисертації показано, що різним ланцюжкам вкладених підалгебр алгебри $U'_q(\mathrm{so}_n)$ відповідають різні базиси в просторі гармонічних поліномів. Наведемо формулу для базису, що відповідає ланцюжку вкладених підалгебр

$$U'_q(\mathrm{so}_n) \supset U'_q(\mathrm{so}_{n-1}) \supset \cdots \supset U'_q(\mathrm{so}_3) \supset U'_q(\mathrm{so}_2), \tag{16}$$

де $U'_q(\mathrm{so}_2)$ — комутативна підалгебра, породжена елементом I_{21}. Цей базис є q-аналогом добре відомого набору приєднаних сферичних гармонік, які є добутками певних поліномів Гегенбауера. Нехай ми маємо базис гармонічних поліномів, що відповідає алгебрі $U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ та $h_s(\mathbf{x}')$ — деякий однорідний гармонічний поліном степеня s по $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ з цього базису. Тоді $x_n^{m-s} h_s(\mathbf{x}') \in \mathcal{A}_m$ і проекцією на гармонічні поліноми є

$$H_m(x_n^{m-s} h_s(\mathbf{x}')) = \hat{t}_s^{n,m}(Q, x_n) h_s(\mathbf{x}'),$$

$$\hat{t}_s^{n,m}(Q, x_n) = \sum_{k=0}^{\lfloor (m-s)/2 \rfloor} \frac{(-1)^k q^{-2sk} [m-s]! [2m+n-2k-4]!!}{[m-s-2k]! [2k]!! [2m+n-4]!!} Q^k x_n^{m-s-2k}.$$

Повний базис, що відповідає ланцюжку (16), будується ітеративно:

$$\Xi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = t_{m_{n-1}}^{n,m}(Q, x_n) t_{m_{n-2}}^{n-1, m_{n-1}}(Q_{n-1}, x_{n-1}) \cdots t_{m_2}^{3, m_3}(Q_3, x_3) t^{2, m_2}(x_1, x_2),$$

$$m \ge m_{n-1} \ge m_{n-2} \ge \cdots \ge m_3 \ge |m_2|,$$

де поліноми $t^{2,m_2}(x_1, x_2)$ визначені так:

$$t^{2,0}(x_1, x_2) \equiv 1, \quad t^{2,s}(x_1, x_2) = (\mathrm{i}x_1 + x_2)(\mathrm{i}x_1 + q x_2) \cdots (\mathrm{i}x_1 + q^{s-1} x_2), \quad s > 0,$$

$$t^{2,s}(x_1, x_2) = (\mathrm{i}x_1 - x_2)(\mathrm{i}x_1 - q x_2) \cdots (\mathrm{i}x_1 - q^{-s+1} x_2), \quad s < 0\,.$$

Замість вкладення $U'_q(\mathrm{so}_n) \supset U'_q(\mathrm{so}_{n-1})$ можна розглянути вкладення $U'_q(\mathrm{so}_n) \supset U'_q(\mathrm{so}_p) \otimes U'_q(\mathrm{so}_{n-p})$, яке відповідає розділенню змінних в полісферичній системі координат. Як і в класичному випадку, подальші звуження можуть бути зроблені одним з цих двох способів. Різні схеми вкладень підалгебр природньо позначаються різними графами типу дерев, а їм відповідають різні базиси в $\mathcal{H}_m$.

У підрозділі 2.3 аналогічні результати були отримані для квантового комлексного векторного простору, породженому елементами z_i, w_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, на якому діє квантова група $GL_q(n)$ (або $U_q(n)$), а z_i (відповідно, w_i) грають роль голоморфних (відповідно, антиголоморфних) координат на квантовому просторі.

Третій розділ дисертаційної роботи має назву "Модель Рузінарса як приклад моделі пов'язаної з квантовим симетричним простором". В ньому розглядається ще один тип квантових просторів — q-деформація однорідного симетричного простору $\mathrm{GL}(n)/\mathrm{SO}(n)$. Ноумі дав визначення алгебри функцій $\mathcal{F}_q(\mathrm{GL}(n)/\ \mathrm{SO}(n))$ на цьому квантовому просторі та відповідних зональних сферічних функцій на ньому. Виявляється, що ці сферичні функції при звуженні на підалгебру Картана є спільними власними функціями комутуючого набору різнецевих операторів, які є гамільтоніаном та комутуючим набором інтегралів руху квантової тригонометричної n-частинкової моделі Рузінарса. Ці оператори з'являються як радіальні компоненти q-операторів Лапласа–Бельтрамі на квантовому просторі $\mathcal{F}_q(\mathrm{GL}(n)/\ \mathrm{SO}(n))$, що відповідають елементам Казиміра $U_q(\mathrm{gl}_n)$. В дисертації знайдено "радіальні" компоненти всіх базисних елементів Казиміра. Метод виведення є узагальненням методу, запропонованого Ноумі, та використовує техніку афінних алгебр Гекке, розвинуту Чередніком. Результати, що отримані автором по темі цього розділу і виносяться на захист опубліковані в роботах [22,24,25].

Підрозділ 3.1 є вступом до цього розділу. В ньому викладається основна ідея методу. Зокрема вказується, що він є узагальненням підходу Ольшанецького–Переломова з звичайних симетричних просторів на квантові простори: квантові гамільтоніани тригонометричної моделі Рузінарса, які ми тут розглядаємо, є релятивістським узагальненням квантових гамільтоніанів моделі Сазерленда, пов'язаних з радіальними частинами операторів Лапласа на $\mathrm{GL}(n)/\mathrm{SO}(n)$. Отже в цій моделі, параметр деформації q має сенс релятивістського параметру.

У підрозділі 3.2 знаходяться "радіальні" компоненти всіх базисних елементів Казиміра, які дають гамільтоніан та комутуючи інтеграли руху моделі Рузінарса. В цих дослідженнях хвильові функції моделі Рузінарса визначені як матричні елементи $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \langle v|q^{\sum_{k=1}^n x_k \epsilon_k}|v\rangle$, де q^{ϵ_k} належить підалгебрі Картана квантової алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$, $\langle v|$ та $|v\rangle$ — інваріантні вектори по відношенню до правої та лівої дій нестандартної q-деформації $U'_q(\mathrm{so}_n)$. У цьому підрозділі доводиться, що

$$\langle v|q^h C_r|v\rangle = q^{r(r-1)} \sum_{I\subset[1,n],\ |I|=r} \left(\prod_{i\in I, j\notin I} \frac{q^2 q^{2x_i} - q^{2x_j}}{q^{2x_i} - q^{2x_j}} \right) \langle v|q^{h+2\sum_{i\in I}\epsilon_i}|v\rangle$$

$$= \hat{H}_r \Psi_\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

де C_r — r-ий базисний елемент Казиміра $U_q(\mathrm{gl}_n)$, а $\hat{H}_r$ — r-ий квантовий гамільтоніан тригонометричної n-частинкової моделі Рузінарса:

$$\hat{H}_r = q^{r(r-1)} \sum_{I\subset[1,n],\ |I|=r} \left(\prod_{i\in I, j\notin I} \frac{q^2 q^{2x_i} - q^{2x_j}}{q^{2x_i} - q^{2x_j}} \right) e^{2\sum_{i\in I}\partial_{x_i}}.$$

З іншого боку, оскільки $|v\rangle$ належить деякому $U_q(\mathrm{gl}_n)$-модулю V_Λ зі старшою вагою $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$, ми маємо $C_r|v\rangle = E_\Lambda^{(r)}|v\rangle$, де

$$E_\Lambda^{(r)} = e_r(q^{2\Lambda_1+2n-2}, q^{2\Lambda_2+2n-4}, \ldots, q^{2\Lambda_n}).$$

Ми використали $e_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для позначення елементарних симетричних поліномів. Отже $\langle v|q^h C_r|v\rangle = E_\Lambda^{(r)}\Psi_\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Прирівнюючи два вирази для $\langle v|q^h C_r|v\rangle$, ми отримуємо рівняння Шрьодінгера для квантової тригонометричної n-частинкової моделі Рузінарса:

$$\hat{H}_r \Psi_\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E_\Lambda^{(r)} \Psi_\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Розв'язок $\Psi_\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ цього рівняння дається в термінах полінома Макдональда $P_\lambda(X_1, X_2, \ldots, X_n; q, t)$

$$\Psi_\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P_\lambda(q^{2x_1}, q^{2x_2}, \ldots, q^{2x_n}; q^4, q^2) q^{\ell(x_1+x_2+\cdots+x_n)},$$

де розбиття $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ та $\ell \in \mathbb{Z}$ визначаються

$$\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n) = (2\lambda_1 + \ell, 2\lambda_2 + \ell, \ldots, 2\lambda_n + \ell).$$

У підрозділі 3.3, знайдено явно формули для інваріантних векторів $\langle v|$ та $|v\rangle$ в термінах базисних векторів ГЦ незвідного представлення V_Λ. Це дозволило обчислити комбінаторним чином хвильові функції моделі та виразити їх через поліноми Макдональда.

Четвертий розділ дисертаційної роботи має назву “Розділення змінних в квантових інтегровних моделях”. В цьому розділі метод розділення змінних (або функціональний анзац Бете), запропонований Скляніним для розв'язання моделі періодичного квантового ланцюжка Тоди, адаптується до моделі квантового ланцюжка Тоди з граничною взаємодією та до моделі Бакстера–Бажанова–Строганова (модель з $\mathbb{Z}_N$-симетрією). Остання модель при $N = 2$ пов'язана з моделлю Ізінга [2] і тому метод розділення змінних дає можливість побудувати власні стани трансфер-матриці моделі Ізінга. Ці формули, в свою чергу, дозволили довести формулу Бугрія–Лісового для матричного елементу спінового оператора між власними станами трансфер-матриці моделі Ізінга. Остання формула відкрила можливість для дослідження довільних кореляційних функцій в моделі Ізінга. Модель Бакстера–Бажанова–Строганова (модель ББС) при довільному N має наступні застосування. Вона пов'язана з кіральною моделлю Поттса, яка описує фазові переходи між співрозмірною та неспіврозмірною фазами в задачі адсорбції газу на кристалічних гратках. ББС модель на 3 вузлах еквівалентна моделі Хофштадера: задача про рух електрона на двовимірній (квадратній чи трикутній) гратці в однорідному магнітному полі. Результати, що отримані автором по темі цього розділу і виносяться на захист опубліковані в роботах [2,5,6,7,8,26,27,29,30,31].

Модель ББС задається як квантовий ланцюжок з m вузлів, в кожному з яких розташовано спін, що може бути в N квантових станах. Простір квантових станів є добутком одновузольних квантових просторів $\mathcal{V}_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, з базисом $|\gamma\rangle_k$, $\gamma \in \mathbb{Z}_N = \{0, 1, 2, \ldots, N-1, N \equiv 0\}$. В цьому просторі діють оператори Вейля $\boldsymbol{u}_k$ та $\boldsymbol{v}_k$ (узагальнення матриць Паулі σ_k^z, σ_k^x): $\boldsymbol{u}_k|\gamma\rangle_k = \omega^\gamma|\gamma\rangle_k$, $\boldsymbol{v}_k|\gamma\rangle_k = |\gamma+1\rangle_k$, де $\omega = e^{2\pi \mathrm{i}/N}$. Маємо $\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{v}_k = \omega\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{u}_k$, $\boldsymbol{u}_k^N = \boldsymbol{v}_k^N = \mathbf{1}$. Кожному вузлу $k = 1, 2, \ldots, m$ ланцюжка співставляється L-оператор:

$$L_k(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + \lambda\varkappa_k\boldsymbol{v}_k, & \lambda\boldsymbol{u}_k^{-1}(a_k - b_k\boldsymbol{v}_k) \\ \boldsymbol{u}_k(c_k - d_k\boldsymbol{v}_k), & \lambda a_k c_k + \boldsymbol{v}_k\frac{b_k d_k}{\varkappa_k} \end{pmatrix},$$

де λ (спектральний параметр), $\varkappa_k, a_k, b_k, c_k$ і d_k - параметри моделі. Матриця монодромії ББС-моделі визначена як послідовний добуток L-операторів:

$$T_n(\lambda) \,=\, L_1(\lambda)\, L_2(\lambda)\, \cdots\, L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} A_n(\lambda) & B_n(\lambda) \\ C_n(\lambda) & D_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Вона задовільняє рівнянню Янга–Бакстера:

$$R(\lambda,\mu)\,(T_n(\lambda)\otimes\mathbb{I})(\mathbb{I}\otimes T_n(\mu)) = (\mathbb{I}\otimes T_n(\mu))(T_n(\lambda)\otimes\mathbb{I})R(\lambda,\mu)\,,$$

з твістованою тригонометричною R-матрицею

$$R(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} \lambda-\omega\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega(\lambda-\mu) & \lambda(1-\omega) & 0 \\ 0 & \mu(1-\omega) & \lambda-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-\omega\mu \end{pmatrix}.$$

Рівняння Янга–Бакстера дає, що трансфер-матриця

$$\mathbf{t}(\lambda) = \mathrm{tr}\,\mathbf{T_n}(\lambda) = \mathbf{A_n}(\lambda) + \mathbf{D_n}(\lambda) = \mathbf{H_0} + \mathbf{H_1}\lambda + \cdots + \mathbf{H_n}\lambda^{\mathbf{n}}$$

задовільняє $[\mathbf{t}_n(\lambda),\mathbf{t}_n(\mu)] = 0$ при довільних λ та μ. Отже, оператори $\mathbf{H}_0,\mathbf{H}_1,\ldots,\mathbf{H}_n$ всі комутують між собою. Аналогічно, $B_n(\lambda) = \mathbf{h}_1\lambda + \mathbf{h}_2\lambda^2 + \cdots + \mathbf{h}_n\lambda^n$ також породжує набір комутуючих операторів: $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2, \ldots$, $\mathbf{h}_n$. Кожен з цих наборів задає квантову інтегровну систему: інтегралів руху стільки ж скільки ступенів свободи.

Задача в тому, щоб побудувати спільні стани вектори для всіх $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{H}_1, \ldots$, $\mathbf{H}_n$. Метод алгебраїчного анзацу Бете не працює оскільки не існує псевдовакууму. Ми використовуємо *квантовий метод розділення змінних*, запропонований Скляніним. Власні стани будуються у два етапи:

- Допоміжна задача: будуємо власні стани $B_n(\lambda)$ за ітеративною процедурою: $B_1(\lambda) \to B_2(\lambda) \to \cdots \to B_n(\lambda)$;
- шукаємо власні стани $\mathbf{t}_n(\lambda)$ як лінійні комбінації власних станів $B_n(\lambda)$. Відповідні коефіцієнти розкладу задовільняють рівнянню Бакстера, яке дозволяє *розділення змінних*.

Рівняння на власні значення для $B_n(\lambda)$ наступне:

$$B_n(\lambda)|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle = \lambda\, r_{n,0}\,\omega^{-\rho_{n,0}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\lambda + r_{n,k}\omega^{-\rho_{n,k}}\right) |\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle\,, \tag{17}$$

де власні стани помічаються набором $\boldsymbol{\rho}_n = (\rho_{n,0}, \ldots, \rho_{n,n-1}) \in (\mathbb{Z}_N)^n$, а параметри $r_{n,k}$ визначаються параметрами моделі за певною процедурою. Рекурентна формула для власних станів $B_m(\lambda)$ наступна:

$$|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_m}\rangle = \sum_{\substack{\boldsymbol{\rho}_{m-1}, \\ \rho_m \in \mathbb{Z}_{\mathbb{N}}}} Q(\boldsymbol{\rho}_{m-1}, \rho_m, \gamma_m | \boldsymbol{\rho}_m) |\Psi_{\boldsymbol{\rho}_{m-1}}\rangle \otimes |\psi_{\rho_m}\rangle_m \,,$$

$$Q(\boldsymbol{\rho}_{m-1}, \rho_m, \gamma_m | \boldsymbol{\rho}_m) = \frac{\omega^{(\tilde{\rho}_m - \tilde{\rho}_{m-1})(\rho_m - \rho_{m,0})}}{w_{p_{m0}}(\rho_{m,0} - \rho_{m-1,0} - 1) w_{\tilde{p}_m}(\tilde{\rho}_m - \rho_m - 1)} \times$$

$$\times \frac{\prod_{l=1}^{m-2} \prod_{k=1}^{m-1} w_{p_{m-1,l}^{m,k}}(\rho_{m-1,l} - \rho_{m,k})}{\prod_{j,l(j\neq l)}^{m-2} w_{p_{m-1,j}^{m-1,l}}(\rho_{m-1,j} - \rho_{m-1,l})} \prod_{l=1}^{m-2} \frac{w_{p_{m-1,l}}(-\rho_{m-1,l})}{w_{\tilde{p}_{m-1,l}}(\rho_{m-1,l})},$$

де функція $w_p(\rho)$ є циклічним аналогом гамма-функції від дискретної змінної ρ та від параметру — певної точки на кривій Ферма $p = (x, y)$, $x^N + y^N = 1$. Визначаємо $w_p(\rho)$ рекурентно: $w_p(0) = 1$, $w_p(\rho)/w_p(\rho-1) = y/(1-\omega^\rho x)$. У формулі фігурують точки кривої Ферма $p^{m,s}_{m',s'} = (x^{m,s}_{m',s'}, y^{m,s}_{m',s'})$, $p_{m,s} = (x_{m,s}, y_{m,s})$, ... визначені як $x^{m,s}_{m',s'} = r_{m,s}/r_{m',s'}$, $x_{m,s} = a r_{m,s}/b$, ...

Тепер шукаємо власний вектор $\mathbf{t}_n(\lambda)$ з власним значенням $t_n(\lambda)$ як лінійну комбінацію власних векторів $B_n(\lambda)$:

$$|\Phi_{\rho,\mathbf{E}}\rangle = \sum_{\boldsymbol{\rho}_n} \frac{\omega^{-\rho\cdot\rho_{n,0}} Q(\boldsymbol{\rho}_n | \, \rho, \mathbf{E})}{\prod_{s,s'=1}^{n-1} w_{p_{n,s}^{n,s'}}(\rho_{n,s} - \rho_{n,s'})} |\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle \,.$$

Різницеве рівняння на $Q(\boldsymbol{\rho}_n | \, \rho, \mathbf{E})$ допускає *розділення змінних*: $Q(\boldsymbol{\rho}_n | \, \rho, \mathbf{E}) = \prod_{k=1}^{n-1} Q_k(\rho_{n,k})$ де кожен множник $Q_k(\rho_{n,k})$ задовільняє *рівнянню Бакстера*:

$$t_n(\lambda_{n,k} | \rho, \mathbf{E}) Q_k(\rho_{n,k}) = \Delta_k^+(\lambda_{n,k}) Q_k(\rho_{n,k} + 1) + \Delta_k^-(\omega\lambda_{n,k}) Q_k(\rho_{n,k} - 1),$$

$\lambda_{n,k} = -r_{n,k}\omega^{-\rho_{n,k}}$. Це система з Nn лінійних однорідних рівнянь, умова сумісності яких визначає спектр енергій квантового ланцюжка (тобто коефіцієнти полінома $t_n(\lambda)$).

У загальному випадку, рівняння Бакстера не можна розв'язати явно. У дисертації розглядаються два часткових випадка, в яких ці рівняння розв'язуються: (1) ББС-модель при $N = 2$, яка відповідає моделі Ізінга; (2) ББС-модель при довільному N, але параметри моделі вибрані такі, що

$\Delta^+ = 0$ або $\Delta^- = 0$. Цей випадок відповідає ББС-моделі з фіксованим граничними умовами.

Тут ми опишемо зв'язок ББС-моделі при $N = 2$ з моделлю Ізінга на квадратній гратці. Трансфер-матриця ББС-моделі при $N = 2$, $a = c$, $b = d$ та $\lambda = b/a$ має вигляд

$$\mathbf{t}_n(b/a) = \operatorname{tr} T_n(b/a) = \prod_{k=1}^{n}(1 + \hat{\sigma}_k^x \cdot b/a) \cdot \prod_{k=1}^{n}(1 + \hat{\sigma}_{k-1}^z \hat{\sigma}_k^z \cdot ab).$$

Порівнюючи з трансфер-матрицею моделі Ізінга

$$\mathbf{t}_{\mathrm{Is}} = \exp\sum_{k=1}^{n} K_x^* \, \hat{\sigma}_k^x \; \cdot \exp\sum_{k=1}^{n} K_x \, \hat{\sigma}_{k-1}^z \, \hat{\sigma}_k^z$$

бачимо, що ці дві матриці співпадають з точністю до множника при наступному ототожненні параметрів: $\tanh K_x = ab$, $\tanh K_x^* = \exp(-2K_y) = b/a$. Тому ці дві трансфер-матриці мають спільний набір власних станів. Оскільки власні стани трансфер-матриці ББС-моделі не залежать від спектрального параметра λ, метод розділення змінних дає явні формули для власних станів трансфер-матриці моделі Ізінга. Це дозволило довести формулу Бугрія–Лісового для матричних елементів спінового оператору моделі Ізінга між цими власними станами. Трансфер-матриця моделі Ізінга має спектр системи вільних ферміонів з дисперсійним співвідношенням

$$\cosh \gamma(\mathsf{q}) = \frac{(t_x + t_x^{-1})(t_y + t_y^{-1})}{2(t_x^{-1} - t_x)} - \frac{t_y - t_y^{-1}}{t_x - t_x^{-1}} \cos \mathsf{q}\,,$$

$t_x = \tanh K_x$, $t_y = \tanh K_y$, між енергією $\gamma(\mathsf{q})$ та імпульсом q. Всі власні стани в залежності від того чи вони є інваріантними відносно перевороту всіх спінів чи змінюють знак належать, відповідно, NS-сектору чи R-сектору. NS-сектору відповідають ферміони з антиперіодичними граничними умовами (і напівцілими імпульсами), а R-сектору відповідають ферміони з періодичними граничними умовами (і цілими імпульсами). Будемо позначати власні стани вказуючи імпульси ферміонних збуджень. Формула Бугрія–Лісового для квадратів матричних елементів наступна:

$$|{}_{\mathrm{NS}}\langle q_1, q_2, \ldots, q_K | \hat{\sigma}_k^z | p_1, p_2, \ldots, p_L \rangle_{\mathrm{R}}|^2 =$$

$$
= \xi\xi_T \left(\frac{t_x - t_x^{-1}}{t_y - t_y^{-1}}\right)^{(K-L)^2/2} \prod_{j=1}^{K} \frac{\prod_{q\neq q_j}^{\mathrm{NS}} \sinh\frac{\gamma(q_j)+\gamma(q)}{2}}{n\prod_p^{\mathrm{R}} \sinh\frac{\gamma(q_j)+\gamma(p)}{2}} \prod_{j=1}^{L} \frac{\prod_{p\neq p_j}^{\mathrm{R}} \sinh\frac{\gamma(p_j)+\gamma(p)}{2}}{n\prod_q^{\mathrm{NS}} \sinh\frac{\gamma(p_j)+\gamma(q)}{2}} \times
$$

$$
\times \prod_{\substack{1\leq i\leq K\\ 1\leq j\leq L}} \frac{\sinh^2\frac{\gamma(q_i)+\gamma(p_j)}{2}}{\sin^2\frac{q_i-p_j}{2}} \prod_{i<j}^{K} \frac{\sin^2\frac{q_i-q_j}{2}}{\sinh^2\frac{\gamma(q_i)+\gamma(q_j)}{2}} \prod_{i<j}^{L} \frac{\sin^2\frac{p_i-p_j}{2}}{\sinh^2\frac{\gamma(p_i)+\gamma(p_j)}{2}},
$$

$$
\xi = ((\sinh 2K_x \sinh 2K_y)^{-2} - 1)^{1/4},
$$

$$
\xi_T = \left(\frac{\prod_q^{\mathrm{NS}}\prod_p^{\mathrm{R}} \sinh^2\frac{\gamma(q)+\gamma(p)}{2}}{\prod_{q,q'}^{\mathrm{NS}} \sinh\frac{\gamma(q)+\gamma(q')}{2} \prod_{p,p'}^{\mathrm{R}} \sinh\frac{\gamma(p)+\gamma(p')}{2}}\right)^{1/4}.
$$

Нарешті, у <u>Висновках</u> наведено основні результати дисертаційної роботи та рекомендації щодо їх використання.

ВИСНОВКИ

1. Досліджено модель Бакстера–Бажанова–Строганова (ББС). Зокрема, побудовано власні вектори для компонент $A_n(\lambda)$ та $B_n(\lambda)$ матриці монодромії для неоднорідного ланцюжка скінченної довжини. Для періодичного ланцюжка проведено розділення змінних та отримано $T-Q$-рівняння Бакстера для кожної з розділенних змінних. Доведено, що функціональні співвідношення для трансфер-матриць ББС-моделі є необхідними і достатніми умовами для існування нетривіальних розв'язків рівнянь Бакстера. Модель ББС при довільному N має наступні застосування. Вона пов'язана з кіральною моделлю Поттса, яка описує фазові переходи між співрозмірною та неспіврозмірною фазами в задачі адсорбції газу на кристалічних гратках. ББС модель на 3 вузлах еквівалентна моделі Хофштадера: задача про рух електрона на двовимірній (квадратній чи трикутній) гратці в однорідному магнітному полі. Зокрема в цих напрямках слід очікувати майбутні застосування отриманих результатів.

2. Описано процедуру отримання формул для локальних операторів через глобальні оператори матриці монодромії. Ці формули необхідні для знаходження матричних елементів локальних опертаторів (зокрема, оператора спіну на одному вузлі ланцюжка) між власними станами трансфер-матриці.

3. Показано, що модель ББС при $N = 2$ еквівалентна узагальненій моделі Ізінга в точці вільних ферміонів. У цьому випадку знайдено розв'язки рівняння Бакстера, які дають явні формули для власних векторів трансфер-матриці моделі Ізінга. Доведена формула Бугрія–Лісового для матричних елементів спінового оператора між цими векторами.

4. Граничним переходом з формул для власних векторів періодичної моделі ББС отримано власні вектори трансфер-матриці моделі з фіксованими спінами на кінцях ланцюжка. Як частковий випадок,

отримано власні стани для гамільтоніану $\mathbb{Z}_N$-аналогу квантового ланцюжка Ізінга в трансверсальному полі з фіксованими спінами на кінцях ланцюжка.

5. Методом квантового розділення змінних знайдено інтегральне представлення для хвильових функцій квантового n-частинкового ланцюжка Тоди з граничною взаємодією. Хвильові функції у випадку ланцюжка Тоди з двома границями отримано інтегральним перетворенням з хвильових функцій для ланцюжка Тоди з однією границею. Різницеве рівняння на ядро цього інтегрального перетворення допускає розділення змінних і розпадається на систему різницевих $T-Q$-рівнянь Бакстера від однієї змінної.

6. Метод квантового розділення змінних застосовано для знаходження власних станів гамільтоніану квантового релятивістського ланцюжка Тоди з інтегровними граничними умовами та параметром деформації, що є коренем з одиниці. Ця модель в об'ємі є частковим випадком моделі ББС, а її інтегровні граничні умови описуються рівнянням відбиття.

7. Отримано у явному вигляді радіальні компоненти елементів Казиміра квантової алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$, які відповідають квантовому аналогу однорідного простору $\mathrm{GL}(n)/\mathrm{SO}(n)$. Показано, що вони співпадають з різницевими операторами Макдональда, які є гамільтоніаном та інтегралами руху квантової тригонометричної n-частинкової моделі Рузінарса.

8. Знайдено явний вираз для інваріантних векторів по відношенню до дії $U'_q(\mathrm{so}_n)$ в скінченновимірних представленнях квантової алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$ в базисі Гельфанда–Цетліна. За їх допомогою знайдено хвильові функції квантової тригонометричної n-частинкової моделі Рузінарса через поліноми Макдональда.

9. Отримано скінченновимірні представлення некласичного типу нестандартної деформації $U'_q(\mathrm{so}_n)$ алгебри Лі so_n групи обертань з представлень класичного типу в базисі Гельфанда–Цетліна методом аналітичного продовження по ваговим параметрам представлень. Представлення некласичного типу є сингулярними в границі $q \to 1$ і не

мають класичного аналогу на відміну від представлень класичного типу, які при $q \to 1$ перетворюються в представлення алгебри Лі so_n.

10. Доведено, що представленнями класичного та некласичного типу вичерпуються всі скінченновимірні незвідні представлення алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ коли q не є коренем з одиниці. Доведена теорема про повну звідність скінченновимірних представлень алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ коли q не є коренем з одиниці.

11. Описано представлення циклічного типу алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ в базисі Гельфанда–Цетліна коли q є коренем з одиниці.

12. Введено визначення тензорного добутку $T^{\otimes}$ векторного та довільного представлення T алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$. Описано розклад $T^{\otimes}$ на незвідні підпредставлення та знайдено коефіцієнти Клебша–Гордана у випадку, коли T є незвідним скінченновимірним представленням класичного або некласичного типу. Розклад $T^{\otimes}$ у випадку представлень класичного типу має такий самий вигляд як у випадку алгебри Лі so_n та відповідні коефіцієнти Клебша–Гордана є q-деформацією їх класичних аналогів.

13. Введено визначення векторного оператора алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ та для нього доведено q-аналог теореми Вігнера–Екарта. Ця теорема суттєво використовується в доведенні теореми про класифікацію скінченновимірних представлень алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$.

14. Введено поняття антисиметричних тензорних операторів алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ та на їх основі побудовано елементи Казиміра. Обрахувано власні значення цих елементів Казиміра в представленнях Гельфанда–Цетліна. З явних формул випливає, що отримані елементи Казиміра породжують центр алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$ коли q не є коренем з одиниці. Коли q є коренем з одиниці існують додаткові центральні елементи. У цьому випадку для алгебри $U_q'(so_3)$ знайдено їх алгебраїчну залежність. Ці результати важливі для побудови алгебри спостережуваних в 2+1-вимірній квантовій гравітації з нетривіальною топологією.

15. Вивчено q-гармонічні поліноми на квантовому векторному просторі, породженому q-комутуючими елементами $x_1, \ldots, x_n$. Гармонічні поліноми визначені як розв'язки рівняння $\Delta_q p = 0$, де p — поліном від $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та q-оператор Лапласа Δ_q визначено через q-похідні.

Було вперше отримано q-аналог класичних приєднаних гармонічних поліномів. Показано, що має місце розділення змінних у відповідності з різними ланцюжками вкладених підалгебр алгебри $U_q'(\mathrm{so}_n)$.

16. Вивчено q-гармонічні поліноми на квантовому комплексному векторному просторі, породженому елементами $z_i, w_i = \bar{z}_i, i = 1, 2, \ldots, n$, на якому діє квантова група $GL_q(n)$. Побудовано q-аналоги класичних зональних сферичних та приєднаних сферичних гармонік. Дано q-аналог розділення змінних для q-гармонічних поліномів.

17. Вивчено q-гармонічні поліноми на квантовому евклідовому просторі E_q^N, породженому елементами x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, на яких діє квантова група $SO_q(N)$. Побудовано q-аналог класичних зональних та приєднаних сферичних поліномів по відношенню до квантової підгрупи $SO_q(N-2)$. Показано, що приєднані сферичні поліноми представляються як добутки поліномів залежних від q-радіусів та від x_j, $x_{j'}$, $j' = N - j + 1$. Це представлення є q-аналогом класичного розділення змінних.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Іоргов М.З. q-Осцилятор та нестандартна квантова деформація $U_q'(\mathrm{so}_n)$ / М.З. Іоргов, А.У. Клімик // Доповіді НАН України. – 2000. – № 8. – С. 73–76.

2. Bugrij A.I. Alternative method of calculating the eigenvalues of the transfer matrix of the τ_2 model for $N = 2$ / A.I. Bugrij, N.Z. Iorgov, V.N. Shadura // JETP Lett. – 2005. – Vol. 82. – P. 311–315.

3. Gavrilik A.M. Higher Casimir operators of the nonstandard q-deformed algebras $U_q(so_n)$ and their eigenvalues / A.M. Gavrilik, N.Z. Iorgov // Heavy Ion Physics. – 2000. – Vol. 11, № 1-2. – P. 33–38.

4. Gavrilik A.M. On the Casimir elements of q-algebras $U_q'(\mathrm{so}_n)$ and their eigenvalues in representations / A.M. Gavrilik, N.Z. Iorgov // Proc. of III Int. Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Kiev, July 3–7, 1999. – Kiev: Inst. of Math. of NAS of Ukraine, 2000. – Vol. 30, Part 2. – P. 310–314.

5. von Gehlen G. The Baxter–Bazhanov–Stroganov model: separation of variables and the Baxter equation / G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak [та ін.] // J. Phys. A. – 2006. – Vol. 39. – P. 7257–7282.

6. von Gehlen G. Form-factors in the finite size Baxter–Bazhanov–Stroganov model I: norms and matrix елемент elements / G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak [та ін.] // J. Phys. A. – 2007. – Vol. 40. – P. 14117–14138.

7. von Gehlen G. Form-factors in the Baxter–Bazhanov–Stroganov model II: Ising model on the finite lattice / G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak [та ін.] // J. Phys. A. – 2008. – Vol. 41, № 095003. – 24 p.

8. von Gehlen G. Factorized finite-size Ising model spin matrix elements from separation of variables / G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak [та ін.] // J. Phys. A. – 2009. – Vol. 42, № 304026. – 28 p.

9. Iorgov N.Z. Complete reducibility of representations of the algebra $U_q'(\mathrm{so}_3)$ / N.Z. Iorgov // Methods of Funct. Anal. Topology. – 1999. – Vol. 5, № 2. – P. 22–28.

10. Iorgov N.Z. Nonclassical type representations of the q-deformed algebra $U_q'(\mathrm{so}_n)$ / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // Czech. J. Phys. – 2000. – Vol. 50. – P. 85–90.

11. Iorgov N.Z. Nonstandard deformation $U_q'(\mathrm{so}_n)$ for q a root of unity / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // Methods Funct. Anal. Topol. – 2000. – Vol. 6, № 3. – P. 56–71.

12. Iorgov N.Z. Representations of the nonstandard (twisted) deformation $U_q'(\mathrm{so}_n)$ for q a root of unity / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // Czech. J. Phys. – 2000. – Vol. 50. – P. 1257–1263.

13. Iorgov N.Z. The q-Laplace operator and q-harmonic polynomials on the quantum vector space / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // J. Math. Phys. – 2001. – Vol. 42. – P. 1326–1345.

14. Iorgov N.Z. On tensor products of representations of the non-standard q-deformed gebra $U'_q(\mathrm{so}_n)$ / N.Z. Iorgov // J. Phys. A. – 2001. – Vol. 34. – P. 3095–3108.

15. Iorgov N.Z. Nonclassical type representations of nonstandard quantization of enveloping algebras $U(so(n)$, $U(so(n,1))$ and $U(iso(n))$ / / N.Z. Iorgov // Proc. of NATO ARW "Noncommutative Structures in Mathematics and Physics", Kiev, September 13–20, 2000. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. – P. 357–368.

16. Iorgov N.Z. On q-Laplace operator and q-harmonic polynomials / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // Phys. Atom. Nucl. – 2001. – Vol. 64, № 11. – P. 1973–1977.

17. Iorgov N.Z. Wigner–Eckart theorem for an algebra related to quantum gravity / N.Z. Iorgov // Ukr. J. Phys. – 2002. – Vol. 47. – P. 230–239.

18. Iorgov N.Z. On the center of q-deformed algebra $U'_q(\mathrm{so}_3)$ related to quantum gravity at q a root of 1 / N.Z. Iorgov // Kiev: Inst. of Math. of NAS of Ukraine, 2002. – Vol. 43, Part 2. – P. 449–455.

19. Iorgov N.Z. q-Laplace operator related to the quantum unitary group / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // Proc. 2-nd Int. Symp. "Quantum Theory and Symmetries", Krakow, July 3–8, 2001. – Singapore: World Scientific, 2002. – P. 383–388.

20. Iorgov N.Z. On symmetries in 2+1-dimensional quantum gravity / N.Z. Iorgov, I.I. Kachurik // Ukr. J. Phys. – 2002. – Vol. 47, № 6. – P. 519–524.

21. Iorgov N.Z. A Laplace operator and harmonics on the quantum complex vector space / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // J. Math. Phys. – 2003. – Vol. 44. – P. 823–848.

22. Iorgov N. On the quantum Ruijsenaars model and quantum homogeneous space $\mathcal{F}_q(\mathrm{GL}(n)/\mathrm{SO}(n))$ / N.Z. Iorgov // Non-Euclidean Geometry in Modern Physics: Bolyai–Gauss–Lobachevsky, III Int. Conf., Tirgu-Mures, Romania, July 2–7, 2002. – Tirgu-Mures: Tirgu-Mures University, 2003. – P. 63–72.

23. Iorgov N.Z. Harmonics on the quantum Euclidean space / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // J. Phys. A: Math. Gen. – 2003. – Vol. 36. – P. 7545–7558.

24. Iorgov N. On the wave functions of Ruijsenaars model related to q-analogue of symmetric space $GL(n)/SO(n)$ / N. Iorgov // Kiev: Inst. of Math. of NAS of Ukraine, 2004. – V. 50, Part 3. – P. 1094–1100.

25. Iorgov N. On the quantum Ruijsenaars model, some quantum homogeneous spaces and Hecke algebras / N. Iorgov// Int. J. Mod. Phys. A – 2004. – V. 19 Supplement. – P. 224–239.

26. Iorgov N. Quantum Toda chain with boundary interaction / N. Iorgov, V. Shadura // Non-Euclidean Geometry in Modern Physics: Bolyai–Gauss–Lobachevsky, IV Int. Conf., Nizhny Novgorod, Russia, September 7–11, 2004. – Nizhny Novgorod: University of N.N. – P. 116–126.

27. Iorgov N. Wave functions of the Toda chain with boundary interactions / N. Iorgov, V. Shadura // Theor. Math. Phys. – 2005. – V. 142. – P. 289–305.

28. Iorgov N.Z. Classification theorem on irreducible representations of the q-deformed algebra $U'_q(\mathrm{so}_n)$ / N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk // Int. J. Math. Math. Sci. – 2005. – Vol. 2. – P. 225–262.

29. Iorgov N. Eigenvectors of open Bazhanov–Stroganov quantum chain / N. Iorgov // SIGMA. – 2006. – Vol. 2, № 019. – 10 p.

30. Iorgov N. Relativistic Toda chain with boundary interaction at root of unity / N. Iorgov, V. Roubtsov, V. Shadura [та ін.] // SIGMA. – 2007. – V. 3, № 013. – 14 p.

31. Iorgov N. Eigenvectors of Baxter–Bazhanov–Stroganov $\tau^{(2)}(t_q)$ model with fixed-spin boundary conditions / N. Iorgov, V. Shadura, Yu. Tykhyy // Theor. Math. Phys. – 2008. – Vol. 155, № 1. – P. 585–597.

Іоргов М.З. *Квантові інтегровні системи з квантово-алгебраїчними симетріями.* — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 — теоретична фізика. — Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київ, 2010.

Дисертація присвячена розробці методів застосування теорії симетрій, зокрема, теорії квантових алгебр та їх представлень, для побудови власних станів квантових інтегровних систем. Для квантового ланцюжка Бакстера–Бажанова–Строганова побудовано власні стани методом розділення змінних. Показано, що ця модель при $N = 2$ еквівалентна моделі Ізінга та доведена формула для матричних елементів спінового оператора. Знайдено інтегральне представлення для хвильових функцій квантового ланцюжка Тоди з граничною інтегровною взаємодією. Отримано радіальні компоненти елементів Казиміра квантової алгебри $U_q(\mathrm{gl}_n)$, які відповідають квантовому аналогу $\mathrm{GL}(n)/\mathrm{SO}(n)$. Показано, що вони співпадають з гамільтоніанами квантової n-частинкової моделі Рузінарса. В дисертації також класифіковано всі скінченновимірні представлення нестандартної деформації $U_q'(\mathrm{so}_n)$ алгебри Лі so_n групи обертань. Знайдено та вивчено q-гармонічні поліноми на квантових векторних просторах.

Ключові слова: квантові інтегровні системи, модель Ізінга, модель Рузінарса, теорія симетрій, квантові алгебри, теорія представлень.

Iorgov N.Z. *Quantum integrable systems with quantum algebraic symmetries.* — Manuscript.

Thesis for a doctor of science degree by speciality 01.04.02 — theoretical physics. — Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2010.

The thesis is devoted to elaboration of symmetry methods, in particular the theory of quantum algebras and their representations, for construction of the eigenstates of quantum integrable systems. For the Baxter–Bazhanov–Stroganov quantum chain, the eigenstates were derived by the separation of variables method. It is shown that the model at $N = 2$ is equivalent to the Ising model and the formula for the matrix elements of spin operator is proved. An integral representation for the wave functions of the quantum Toda chain with integrable boundary interaction is found. The radial components of the

Casimir elements of the quantum algebra $U_q(\mathrm{gl}_n)$ corresponding the quantum analogue of $\mathrm{GL}(n)/\mathrm{SO}(n)$ are derived. It is shown that they coincide with the Hamiltonians of quantum n-particle Ruijsenaars model. Also in the thesis, all the finite-dimensional representations of the non-standard deformation $U'_q(\mathrm{so}_n)$ of the Lie algebra so_n of the rotation group were classified. The q-harmonic polynomials on the quantum vector spaces were found and studied.

Key words: quantum integrable systems, Ising model, Ruijsenaars model, theory of symmetry, quantum algebras, representation theory.

Иоргов Н.З. *Квантовые интегрируемые системы с квантово-алгебраическими симметриями.* — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 — теоретическая физика. — Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, 2010.

Диссертационная работа посвящена разработке методов применения теории симметрий, в частности, теории квантовых алгебр и их представлений, для построения собственных состояний квантовых интегрируемых систем. Нахождение собственных состояний гамильтонианов квантовой механики и квантовой теории поля, вычисление матричных элементов локальных операторов (форм-факторов) и на их основе получение форм-факторных разложений корреляционных функций являются очень важными задачами современной теоретической физики.

В диссертации, для нестандартной деформации $U'_q(\mathrm{so}_n)$ алгебры Ли so_n группы вращений классифицированы все конечномерные представления, когда q — не корень из единицы. Описаны представления циклического типа алгебры $U'_q(\mathrm{so}_n)$ в базисе Гельфанда–Цетлина, когда q — корень из единицы. Введено определение тензорного произведения $T^{\otimes}$ векторного и произвольного представления T алгебры $U'_q(\mathrm{so}_n)$. Описано разложение $T^{\otimes}$ на неприводимые подпредставления и найдены соответствующие коэффициенты Клебша–Гордана. Введено определение векторного оператора алгебры $U'_q(\mathrm{so}_n)$ и для него доказан q-аналог теоремы Вигнера–Еккарта. Построены элементы Казимира алгебры $U'_q(\mathrm{so}_n)$, посчитаны собственные значения соответствующих операторов Казимира в представлениях Гельфанда–Цетлина. Когда q — корень из единицы, тогда существу-

ют дополнительные центральные элементы. В этом случае, для алгебры $U'_q(so_3)$, найдена формула для их алгебраической зависимости.

Построены и изучены зональные и присоединенные q-гармонические полиномы на квантовых действительном и комплексном векторных пространствах. Показано, что имеет место разделение переменных в соответствии с разными цепочками вложенных подалгебр алгебры симметрии квантового пространства.

Получены в явном виде радиальные компоненты элементов Казимира квантовой алгебры $U_q(\mathrm{gl}_n)$, которые соответствуют квантовому аналогу однородного пространства $\mathrm{GL}(n)/\mathrm{SO}(n)$. Показано, что они совпадают с гамильтонианом и интегралами движения квантовой тригонометрической n-частичной модели Рузинарса. Найдено в явном виде выражения для инвариантных векторов по отношению к действию $U'_q(\mathrm{so}_n)$ в конечномерных представлениях $U_q(\mathrm{gl}_n)$ в базисе Гельфанда–Цетлина. С их помощью найдены волновые функции модели Рузинарса через полиномы Макдональда.

Построены собственные вектора для компонент $A_n(\lambda)$ и $B_n(\lambda)$ матрицы монодромии для неоднородной квантовой цепочки Бакстера–Бажанова–Строганова (ББС) конечной длины. Для периодической цепочки проведено разделение переменных и получено $T-Q$-уравение Бакстера для каждой из разделенных переменных.

Показано, что модель ББС при $N = 2$ эквивалентна обобщенной модели Изинга. В этом случае найдены решения уравнения Бакстера, которые дают явные формулы для собственных векторов трансфер-матрицы модели Изинга. Доказана формула Бугрия–Лисового для матричных элементов оператора спина между этими векторами.

Предельным переходом из формул для собственных векторов периодической модели ББС получены собственные вектора трансфер-матрицы модели с зафиксированными спинами на концах цепочки.

Методом квантового разделения переменных найдено интегральное представлення для волновых функций квантовой n-частичной цепочки Тоды с граничным интегрируемым взаимодействием и собственные состояния квантовой релятивистской цепочки Тоды при корнях из единицы.

Ключевые слова: квантовые интегрируемые системы, модель Изинга, модель Рузинарса, теория симметрий, квантовые алгебры, теория представлений.

Іоргов Микола Зіновійович

Квантові інтегровні системи з квантово-алгебраїчними симетріями.
(Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня доктора
фізико-математичних наук.)

Зам.- 14 Формат $60 \times 84/16$	Обл.-вид.арк.- 1.86
Підписано до друку 15 квітня 2010 р.	Тираж 100 прим.

Поліграфічна дільниця ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України,
03680, м. Київ, вул. Метрологічна, 14-б