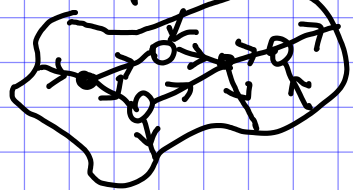
[q-різницеві рівняння та димерні моделі на нескінченій гратці]

1. Модель шляхів що не перетинаються на диску та димерна модель.



2. Тотально позитивні Грасманіани
3. Кластерні алгебри та їх мутації
4. q-різницеві рівняння з мутацій та q-Painlevé III

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = F(x) \qquad x : [0,T] \to \mathbb{R}$$

$$x(q^2t) + x(qt) = F(x(t)) \qquad q \in \mathbb{R}_{>0}$$

5. Комбінаторика димерних моделей на нескінчених періодичних гратках
6. Розв'язки рівняння q-Пенлеве в термінах статистичних сум димерів.

Планарні мережі

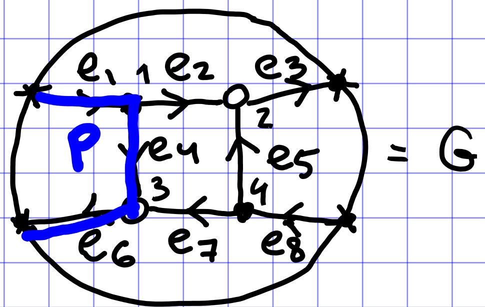
Озн Планарна мережа:

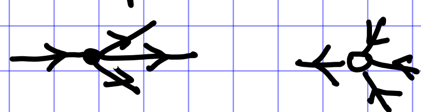
- Граф (зводольний) вкладений без самоперетинів в диск + "ідеальна" орієнтація

$V = V_{int} \sqcup V_{\partial}$

Пр

$V_{\partial} = I \sqcup \bar{I}$





- Ваги ребер: $w : E \to \mathbb{R}_{>0}$ $\qquad E = \langle \text{ребра} \rangle$

$$w_{e_1+e_2} = w_{e_1} \cdot w_{e_2}$$

Пр $P = e_1 + e_4 + e_6$

Мережа : $N=(G,w)$ Network

• Калібрувальні перетворення: $w \xmapsto{g} w'$
Gauge transformation

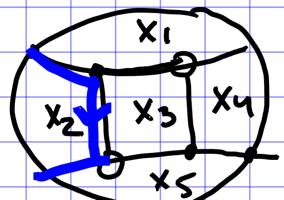
$$g: V \to \mathbb{R}_{>0} \qquad g(V_\partial)=1$$

$$e\in E : \ i(e), \ f(e) : \quad w'(e) = w(e)\, g(f(e))\, g^{-1}(i(e))$$

$$w'(P) = w(e_1)\cancel{g_1}\, w(e_4)\,\cancel{g_1^{-1}}\, g_3\, w(e_6)\,\cancel{g_3^{-1}} = w(P)$$

• Граневі змінні: координати на фактор-просторі $\{w\}/\{g\}$
Face variables

P



$x_i, \ i\in F$
$= w_{\partial f_i}$

$$x_3 = w_{e_4 - e_7 + e_5 - e_2} = \frac{w_4 w_5}{w_2 w_7}$$

$$w_P = x_2^{-1} = x_1x_3x_4x_5 \qquad x_1x_2x_3x_4x_5 = 1$$

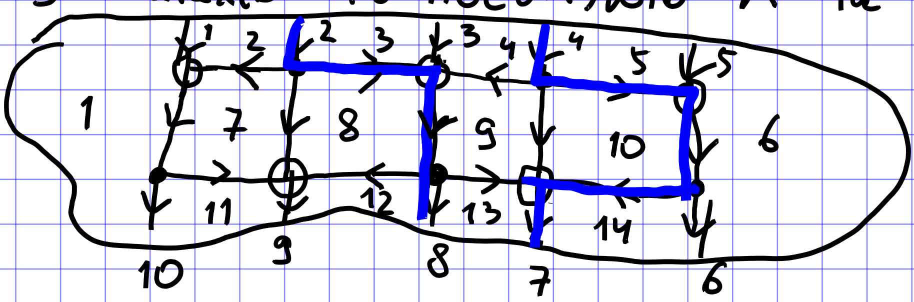
$$= w_{\sum_i \partial f_i = 0} = 1$$

Шляхи і „потоки" на мережах

• Коли ми кажемо про шлях – ми маємо на увазі шлях без самоперетинів.

• „Потік" $\pi \in \mathcal{F}_A^B$ $\quad A\subset I \quad B\subset \bar{I}$
це набір з шляхів які поєднують A та B

$\pi \in \mathcal{F}_{\{2,4\}}^{\{7,8\}}$



Озн Функція граничних вимірювань M_{ij} $\quad i\in I, \ j\in \bar{I}$

$$M_{ij} = \sum_{P: i\to j} w_P \quad \text{(boundary measurements function)}$$

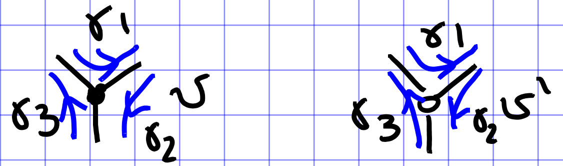
Пр) $M_{47} = x_5x_6x_{14} + x_5x_6x_{10}x_{14} + x_5x_6x_{10}x_9x_{14} = x_5x_6x_{14}(1+x_{10}(1+x_9))$

Inverse boundary measurements problem

Як по M_{ij} відновити x_i ?

Лемма GLV (Gessel–Lindström–Viennot)

$$\Delta_A^B(M) = \sum_{\pi \in \mathcal{F}_A^B} w_\pi \qquad A \subset I,\ B \subset \bar{I}$$

Ремарка 

$$\{w_{\gamma_1}, w_{\gamma_2}\}_v = \frac{1}{2} w_{\gamma_1} \cdot w_{\gamma_2} \quad \ldots \qquad w_{\gamma_1} w_{\gamma_2} = t^{\frac{1}{4}} w_{\gamma_2} w_{\gamma_1}$$

$$\{w_{\gamma_1}; w_{\gamma_2}\}_{v'} = -\frac{1}{2} w_{\gamma_1} w_{\gamma_2} \ldots \rightsquigarrow \quad w_{\gamma_1} w_{\gamma_2} = t^{-\frac{1}{4}} w_{\gamma_2} w_{\gamma_1}$$

$$\{w_\gamma, w_{\gamma'}\} = \sum_v \{w_\gamma, w_{\gamma'}\}_v$$

Доведення

$A = \{1, \ldots, n\}$

$B = \{1, \ldots, n\}$

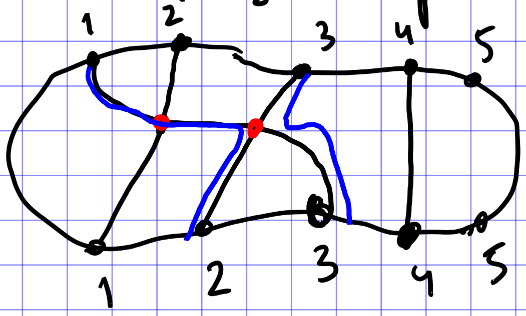
$$\Delta_A^B(M) = \sum_{\sigma \in S_n} M_1^{\sigma(1)} \ldots M_n^{\sigma(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{P_i} w_{P_1: 1 \to \sigma(1) + \ldots + P_n: n \to \sigma(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{P_i - \text{не перет.}} w_{P_1 + \ldots + P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) + \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \sum_{P_i - \text{перет.}} w_{P_1 + \ldots + P_n} \operatorname{sgn}(\sigma)}_{= 0}$$

$$\sum_{\substack{P_1 : 1 \to 1 \\ \vdots \\ P_n : n \to n \\ P_i = \text{не пер.}}} w_{P_1 + \ldots + P_n} = \sum_{\pi \in \mathcal{F}_A^B} w_\pi$$

Інволюція перестановки хвостів:



$P_i : i \rightsquigarrow \sigma(i)$ $\qquad P_j \qquad \sigma(i)$

$$P_i : u_1 \rightsquigarrow u_2 \rightsquigarrow u_3 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \underset{\shortparallel}{u_\alpha} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \overset{\sigma(i)}{\overset{\shortparallel}{u_{\ell_i}}}$$

$$P_j : v_1 \rightsquigarrow v_2 \rightsquigarrow v_3 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow v_\beta \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \underset{\sigma(j)}{\underset{\shortparallel}{v_{\ell_j}}}$$

$$P_i' : u_1 \rightsquigarrow u_2 \rightsquigarrow u_3 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow u_\alpha \rightsquigarrow v_{\beta+1} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow v_{\ell_j}$$

$$P_j' : v_1 \rightsquigarrow v_2 \rightsquigarrow v_3 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \overset{\shortparallel}{v_\beta} \rightsquigarrow u_{\alpha+1} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow u_{\ell_i}$$

- $w(P_i') \cdot w(P_j') = w(P_i) \cdot w(P_j)$
- $\mathrm{sgn}(\sigma) = -\mathrm{sgn}(\sigma')$
- це інволюція без нерухомих точок